

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Т О М 38

1986

НАУКОВА АУМКА

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Научный журнал
основан в 1949 г.

Том 38, № 6
1986

Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

СОДЕРЖАНИЕ

Бойчук В. С. Об одном классе целых функций	683
Ву Куок Фонг. Асимптотическая почтипериодичность и компактифицирующие представления подгрупп	688
Гаврылив О. С. Преобразования абстрактного винеровского интеграла в бесконечном произведении АВП при линейных преобразованиях пространства	692
Грибняк Л. Н., Тихоненко Н. Я. К приближенному решению одной трехэлементной краевой задачи со сдвигом и ее приложений	696
Диблик Й. О существовании решений одной вещественной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, входящих в особую точку	701
Зайцев Д. И. О свойствах групп, наследуемых их нормальными подгруппами	707
Зинченко Н. М. Об асимптотике сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона	713
Кириченко В. В., Костюкевич П. П. Биридные кольца	718
Корневский Д. Г. Матричные алгебраические критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью 1 решений системы линейных стационарных интегро-дифференциальных стохастических уравнений Ито	723
Крекнин В. А., Спиваковский А. В. Об одном классе групп, имеющем C -сепарирующие подгруппы	729
Митропольский Ю. А., Хома Г. П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II	733
Мошонько А. З. О мероморфных решениях дифференциальных уравнений первого порядка	739
Норкин С. К. Асимптотика и структура интегрального O -множества системы из класса Липшица для скалярного произведения	744
Рудченко П. А. Аналитическое решение в конечном виде трех видов задач Коши для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка	750
Степанец А. И. Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье	755
Строчик Н. Н. Асимптотические оценки некоторых интегральных средних для мероморфных функций	763

Краткие сообщения

Алиев Р. Г. О разрешимости уравнения с отклоняющимся аргументом и неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве	768
Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Гр. Функциональное уравнение Н. Н. Боголюбова и ассоциированная с ним симплектическая структура Ли — Пуассона — Власова	774
Взовский Д. А. О некоторых применениях дифференциально-функциональных неравенств	778
Дудников П. И., Самборский С. Н. Граничные задачи для систем с g_0 в главной части	782
Жернаков Н. В. Прямая и обратная задачи для периодической яковиевой матрицы	785
Калюжный В. Н. p -Адические меры с заданными лорановскими моментами	788
Козловский В. А. Применение краевой задачи Карлемана к исследованию распространения волн в среде с плавным переходом	792
Лопушанская Г. П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций	795

В. Н. К а л ю ж н ы й

***p*-Адические меры
с заданными лорановскими моментами**

Пусть $\mathbb{Z}_p$ — компакт целых p -адических чисел, $K \supset \mathbb{Q}_p$ — поле, полное относительно абсолютного значения, продолжающего p -адическое. Предположим, что диск $t + p^s \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p$ не содержит нуля, т. е. $|p|^s < |t|$. В дан-

ной работе решается вопрос о существовании такой K -значной меры на $t + p^s \mathbb{Z}_p$, что

$$\int_{t+p^s \mathbb{Z}_p} z^{-n} d\mu(z) = \theta_n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $(\theta_n)_{n \geq 1}$ — заданная последовательность элементов поля K . Отметим, что «лорановские» моменты (1) меры Мазура вычислены в [1]. Необходимые сведения о p -адическом интегрировании можно найти в [2, 3]. Ниже мы будем пользоваться стандартным отождествлением мер на $\mathbb{Z}_p$ с формальными степенными рядами, имеющими ограниченные коэффициенты [3]. Нам понадобится следующее решение степенной проблемы моментов на $\mathbb{Z}_p$ [4, 5]. Пусть

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \frac{X^n}{n!}, \quad \log(1+X) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n} \in K[[X]].$$

Лемма 1. *Для того чтобы степенная проблема моментов*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu(z) = \gamma_n, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\mu(X) = F(\log(1+X))$ имел ограниченные коэффициенты. Этот ряд отождествляется с искомой мерой μ .

Далее для любой меры μ на $\mathbb{Z}_p$ положим, как и в [5]: $\mu^{(t,s)}(V) = \mu(t + p^s V)$, $V \subset \mathbb{Z}_p$.

Теорема. *Проблема моментов (1) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = 0, \quad (3)$$

где

$$C_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} Q_k, \quad m \geq 0, \quad (4)$$

$Q_k = t^{k+1} \theta_{k+1}$, и формальный степенной ряд $H\left(-\frac{t}{p^s} \log(1+X)\right)$,

$$H(X) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{X^n}{n!}, \quad A_n = \sum_{m \geq n} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} C_m, \quad (5)$$

имеет ограниченные коэффициенты. При этом

$$\mu^{(t,s)}(X) = H\left(-\frac{t}{p^s} \log(1+X)\right).$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Для произвольных последовательностей $(A_n)_{n \geq 0} \subset K$, $(Q_k)_{k \geq 0} \subset K$ условия*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} A_n = Q_k, \quad k \geq 0, \quad (7)$$

равносильны совокупности соотношений (3) — (5).

Доказательство леммы. Заметим вначале, что всякую аналитическую на $\mathbb{Z}_p$ функцию f можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} A_n z^n, \quad (8)$$

где (A_n) удовлетворяет условию (6), или

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} C_m (z-1)^m, \quad (9)$$

где (C_m) удовлетворяет равенству (3). Коэффициенты этих разложений связаны соотношением (5). Для упомянутой функции имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} A_n &= \left(\frac{D^k}{k!} z^k f(z) \right) (1) = \sum_{m=0}^k \frac{D^{k-m}}{(k-m)!} (z^k) \left(\frac{D^m}{m!} f(z) \right) (1) = \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} C_m. \end{aligned} \quad (10)$$

Напомним также, что равенства

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} C_m = Q_k, \quad k \geq 0, \quad (11)$$

и (4) образуют пару обратимых соотношений.

Предположим, что выполняются условия (6) и (7). Тогда формула (8) определяет аналитическую функцию на $\mathbb{Z}_p$, а следовательно, справедливы соотношения (5) и (3). Из (7) и (10) вытекает (11), откуда следует (4).

Пусть теперь выполняются соотношения (3) — (5). Из системы (4) следует (11). Условие (3) позволяет рассматривать аналитическую функцию f на $\mathbb{Z}_p$ в виде (9). Из (5) и (3) следует (6), а из (10), (11) вытекает (7).

Доказательство теоремы. Поскольку [5, с. 58]

$$\begin{aligned} t^{k+1} \int_{t+p^s \mathbb{Z}_p} z^{-k-1} d\mu(z) &= t^{k+1} \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{d\mu^{(t,s)}(z)}{(t+p^s z)^{k+1}} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^n \int_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu^{(t,s)}(z), \end{aligned}$$

условие теоремы равносильно справедливости равенств (7) для величин

$$A_n = \left(-\frac{p^s}{t} \right)^n \int_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu^{(t,s)}(z), \quad n \geq 0. \quad (12)$$

В силу того что для таких A_n условие (6) выполняется автоматически, систему (7) согласно лемме 2 можно заменить системой (3) — (5). Равенства (12) справедливы тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2) для $\mu = \mu^{(t,s)}$ и $\gamma_n = \left(-\frac{t}{p^s} \right)^n A_n$, $n \geq 0$. Экспоненциальная производящая функция этих величин имеет вид $F(X) = H\left(-\frac{t}{p^s} X\right)$. По лемме 1 соотношения 2 выполняются в том и только том случае, когда ряд $H\left(-\frac{t}{p^s} \log(1+X)\right) = F(\log(1+X)) = \mu^{(t,s)}(X)$ имеет ограниченные коэффициенты.

Пример. Важную роль в p -адическом анализе играет мера μ_ξ [6, 7]. В [5] показано, что $\mu_\xi(X) = (1 - \xi(1+X))^{-1}$ ($|1 - \xi| \geq 1$) является решением степенной проблемы моментов с $\gamma_n = D_n^{(\xi)}$, $n \geq 0$, определяемыми экспоненциальной производящей функцией $F(X) = (1 - \xi e^X)^{-1}$.

Меру μ_{ξ} получим как решение проблемы моментов (1) с

$$\theta_n = \frac{(-1)^n \xi^t}{(n-1)! p^{sn}} G_{p, \xi}^{(n)} \left(\frac{t}{p^s} \right), \quad n \geq 1.$$

Здесь $G_{p, \xi}$ — «подкрученный» аналог лог-гамма-функции [7], который при $x \in \mathbb{C}_p$, $|x| > 1$, можно представить в виде

$$G_{p, \xi}(x) = -D_0^{(\xi)} \text{Log}(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n x^n} D_n^{(\xi)}. \quad (13)$$

На основании (4), (13) имеем

$$\begin{aligned} C_m &= \xi^t \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \left(-\frac{t}{p^s} \right)^{n+1} \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^{n+k+t} \times \\ &\times \binom{k+n}{n} D_k^{(\xi p^s)} = \xi^t \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^k D_k^{(\xi p^s)} \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \times \\ &\times \binom{m}{n} \binom{k+n}{k} = \xi^t \sum_{k \geq m} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^k D_k^{(\xi p^s)} \binom{k}{m} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. Далее согласно (5) получаем

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m \geq n} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \xi^t \sum_{k \geq m} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^k D_k^{(\xi p^s)} \binom{k}{m} = \\ &= \xi^t \sum_{k \geq n} \left(-\frac{p^s}{t} \right)^k D_k^{(\xi p^s)} \sum_{m=n}^k (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \binom{k}{m} = \xi^t \left(-\frac{p^s}{t} \right)^n D_n^{(\xi p^s)}. \end{aligned}$$

Наконец, по теореме находим

$$\begin{aligned} H(X) &= \xi^t \sum_{n \geq 0} D_n^{(\xi p^s)} \frac{1}{n!} \left(-\frac{p^s}{t} X \right)^n = \frac{1}{1 - \xi p^s \exp \left(-\frac{p^s}{t} X \right)}, \\ \mu^{(t, s)}(X) &= \frac{\xi^t}{1 - \xi p^s (1 + X)} = \xi^t \mu_{\xi p^s}(X) = \mu_{\xi}^{(t, s)}(X). \end{aligned}$$

Тем самым ограничения на диск $t + p^s \mathbb{Z}_p$ мер μ и μ_{ξ} совпадают.

Следствие. Для того чтобы функция $f \in C(\mathbb{Z}_p)$ допускала интегральное представление вида $f(z) = \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \lambda^{-z} d\mu(\lambda)$, необходимо и доста-

точно, чтобы ряд $H\left(-\frac{1}{p} \log(1+X)\right)$, где $H(X) = \sum_{n \geq 0} (\Delta^n f)(-n) \frac{X^n}{n!}$, $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, имел ограниченные коэффициенты. Этот ряд отождествляется с мерой $\mu^{(1, 1)}$.

Для доказательства достаточно заметить, что при $t = s = 1$ в обозначениях теоремы имеем

$$C_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(k+1) = (\Delta^m f)(1) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$A_n = \sum_{m \geq n} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} (\Delta^m f)(1) = \left(\frac{\Delta^n}{(1+\Delta)^{n+1}} f \right)(1) = (\Delta^n f)(-n).$$

Можно показать, что это следствие эквивалентно следствию теоремы 2 из работы [5]. Другие подходы к вопросу об интегральном представлении указанного вида содержатся в теоремах 14 [8] и 2 [9].

1. *Diamond I.* The p -adic gamma measures // *Proc. Amer. Math. Soc.*— 1979.— 75, N 2.— P. 211—217.
2. *Коблиц Н.* p -Адические числа, p -адический анализ и дзета-функции.— М.: Мир, 1982.— 192 с.
3. *Lang S.* Cyclotomic fields.— New York ets : Springer, 1978.— 11.— 253 p.
4. *Amice Y.* Duals // *Proc. of Conf. on p -adic Analysis, Nijmegen.*— 1978.— P. 1—15.
5. *Калужный В. Н.* Степенная проблема моментов на p -адическом диске // *Теория функций, функцион. анализ и их приложения.*— 1983.— Вып. 39.— С. 56—61.
6. *Осипов Ю. В.* p -Адическое преобразование Фурье // *Успехи мат. наук.*— 1979.— 34.— Вып. 5.— С. 229—230.
7. *Koblitz N.* p -Adic analysis: a short course on recent Work // *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*— 1980.— N 46.— 163 p.
8. *Serre J.-P.* Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques // *Lect Notes Math.*— 1973.— № 350.— P. 192—268.
9. *Barsky D.* Transformation de Cauchy p -adique et algebra d'Iwasawa // *Math. Ann.*— 1978.— 232.— S. 255—266.

Харьк. ун-т

Получено 26.02.85

УДК 511+512.62

p -Адические меры с заданными лорановскими моментами / К а л ю ж - н ы й В. Н. // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 788.

Для заданной последовательности $(\theta_n)_{n \geq 1}$ в поле $K \supset \mathbb{Q}_p$ находятся необходимые и достаточные условия существования K -значной меры на диске $t + p^s \mathbb{Z}_p$, $0 \in t + p^s \mathbb{Z}_p$, такой, что $\int z^{-n} d\mu(z) = \theta_n, n \geq 1$. Библиогр.: 9 назв.