

Комбінаторика

Курінний Г. Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.М.

Травень-2015

Зміст

1	Три аксіоми комбінаторики	5
1.1	Правило рівності	5
1.1.1	Відповідності та взаємно однозначні відповідності	5
1.1.2	Правило рівності	7
1.1.3	Модельні задачі, урнові схеми	9
1.2	Правило суми	9
1.3	Правило добутку	10
2	Три найважливіші комінаторні числа	13
2.1	Кількість розміщень та перестановок	13
2.2	Кількість сполук, біном Ньютона, біномні коефіцієнти	15
2.3	Кількість усіх підмножин	19
3	Три методи	21
3.1	Формула включення виключення	21
3.2	Метод породжуючих функцій — твірних, генератрис	22
3.3	Метод рекурентних співвідношень. Числа Фібоначі	27
3.3.1	Лінійні рекурентні співвідношення	27
3.3.2	Числа Фібоначі	32
	ЛІТЕРАТУРА	33

Розділ 1

Три аксіоми комбінаторики

1.1 Правило рівності

1.1.1 Відповідності та взаємно однозначні відповідності

Відповідностями між елементами двох множин називають підмножини прямого добутку цих множин. Таким чином, якщо A і B дві множини і $C \subseteq A \times B$, то C є відповідністю між елементами A та B .

Відповідність C між елементами множин A та B називають взаємно однозначною (або одно-однозначною), коли виконуються дві вимоги:

для кожного елемента $a \in A$ існує і до того ж єдиний елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in C$;

для кожного елемента $b \in B$ існує і до того ж єдиний елемент $a \in A$ такий, що $(a, b) \in C$;

Таке формальне визначення зручне у формальній теоретичній роботі. На практиці користуються тими чи іншими зручними замінниками. Для студентів-математиків знання формального визначення обов'язкове.

Нехай

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

дві множини. Утворивши пари $(a, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 3)$, ми одержуємо одно-однозначну відповідність між A та B .

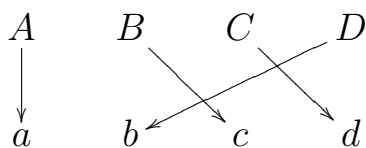
Якщо є декілька школярів і декілька олівців, причому кожен школяр взяв олівець (один), зайвих олівців не лишилось, то між школярами і олівцями встановлено одно-однозначну відповідність.

Коли всі учні одного класу мають різні імена, то між учнями і їх іменами встановлено одно-однозначну відповідність. Але в більшості класів відповідність

між школярами і їх іменами не одно-однозначна — деякі школярі мають однакові імена.

Автомобілі, що рухаються по місту, мають номери. Причому на різних автомобілях стоять різні номери. Таким чином, між автомобілями, що рухаються по місту, та їх номерами є одно-однозначна відповідність.

Взаємно однозначну відповідність між множинами можна встановлювати і графічно, зобразивши елементи множин на площині і з'єднавши елементи, що утворюють одну пару, лінією. Роз'яснимо сказане прикладом, встановивши одно-однозначну відповідність між множинами $\{A, B, C, D\}$ та $\{a, b, c, d\}$:



Оскільки часто неважливо, яка множина перша, а яка — друга, то стрілочки у графічному зображенні можна замінити на лінії, або замінити на стрілочки протилежного напрямку.

Взаємно однозначну відповідність можна встановлювати і між елементами нескінченних множин. Так утворивши пари

$$(n, 2n), \quad n \in \mathbb{N}$$

ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між усіма натуральними числами і парними натуральними числами. Утворивши пари

$$(n, n+2) \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{та} \quad (0, 2), \quad (-1, 1),$$

ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел та множиною цілих чисел, що більше -2 .

Один раз вибрані, природні відповідності інколи називають канонічними. При канонічній відповідності між натуральними та дійсними числами натуральному числу 3 відповідає дійсне число 3; при канонічній відповідності між функціями та їх графіками функції відповідає саме її графік. Канонічні відповідності дозволяють в роботі кожен елемент замінити для зручності тим елементом, який йому відповідає, не наголошуючи на цьому особливо. Так людині відповідає ім'я, прізвище та по батькові. Тому, називаючи ім'я, прізвище та по батькові, ми можемо мати на увазі людину. Вільна заміна елементів їх відповідниками вимагає наявності здорового глузду, без якого такі заміни є помилковими. Ми кажемо, що $\sin x$ це функція, хоч це тільки ім'я функції; ми показуємо на графік функції і кажемо, що це функція, не дуже переймаючись гризотою щодо коректності

сказаного. Така мовна розкутість доречна, коли є здоровий глузд і при цьому ми одержуємо певні зручності (стислість, наприклад). При відсутності здорового глузду (наприклад у обчислювальних системах) потрібно дуже уважно слідкувати за визначеннями.

1.1.2 Правило рівності

Викладення матеріалу курсу дискретної математики ґрунтується на уявленні викладача про те, що студенти уже володіють найпершими поняттями теорії множин (порожня множина, претин та об'єднання множин, тощо). Поняття, які є первісними, не визначаються в теорії множин. Аксиоми теорії множин вважаємо з однієї сторони досить абстрактними, а з іншої сторони, інтуїтивно зрозумілими для використання. Це дозволяє, не заглиблюючись у подробиці, сказати, що ми користуємося аксіоматикою ZF (Цермело - Френкеля). Курс дискретної математики має обмаль часу і читається в другому семестрі. Тому можна вважати, що знайомство з множинами уже відбулося, і ми можемо цим користуватися досить широко.

Знайомство із взаємно однозначною відповідністю також відбулося до початку дискретної математики, проте ми нагадали про неї з огляду на надзвичайно велике значення цього поняття для комбінаторики.

Натуральні числа практично всі математичні курси використовують, посилаючись на шкільний курс математики. Для ММФ ХНУ цього не досить — і вже студенти ознайомлені із аксіоматикою натурального ряду (системою Пеано). Поняття “кількість”, “однакова кількість”, “додавання кількостей”, “множення кількостей” наразі не формалізовані, хоч знову ж таки використовувалися і використовуються на шкільному інтуїтивному рівні. Теперішнє завдання — формалізувати (відкинути все несуттєве в існуючому уявленні) ці поняття, пам'ятаючи, що у нас все ж не курс основ математики, а дискретна математика. Отже у формалізації не будемо “досягати дна”.

Поняття “однакова кількість” — найважливіше у комбінаториці, постійно вживане і постійно (явно чи неявно) використовуване. От з нього і почнемо, скажемо, коли дві множини мають одну і ту ж кількість елементів.

Аксиома рівності: Множини мають одну і ту ж кількість елементів тоді і тільки тоді, коли між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Наведену аксіому можна вважати визначенням поняття “множини мають

одну і ту ж кількість елементів”.

Зауважимо, що 1) ми не давали точного визначення поняття “кількість”; 2) свідомо уникаємо уточнення первісних понять та явних визначень і наголошуємо на найпростіших твердженнях, які доводити не потрібно; 3) популярна література, уникаючи визначень, та аксіом, називає наведену аксіому (чи визначення?) “правилом” — так будемо чинити і ми — замість “аксіома рівності” будемо казати “правило рівності”.

У множині

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ми можемо розглядати триелементні підмножини (такі, як $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{4, 5, 7\}$ і т.п.) та чотириелементні підмножини (такі як $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 4, 6, 7\}$ і т.п.) . І тих, і других множин досить багато. Ми можемо довести, що кількість множин першого типу і кількість множин другого типу одна і та ж, не знаходячи цих кількостей явно.

Справді, кожній 3-елементній множині $B \subset A$ поставимо у відповідність (з’єднаємо у пару) множину $A \setminus B$. Оскільки множина A має три елементи, то в множині $A \setminus B$ знаходяться решта — 4 елементи. Так парами будуть

$$(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}),$$

$$(\{2, 3, 7\}, \{1, 4, 5, 6\}),$$

$$(\{5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4\})$$

і т.п.. Тоді кожній 3-елементній множині $C \subset A$ буде відповідати (буде знаходитися з нею в парі) одна і тільки одна 4-елементна множина $A \setminus C$. І для кожної 4-елементної множини C є одна і тільки одна 3-елементна множина (а саме $A \setminus C$), що знаходиться з нею в парі. Таким чином між 3-елементними і 4-елементними підмножинами в A існує взаємно однозначна відповідність. В результаті використання правила рівності одержуємо, що триелементних підмножин в A стільки ж, скільки і 4-елементних. Зауважимо, що ніяких обчислень при цьому ми не вели.

Притуливши пальці лівої руки до пальців правої руки, ми між цими пальцями встановлюємо одно-однозначну відповідність. Тим самим ми без підраховувань доводимо, що на лівій руці стільки ж пальців, скільки і на правій.

Замість слова “кількість” стосовно нескінченних множин вживають слово “потужність”. Якщо множини нескінченні і між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, то кажуть, що ці множини мають однакову потужність або рівнопотужні .

Отже множина натуральних чисел рівнопотужна множині натуральних чисел з приєднаними двома елементами 0 та -1 і рівнопотужна множині парних натуральних чисел.

1.1.3 Модельні задачі, урнові схеми

Задачі, відповіді до яких часто використовують, називають модельними. Такі задачі часто стосуються дуже конкретних речей — шляхів у місті, розташування куль в ящиках (урнах) та подібного. Відповіді до модельних задач називають комбінаторними числами. Те, що певна кількість збігається із комбінаторним числом, доводиться за допомогою правила рівності, тобто встановлюється взаємно однозначна відповідність між предметами, які потрібно перерахувати в задачі, та з предметами, які перераховані в модельній задачі. Після цього стверджують, що відповіддю до нашої задачі є комбінаторна число, тобто відповідь до уже розв'язаної задачі. Зазвичай, розв'язування комбінаторної задачі розбивається на кроки, кожен із яких зводиться до розв'язування модельної задачі.

Модельні задачі грають в комбінаториці ту ж роль що і теореми в інших розділах математики. Такий стан речей незвичний для інших розділів математики.

Коли всі модельні задачі стосуються розташування куль в урнах, то говорять про урнову схему.

Вибір того чи іншого набору предметів, які будуть підраховуватися (кулі, події, гральні карти, відображення,...) суттєво залежить від смаку викладача. В нашому курсі переважна кількість модельних задач стосується множин та їх елементів. Часто модельні задачі (особливо при обчисленні ймовірностей) стосуються подій, які можуть відбуватися.

1.2 Правило суми

Ми знаємо, що коли на стрісі однієї хати сидять 5 горобців, а на стрісі другої хати сидять 2 горобці, то всього на вказаних двох стріхах сидить

$$5 + 2 = 7$$

горобців. А коли в двох рядах ростуть дерева по 5 дерев у кожному, то всього дерев в тих рядах росте

$$5 \times 2 = 10.$$

Коли при обчисленнях потрібно додавати кількості, а коли перемножати? До

сих пір ми користувалися лише здоровим глуздом. А тепер, володіючи теоретико-множинною термінологією, ми можемо точно сформулювати відповідні правила.

Правило суми. Нехай множина A є об'єднання двох множин B і C , що мають порожній перетин, тобто не мають спільних елементів. Тоді кількість елементів в A дорівнює кількості елементів у B плюс кількість елементів в C .

Позначимо кількість елементів множини M через $|M|$. Тоді в теоретико-множинній термінології правило суми запишеться так

якщо A, B, C — три множини і $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$ то

$$|A| = |B| + |C|.$$

Якщо є кілька круглих і кілька квадратних предметів, тоді для обчислення кількості усіх предметів потрібно до кількості круглих додати кількість квадратних. Якщо ж є кілька круглих і кілька червоних предметів, то можуть бути предмети, які і круглі і червоні, в цьому випадку прямо застосовувати правило суми неможливо — потрібно спочатку всі предмети розділити на три підмножини — круглі але не червоні, червоні і не круглі, і круглі і червоні, а потім уже додавати.

На практиці часто елементи множин є подіями. Для такого випадку можна переформулювати правило суми наступним чином:

Коли для однієї події є n можливостей, а для другої події є m можливостей, то одна із цих подій (або перша або друга, але не обидві одночасно) може відбутися одним із $n + m$ способів.

1.3 Правило добутку

Використовуючи позначення $|M|$ для кількості елементів множини M правило добутку формулюється так:

Правило добутку. Нехай A, B, C - три множини, причому множина A складається із усіх пар (x, y) , де $x \in B$, і $y \in C$. Тоді

$$|A| = |B| \times |C|.$$

Менш формально правило добутку формулюють так. Якщо певний вибір A можна здійснити m різними способами, для кожного з цих способів другий вибір

В можна здійснити n способами, тоді вибір A і B (у вказаному порядку) можна здійснити $m \times n$ способами.

Для прикладу візьмемо школяра, що може добратися до школи трьома способами: пішки, велосипедом чи автобусом. В школі цей учень може одержати одну з чотирьох оцінок: "відмінно" "добре" "задовільно" або "незадовільно". Тоді за правилом добутку школяр добратися до школи і одержати одну оцінку може $3 \times 4 = 12$ способами.

В більш загальному випадку правило добутку можна сформулювати так. Нехай потрібно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію (після виконання першої) – n_2 способами, третю (після виконання перших двох) – n_3 способами, і так до k -ої дії, яку після виконання попередніх можна здійснити n_k способами, то всі дії послідовно у вказаному порядку можна виконати

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

способами.

Для прикладу розглянемо задачу: Скільки дільників має натуральне число $5^8 \cdot 11^9 \cdot 13^{10}$?

Використаємо необхідну і достатню умову того, що одне натуральне число ділиться на інше, переказуємо задачу мовою множин.

Згадаємо, що кожне натуральне число $n > 1$ однозначно (з точністю до порядку множників) може бути розкладене на прості множники, може бути записане у вигляді

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots,$$

де $p_1, p_2, \dots$ — різні прості числа. Натуральне число n ділиться на натуральне число m , коли в розкладенні числа m на прості множники кожне просте число зустрічається стільки ж разів або менше ніж в розкладенні числа n . Отже всі дільники числа $5^8 \cdot 11^9 \cdot 13^{10}$ мають вигляд

$$5^a \cdot 11^b \cdot 13^c, \quad a \leq 8, \quad b \leq 9, \quad c \leq 10, \quad (1.1)$$

а всі натуральні числа, що мають вигляд (1.1) є дільники заданого числа. Використовуємо правило рівності, яке дозволяє сказати, що дільників стільки ж, скільки і впорядкованих трійок чисел (a, b, c) , $a \leq 8, b \leq 9, c \leq 10$.

Після формалізації маємо задачу: "Знайти кількість впорядкованих трійок чисел (a, b, c) з обмеженнями $a \leq 8, b \leq 9, c \leq 10$. Ця задача розв'язується за допомогою правила добутку — $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Ще одне формулювання правила добутку: якщо предмети розташовані в прямокутну таблицю, що має n рядків та m стовпчиків, то всіх предметів $m \cdot n$.

В залежності від тих чи інших світоглядних засад, тієї чи іншої аксіоматичної теорії, згадане правило добутку можна вважати визначенням добутку кількостей, чи комбінаторною аксіомою.

В аксіоматичних теоріях (що побудовані на системах аксіом і правилах доведення) є аксіоми та теореми, правил в них немає. В подальшому згадане правило ми будемо називати як аксіомою так і правилом — тому що так прийнято і так досить зручно. Із трьох аксіом — рівності суми та добутку, правило добутку є останнім за важливістю, оскільки добуток натуральних чисел визначається з використанням суми.

Розділ 2

Три найважливіші комінаторні числа

2.1 Кількість розміщень та перестановок

Визначення розміщення та кількості розміщень із n елементів по r . В десятковому записі натурального числа суттєво, яка цифра стоїть першою, а яка наступною, і числа 12 та 21 — різні. Таким чином запис 2-значного числа — це сукупність 2 цифр з урахуванням порядку розташування цих цифр.

Не можна довільно переставляти букви в слові — слово при цьому може змінитися. Слово — це впорядкована сукупність букв.

І в першому прикладі (десятковий запис числа), і в другому (слово) ми маємо запис одного за другим символів із певної множини. Порядок виписування елементів цієї множини суттєвий. В наведених прикладах один і той же елемент в записі може зустрітися двічі. Далі будемо розглядати більш просту ситуацію, — один елемент в записі двічі зустрічатися не може.

Нехай задана множина M . Послідовний запис кількох елементів із M , в якому кожен елемент із M може зустрітися лише один раз, і порядок запису елементів вважається суттєвим, називають *впорядкованою підмножиною в M* .

Термін "впорядкована підмножина" звичайно в спілкуванні можна замінити іншими синонімічними словосполученнями, які підкаже мовний смак.

Прикладом впорядкованої підмножини є сукупність із трьох спортсменів, що виступали на змаганнях і посіли 1, 2, і 3 місця.

Кількість r -елементних впорядкованих підмножин в n -елементній множині позначається через A_n^r і називається *кількістю розміщень із n по r* . Коли $n = r$, тоді кількість впорядкованих n -елементних підмножин у

множині із n елементів називають кількістю перестановок із n елементів.

Кількість перестановок із n елементів позначається через P_n .

Коли мова йде про підрахування кількостей, слово "розміщення" розуміємо як синонім словосполучення "впорядкована підмножина". Також слово "перестановка" розуміється як розташування всіх елементів множини у певному порядку. Щоб підкрестити, що розглядається розміщення чи перестановка, перелік елементів розміщення подають у круглих дужках. Так ми можемо виписати розміщення

$$(a, b, c), \quad (a, e, f), \quad (b, c, a), \quad (e, a, f).$$

Всі чотири виписані розміщення різні, частина з них (як перше та друге) відрізняються складом елементів, а частина (як перше та третє) — порядком розташування їх елементів. На множині 1, 2, 3 є шість перестановок:

$$(1, 2, 3), \quad (1, 3, 2), \quad (2, 1, 3), \quad (2, 3, 1), \quad (3, 1, 2), \quad (3, 2, 1).$$

Окремі випадки, коли кількості розміщень легко підраховуються.

Обговорювати порядок елементів в порожній множині ми не будемо, а оскільки порожня множина одна, то природно вважати, що

$$A_n^0 = 1 \text{ при будь-якому } n \geq 0.$$

Оскільки при $r > n$ в множині із n елементів немає підмножин, що складаються із r елементів, то також природно, що

$$A_n^r = 0 \text{ при } r > n.$$

Враховуючи, що одноелементних підмножин у множині стільки ж, скільки і елементів, вважаємо, що

$$A_n^1 = n \text{ при будь-якому } n = 0, 1, 2, \dots$$

Формули для A_n^r та P_n . Скористаємося правилом добутку для обчислення A_n^r . У впорядкованій парі перший елемент із n можна взяти n способами, а другий, після вибору першого, $(n - 1)$ -м способом. Тому за правилом добутку

$$A_n^2 = n(n - 1) \quad (n \geq 2).$$

Щоб одержати 3-елементну впорядковану підмножину, ми повинні взяти перші два елементи (це можна зробити A_n^2 способами), а потім довільно із решти $n - 2$ елементів взяти третій (це можна зробити $n - 2$ способами). Тому за правилом добутку

$$A_n^3 = A_n^2(n - 2) = n(n - 1)(n - 2).$$

Продовжуючи ці міркування, одержимо формули

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3), \quad A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

і при довільних $n = 1, 2, 3, \dots$ $1 \leq r \leq n$ можемо написати

$$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1).$$

Зокрема, при $r = n$, попередня формула для A_n^r дозволяє написати:

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

тобто

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Добуток перших n натуральних чисел позначається через $n!$ (читається як ен-факторіал, знак $!$ в такому контексті називають факторіалом):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Використовуючи це позначення, можна написати

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ при } n > r \geq 1, n \geq 2, \quad A_n^n = P_n = n! \text{ при } n \geq 1.$$

Щоб формула

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

була правильною при всіх $n \geq 0, 0 \leq r \leq n$, зручно вважати $0! = 1$.

2.2 Кількість сполук, біном Ньютона, біномні коефіцієнти

Визначення комбінацій і кількості комбінацій із n елементів по r .

Якщо множина має $n \geq 0$ елементів, то кількість її r -елементних підмножин, $r \geq 0$, позначається через C_n^r . Ця кількість називається також *кількістю комбінацій із n елементів по r елементів* (символ C_n^r читається як "це із ен по ер"). В контексті обчислень слова "підмножина" і "комбінація" є синонімами.

Можна сказати, що $\{1, 2, 3, 4\}$ і $\{4, 1, 2, 3\}$ — це одна і та ж комбінація із чотирьох елементів, а $\{1, 2, 3, 4\}$ і $\{1, 2, 3, 5\}$ — це різні комбінації із чотирьох елементів.

Окремі випадки, коли кількості комбінацій легко підраховуються. Оскільки кожна множина має порожню підмножину, і порожня підмножина єдина, то

$$C_n^0 = 1 \text{ для будь-якого } n \geq 0.$$

Кількість елементів у множині і кількість одноелементних підмножин співпадають — між елементами та одноелементними підмножинами можна встановити одно-однозначну відповідність утворивши пари $(a, \{a\})$ для кожного елемента a цієї множини. Тому

$$C_n^1 = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Якщо $r > n$, то r -елементних підмножин в n -елементній множині немає, тобто кількість таких підмножин дорівнює нулю. Звідси випливає, що

$$C_n^r = 0 \text{ для будь-яких } n \geq 0 \text{ і } r > n.$$

В будь-якій n -елементній множині A ($n \geq 0$) є єдина підмножина з n елементами — тривіальна підмножина A . Тому завжди

$$C_n^n = 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Формула для C_n^r , комінаторне доведення з використанням кількості розміщень. Кожна впорядкована r -елементна підмножина в n -елементній множині визначається сукупністю своїх елементів (таких r -елементних підмножин є C_n^r) і порядком розташування елементів однієї підмножини (r елементів можна впорядкувати $A_r^r = P_n = r!$ способами). Завдяки цьому всі розміщення із n елементів по r можна розташувати в прямокутній таблиці: в різних рядках стоять розміщення, що відрізняються складом елементів, а в одному рядку стоять розміщення, що відрізняються лише порядком розташування елементів. Наприклад, всі розміщення із 4 елементів $\{1, 2, 3, 4\}$ по три елементи можна розташувати так:

$$\begin{array}{cccccc} (1, 2, 3) & (1, 3, 2) & (2, 1, 3) & (2, 3, 1) & (3, 1, 2) & (3, 2, 1) \\ (1, 2, 4) & (1, 4, 2) & (2, 1, 4) & (2, 4, 1) & (4, 1, 2) & (4, 2, 1) \\ (1, 4, 3) & (1, 3, 4) & (4, 1, 3) & (4, 3, 1) & (3, 1, 4) & (3, 4, 1) \\ (4, 2, 3) & (4, 3, 2) & (2, 4, 3) & (2, 3, 4) & (3, 4, 2) & (3, 2, 4) \end{array}$$

Така таблиця має C_n^r рядків і P_r стовпчиків — елементів в одному рядку. Тому за правилом добутку

$$C_n^r \cdot P_r = A_n^r$$

і

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Приклад 1. Із 10 різних книг потрібно вибрати а) дві книги; б) три книги. Скількома способами це можна зробити?

Формалізація задачі полягає в заміні "книг" на "елементи множини". Таким чином після формалізації маємо задачу: "Скількома способами в 10-елементній множині можна вибрати а) двоелементну множину; б) триелементну множину?"

За визначенням комбінацій (сполук, підмножин, неупорядкованих підмножин — це все синонімічні назви) можна зразу написати відповідь:

$$a) \quad C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45;$$

$$b) \quad C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Приклад 2. Із 25 осіб потрібно вибрати комісію, що складається із 4 осіб. Скількома способами це можна зробити?

Формалізація полягає у заміні "осіб" на "елементи множини" а "комісії" на "чотириелементну підмножину". Таким чином після формалізації задача приймає вигляд: "Скільки 3-елементних підмножин у множині із 25 елементів?" За визначенням комбінацій ми можемо зразу написати відповідь:

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12075.$$

Біномні коефіцієнти Якщо двочлен (або ще кажуть — біном) $a + b$ піднести до n -го степеня ($n \geq 1$)

$$(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}^{n \text{ множників}},$$

розкрити дужки, то ми одержимо суму доданків, що мають вигляд $a^r b^{n-r}$ з певними коефіцієнтами. Кожен такий доданок ми одержимо, коли із r дужок виберемо b , а із решти $n - r$ дужок виберемо a і перемножимо їх. Таким чином $a^{n-r} b^r$ зустрінеться рівно стільки разів, скільки є r -елементних підмножин у множині із n дужок, тобто C_n^r , і

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n.$$

Остання формула відома під назвою "*біном Ньютона*". Оскільки C_n^r — це коефіцієнти в біномі Ньютона, то

числа C_n^r ще називають *біномними коефіцієнтами*.

В західній літературі для позначення коефіцієнта, який стоїть біля $a^r b^{n-r}$ після розкриття дужок в біномі $(a+b)^n$ замість C_n^r використовують позначення $\binom{n}{r}$.

Прикладами бінома Ньютона при $n = 1, 2, 3$ будуть

$$(a+b) = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 \quad \text{при } n = 1,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 \quad \text{при } n = 2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 \quad \text{при } n = 3.$$

Рекурентне співвідношення для біномних коефіцієнтів та трикутник Паскаля Між біномними коефіцієнтами є співвідношення

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r, \quad n, r \geq 1, \quad (2.1)$$

яке перевіряється піднесенням $a+b$ до n -го степеня двома способами: один раз підносимо так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^r a^{n-r}b^r + \dots + C_n^n b^n,$$

а другий так:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \\ &= (C_{n-1}^0 a^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{r-1} a^{n-r}b^{r-1} + C_{n-1}^r a^{n-r-1}b^r + \dots + C_{n-1}^{n-1} b^{n-1}) \times \\ &\quad \times (a+b) = \\ &= C_{n-1}^0 a^n + \dots + C_{n-1}^r a^{n-r}b^r + \dots + C_{n-1}^{n-1} ab^{n-1} + \\ &\quad + C_{n-1}^0 a^{n-1}b + \dots + C_{n-1}^{r-1} a^{n-r}b^r + \dots + C_{n-1}^{n-1} b^n. \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти при $a^{n-r}b^r$ в одержаних двох формулах для $(a+b)^n$, переконуємося в правильності (2.1).

Співвідношення (2.1) дає ефективний спосіб підрахування біномних коефіцієнтів. Записавши біномні коефіцієнти в таблицю (ця таблиця називається *трикутником Паскаля*),

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C_0^0 & & \\ & & & & & C_1^1 & \\ & & & C_1^0 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ & & \dots & & & & & \\ C_n^0 & & C_n^1 & & \dots & & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \end{array}$$

бачимо, що крайні елементи в цих таблицях дорівнюють одиниці, а кожен внутрішній — це сума двох верхніх сусідів. n -ий рядок цієї таблиці складають біномні коефіцієнти C_n^r .

Випишемо 5 рядків трикутника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Рекурентне співвідношення (2.1) можна довести комбінаторно. Для цього потрібно всі r -елементні підмножини розбити на два типи — до одного типу віднести ті підмножини, які містять в собі виділений елемент, а до другого віднести ті, які цей елемент не містять, а потім скористатися правилом суми.

Якщо для рекурентного співвідношення для біномних коефіцієнтів дано комбінаторне доведення, тоді це співвідношення дає можливість довести формулу для підрахування біномних коефіцієнтів за допомогою математичної індукції.

2.3 Кількість усіх підмножин

Кількість підмножин n -елементної множини.

Всі підмножини заданої n -елементної множини можна перераховувати так: Спочатку відмічаємо порожню множину, потім перераховуємо одноелементні підмножини, потім перераховуємо двоелементні підмножини і т.д. Наприклад, всі підмножини множини $\{a, b, c\}$ можна розташувати так:

$$\begin{aligned}
 &\emptyset, \\
 &a, b, c, \\
 &\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\
 &\{a, b, c\}.
 \end{aligned}$$

Тому за правилом суми кількість підмножин n -елементної множини дорівнює

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Підносячи $1+1$ до n -го степеня за біномом Ньютона, одержимо

$$2^n = (1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$

Тому

кожна n -елементна множина має 2^n різних підмножин.

Таким чином у множині із 5 елементів є $2^5 = 32$ підмножини.

Приклад 3. Скількома способами можна розкласти 10 монет різної вартості по двох кишенях.

Формалізуючи задачу зауважимо

- 1) дві кишені дадуть дві підмножини 10-елементної множини;
- 2) кишені одна від другої відрізняються;
- 3) те, що лежить в одній кишені, повністю визначає те, що лежить в другій.

Використовуючи правило рівності можемо сказати, що потрібних розкладень стільки, скільки підмножин у 10-елементної множини. Після формалізації задача приймає вигляд: скільки підмножин у 10-елементної множини.

Після формалізації задача стала окремим випадком уже розв'язаної, і ми можемо написати відповідь: $2^{10} = 1024$.

Розділ 3

Три методи

3.1 Формула включення виключення

Коли дві множини B, C можуть мати непорожній перетин, і $A = B \cup C$, то

$$A = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \cup (B \cap C).$$

Множини $(B \setminus C), (C \setminus B), (B \cap C)$ не перетинаються, мають порожній перетин. Тому можна застосувати правило суми і написати

$$|A| = |B \setminus C| + |C \setminus B| + |B \cap C| = |B| + |C| - |B \cap C|.$$

Подібним чином для трьох множин A, B, C , що можуть мати непорожній перетин одна з другою, можна написати

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Переходячи до $n, n > 2$ множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ за допомогою індуктивних міркувань одержуємо формулу

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots \\ &+ (-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}| + \dots \\ &+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Остання формула називається *формулою включення - виключення*. Метод розв'язування комбінаторних задач з використанням формули включення - виключення називають *методом включення - виключення*.

Типовою задачею на використання формули включення - виключення є наступна.

Приклад 4. При опитуванні студентів з'ясувалось, що 60% із них регулярно читає журнал "Дзвін" 50% читає журнал "Сучасність" і 50% читає журнал "Прапор". Із цих студентів 30% читає і "Дзвін" і "Сучасність"; 20% читає і "Прапор" і "Сучасність"; 40% читає і "Прапор" і "Дзвін". А 10% студентів читає всі три журнали. Питається:

1. Який відсоток студентів читає хоч один журнал?
2. Який відсоток студентів не читає жодного із відмічених журналів?

При розв'язуванні задачі можна розглядати групу із 100 студентів і тоді відсотки можна замінити на кількості студентів у відповідних групах. Це дозволяє застосувати формулу включення - виключення: кількість студентів, що читають хоч один із згаданих, дорівнює

$$60 + 50 + 50 - 30 - 20 - 40 + 10 = 80.$$

Кількість студентів, що не читають ні одного із згаданих журналів дорівнює (використовується правило суми)

$$100 - 80 = 20.$$

Тепер знову кількості можна замінити на відсотки. Одержуємо

Відповідь: 80% студентів читає хоч один журнал і 20% не читає жодного із згаданих трьох журналів.

3.2 Метод породжуючих функцій — твірних, генератрис

При використанні методу породжуючих функцій відповіді до комбінаторної задачі, що стосується множини із n елементів, позначаються символами і розташовуються у послідовність (на n -ому місці стоїть відповідь до задачі, що стосується множини із n елементів) — нехай такою послідовністю буде

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots \quad (3.1)$$

Послідовності (3.1) ставиться у відповідність степеневий ряд

$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_nx^n \dots = \sum_{i=0}^{\infty} q_k x^k. \quad (3.2)$$

Після цього можливо, що одержаний степеневий ряд має певні властивості, які дозволяють знайти формулу для коефіцієнта q_n біля x^n .

В цьому і полягає метод породжуючих функцій.

Ряди та генератрис Нагадаємо визначення формального степеневого ряду над іншим кільцем та правила додавання і множення таких рядів.

Формальним степеневим рядом від змінної x над кільцем K називають формальні вирази

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k. \quad (3.3)$$

Далі будемо розглядати лише випадки, коли кільце K це поле комплексних чисел, або поле дійсних чисел (мовне оточення підкаже, з якого саме поля беруться коефіцієнти). Поліном (або многочлен) — це формальний степеневий ряд, у якого лише при скінченній кількості степенів змінної стоять ненульові коефіцієнти.

Для рядів визначено операції додавання та множення за наступними формулами

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)x^k; \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j \right) x^k. \end{aligned}$$

Деякі ряди мають обернені. Так маємо рівність

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 - x) = 1.$$

Тому ряд $\sum_{i=0}^{\infty} x^n$ є оберненим до многочлена $1 - x$.

Із визначення множення рядів бачимо, що ряд $f = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ є оберненим до многочлена $g = \sum_{k=0}^m b_kx^k$ тоді і тільки тоді, коли виконуються

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1, \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0, \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0, \\ &\dots \\ a_0b_m + a_1b_{m-1} + a_2b_{m-2} + \dots + a_mb_0 &= 0, \end{aligned}$$

і

$$a_kb_m + a_{k+1}b_{m-1} + a_{k+2}b_{m-2} + \dots + a_{k+m}b_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Якщо многочлен задано, а обернений до цього многочлена ряд (тобто коефіцієнти ряду) потрібно шукати, то наведені рівняння показують, коли це можна зробити.

Це можна зробити в тому і тільки тому випадку, коли можна ділити на b_0 . У полі дійсних чисел можна ділити на будь-яке ненульове число. Отже многочлен, у якого ненульовий вільний член, завжди має обернений ряд. Якщо ж цей вільний член b_0 дорівнює 1, то рівняння для знаходження коефіцієнтів ряду стають зовсім простими і, крім того, із рівняння (3.4) бачимо, що коефіцієнти a_k задовольняють співвідношенню:

$$a_k b_m + a_{k+1} b_{m-1} + a_{k+2} b_{m-2} + \dots + a_{k+m} = 0,$$

$$a_{k+m} = -(a_k b_m + a_{k+1} b_{m-1} + a_{k+2} b_{m-2} + \dots + a_{k+m-1} b_1) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

Такі співвідношення називають лінійними рекурентними співвідношеннями.

Якщо вимагати виконання лише рівностей (3.5), то видно, що добутком fg буде многочлен h . Із сказаного вище бачимо, що

добуток $fg = h$ ряда $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ і многочлена $g = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, $b_0 = 1$ буде многочленом $h = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти $a_0, a_1, \dots$ ряда f задовольняють лінійному рекурентному співвідношенню (3.5) при $k = 0, 1, 2, \dots$

Разом з операціями додавання та множення степеневі ряди утворюють кільце, від степеневих рядів можна знаходити похідні (формально! без знаходження границі!), з ними можна здійснювати інші математичні операції - наприклад, добувати корінь квадратний з ряду. При деяких значеннях змінної степеневий ряд можна підрахувати — нескінченною сумою буде границя, до якої прямують скінченні відрізки ряду (многочлени). Степеневий ряд завжди можна підрахувати при нульовому значенні змінної. В цьому розумінні степеневий ряд задає функцію. Проте в комбінаторному мовному оточенні, щоб уникнути проблем із збіжністю рядів, саме степеневі ряди називають генератрисами, породжуючими функціями. І якщо $q(x)$ — породжуюча функція,

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n \dots = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^i. \quad (3.6)$$

то

$$q_n = \left. \frac{q(x)^{(n)}}{n!} \right|_{x=0}.$$

Обґрунтування коректності відповідних дій з рядами відносимо до інших розділів математики, — ми цими властивостями будемо лише користуватися.

Використання методу породжуючих функцій покажемо на прикладі задачі про кількість розставляння дужок при обчисленні добутку n множників.

Згідно з методом вводимо позначення: q_n — кількість способів розставляння дужок у добутку n множників. Для точного розуміння задачі обчислюємо q_2, q_3, q_4 .

Коли множників 2, x_1, x_2 , то дужки розставляються єдиним чином (x_1x_2) , тому $q_2 = 1$. Для трьох множників маємо два способи розставляння дужок $((x_1x_2)x_3)$ і $(x_1(x_2x_3))$. Якщо $n > 3$, то передостання пара дужок розділяє множники на дві групи:

$$(x_1(x_2x_3 \dots x_n)), \quad ((x_1x_2)(x_3 \dots x_n), \dots ((x_1x_2 \dots x_{n-1})x_n)).$$

Тому ми можемо написати рекурентні формули для q_n

$$q_n = q_{n-1} + q_2q_{n-2} + q_3q_{n-3} + \dots + q_{n-2}q_2 + q_{n-1}.$$

Щоб рекурентна формула стала симетричнішою, будемо вважати $q_1 = 1$. Тепер рекурентна формула має вигляд

$$q_n = \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_{n-i},$$

яка дуже нагадує формулу для коефіцієнта при x^n в ряді q^2 . В зв'язку з цим знайдемо q^2 :

$$q(x)^2 = (q_0 + q_1x + \dots)(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n q_i q_{n-i} \right) x^n.$$

Щоб коефіцієнт біля x^n в формулі для q^2 збігався з рекурентною формулою для q_n будемо вважати $q_0 = 0$. Тепер ми можемо стверджувати правильність наступного запису

$$q^2 = (x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \dots)(x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \dots) = x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \dots = q - x.$$

Одержана властивість ряду q — він є розв'язком рівняння

$$q^2 - q + x = 0,$$

дозволяє підрахувати потрібний нам коефіцієнт q_n , чим ми далі і займемося.

За формулою для коренів квадратного рівняння знаходимо два розв'язки

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

Оскільки $q(0) = 0$, то

$$q(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

Нам залишилося знайти коефіцієнти ряду

$$\sqrt{1 - 4x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

і написати відповідь

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_0 = 0, \quad q_n = -\frac{1}{2}a_n \text{ для } n = 1, 2, 3, \dots$$

Позначимо $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ і за відомою формулою напишемо

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{df}{dx^n}(0)$$

і нам потрібно знайти n -у похідну від функції $f(x)$. Для цього знаходимо похідні малих порядків, вгадуємо відповідь для n -ї похідної, правильність якої можна обґрунтувати методом повної математичної індукції. Отже

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}(-4); f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)(1 - 4x)^{\frac{1}{2} - n}(-4)^n.$$

Звідси маємо

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{1(-1)(-3)(-5) \dots (3 - 2n)}{2^n} (-4)^n = -2^n(2n - 3)!! = -\frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

і

$$q_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

Для чисел Каталана рекурентне співвідношення

$$q_n = q_0q_{n-1} + q_2q_{n-2} + q_3q_{n-3} + \dots + q_{n-2}q_2 + q_{n-1}q_0.$$

Початкове значення $q_0 = 1$.

Генератриса задовольняє рівняння

$$xq^2 - q + 1 = 0,$$

Генератрисою буде

$$q(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

Отже, генератриса для чисел Каталана та ж сама, що і в попередній задачі, тільки поділена на невідому.

Числа Каталана позначаються $C(n)$. Тому ми можемо написати

$$C(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

3.3 Метод рекурентних співвідношень. Числа Фібоначі

3.3.1 Лінійні рекурентні співвідношення

Формулювання питання В даному розділі розглядаємо послідовності

$$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots; u_i \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

у яких n -й член можна обчислити, коли відомі попередні члени, за допомогою формули

$$u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + \dots + \alpha_k u_{n-k}, \quad \alpha_k \neq 0; u_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Взагалі, коли в послідовності кожен елемент може бути обчислений за певною формулою, при відомих попередніх (звичайно, починаючи з певного місця), тоді таку послідовність називають рекурентною, а формулу, яка дозволяє провести це обчислення — рекурентним співвідношенням. Співвідношення (3.8) називають лінійним рекурентним співвідношенням — воно часто зустрічається як в комбінаториці, так і в інших розділах математики (алгебра, математичний аналіз, диференціальні рівняння, тощо). Ми ще зустрінемося з рекурентними послідовностями в курсі дискретної математики, коли нам будуть потрібні породжувачі псевдовипадкових послідовностей нулів та одиниць.

Для довільного члена послідовності (3.7), яка задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню (3.8), можна знайти формулу, яка дозволяє обчислити цей член.

Для прикладу, послідовність 0, 2, 4, 6, ... задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню $u_n = u_{n-1} + 2, n = 1, 2, \dots$. Ми можемо вказати формулу для загального члена цієї послідовності: $u_n = 2n, n = 0, 1, 2, \dots$

Візьмемо більш складний приклад. Нехай послідовність $u_0, u_1, u_2, \dots$ починається числами $u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 5$, а наступні члени послідовності обчислюються за рекурентним співвідношенням

$$u_i = -3u_{i-1} - u_{i-2} + 5u_{i-3}.$$

Таким чином, маємо $u_3 = -21, u_4 = 63, u_5 = -143, u_6 = 261, u_7 = -325, u_8 = -1, \dots, u_{14} = -71547, \dots$ Формулою для загального члена цієї послідовності буде

$$u_n = \frac{2}{5} + \left(-\frac{7}{10} + \frac{11}{10}i\right)(-2 + i)^n + \left(-\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i\right)(-2 - i)^n.$$

Звернемо увагу, що елементами послідовності є дійсні числа, а формула для загального члена використовує комплексні числа — просто ця формула для кожного номера дає дійсне значення. Теоретичні міркування будемо супроводжувати роботою з конкретними прикладом — послідовністю (3.7).

Наше завдання — одержати формулу для загального члена рекурентної послідовності, яка задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню. Досягти мети можна використовуючи кільце формальних степеневих рядів та поняття породжуючої функції для послідовності (генератриса).

Знаходження формули для загального члена послідовності, яка задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню. Маємо послідовність (3.7) яка задовольняє співвідношенню (3.8).

Для послідовності (3.7) створюємо породжуючу функцію (генератрису)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k.$$

При вивченні послідовностей (3.7), які задовольняють співвідношенню (3.8), виникають два многочлени g_1, g_2 :

$$g_1(x) = -\alpha_k x^k - \alpha_{k-1} x^{k-1} - \dots - \alpha_1 x + 1; \quad g_2(x) = x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \dots - \alpha_k.$$

Многочлен

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \dots - \alpha_k$$

називають характеристичним многочленом для рекурентного співвідношення (3.8) або для послідовності (3.7). Щоб не плутати цей многочлен із іншими, які виникають про розв'язуванні задачі, характеристичний многочлен часто позначають грецькою буквою χ .

В нашому прикладі

$$f(x) = -1 + x + 5x^2 - 21x^3 + 63x^4 - 143x^5 + 261x^6 - 325x^7 - x^8 + \dots$$

і

$$g_1(x) = -5x^3 + 3x^2 - x - 1, \quad g_2 = x^3 + x^2 + 3x - 5.$$

При цьому

$$f \cdot g_1 = f_1 = -1 - 2x + 7x^2.$$

Всі комплексні корені многочлена g_2 позначаємо через $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Вважаємо, що серед них різними є тільки $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$, $s \leq k$, і кратність кореня $q_i \in r_i$. Отже

$$g_2(x) = (x - q_1)(x - q_2) \dots (x - q_k) = (x - q_1)^{r_1}(x - q_2)^{r_2} \dots (x - q_s)^{r_s}.$$

Видно, що коренями многочлена g_1 будуть числа q_i^{-1} , $i = 1, 2, \dots, k$. Тому

$$g_1(x) = (1 - q_1x)(1 - q_2x) \dots (1 - q_kx) = (1 - q_1x)^{r_1}(1 - q_2x)^{r_2} \dots (1 - q_sx)^{r_s}.$$

В нашому прикладі корені многочлена $g_1(x)$ позначимо через x_1, x_2, x_3 , а корені многочлена $g_2(x)$ позначимо через y_1, y_2, y_3 . Обчислюємо потрібні корені:

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, x_3 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i;$$

$$y_1 = 1/x_1 = 1, \quad y_2 = 1/x_2 = -2 - i, \quad y_3 = 1/x_3 = -2 + i.$$

За правилами множення

$$f \cdot g_1 = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots, \quad v_n = u_n + \alpha_1u_{n-1} - \dots - \alpha_ku_{n-k}. \quad (3.9)$$

Теорема. Послідовність (3.7) задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню (3.8) тоді і тільки тоді, коли при деяких $D_j^i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 0, \dots, r_i - 1$ можна записати

$$u_n = \sum_{i=1}^s (D_0^i + D_1^i n + \dots + D_{r_i-1}^i n^{i-1}) q_i^n. \quad (3.10)$$

В нашому прикладі теорема каже, що

$$u_n = A_1 + B_1(-2 + i)^n + C_1(-2 - i)^n,$$

при деяких комплексних числах A_1, B_1, C_1 .

Доведення будемо супроводжувати прикладом. При доведенні дріб $f = \frac{f_1}{g_1}$ розкладемо у суму найпростіших. А потім кожен найпростіший дріб розкладемо в ряд. Сума рядів дасть нам потрібну відповідь.

Оскільки ми працюємо над полем комплексних чисел, то незвідними многочленами є тільки многочлени першого степеня, і в знаменниках найпростіших

дробів буде стояти многочлен вигляду $(ax + b)^\alpha$ а в чисельнику буде стояти стала. Для розкладання дробу у суму найпростіших потрібно знаменник розкласти у добуток лінійних множників.

Знаючи корені многочлена $g_1(x)$ можна розкласти многочлен $g_1(x)$ у добуток незвідних:

$$g_1(x) = -5(x - x_1)(x - x_2)x - x_3 = -5(x - 1)(x - (-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i))(x - (-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)).$$

Знаючи розкладення знаменника у добуток незвідних, ми можемо записати ту суму найпростіших дробів, яку потрібно знайти;

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{-1 - 2x + 7x^2}{-5x^3 + x^2 + 3x + 1} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}.$$

Домноживши останню рівність на $(x - x_1)$ і потім підставивши x_1 замість x одержуємо число A . Подібним чином знаходимо числа B, C .

$$A = -2/5, B = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}i, C = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}i.$$

Дріб $\frac{1}{x-x_i}$ менш зручно розкладати в ряд, ніж дріб $\frac{1}{1-y_ix}$, тому робимо перетворення

$$\frac{1}{x - x_i} = -\frac{1/x_i}{1 - (1/x_i)x}, \quad i = 1, 2, 3.$$

і вказаний дріб $f = \frac{f_1}{g_1}$ переписуємо у вигляді суми найпростіших дробів іншим чином

$$f = \frac{f_1}{g_1} = \frac{(1/x_1)A}{1 - (1/x_1)x} + \frac{(1/x_2)B}{1 - (1/x_2)x} + \frac{(1/x_3)C}{1 - (1/x_3)x} = \frac{y_1A}{1 - y_1x} + \frac{y_2B}{1 - y_2x} + \frac{y_3C}{1 - y_3x},$$

де

$$y_1 = 1/x_1 = 1, \quad y_2 = 1/x_2 = -2 - i, \quad y_3 = 1/x_3 = -2 + i$$

є коренями многочлена $g_2(x)$. Підрахуємо

$$A_1 = -y_1A = -\frac{2}{5}; \quad B_1 = -y_2B = -\frac{7}{10} - \frac{111}{10}i, \quad C_1 = -y_3C = -\frac{7}{10} + \frac{111}{10}.$$

Проведені обчислення дозволяють записати розкладення в ряди потрібних нам найпростіших дробів

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{1 - y_1 x} &= A_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_1^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right) x^k, \\ \frac{B_1}{1 - y_2 x} &= B_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_2^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{10} + \frac{11}{10} i \right) (-2 - i)^k x^k, \\ \frac{C_1}{1 - y_3 x} &= C_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_3^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{10} - \frac{11}{10} i \right) (-2 + i)^k x^k,\end{aligned}$$

Якщо додати розкладення в ряд потрібних трьох найпростіших дробів і знайти коефіцієнт u_k біля x^k , то одержимо

$$u_n = \frac{2}{5} + \left(-\frac{7}{10} + \frac{11}{10} i \right) (-2 + i)^n + \left(-\frac{7}{10} - \frac{11}{10} i \right) (-2 - i)^n.$$

Спочаку доводимо у загальному випадку, що для тієї рекурентної послідовності 3.7, для якої існує лінійне рекурентне співвідношення 3.8 можна підібрати числа D_i^j , які вимагаються теоремою для запису загального члена нашої послідовності.

Для досягнення нашої мети в загальному випадку розкладаємо дріб $\frac{f_1}{g_1}$ у сумі найпростіших. Нагадаємо, що дріб $\frac{p(x)}{q(x)}$ є найпростішим, коли знаменник є степенем незвідного многочлена, а степінь чисельника менше степеня цього незвідного многочлена, тобто многочлен $q(x)$ можна записати у вигляді $q(x) = r(x)^\alpha$, $\deg p(x) < \deg r(x)$. Ще раз нагадаємо, що ми працюємо в полі комплексних чисел, де незвідними многочленами є лише лінійні. Тому

$$\frac{f_1}{g_1} = \sum \sum \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j}.$$

Далі лишилося скористатися генератрисами

$$\frac{1}{1 - qx} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n; \quad \frac{1}{(1 - qx)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{r-1+n}^{r-1} q^n x^n;$$

і рівностями

$$C_{r-1+n}^{r-1} = \frac{1}{(r-1)!} (C(r-1, 0) + C(r-1, 1)n + \dots + C(r-1, r-1)n^{r-1})$$

де $C()$ — певні натуральні числа.

Оскільки розкладення на найпростіші не дає точних значень для чисельників, то теорема не вказує формулу для знаходження сталих.

Лишилося недоведеним, що будь-який вираз, що подається в формулюванні теореми, є формулою загального члена для якоїсь рекурентної послідовності. Доведення цього факту простіше проводити із міркувань вимірності.

Всі лінійні рекурентні послідовності утворюють простір вимірності k , тому що ми можемо вказати базис цього простору

$$e_1 : 1, 0, 0, \dots, 0, u_{1,k}, u_{1,k+1}, \dots$$

$$e_2 : 0, 1, 0, \dots, 0, u_{2,k}, u_{2,k+1}, \dots$$

$$e_3 : 0, 0, 1, \dots, 0, u_{3,k}, u_{3,k+1}, \dots$$

...

$$e_k : 0, 0, 0, \dots, 1, u_{k,k}, u_{k,k+1}, \dots$$

Формула (3.10) показує, що ті послідовності, які задовольняють лінійному рекурентному співвідношенню є лінійними комбінаціями k послідовностей із загальним членом

$$q_1^n, nq_1^n, n^2q_1^n, \dots, n^{r_1-1}q_1^n;$$

$$q_2^n, nq_2^n, n^2q_2^n, \dots, n^{r_2-1}q_2^n;$$

...

$$q_s^n, nq_s^n, n^2q_s^n, \dots, n^{r_s-1}q_s^n;$$

Вказані послідовності лінійно незалежні, задовольняють лінійному рекурентному співвідношенню (3.8). Тому вони утворюють базис простору всіх послідовностей, що задовольняють (3.8), і тому кожна послідовність, яка задовольняє (3.8), є лінійною комбінацією виписаних. Доведення теореми закінчене повністю.

3.3.2 Числа Фібоначі

Найпростішою рекурентною послідовністю із лінійним рекурентним співвідношенням є геометрична послідовність:

$$a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_2q = a_1q^2, \dots, a_{n+1} = a_nq = a_1q^n, \dots$$

Геометричні послідовності дуже часто зустрічаються в дослідженнях. Також простою є рекурентна послідовність $F_0, F_1, F_2, \dots$, яка визначається умовами:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, \dots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Елементи цієї послідовності називають числами Фібоначі. Важливість чисел Фібоначі пояснюється їх появою в багатьох різних задачах, на яких зараз зупинятися не будемо.

Поставимо задачу — знайти формулу для F_n .

Характеристичний многочлен для чисел Фібоначі має вигляд $x^2 - x - 1$, і коренями характеристичного смногочлена будуть числа

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Доведена теорема про вигляд загального члена рекурентної послідовності забезпечує існування двох чисел c_1, c_2 таких, що

$$F_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n = c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Сталі c_1 та c_2 можна знайти за відомими $F_0 = 0$ та $F_1 = 1$: Розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

є числа

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тепер ми можемо записати формулу для чисел Фібоначі.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Поділ відрізка так, що відношення одержаних частин дорівнює $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ називають золотим перерізом. Тому це число називають відношенням золотого перерізу. Це число відіграє помітну роль в архітектурі.

Прочитати про числа Фібоначі можна в книзі Р. Грехемаб Д. Кнута та О. Паташника “Конкретна математика“ М.: Мир, 1998 сторінки 322 - 333.

Бібліографія

- [1] Андрійчук В.І., Комарницький М.Я. - Вступ до дискретної математики. Навчальний посібник для ВНЗ (рек. МОН України) - 2004 254 ст. К.: ЦУЛ
- [2] Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. - Комп'ютерна дискретна математика - Харків: "Компанія СМІТ 2004.- 480с.
- [3] Гаврилов, Сапоженко. Сборник задач и упражнений по дискретной математике

На сьогодні є досить багато навчальних посібників з дискретної математики. Їх вибір можна знайти за допомогою інтернету - задавши в пошуковій системі ключові слова “дискретна математика“, чи “комбінаторика“. Названі вище посібники найчастіше використовувані на ММФ ХНУ.