

Граничные уравнения в задаче динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа

О. А. Думина

Харьковский национальный университет, Украина

Рассмотрена задача динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа. Ее решение представлено суммой динамических аналогов термоупругих потенциалов простого и двойного слоев. Это представление приводит к системе парных нестационарных граничных уравнений. Доказана однозначная разрешимость этой системы в однопараметрической шкале функциональных пространств соболевского типа.

2000 Mathematics Subject Classification 42A70, 35M05, 73C25.

1. Введение. В [1,2] заложены основы теории потенциалов в задачах классической динамической теории упругости. Граничные уравнения в двух основных задачах динамики термоупругих сред изучены в [3]. Целью заметки является изучение граничных уравнений в задаче динамики термоупругих сред с краевыми условиями смешанного типа. В ней использованы методы, развитые в [2]. Начнем с постановки задачи.

Пусть S – замкнутая поверхность класса C^2 , разделяющая пространство \mathbf{R}^3 на области Ω^+ (внутреннюю) и Ω^- (внешнюю). Смещение точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t обозначим через $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$. Через $\theta(x, t)$ обозначим разность между текущей и начальной $T_0 > 0$ температурами среды. Пусть область Ω^+ или Ω^- занята однородной упругой средой с коэффициентами упругости a_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Известно [4,5], что коэффициенты упругости при всех значениях индексов удовлетворяют условиям симметричности $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$ и эллиптичности $a_{ijkl}\eta_j\eta_k \geq a_0\eta_j\eta_j$, $\forall \eta_j = \eta_{ji} \in \mathbf{R}$ с положительной постоянной a_0 . Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся латинским индексам от 1 до 3. Через β_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ обозначим коэффициенты симметричного тензора тепловых напряжений. В отсутствие объемных сил и внешних источников тепла поле смещений и температуры $U = (u, \theta)$ в области $G^+ = \Omega^+ \times \mathbf{R}_+$ или $G^- = \Omega^- \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ при нулевых начальных

условиях удовлетворяет системе уравнений [1,4]:

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 u_i - \partial_j (a_{ijkl} \partial_l u_k) + \partial_j (\beta_{ij} \theta) = 0, & i = 1, 2, 3, \\ c_e \partial_t \theta - \partial_k (\lambda_{kj} \partial_j \theta) + \beta_{kj} T_0 \partial_j \partial_t u_k = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in G^\pm. \quad (1)$$

В (1) ρ — постоянная плотность среды, $c_e > 0$ — постоянная удельная теплоемкость среды, $\{\lambda_{kj}\}_{k,j=1}^3$ — компоненты положительно определенного симметричного тензора, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, 3$. Начальные условия считаем однородными:

$$u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = \theta(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega^\pm.$$

Предположим, что поверхность S разделена замкнутым контуром $\Gamma \subset S$ на две связные компоненты S_i ($i = 1, 2$). На части граничной поверхности $\Sigma_1^+ = S_1 \times \mathbf{R}_+$ известны смещения и температура: $U^\pm(x, t) = F^\pm(x, t)$, на $\Sigma_2^+ = S_2 \times \mathbf{R}_+$ — напряжения и тепловой поток: $(TU)^\pm(x, t) = G^\pm(x, t)$. Граничная дифференциальная операция T определяется формулой

$$(TU)_i = \begin{cases} (a_{ijkl} \partial_k u_l - \beta_{ij} \theta) n_j(x), & i = 1, 2, 3, \\ (\lambda_{ij} \partial_j \theta) n_i(x), & i = 4, \end{cases}$$

$F^\pm(x, t), G^\pm(x, t)$ — заданные четырехкомпонентные векторные поля на Σ_i^\pm . Здесь и далее верхние индексы \pm обозначают предельные значения соответствующих величин, когда $(x, t) \rightarrow \Sigma_i^\pm$ из G^\pm соответственно. Поставленную задачу будем обозначать M^\pm . Предположение об однородности уравнения и начальных условий не существенно ограничивает общность задачи, поскольку имеющиеся неоднородности можно перенести в краевые условия. Отметим, что задача поставлена формально, ее корректная постановка будет приведена после введения необходимых функциональных пространств.

2. Функциональные пространства. Для упрощения обозначений мы используем одни и те же символы для пространств векторзначных и скалярных функций, а также для норм этих пространств. Более того, мы используем одни и те же символы U для функций и вектор-функций $U(x, t)$ в пространствах оригиналов и $U(x, p) = \mathcal{L}U(x, t)$ для их преобразований Лапласа по переменной t , где \mathcal{L} — оператор преобразования Лапласа. Пусть $H_m(\mathbf{R}^3)$, $m \in \mathbf{R}$ — стандартные пространства Соболева [5,6]. Для любых $p \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{R}$ введем пространства $H_{m,p}(\mathbf{R}^3)$, совпадающие как множества с $H_m(\mathbf{R}^3)$, с нормами их элементов, определенными формулами

$$\|u\|_{m,p}^2 = \int_{\mathbf{R}^3} (1 + |\xi|^2 + |p|^2)^m |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — обобщенное преобразование Фурье $u(x)$. Пусть Ω — произвольная область в \mathbf{R}^3 . Обозначим через $H_m(\Omega)$ и $H_{m,p}(\Omega)$ пространства, состоящие из

сужений на Ω элементов пространств $H_m(\mathbf{R}^3)$ и $H_{m,p}(\mathbf{R}^3)$ соответственно, с нормами:

$$\|u\|_{m,\Omega} = \inf_{v \in H_m(\mathbf{R}^3), v|_{\Omega}=u} \|v\|_m, \quad \|u\|_{m,p;\Omega} = \inf_{v \in H_{m,p}(\mathbf{R}^3), v|_{\Omega}=u} \|v\|_{m,p},$$

где $\|v\|_m$ — норма пространства $H_m(\mathbf{R}^3)$. Пространства $H_m(S)$ и $H_{m,p}(S)$ вводятся с помощью стандартной схемы, использующей разложение единицы и переход к локальным координатам [5,6].

Обозначим через $H_m^0(S_i)$, $m \in \mathbf{R}$, подпространство в $H_m(S)$, состоящее из элементов u , равных нулю на $S \setminus \bar{S}_i$ ($i = 1, 2$). Далее, через $H_m(S_i)$ обозначим пространство функций $v(x)$, заданных на S_i , допускающих продолжения до элементов $w(x) \in H_m(S)$. Нормы в этих пространствах вводятся равенством

$$\|v\|_{m;S_i} = \inf_{w|_{S_i}=v} \|w\|_{m;S}.$$

Точно так же вводятся пространства $H_{m,p}^0(S_i)$ и $H_{m,p}(S_i)$. Наконец, введем пространства $\mathcal{H}_{m,p}(\Omega) = H_{m,p}(\Omega) \times H_m(\Omega)$ и $\mathcal{H}_{m,p}(S_i) = H_{m,p}(S_i) \times H_m(S_i)$, $\mathcal{H}_{m,p}^0(S_i) = H_{m,p}^0(S_i) \times H_m^0(S_i)$, элементами которых являются четырехкомпонентные вектор-функции $U = (u, \theta)$, первые три компоненты которых u принадлежат пространствам $H_{m,p}(\Omega)$, $H_{m,p}(S_i)$ или $H_{m,p}^0(S_i)$, а четвертая компонента θ — пространствам $H_m(\Omega)$, $H_m(S_i)$ или $H_m^0(S_i)$. Норма элементов пространства $\mathcal{H}_{m,p}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|U\|_{m,p;\Omega}^2 = \|u\|_{m,p;\Omega}^2 + \|\theta\|_{m,\Omega}^2.$$

Аналогично определяются нормы в пространствах $\mathcal{H}_{m,p}(S_i)$, $\mathcal{H}_{m,p}^0(S_i)$. Обозначим через π_i операторы сужения элементов пространств $\mathcal{H}_{m,p}(S)$ на части S_i , ($i = 1, 2$), осуществляющие непрерывные отображения $\pi_i : \mathcal{H}_{m,p}(S) \rightarrow \mathcal{H}_{m,p}(S_i)$, $i = 1, 2$.

Выберем и зафиксируем $\kappa > 0$. Обозначим через $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Omega^\pm)$, $m, k \in \mathbf{R}$ пространства четырехкомпонентных вектор-функций $U(x, p)$, $x \in \Omega^\pm$, $p \in \mathbf{C}_\kappa = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p = \sigma > \kappa\}$, голоморфно отображающих \mathbf{C}_κ в пространство четырехкомпонентных вектор-функций $H_m(\Omega^\pm)$, обладающих конечными нормами, определенными формулами

$$\|U\|_{m,k,\kappa;\Omega^\pm}^2 = \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|U\|_{m,p;\Omega^\pm}^2 d\tau, \quad p = \sigma + i\tau.$$

Аналогично вводятся пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(S_i)$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}^0(S_i)$ четырехкомпонентных вектор-функций, заданных на граничных поверхностях S_i . Нормы их элементов G определяются формулами

$$\begin{aligned} \|G\|_{m,k,\kappa;S_i}^2 &= \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|G\|_{m,p;S_i}^2 d\tau, \\ \|G\|_{m,k,\kappa;S}^2 &= \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|G\|_{m,p;S}^2 d\tau, \end{aligned} \quad p = \sigma + i\tau$$

соответственно. Наконец, введем пространства $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(G^\pm)$, $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma_i^+)$ и $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}^0(\Sigma_i^+)$, образованные обратными преобразованиями Лапласа элементов пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Omega^\pm)$, $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(S_i)$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}^0(S_i)$, с нормами их элементов

$$\|U\|_{m,k,\kappa;G^\pm} = \|\mathcal{L}U\|_{m,k,\kappa;\Omega^\pm},$$

$$\|U\|_{m,k,\kappa;\Sigma_i^+} = \|\mathcal{L}U\|_{m,k,\kappa;S_i}, \quad \|U\|_{m,k,\kappa;\Sigma^+} = \|\mathcal{L}U\|_{m,k,\kappa;S}$$

соответственно. Обозначим операторы следов на Σ^+ , непрерывно при $m > 1/2$ отображающие $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(G^\pm)$ на $\mathcal{H}_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ через γ^\pm . Для операторов сужений с Σ^+ на Σ_i^+ , непрерывно отображающих $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma^+)$ на $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma_i^+)$ сохраним обозначение π_i , $i = 1, 2$.

Приведем корректную постановку задач M^\pm . Решением этих задач назовем элемент $U = (u, \theta) \in \mathcal{H}_{r;1,0,\kappa}(G^\pm)$, такой что $\pi_1 \gamma^\pm U = F^\pm$, а также удовлетворяющий вариационному уравнению

$$\int_{G^\pm} (-\rho \partial_t u_i \partial_t v_i + a_{ijkl} \partial_l u_k \partial_j v_i + \beta_{ij} \partial_i \theta v_j - c_e \theta \partial_t \eta +$$

$$+ \lambda_{kj} \partial_j \theta \partial_k \eta - \beta_{kj} T_0 \partial_t u_k \partial_j \eta) dx dt = \pm \int_{\Sigma_2^+} (G_i^\pm v_i + G_4^\pm \eta) ds dt$$

для любой финитной вектор-функции $V(x, t) = (v(x, t), \eta(x, t)) \in C^\infty(\overline{G^\pm})$, равной нулю при $(x, t) \in \Sigma_1^+$.

3. Термоупругие потенциалы. Обозначим через T 4×4 -матричный дифференциальный оператор теории термоупругости. Пусть $\Phi(x, t)$ — фундаментальное решение для оператора T , равное нулю при $t < 0$. $\Phi(x, t)$ является матрицей размера 4×4 , удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{cases} T\Phi(x, t) = \delta(x, t)I, & (x, t) \in \mathbf{R}^4, \\ \Phi(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t < 0, \end{cases}$$

в которых $\delta(x, t)$ — функция Дирака, I — единичная матрица. Введем термоупругий потенциал простого слоя с заданной на $\Sigma_2 = S_2 \times \mathbf{R}$ четырехкомпонентной плотностью $\alpha(x, t)$ формулой

$$(V\alpha)(x, t) = \int_{\Sigma_2} \Phi(x - y, t - \tau) \alpha(y, \tau) ds_y d\tau.$$

Термоупругий потенциал двойного слоя с заданной на $\Sigma_1 = S_1 \times \mathbf{R}$ четырехкомпонентной плотностью $\beta(x, t)$ определяется формулой

$$(W\beta)(x, t) = \int_{\Sigma_1} T(x - y, t - \tau) \beta(y, \tau) ds_y d\tau,$$

в которой $T(x-y, t-\tau) = [\tilde{T}_y \Phi^T(x-y, t-\tau)]^T$, "Т" — знак транспонирования матрицы, \tilde{T}_y — граничная дифференциальная операция

$$\tilde{T}_y V = \begin{cases} (a_{ijkl} \partial_k v_l + T_0 \beta_{ij} \partial_t \eta) n_j(x), & i = 1, 2, 3, \\ (\lambda_{lj} \partial_j \eta) n_l(x), & i = 4, \end{cases}$$

действующая по переменной y . Свойства потенциалов простого и двойного слоев изучены в [4]. Там показано, что, по крайней мере, для гладких финитных на Σ_i , $i = 1, 2$ плотностей оба потенциала удовлетворяют всюду вне поверхности S_i однородному уравнению термоупругости. Если же плотности равны нулю при $t < 0$, оба потенциала удовлетворяют также нулевым начальным условиям. Справедливы следующие формулы скачков:

$$\begin{aligned} (V\alpha)^+(x, t) &= (V\alpha)^-(x, t), \\ (TV\alpha)^\pm(x, t) &= \pm \frac{1}{2} \alpha(x, t) + (TV\alpha)^0(x, t), \\ (W\beta)^\pm(x, t) &= \mp \frac{1}{2} \beta(x, t) + (W\beta)^0(x, t), \\ (TW\beta)^+(x, t) &= (TW\beta)^-(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma_i, \end{aligned}$$

где $(W\beta)^0(x, t)$, $(TV\alpha)^0(x, t)$ — прямые значения соответствующих интегралов.

Представим решения задач M^\pm суммой потенциалов простого и двойного слоев $U(x, t) = (V\alpha)(x, t) + (W\beta)(x, t)$, $(x, t) \in G^\pm$, где плотности β и α сосредоточены на Σ_1^+ и Σ_2^+ соответственно. Это представление приводит к системе парных граничных уравнений

$$\begin{cases} ((W\beta)^\pm(x, t) + (V\alpha)(x, t)) = F^\pm(x, t), & (x, t) \in \Sigma_1^+, \\ (TW\beta)(x, t) + (TV\alpha)^\pm(x, t) = G^\pm(x, t), & (x, t) \in \Sigma_2^+. \end{cases} \quad (2)$$

Целью заметки является доказательство однозначной разрешимости системы (2)

Отметим, что после перехода к преобразованиям Лапласа по времени потенциалы простого и двойного слоев принимают вид

$$\begin{aligned} (V_p \alpha)(x, p) &= \int_{S_2} \Phi(x-y, p) \alpha(y, p) ds_y, \\ (W_p \beta)(x, p) &= \int_{S_1} T(x-y, p) \beta(y, p) ds_y, \end{aligned}$$

где $\Phi(x, p)$ — фундаментальное решение для оператора T_p , полученного из T преобразованием Лапласа по времени, $T(x-y, p) = [\tilde{T}_{p,y} \Phi^T(x-y, p)]^T$, — граничная дифференциальная операция

$$\tilde{T}_p V = \begin{cases} (a_{ijkl} \partial_k v_l + T_0 \beta_{ij} p \eta) n_j(x), & i = 1, 2, 3, \\ (\lambda_{lj} \partial_j \eta) n_l(x), & i = 4, \end{cases}$$

действующая по переменной y .

Следующий раздел будет посвящен изучению некоторых свойств матричного оператора системы (2).

4. Свойства основных граничных операторов. Выполнив преобразование Лапласа в (1) и в граничных условиях, придем к задачам M_p^\pm , состоящим в нахождении функций $U(x, p) = (u(x, p), \theta(x, p)) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} \rho p^2 u_i - \partial_j (a_{ijkl} \partial_l u_k) + \partial_j (\beta_{ij} \theta) = 0, & i = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega^\pm, \\ c_\varepsilon p \theta - \partial_k (\lambda_{kj} \partial_j \theta) + \beta_{kj} T_0 p \partial_j u_k = 0, \end{cases} \quad (3)$$

и условиям на границе

$$\begin{aligned} U^\pm(x, p) &= F^\pm(x, p), \quad x \in S_1 \\ (TU)^\pm(x, p) &= G^\pm(x, p), \quad x \in S_2 \end{aligned}$$

Разрешимость этих краевых задач легко доказывается стандартными методами. Обозначим через $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega^\pm}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega^\pm}$ скалярное произведение и норму в пространствах $L^2(\Omega^\pm)$, через $(\cdot, \cdot)_{0,S}$, $\|\cdot\|_{0,S}$ скалярное произведение и норму в пространстве $L^2(S)$. Запишем граничное дифференциальное выражение TU в виде пары $((TU)_e, (TU)_t)$, где $(TU)_e$ — первые три компоненты TU , а $(TU)_t$ — четвертая компонента TU . Из (3) следуют равенства

$$\begin{aligned} \rho p^2 \|u\|_{0,\Omega^\pm}^2 + E_\pm(u, u) - (\theta, \beta_{ij} \partial_j u_i)_{0,\Omega^\pm} &= \pm ((TU)_e^\pm, u^\pm)_{0,S}, \\ c_\varepsilon \bar{p} \|\theta\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \Lambda_\pm(\theta, \theta) + T_0 \bar{p} (\theta, \beta_{ij} \partial_j u_i)_{0,\Omega^\pm} &= \pm (\theta^\pm, (TU)_t^\pm)_{0,S}, \end{aligned} \quad (4)$$

в которых

$$E_\pm(u, v) = (a_{ijkl} \partial_k u_l, \partial_j v_i)_{0,\Omega^\pm}, \quad \Lambda_\pm(\theta, \eta) = (\lambda_{kj} \partial_k \theta, \partial_j \eta)_{0,\Omega^\pm}.$$

Умножая первое уравнение в (4) на $T_0 |p|^{-2} \bar{p}^2$, а второе на $|p|^{-2} \bar{p}$, складывая затем полученные соотношения, после элементарных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} \rho T_0 |p|^2 \|u\|_{0,\Omega^\pm}^2 + T_0 E_\pm(u, u) + c_\varepsilon \|\theta\|_{0,\Omega^\pm}^2 + \sigma^{-1} \Lambda_\pm(\theta, \theta) = \\ = \pm \sigma^{-1} \operatorname{Re} \left\{ T_0 \bar{p} ((TU)_e^\pm, u^\pm)_{0,S} + (\theta^\pm, (TU)_t^\pm)_{0,S} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Условимся обозначать одной и той же буквой c все, возникающие в оценках положительные постоянные, не зависящие от параметра $p \in \mathbb{C}_\kappa$. Отметим, что постоянные c зависят от κ . Воспользовавшись неравенством Корна [5] и эллиптичностью тензоров $\{a_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^3$ и $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^3$, для всех $p \in \mathbb{C}_\kappa$ получим оценку

$$\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}^2 \leq c \left\{ |p| \left| ((TU)_e^\pm, u^\pm)_{0,S} \right| + \left| (\theta^\pm, (TU)_t^\pm)_{0,S} \right| \right\} \quad (6)$$

Пусть $U = (u, \theta) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$ — решение уравнения (3), $F = (f, \xi) = \gamma^\pm U \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$, $\Psi = (\psi, \zeta) \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$, $V = (v, \eta) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$ продолжение элемента Ψ в Ω^\pm : $\gamma^\pm V = \Psi$, где для операторов следов на S , непрерывно отображающих $\mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$ на $\mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ сохранено обозначение γ^\pm . Введем операторы Пуанкаре-Стеклова на элементах $F \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ формулами

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_p^\pm F, \Psi)_{0,S} &= ((\mathcal{N}_p^\pm F)_e, \psi)_{0,S} + ((\mathcal{N}_p^\pm F)_t, \zeta)_{0,S}, \\ \pm ((\mathcal{N}_p^\pm F)_e, \psi)_{0,S} &= \rho p^2 (u, v)_{0,\Omega^\pm} + E_\pm(u, v) - (\theta, \beta_{ij} \partial_j v_i)_{0,\Omega^\pm}, \\ \pm ((\mathcal{N}_p^\pm F)_t, \zeta)_{0,S} &= c_\varepsilon p (\theta, \eta)_{0,\Omega^\pm} + \Lambda_\pm(\theta, \eta) + T_0 p (\beta_{ij} \partial_j u_i, \eta)_{0,\Omega^\pm}. \end{aligned}$$

Из определения операторов Пуанкаре-Стеклова следуют оценки:

$$\begin{aligned} \left| ((\mathcal{N}_p^\pm F)_e, \psi)_{0,\Gamma} \right| &\leq c \left\{ \|u\|_{1,p;\Omega^\pm} \|v\|_{1,p;\Omega^\pm} + \|\theta\|_{1,\Omega^\pm} \|v\|_{1,p;\Omega^\pm} \right\} \leq \\ &\leq c \|U\|_{1,p;\Omega^\pm} \|v\|_{1,p;\Omega^\pm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| ((\mathcal{N}_p^\pm F)_t, \zeta)_{0,\Gamma} \right| &\leq c \left\{ |p| \|\theta\|_{1,\Omega^\pm} \|\eta\|_{1,\Omega^\mp} + T_0 |p| \|u\|_{1,p;\Omega^\pm} \|\eta\|_{1,\Omega^\pm} \right\} \leq \\ &\leq c |p| \|U\|_{1,p;\Omega^\pm} \|\eta\|_{1,\Omega^\pm} \end{aligned}$$

или

$$\|(\mathcal{N}_p^\pm F)_e\|_{-1/2,p;S} \leq c \|U\|_{1,p;\Omega^\pm}, \quad \|(\mathcal{N}_p^\pm F)_t\|_{-1/2;S} \leq c |p| \|U\|_{1,p;\Omega^\pm}. \quad (7)$$

Из (6) можно получить оценку

$$\|U\|_{1,p;\Omega^\pm} \leq c |p| \|F\|_{1/2,p;S},$$

а значит, $\|(\mathcal{N}_p^\pm F)\|_{-1/2,p;S} \leq c |p|^2 \|F\|_{1/2,p;S}$.

Обозначим через $\pi_{i,j,p}^\pm$ операторы, сопоставляющие элементам $U \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ пары $\{\pi_i U, \pi_j \mathcal{N}_p^\pm U\}$ ($i, j = 1, 2; i \neq j$). Эти операторы отображают $\mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ в банахово пространство $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$ пар $\{V, W\}$, где $V \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i)$, $W \in \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$ с нормой $\|\{V, W\}\|_{1/2,p;S_i; -1/2,p;S_j} = \|V\|_{1/2,p;S_i} + \|W\|_{-1/2,p;S_j}$.

Лемма 1. Для любого $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ операторы $\pi_{i,j,p}^\pm$ ($i, j = 1, 2; i \neq j$) устанавливают изоморфизм пространств $\mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ и $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$.

Доказательство. Ограниченность операторов $\pi_{i,j,p}^\pm$ немедленно следует из оценок

$$\|\pi_i U\|_{1/2,p;S_i} \leq \|U\|_{1/2,p;S},$$

$$\|\pi_j \mathcal{N}_p^\pm U\|_{-1/2,p;S_j} \leq \|(\mathcal{N}_p^\pm U)\|_{-1/2,p;S} \leq c |p|^2 \|U\|_{1/2,p;S}.$$

Итак,

$$\left\| \pi_{i,j,p}^{\pm} U \right\|_{1/2,p,S_i; -1/2,p,S_j} \leq c |p|^2 \|U\|_{1/2,p,S}.$$

Докажем плотность областей значений операторов $\pi_{i,j,p}^{\pm}$ в пространствах $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$. Для этого установим плотность в $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$ множество $\mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$ элементов вида $\{0, \pi_j \mathcal{N}_p^{\pm} U\} + \{\pi_i V, 0\}$, где U пробегает пространство $\mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$, а V — подмножество в $\mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ элементов, таких, что $\mathcal{N}_p^{\pm} V \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_i)$. Допустив противное, мы бы нашли нетривиальную пару $\{A, B\} \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_i) \times \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$, такую, что

$$(\pi_i V, A)_{0,S_i} + (\pi_j \mathcal{N}_p^{\pm} U, B)_{0,S_j} = 0. \quad (8)$$

при всех указанных выше U и V . Запишем A в виде пары (a_e, a_t) , $B = (b_e, b_t)$, где a_e и b_e — первые три компоненты, а a_t и b_t — четвертые компоненты A и B соответственно. Положив в (8) $U = 0$, $V = (v, \eta) = (\mathcal{N}_p^{\pm})^{-1} (T_0 p a_e, a_t)$, получим $T_0 \bar{p} \left(v, (\mathcal{N}_p^{\pm} V)_e \right)_{0,S} + \left(\eta, (\mathcal{N}_p^{\pm} V)_t \right)_{0,S} = 0$, откуда в силу (5) $A = 0$. Взяв в (8) $U = ((T_0 p)^{-1} b_e, b_t)$, получаем равенство $B = 0$. Тем самым плотность $\mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$ в $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$ доказана.

Рассмотрим элемент вида $\{F, 0\} \in \mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$, где $F = (f, \zeta) = \pi_i V$, $V = (v, \eta) \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$, $\mathcal{N}_p^{\pm} V \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_i)$.

$$\begin{aligned} \|V\|_{1,p,\Omega^{\pm}}^2 &\leq c \left\{ |p| \left| \left((\mathcal{N}_p^{\pm} V)_e, v \right)_{0,S} \right| + \left| \left(\eta, (\mathcal{N}_p^{\pm} V)_t \right)_{0,S} \right| \right\} \leq \\ &\leq c \left\{ |p| \left\| (\mathcal{N}_p^{\pm} V)_e \right\|_{-1/2,p,S} \|f\|_{1/2,p,S_i} + \left\| (\mathcal{N}_p^{\pm} V)_t \right\|_{-1/2,S} \|\zeta\|_{1/2,S_i} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Объединяя (7) и (9), получим $\|V\|_{1,p,\Omega^{\pm}}^2 \leq c |p| \|V\|_{1,p,\Omega^{\pm}} \|F\|_{1/2,p,S_i}$, а значит,

$$\|V\|_{1/2,p,S} \leq c \|V\|_{1,p,\Omega^{\pm}} \leq c |p| \|F\|_{1/2,p,S_i}. \quad (10)$$

На элементах вида $\{0, G\} \in \mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$, где $G = (g, \xi) = \pi_j \mathcal{N}_p^{\pm} U$, $U = (u, \theta) \in \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$ из (6) имеем

$$\begin{aligned} \|U\|_{1/2,p,S}^2 &\leq c \left\{ |p| \|g\|_{-1/2,p,S} \|u\|_{1/2,p,S} + \|\xi\|_{-1/2,S_j} \|\theta\|_{1/2,S} \right\} \leq \\ &\leq c |p| \|G\|_{-1/2,p,S_j} \|U\|_{1/2,p,S}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|U\|_{1/2,p,S} \leq c |p| \|G\|_{-1/2,p,S_j}. \quad (11)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \|U + V\|_{1/2,p,S} &\leq c |p| \left(\|F\|_{1/2,p,S_i} + \|G\|_{-1/2,p,S_j} \right) = \\ &= c |p| \left\| \pi_{i,j,p}^{\pm} (U + V) \right\|_{1/2,p,S_i; -1/2,p,S_j}. \end{aligned}$$

Тем самым доказана обратимость операторов $\pi_{i,j,p}^{\pm}$ и ограниченность отображений $(\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1}$ на множествах $\mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$. Плотность $\mathcal{N}_{i,j,p}^{\pm}$ в $\mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$ дает оценку

$$\left\| (\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1} \{F, G\} \right\|_{1/2,p;S} \leq c |p| \| \{F, G\} \|_{1/2,p,S_i; -1/2,p,S_j} \quad (12)$$

для всех элементов $\{F, G\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пространство $\mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ разлагается в прямую сумму подпространства $\mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$ и подпространства, состоящего из элементов U таких, что $\mathcal{N}_p^{\pm} U \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_i)$ ($i, j = 1, 2; i \neq j$).

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$, $\pi_{i,j,p}^{\pm} U = \{F, G\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$. Разложим $\{F, G\}$ в сумму элементов $\{F, 0\}$, $\{0, G\}$. Положив $U_0 = (\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1} \{0, G\}$, $U_1 = (\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1} \{F, 0\}$, получим $U_0 \in \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$, $\mathcal{N}_p^{\pm} U_1 \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_i)$, $U = U_0 + U_1$, причем это представление однозначно. Следствие доказано.

Назовем элемент $U = (\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1} \{F, G\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ порождающим пару $\{F, G\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$.

Лемма 2. Пусть $U \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$ порождает пару $\{F, G\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j)$. Справедлива оценка:

$$\left\| \mathcal{N}_p^{\pm} U \right\|_{-1/2,p;S} \leq c |p|^2 \| \{F, G\} \|_{1/2,p,S_i; -1/2,p,S_j}$$

($i, j = 1, 2; i \neq j$).

Доказательство. На элементах $U_1 = (\pi_{i,j,p}^{\pm})^{-1} \{F, 0\}$ требуемая оценка следует из (7) и (10). Рассмотрим элементы $U_0 = (u_0, \theta_0) \in \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_j)$, $\{0, G\} = \pi_{i,j,p}^{\pm} U_0$. Из (6) получаем

$$\begin{aligned} \|U_0\|_{1,p;\Omega^{\pm}}^2 &\leq c \left\{ |p| \|g\|_{-1/2,p,S_j} \|u_0\|_{1/2,p,S} + \|\xi\|_{-1/2,S_j} \|\theta_0\|_{1/2,S} \right\} \leq \\ &\leq c |p| \|G\|_{-1/2,p,S_j} \|U_0\|_{1,p;\Omega^{\pm}}, \end{aligned}$$

то есть,

$$\|U_0\|_{1,p;\Omega^{\pm}} \leq c |p| \|G\|_{-1/2,p,S_j}. \quad (13)$$

Воспользовавшись (7), получаем

$$\left\| \mathcal{N}_p^{\pm} U_0 \right\|_{-1/2,p;S} \leq c |p| \|U_0\|_{1,p;\Omega^{\pm}} \leq c |p|^2 \|G\|_{-1/2,p,S_j}.$$

Полученные оценки доказывают утверждение леммы.

Введем при $i, j = 1, 2; i \neq j$ операторы

$$\theta_{i,j,p}^{\pm} : \mathcal{H}_{1/2,p}(S_i) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_j) \mapsto \mathcal{H}_{1/2,p}(S_j) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_i),$$

действующие по следующему правилу. Пары $\{\pi_i U, \pi_j \mathcal{N}_p^\pm U\}$, где $U \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S)$, оператор $\theta_{i,j,p}^\pm$ сопоставляет пару $\{\pi_j U, \pi_i \mathcal{N}_p^\pm U\}$. Равенство

$$\theta_{i,j,p}^\pm = \pi_{j,i,p}^\pm \left(\pi_{i,j,p}^\pm \right)^{-1} \quad (14)$$

доказывает ограниченность операторов $\theta_{i,j,p}^\pm$. Результаты лемм 1 и 2 дают оценку их норм величиной $c|p|^2$:

$$\left\| \theta_{i,j,p}^\pm \{F, G\} \right\|_{1/2,p,S_j; -1/2,p,S_i} \leq c|p|^2 \|\{F, G\}\|_{1/2,p,S_i; -1/2,p,S_j} \quad (15)$$

5. Разрешимость парных нестационарных граничных уравнений. В этом разделе излагаются основные результаты заметки.

Теорема 1. Система граничных уравнений (2) однозначно разрешима для любых $F^\pm \in \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)$, $G^\pm \in \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$. Разрешающий оператор этой системы при любых $k \in \mathbf{R}$ и $\kappa > 0$ осуществляет непрерывное отображение:

$$\begin{aligned} \{F^+, G^\pm\} \in \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) &\mapsto \\ \rightarrow \{\beta, \alpha\} \in \mathcal{H}_{r;1/2,k-3,\kappa}^0(\Sigma_1^+) \times \mathcal{H}_{r;-1/2,k-4,\kappa}^0(\Sigma_2^+). \end{aligned}$$

Доказательство. Совершив в (2) переход к преобразованиям Лапласа, при каждом значении параметра p получим систему парных граничных уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1 (\mathcal{W}_p^\pm \beta + \mathcal{V}_p \alpha) = F^\pm, \\ \pi_2 (\mathcal{N}_p^\pm \mathcal{W}_p^\pm \beta + \mathcal{N}_p^\pm \mathcal{V}_p \alpha) = G^\pm, \end{cases} \quad (16)$$

где через \mathcal{V}_p и \mathcal{W}_p^\pm обозначены граничные операторы, порожденные потенциалами простого и двойного слоев. Непрерывность этих операторов доказана в [3]. Введем элемент

$$U = \left(\pi_{1,2,p}^\pm \right)^{-1} \{F^\pm, G^\pm\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S), \quad (17)$$

порождающий пару $\{F^\pm, G^\pm\}$. Далее обозначим

$$\{F_1^\pm, G_1^\pm\} = \theta_{1,2,p}^\pm \{F^\pm, G^\pm\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S_2) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}(S_1).$$

Заметим, что в силу (14) элемент U порождает пару $\{F_1^\pm, G_1^\pm\}$: $U = \left(\pi_{2,1,p}^\pm \right)^{-1} \{F_1^\pm, G_1^\pm\}$. Введем элемент

$$U_1 = \left(\pi_{2,1,p}^\mp \right)^{-1} \{F_1^\pm, G_1^\pm\}, \quad (18)$$

порождающий пару $\{F_2^\pm, G_2^\pm\} = \theta_{2,1,p}^\mp \{F_1^\pm, G_1^\pm\}$. Из оценок (12), (15) следует, что

$$\begin{aligned} \|U\|_{1/2,p;S} &\leq c|p| \|\{F^\pm, G^\pm\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2}, \\ \|U_1\|_{1/2,p;S} &\leq c|p| \|\{F_1^\pm, G_1^\pm\}\|_{1/2,p,S_2;-1/2,p,S_1} \leq \\ &\leq c|p|^3 \|\{F^\pm, G^\pm\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Но тогда для элемента

$$\beta = \pm(U_1 - U) \in \mathcal{H}_{1/2,p}(S) \quad (19)$$

имеем

$$\|\beta\|_{1/2,p;S} \leq c|p|^3 \|\{F^\pm, G^\pm\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2}. \quad (20)$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$\pi_2\beta = 0. \quad (21)$$

В самом деле, поскольку U, U_1 даются формулами (17), (18), $\pi_2 U = \pi_2 U_1 = F_1^\pm$. Итак, $\beta \in \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S)$, причем справедлива оценка (20). Далее рассмотрим элемент

$$\alpha = \pm(\mathcal{N}_p^\pm U - \mathcal{N}_p^\mp U_1) \in \mathcal{H}_{-1/2,p}(S). \quad (22)$$

Из утверждения леммы 2 следует оценка

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{-1/2,p;S} &\leq c|p|^2 \left[\|\{F^\pm, G^\pm\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2} + \right. \\ &\left. + \|\{F_1^\pm, G_1^\pm\}\|_{1/2,p,S_2;-1/2,p,S_1} \right] \leq c|p|^4 \|\{F^\pm, G^\pm\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Справедливость равенства $\pi_1\alpha = 0$ проверяется так же, как и равенства (21). Итак, $\alpha \in \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_2)$, причем верна оценка (23). Докажем, наконец, что пара $\{\beta, \alpha\} \in \mathcal{H}_{1/2,p}^0(S_1) \times \mathcal{H}_{-1/2,p}^0(S_2)$ дает решение системы (16). Чтобы убедиться в этом, заметим, что $Z = W_p\beta + V_p\alpha \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$, $\gamma_p^\pm Z = W_p^\pm\beta + V_p\alpha = V_p(\mathcal{N}_p^\mp\beta + \alpha)$. Подставив вместо β и α их выражения (19), (22), получаем $W_p^\pm\beta + V_p\alpha = U$, откуда следует справедливость первого из равенств (16). Второе проверяется аналогично.

Повторив рассуждения, проведенные в [2], можно убедиться в том, что если $\{F^\pm(x, p), G^\pm(x, p)\}$ голоморфно отображает \mathbf{C}_κ в пространство пар четырехкомпонентных вектор-функций $H_{1/2}(S_1) \times H_{-1/2}(S_2)$, то решение системы (16) $\{\beta, \alpha\}$ голоморфно отображает \mathbf{C}_κ в пространство $H_{1/2}^0(S_1) \times H_{-1/2}^0(S_2)$. Мы не приводим здесь это доказательство ввиду его громоздкости. Наконец, из неравенства в (23) следует, что для элемента $\alpha(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\alpha(x, p)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\alpha(x, t)\|_{-1/2,k-4,\kappa;S^+}^2 &= \sup_{\sigma > \kappa \mathbf{R}} \int (1 + |p|)^{2(k-4)} \|\alpha(x, p)\|_{-1/2,p;S}^2 d\tau \leq \\ &\leq c \sup_{\sigma > \kappa \mathbf{R}} \int (1 + |p|)^{2k} \|\{F^\pm(x, p), G^\pm(x, p)\}\|_{1/2,p,S_1;-1/2,p,S_2}^2 d\tau = \\ &= \|\{F^\pm(x, t), G^\pm(x, t)\}\|_{1/2,k,\kappa,S_1;-1/2,k,\kappa,S_2}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогичное неравенство для $\beta(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\beta(x, p)$ следует из (20). Полученные оценки завершают доказательство теоремы.

Решив граничные уравнения (2), построим функцию $U(x, t) = (V\alpha)(x, t) + (W\beta)(x, t)$ с найденными плотностями.

Теорема 2. Пусть $F^\pm \in \mathcal{H}_{\tau; 1/2, k, \kappa}(\Sigma_1^+)$, $G^\pm \in \mathcal{H}_{\tau; -1/2, k, \kappa}(\Sigma_2^+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$. $\{\alpha(x, t), \beta(x, t)\}$ — решения системы граничных уравнений (2). Тогда вектор-функция $U(x, t) = (V\alpha)(x, t) + (W\beta)(x, t)$ является элементом пространства $\mathcal{H}_{\tau; 1, k-1, \kappa}(G^\pm)$ и при $k \geq 1$ дает решение задачи M^\pm .

Доказательство. Представив пару $\{F^\pm, G^\pm\}$ в виде суммы элементов $\{F^\pm, 0\} + \{0, G^\pm\}$ и воспользовавшись оценками (10), (13), получаем

$$\begin{aligned} \|U(x, t)\|_{1, k-1, \kappa; G^\pm}^2 &= \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2(k-1)} \|U(x, p)\|_{1, p; \Omega^\pm}^2 d\tau \leq \\ &\leq \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|\{F^\pm(x, p), G^\pm(x, p)\}\|_{1/2, p, S_1; -1/2, p, S_2}^2 d\tau = \\ &= \|\{F^\pm(x, t), G^\pm(x, t)\}\|_{1/2, k, \kappa, S_1; -1/2, k, \kappa, S_2}^2 \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с легко проверяемой голоморфностью $U(x, p)$ как функции параметра $p \in \mathbf{C}_\kappa$ со значениями в пространстве $H_1(\Omega^\pm)$ завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В.Д., Гегелша Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976. — 664 с.
2. Чудинович И.Ю. Метод граничных уравнений в задачах динамики упругих сред. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1991. — 135 с.
3. Chudinovich I.Yu., Dumina O.A. Boundary equations in two main dynamic problems for thermoelastic media. // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". — 2000. — 475.— С. 230-240.
4. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. — 295 с.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
6. Агранович М.С., Вишник. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. // Успехи матем. наук. — 1964. — 19, вып. 3. — С. 53-161.

Канонічний інтеграл Вейерштрасса для
субгармонійних функцій нескінченного порядку

Я. В. Васильків, Ю. С. Процик

Львівський національний
університет імені Івана Франка, Україна

Для довільних невід'ємних борелівських в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$) мір μ таких, що $\mu(\{y \in \mathbf{R}^m : |y| \leq r\})r^{2-m} \leq \nu(r)$, $r > 0$, де ν — функція зростання нескінченного порядку, побудовано канонічні інтеграли Вейерштрасса (субгармонійні в \mathbf{R}^m функції u з мірами Ріса $\mu_u = \mu$) і знайдено мажоранти зростання $\lambda(r)$ функцій $B(r, u) = \max\{u(y) : |y| \leq r\}$, природним чином пов'язані з функціями $\nu(r)$. Як наслідок, встановлено аналог одного результату Г. Скоди для цілих в \mathbf{C}^n функцій нескінченного порядку і наведено явні зображення субгармонійних в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$) функцій u нескінченного порядку з мінімальним, у певному сенсі, зростанням функції $B(r, u)$. 2000 Mathematics Subject Classification 31A05.

1. Вступ. Формулювання результатів.

Додатні, зростаючі до $+\infty$, неперервні на $(0, +\infty)$ функції будемо називати *функціями зростання*. Нехай ν — функція зростання. Через M_ν позначатимемо множину невід'ємних борелівських мір в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$) таких, що $0 \notin \text{supp } \mu$ і $n(r; \mu)r^{2-m} \leq \nu(r)$, де $n(r; \mu) = \mu(\{y : |y| \leq r\})$. Скрізь надалі вважатимемо, що $\{y : |y| < 1\} \cap \text{supp } \mu = \emptyset$.

Для субгармонійної в \mathbf{R}^m функції u позначимо $B(r, u) = \max\{u(y) : |y| \leq r\}$, а через μ_u — її міру Ріса. Нехай λ — функція зростання. Субгармонійну функцію u в \mathbf{R}^m , $0 \notin \text{supp } \mu_u$, $u(0) = 0$, називають *функцією скінченного λ -типу*, якщо при деяких $a > 0$, $b > 0$ виконується $B(r, u) \leq a\lambda(br)$ для всіх $r > 1$. Клас таких функцій позначатимемо через Λ_S , а клас субгармонійних функцій u , $0 \notin \text{supp } \mu_u$, $u(0) = 0$, таких, що $\mu_u \in M_\nu$ позначатимемо через S_ν .

В роботі [1] встановлено, що довільна невід'ємна борелівська міра μ в \mathbf{R}^m ($m \geq 3$), $0 \notin \text{supp } \mu$, є мірою Ріса субгармонійної в просторі функції скінченного λ -типу при

$$\lambda(r) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} \frac{dn(t; \mu)}{t^{m-2}}, \quad (1)$$

де $q(t)$ — деяка неспадна, невід'ємна функція така, що інтеграл (1) збігається для довільного $r > 1$. Такі функції $q(t)$ існують для довільної міри μ . Наприклад, $q(t) = n(t; \mu)$ або $\log[n(t; \mu) + 1]$. Зауважимо, що

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} \frac{dn(t; \mu)}{t^{m-2}} \geq \frac{1}{r^{m-1}} \int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)+m-1} dn(t; \mu)$$

і тому, з огляду на теорему Вейерштрасса про зображення (див. [2, с. 159]), згаданий вище результат А. А. Кондратюка дає, зокрема, оцінку зверху на зростання канонічного інтеграла Вейерштрасса в просторі. Відмітимо, що в роботі [3] аналогічний результат встановлено для субгармонійних (точніше δ -субгармонійних [4]) в \mathbb{C} функцій.

В 1981 р. Йо. Вінклер [5] дав непокрашувані, в загальному випадку, оцінки на зростання логарифма максимуму модуля канонічного добутку Вейерштрасса нескінченного порядку

$$P(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{a_j}, p_j\right), \quad E(w, p) = (1-w) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k}\right), \quad p \in \mathbb{N},$$

в термінах лічильної функції $n(t; Z)$ послідовності відмінних від нуля комплексних чисел $Z = \{a_j\}$ без точок скупчення в \mathbb{C} у випадках $p_j = [\sigma \log j]$ та $p_j = [\sigma \log j / \log |a_j|]$, $\sigma > 1$, де $[s]$ — ціла частина числа s . Подальші результати та огляд робіт, пов'язаних з дослідженням зростання логарифма максимуму модуля канонічних добутків Вейерштрасса нескінченного порядку, подано в роботі [6].

Добре відомо, що проблема існування цілої функції мінімального, у певному сенсі, зростання із заданою послідовністю нулів тісно пов'язана з класичними проблемами зображення мероморфних функцій f часткою цілих, зростання логарифмів модулів яких не перевищує зростання неванліннівської характеристики f , і опису інтерполяційних послідовностей деяких класів цілих функцій. З великої кількості праць у вказаних напрямках відмітимо лише роботи [7-16], в яких, на наш погляд, окрім власних результатів подано вичерпну інформацію про найвагоміші дослідження у цих галузях.

Мінімальні мажоранти зростання цілих функцій скінченного та нескінченного порядків знайдено в роботах [16-19]. Зокрема, в роботі [18] побудовано канонічний інтеграл Вейерштрасса нескінченного порядку з мінімальним, у певному сенсі, зростанням його логарифма максимуму модуля. В роботах [20,21] за допомогою методу рядів Фур'є та Фур'є-Лапласа ряд результатів робіт [16-19], а саме результати, пов'язані з проблемою існування цілих функцій мінімального зростання з заданою послідовністю нулів, перенесено на субгармонійні в площині та в просторі функції.

Наведемо таке означення з [20,21].

Означення. Функція зростання λ називається *мінімальною мажорантою зростання для S_ν* , якщо:

1) для довільної міри μ з M_ν існує субгармонійна функція $u \in \Lambda_S$ така, що $\mu_u = \mu$;

2) існує міра μ з M_ν така, що для довільної субгармонійної функції u , міра Ріса μ_u якої співпадає з μ , виконується $\lambda(r) \leq aV(br, u)$ при деяких $a > 0$, $b > 0$ для всіх $r > 1$.

Як вже згадувалось вище, в роботах [20,21] знайдено мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$) функцій з класів S_ν за певних умов на функцію зростання ν . В цій роботі, для більш загальних функцій зростання ν , ми вивчатимемо мажоранти зростання λ субгармонійних функцій в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$), які для довільної міри $\mu \in M_\nu$ мажорують бодай одну субгармонійну функцію u таку, що $\mu_u = \mu$. При цьому на відміну від робіт [20,21], де функції $u \in S_\nu \cap \Lambda_S$ зображалися рядами Фур'є, ми зобразимо такі функції u канонічним інтегралом Вейерштрасса.

Нехай $q \in \mathbf{Z}_+$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^m$ ($m \geq 3$). Позначимо

$$K(x) = -|x|^{2-m}, \quad K_q(x, y) = K(x - y) + \sum_{k=0}^q p_k^{(m-2)/2} \left[\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{|x|^k}{|y|^{k+m-2}},$$

де (x, y) — скалярний добуток в \mathbf{R}^m , а $p_k^{(m-2)/2}(t)$ — *поліноми Гегенбауера*, які визначаються із розвинення

$$(1 - 2t\tau + \tau^2)^{(2-m)/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(m-2)/2}(t)\tau^k, \quad t \in [-1, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

У випадку $m = 2$ для $q \in \mathbf{N}$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^2$ маємо

$$K(x) = \log |x|, \quad K_q(x, y) = K(x - y) - K(y) + \sum_{k=1}^q p_k^0 \left[\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{|x|^k}{|y|^k},$$

де

$$p_k^0(t) = k^{-1} \cos k\psi, \quad \psi = \arccos t, \quad t \in [-1, 1].$$

Зауважимо, що при $m \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \left| p_k^{(m-2)/2}(t) \right| : t \in [-1, 1] \right\} &= p_k^{(m-2)/2}(1) = \\ &= \begin{cases} (k+m-3)! / (k!(m-3)!) & , \quad m \geq 3; \\ k^{-1} & , \quad m = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Неважко показати, що

$$p_k^{(m-2)/2}(1) \leq (m-1)k^{m-3}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad m \geq 2.$$

Окрім того, $p_0^{(m-2)/2}(t) = 1$ для всіх $t \in [-1, 1]$ і $m \geq 3$.

Для довільної додатної визначеної на $[1, +\infty)$ функції $g(r)$ через $\tilde{g}(t)$ позначатимемо функцію $\log g(e^t)$, $t \in \mathbf{R}_+$.

Справедлива така теорема.

Теорема. Нехай ν — функція зростання і $\phi \geq 1$, неспадна, неперервно диференційовна функція такі, що

i) функція $\tilde{\omega}(t) = \tilde{\nu}(t) + \tilde{\phi}(t)$ строго опукла на \mathbf{R}_+ , $\tilde{\omega}(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$;

ii)

$$\int_0^t \exp(-\tilde{\phi}(s)) ds \leq \sigma \tilde{\omega}'(t)$$

для деякої сталої $\sigma > 1$ і всіх $t > 0$.

Тоді для довільної міри $\mu \in M_\nu$ канонічний інтеграл Вейерштрасса

$$u(x) = \int_{|y| \geq 1} K_{q(|y|)}(x, y) d\mu(y), \quad x \in \mathbf{R}^m, \quad m \geq 2, \quad (2)$$

де $q(r) = [\tilde{\omega}'(\log r)]$, $[t]$ — ціла частина числа t , належить до $S_\nu \cap \Lambda_S$ при

$$\lambda(r) = \exp(\tilde{\omega}(\log r)) \max \left\{ 1, \int_0^{\log r} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \right\}, \quad r > 1.$$

Наслідок. Нехай μ — довільна міра з M_ν і нехай функція зростання ν така, що функція $\tilde{\nu}(t)$ строго опукла. Тоді

1) Якщо $\tilde{\nu}(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то висновок теореми справедливий з $q(r) = [\tilde{\nu}'(\log r) + \varepsilon]$ і $\lambda(r) = r^\varepsilon \nu(r)$, $\varepsilon > 0$.

2) Якщо $\int_0^{+\infty} \exp(\tilde{\nu}(t) - \tilde{\nu}(t+b)) dt < +\infty$ при деякому $b > 0$, то висновок теореми справедливий з $q(r) = [\tilde{\nu}'(\log r + b)]$ і $\lambda(r) = \nu(e^b r)$. При цьому, функція зростання λ є мінімальною мажорантою для S_ν .

3) Якщо ж $\log t = O(\tilde{\nu}'(t))$, $t \rightarrow +\infty$, то висновок теореми справедливий з $q(r) = [\tilde{\nu}'(\log r)]$ і $\lambda(r) = \nu(r) \log r$. При цьому, функція зростання λ є мінімальною мажорантою для S_ν .

Зауваження. Пункт 1) цього наслідку складає аналог відповідного результату Г. Скоди, встановленого в [9], а пункт 2) — це аналог результату, отриманого О. Я. Лизун [18] для цілих в площині функцій.

2. Означення та допоміжні результати.

Коротко подамо необхідні нам в подальшому відомості стосовно сферичних гармонік та рядів Фур'є-Лапласа. Будемо дотримуватись позначень, прийнятих в [1].

Сферичною гармонікою або сферичною функцією Лапласа степеня k , $k \in \mathbf{Z}_+$, називається зруження на одиничну сферу S^{m-1} в \mathbf{R}^m однорідного гармонійного полінома степеня k . Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати, як підпростір простору Лебега $L^2(S^{m-1})$ дійснозначних функцій із скалярним добутком

$$(f, g) = \frac{1}{|S^{m-1}|} \int_{S^{m-1}} f(x)g(x)dS(x),$$

де dS — елемент площі сфери S^{m-1} , $|S^{m-1}| = \text{mes } S^{m-1} = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Якщо $\{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ — ортонормована база в цьому підпросторі, то об'єднання по k таких баз

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\}$$

є ортонормованою базою в просторі $L^2(S^{m-1})$.

Рядом Фур'є-Лапласа функції $f \in L^1(S^{m-1})$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Y^{(k)}(x; f),$$

де

$$Y^{(k)}(x; f) = b_1^{(k)}Y_1^{(k)}(x) + b_2^{(k)}Y_2^{(k)}(x) + \dots + b_{a_k}^{(k)}Y_{a_k}^{(k)}(x),$$

$$b_j^{(k)} = (f, Y_j^{(k)}), \quad j = 1, 2, \dots, a_k.$$

Сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x; f)$ можна виразити співвідношеннями

$$Y^{(k)}(x; f) = \frac{2k + m - 2}{(m - 2)|S^{m-1}|} \int_{S^{m-1}} p_k^{(m-2)/2}[(x, y)]f(y)dS(y),$$

де (x, y) — скалярний добуток в \mathbf{R}^m ($m \geq 3$), а $p_k^{(m-2)/2}$ — поліноми Гегенбауера.

Якщо $m = 2$, то вважатимемо, що $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ і $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Тоді для $x = e^{i\theta}$, $y = e^{i\varphi}$, $\{\theta, \varphi\} \subset [0, 2\pi]$ маємо

$$Y^{(k)}(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(\theta - \varphi) f(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad k \in \mathbf{N},$$

та

$$Y^{(0)}(x; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Нехай $u(x)$ — субгармонійна в \mathbf{R}^m ($m \geq 2$), $0 \notin \text{supp } \mu_u$, $u(0) = 0$. Покладемо $u_r(x) = u(rx)$, $r > 0$, $x \in S^{m-1}$. Функції

$$c_k(x, r; u) = Y^{(k)}(x; u_r), \quad k \in \mathbf{Z}_+, \quad x \in S^{m-1},$$

називаються сферичними гармоніками, асоційованими з функцією u . Зауважимо, що [1]

$$c_k(x, r; u) = r^k Y_u^{(k)}(x) + r^k \int_{|y| \leq r} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu_u(y)}{|y|^{k+m-2}} - \frac{1}{r^{k+m-2}} \int_{|y| \leq r} |y|^k p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] d\mu_u(y), \quad (3)$$

де $Y_u^{(k)}$ визначаються із розвинення

$$u(rx) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+} Y_u^{(k)}(x) r^k \quad (4)$$

при достатньо малих $r > 0$, а також

$$c_0(x, r; u) = (m-2) \int_1^r n(t; \mu_u) t^{1-m} dt.$$

При цьому, у випадку $m = 2$

$$c_0(x, r; u) = \int_1^r n(t; \mu_u) t^{-1} dt.$$

3. Доведення теореми.

Спочатку встановимо абсолютну та рівномірну збіжність інтеграла в (2). З огляду на теорему Вейерштрасса про зображення (див. [2, с. 159]), для цього досить довести збіжність при довільному фіксованому $r > 0$ інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^{q(t)+m-1} dn(t; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} I_m(r).$$

Нехай функції ν , ϕ задовольняють умову i). Неважко побудувати гладку строго зростаючу функцію ν^* , для якої $\nu^*(t) = \tilde{\nu}(t) + O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Тому саму функцію $\tilde{\nu}$ вважатимемо такою. Тоді зі строгої опуклості функції $\hat{\omega}(t)$ відносно t , її гладкості та необмеженості при $t \rightarrow +\infty$ відношення $\hat{\omega}(t)/t$ впливає, що $\hat{\omega}'(t)$ строго зростає до $+\infty$ на \mathbf{R}_+ . Отже, при $k \in \mathbf{N}$ маємо: або $\hat{\omega}'(\log t) > k$ при $t \geq 1$, або існує єдине $r_k \geq 1$ таке, що $\hat{\omega}'(\log r_k) = k$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що виконується останнє. Зауважимо, що $r_k \uparrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Нехай σ — стала з умови *ii*) і $r > 0$ — фіксоване. Позначимо $l = l(\sigma, r) = \min\{k \in \mathbb{N} : \sigma^2 r \leq r_{k+1}\}$. Маємо

$$I_m(r) = \int_1^{r_1} \left(\frac{r}{t}\right)^{m-1} dn(t; \mu) + \sum_{k=1}^l \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{r}{t}\right)^{k+m-1} dn(t; \mu) + \sum_{k=l+1}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{r}{t}\right)^{k+m-1} dn(t; \mu). \quad (5)$$

Зважаючи на те, що перші два доданки в (5) обмежені, досить встановити лише обмеженість останнього доданку в (5). Беручи в ньому інтеграл під знаком суми частинами, знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{k=l+1}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{r}{t}\right)^{k+m-1} dn(t; \mu) &\leq \sum_{k=l+1}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{r}{r_{k+1}}\right)^{k+m-1} n(r_{k+1}; \mu) + \right. \\ &+ (k+m-1)r^{k+m-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{n(t; \mu)}{t^{k+m}} dt \left. \right\} \leq \sum_{k=l+1}^{+\infty} \left\{ r^{k+m-1} \exp(\hat{\omega}(\log r_{k+1}) - \right. \\ &- (k+1)\log r_{k+1}) + (k+m-1)r^{k+m-1} \int_{\log r_k}^{\log r_{k+1}} \exp(\hat{\omega}(t) - \\ &\left. - (k+1)t) \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \right\}. \end{aligned}$$

Далі, враховуючи, що функція $\hat{\omega}(t) - kt$ спадає на $[0, \log r_k]$ і зростає на $[\log r_k, +\infty)$, одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=l+1}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{r}{t}\right)^{k+m-1} dn(t; \mu) &\leq \sum_{k=l+1}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{r}{r_{l+1}}\right)^{k+1} r^{m-2} \exp(\hat{\omega}(\log r_{l+1})) + \right. \\ &+ (k+m-1)r^{k+m-1} \exp(\hat{\omega}(\log r_k) - k \log r_k) \frac{1}{r_k} \times \\ &\times \int_{\log r_k}^{\log r_{k+1}} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \left. \right\} \leq r^{m-2} \exp(\hat{\omega}(\log r_{l+1})) \sum_{k=l+1}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{k+1} + \right. \\ &\left. + (k+m-1) \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{k+1} \int_0^{\log r_{k+1}} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

З умови *ii*) випливає, що

$$\int_0^{\log r_k} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \leq \sigma^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=l+1}^{+\infty} (k+m-1) \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{k+1} \int_0^{\log r_{k+1}} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt &\leq \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{+\infty} (k+m-1) \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{k+1} < +\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Враховуючи (5) – (7), отримуємо $I_m(r) < +\infty$. Отже, на підставі теореми Вейерштрасса про зображення, інтеграл в (2) збігається абсолютно і рівномірно для $|x| \leq R$ при довільному фіксованому $R > 0$. При цьому, $\mu_u = \mu \in M_\nu$, $u(0) = 0$ і $\{y : |y| < 1\} \cap \text{supp } \mu_u = \emptyset$, тобто $u \in S_\nu$.

Залишилося показати, що $u \in \Lambda_S$ при

$$\lambda(r) = \exp(\widehat{\omega}(\log r)) \max \left\{ 1, \int_0^{\log r} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \right\}, \quad r > 1.$$

Для цього встановимо, що

$$|c_k(x, r; u)| \leq (m^2 - 1)k^{m-2}\sigma^k \lambda(r) \tag{8}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$), $r > 1$, і

$$c_0(x, r; u) \leq (m - 1)\lambda(r) \tag{9}$$

для всіх $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$), $r > 1$.

Спочатку зауважимо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$), $r > 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{m-2}} \left| \int_{|y| \leq r} \left| \frac{y}{r} \right|^k p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] d\mu(y) \right| &\leq \frac{p_k^{(m-2)/2}(1)}{r^{m-2}} \int_{|y| \leq r} d\mu(y) = \\ &= p_k^{(m-2)/2}(1) \frac{n(r; \mu)}{r^{m-2}} \leq (m - 1)k^{m-3}\nu(r) \leq (m - 1)k^{m-2}\lambda(r). \end{aligned} \tag{10}$$

Тепер обчислимо сферичні гармоніки $Y_u^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in S^{m-1}$, у розвиненні (4). Маємо

$$u(rx) = \int_{1 \leq |y| < r_1} K_0(rx, y) d\mu(y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{r_p \leq |y| < r_{p+1}} K_p(rx, y) d\mu(y), \quad x \in S^{m-1}, \quad r > 0.$$

Добре відомо [22], що k -та сферична гармоніка $Y^{(k)}(x, r; K_p)$, асоційована з функцією $f_r(x) = K_p(rx, y)$, дорівнює $Q_k^m(r, |y|) p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right]$, де величини $Q_k^m(r, t)$ визначаються наступним чином:

$Q_k^m(r, t)$	$t < r$	$t \geq r$
$k > p$	$-t^k / r^{k+m-2}$	$-r^k / t^{k+m-2}$
$1 \leq k \leq p$	$r^k / t^{k+m-2} - t^k / r^{k+m-2}$	0
$k = 0$	$K(r) - K(t)$	0

Тоді при $r \in (0, 1)$, враховуючи, що

$$(p = q(|y|) \leq \widehat{\omega}'(\log |y|) < k) \iff (|y| < r_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

знаходимо

$$Y_u^{(k)}(x) = - \int_{|y| < r_k} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}, \quad x \in S^{m-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

а також $Y_u^{(0)}(x) = 0$, $x \in S^{m-1}$.

Отже, при $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$) маємо

$$J_k(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} Y_u^{(k)}(x) + \int_{|y| \leq r} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} =$$

$$= \begin{cases} \int_{r_k \leq |y| \leq r} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] |y|^{2-k-m} d\mu(y) & , r \geq r_k; \\ - \int_{r < |y| < r_k} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] |y|^{2-k-m} d\mu(y) & , r < r_k. \end{cases} \quad (11)$$

При $r \geq r_k$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$), отримуємо, що

$$|J_k(x, r)| \leq p_k^{(m-2)/2} (1) \int_{r_k}^r \frac{dn(t; \mu)}{t^{k+m-2}} \leq (m-1)k^{m-3} \left(\frac{n(r; \mu)}{r^{k+m-2}} + \right.$$

$$\left. + (k+m-2) \int_{r_k}^r \frac{n(t; \mu)}{t^{k+m-1}} dt \right) \leq (m-1)k^{m-3} \left(\frac{\nu(r)}{r^k} + \frac{k+m-2}{r^k} \lambda(r) \right) \leq \quad (12)$$

$$\leq (k+m-1)(m-1)k^{m-3} \frac{\lambda(r)}{r^k} \leq m(m-1)k^{m-2} \sigma^k \frac{\lambda(r)}{r^k}.$$

При $1 < r < r_k$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$) — аналогічно

$$|J_k(x, r)| \leq p_k^{(m-2)/2} (1) \int_r^{r_k} \frac{dn(t; \mu)}{t^{k+m-2}} \leq$$

$$\leq (m-1)k^{m-3} \left(\frac{n(r_k; \mu)}{r_k^{k+m-2}} + (k+m-2) \int_r^{r_k} \frac{n(t; \mu)}{t^{k+m-1}} dt \right) \leq \quad (13)$$

$$\leq (m-1)k^{m-3} \left(1 + (k+m-2) \int_0^{\log r_k} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt \right) \frac{\exp(\tilde{\omega}(\log r))}{r^k} \leq$$

$$\leq m(m-1)k^{m-2} \sigma^k \frac{\lambda(r)}{r^k}.$$

Таким чином, із (3) та (10)–(13) отримуємо (8). Окрім того,

$$c_0(x, r; u) = (m-2) \int_1^r \frac{n(t; \mu)}{t^{m-2}} \frac{dt}{t} \leq (m-2) \int_0^{\log r} \exp(\tilde{\omega}(t) - \tilde{\phi}(t)) dt \leq (m-1)\lambda(r)$$

при $m \geq 3$ і

$$c_0(x, r; u) = \int_1^r \frac{n(t; \mu)}{t} dt \leq \lambda(r)$$

при $m = 2$, тобто маємо також і (9).

І, нарешті, використаємо той факт, що інтеграл Пуасона від субгармонійної функції є її найкращою гармонійною мажорантою у відповідній кулі. Нехай

$$\frac{1}{|S^{m-1}|} \frac{R^{m-2}(R^2 - r^2)}{(R^2 - 2Rr(x, y) + r^2)^{m/2}} =$$

$$= \frac{1}{|S^{m-1}|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+m-2}{m-2} \left(\frac{r}{R} \right)^k p_k^{(m-2)/2} [(x, y)]$$

— ядро Пуасона, де $\{x, y\} \subset S^{m-1}$ ($m \geq 3$), $r < R$. При цьому, у випадку $m = 2$, $x = e^{i\theta}$, $y = e^{i\varphi}$, $\{\theta, \varphi\} \subset [0, 2\pi]$, маємо

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k(\theta - \varphi).$$

Тоді при $r \in (1, R)$ виконується (див., наприклад, [2, с. 66], або [1])

$$\begin{aligned} u(rx) &\leq \frac{R^{m-2}}{|S^{m-1}|} \int_{S^{m-1}} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr(x,y) + r^2)^{m/2}} u(Ry) dS(y) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k c_k(x, R; u) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k |c_k(x, R; u)|, \quad x \in S^{m-1}. \end{aligned}$$

Поклавши $R = \sigma^2 r$, де $\sigma > 1$ як і вище стала з умови ii), і врахувавши співвідношення (8) та (9), знайдемо

$$u(rx) \leq (m-1)\lambda(\sigma^2 r) + (m^2-1)\lambda(\sigma^2 r) \sum_{k=1}^{+\infty} k^{m-2} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^k \leq a\lambda(\sigma^2 r)$$

при деякій сталій $a > 0$ і всіх $r > 1$, $x \in S^{m-1}$ ($m \geq 2$). Останнє ж негайно імплікує співвідношення $B(r, u) \leq a\lambda(\sigma^2 r)$ для всіх $r > 1$, що завершує доведення теореми.

4. Доведення наслідку.

Нехай $\mu \in M_\nu$, ν — функція зростання. Спочатку встановимо справедливість висновку пункту 1) наслідку.

Нехай функція $\tilde{\nu}(t)$ строго опукла на \mathbf{R}_+ і $\tilde{\nu}(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Покладемо $\phi(t) = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$. Тоді функція $\hat{\omega}(t) = \tilde{\nu}(t) + \varepsilon t$ строго опукла на \mathbf{R}_+ і $\hat{\omega}(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, тобто умова i) теореми виконана. Окрім того, $\int_0^t e^{-\varepsilon s} ds = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$, тобто умова ii) теореми також виконується.

За теоремою канонічний інтеграл Вейєрштрасса (2) з $q(t) = [\tilde{\nu}'(\log t) + \varepsilon]$ належить до $S_\nu \cap \Lambda_S$ при

$$\lambda(r) = \exp(\tilde{\nu}(\log r) + \varepsilon \log r) \max \left\{ 1, \int_0^{\log r} e^{-\varepsilon t} dt \right\} = O(\nu(r)r^\varepsilon), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отже, висновок пункту 1) наслідку доведено.

Нехай тепер виконуються умови пункту 2) наслідку. Покладемо $\tilde{\phi}(t) = \tilde{\nu}(t+b) - \tilde{\nu}(t)$. Оскільки $\tilde{\nu}(t)$ строго опукла на \mathbf{R}_+ , то функція $\tilde{\phi}(t)$ зростає на \mathbf{R}_+ . Тепер покажемо, що умова строгої опуклості функції $\tilde{\nu}(t)$ на \mathbf{R}_+ та умова

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\tilde{\phi}(t)) dt < +\infty \tag{14}$$

імплікують виконання умов *i*), *ii*) теореми. Справді, маємо $\hat{\omega}(t) = \tilde{\nu}(t+b)$ — строго опукла на \mathbf{R}_+ і $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\omega}(t)/t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\omega}'(t)$. Припустимо, що ця границя скінченна і не перевищує C . Тоді $0 < \tilde{\nu}(t+b) - \tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}'(t_b)b \leq Cb$, $t < t_b < t+b$, що суперечить співвідношенню (14). Отже, умова *i*) теореми виконана. Виконання умови *ii*) теореми очевидне.

За теоремою канонічний інтеграл Вейерштрасса (2) з $q(t) = [\tilde{\nu}'(\log t + b)]$ належить до $S_\nu \cap \Lambda_S$ при

$$\lambda(r) = \exp(\tilde{\nu}(\log r + b)) \max \left\{ 1, \int_0^{\log r} \exp(\tilde{\nu}(t) - \tilde{\nu}(t+b)) dt \right\} = O(\nu(e^b r)),$$

$r \rightarrow +\infty$.

Доведення того факту, що функція зростання $\lambda = \nu$ є мінімальною мажорантою для S_ν дано в [20].

І, нарешті, доведемо твердження пункту 3) наслідку. Покладемо $\tilde{\phi}(t) = 0$. Нехай $\log t \leq b\tilde{\nu}'(t)$, $t > 0$, де b — деяка додатна стала. Маємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\nu}(t)/t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\nu}'(t) = +\infty$. Отже, умова пункту *i*) теореми виконана. Умова пункту *ii*) цієї теореми також виконується, оскільки

$$\int_0^t \exp(-\tilde{\phi}(s)) ds = t = e^{\log t} \leq e^{b\tilde{\nu}'(t)} = \sigma^{\tilde{\nu}'(t)}, \quad \sigma = e^b, \quad t > 0.$$

За теоремою канонічний інтеграл Вейерштрасса (2) з $q(r) = [\tilde{\nu}'(\log t)]$, $t > 1$, належить до $S_\nu \cap \Lambda_S$ при

$$\lambda(r) = \exp(\tilde{\nu}(\log r)) \log r = \nu(r) \log r, \quad r > 1.$$

Залишилося показати, що $\lambda(r)$ є мінімальною мажорантою для S_ν . Спочатку покажемо, що

$$\tilde{\nu}(t) + \log t \leq \tilde{\nu}(t+b), \quad t > 0.$$

Справді, маємо

$$\tilde{\nu}(t+b) - \tilde{\nu}(t) = \int_t^{t+b} \tilde{\nu}'(s) ds \geq \frac{1}{b} \int_t^{t+b} \log s ds \geq \log t.$$

Далі, як і в роботі [20], розглянемо борелівську міру μ , $0 \notin \text{supp } \mu$, таку, що

$$\frac{1}{2} \lambda(r) \leq \frac{1}{2} \exp(\tilde{\nu}(\log r + b)) \leq n(e^b r; \mu) (e^b r)^{2-m} \leq \exp(\tilde{\nu}(\log r + b)).$$

Тоді для довільної функції $u \in S_\nu$, $u(0) = 0$, $\mu_u = \mu$ маємо, враховуючи нерівність $N(r; u) = (m-2) \int_0^r n(t; \mu) t^{1-m} dt \leq B(r, u)$ при $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} \lambda(r) &\leq 2n(e^b r; \mu) (e^b r)^{2-m} \leq 4(m-2)n(e^b r; \mu) \int_{e^b r}^{2e^b r} t^{1-m} dt \leq \\ &\leq 4N(2e^b r; u) \leq 4B(2e^b r, u). \end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи нерівність $N(r; u) = \int_0^r n(t; \mu)t^{-1}dt \leq B(r, u)$ при $m = 2$, маємо

$$\lambda(r) \leq 2n(e^b r; \mu) \leq \frac{2}{\log 2} N(2e^b r; u) \leq \frac{2}{\log 2} B(2e^b r, u).$$

Отже, умова пункту 2) означення також виконана. Наслідок доведено.

Автори висловлюють щирю подяку професорам С. Ю. Фаворову та А. А. Кондратюку за значну кількість істотних зауважень та раціональних пропозицій, які дозволили зробити виклад результатів нашої праці дещо прозорішим і більш повним.

Робота виконана при підтримці INTAS, проект 99-00089.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кондратюк А. А. Сферические гармоника и субгармонические функции. // Матем. сб. - 1984. - 125. - 2. - С. 147-166.
2. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. - М.: Мир, 1980. - 304 с.
3. Васильків Я. В. Некоторые свойства δ -субгармонических функций конечного λ -типа. - В сб. "Материалы 9 Конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 10-14 мая 1982 г., ч. 2" - 1982. - С. 16-22 / Рукопись предст. Ин-том прик. пробл. мех. и мат. АН УССР. Деп. в ВИНТИ 10 января 1984, 324-84.
4. Arsove M. G. Function representable as differences of subharmonic functions. // Trans. Amer. Math. Soc. - 1953. - 75. - P. 327-365.
5. Winkler J. Über minimale Maximalbeträge kanonischer Weierstassprodukte unendlicher Ordnung. // Result. Math. - 1981. - 4. - 1. - P. 102-116.
6. Bergweiler W. Canonical product of infinite order. // J. Reine Angew. Math. - 1992. - 430. - P. 85-107.
7. Гольдберг А. А. О представлении мероморфных функций в виде частного целых функций. // Изв. Высш. Учебн. Завед., Математика. - 1972. - 10. - С. 13-17.
8. Bergweiler W. A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros. // J. d'Analyse Math. - 1994. - 63. - P. 121-129.
9. Skoda H. Sous-ensembles analytique ordre fini ou infini dans C^n . // Bull. Soc. Math. France. - 1972. - 100 - 4. - P. 353-408.

10. Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции. // Изв. РАН, Сер. матем.– 1993.– 57.– 1.– С. 129-146.
11. Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка. // Изв. РАН, Сер. матем.– 1993.– 57.– 3.– С. 70-91.
12. Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций. // Матем. Замет. (подано до друку)
13. Khabibullin B. N. The representation of meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in C^n : survey of some results. // MAG (подано до друку)
14. Винницький Б. В., Шепарович І. Б. Про інтерполяційні послідовності деяких класів цілих функцій. // Математичні Студії.– 1999.– 12.– 1.– С. 76-84.
15. Шепарович І. Б. Інтерполяційні послідовності деяких класів функцій, аналітичних в крузі.– Автореф. дис. ... канд. фіз.- мат. наук Львів.– 2001.– 16 с.
16. Kondratyuk A. A., Vasylykiv Ya. V. Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions. // CMFT (подано до друку)
17. Васильків Я. В., Лизун О. Я. Про мажоранти зростання цілих функцій. // Вісн. Львів. у-ту.– 2001.– 59.– С. 51-56.
18. Лизун О. Я. Зображення цілих функцій мінімального зростання канонічним добутком. // Мат. методи та фіз.- мех. поля– 2001.– 44.– 3. (в друці)
19. Васильків Я. В., Кондратюк А. А. Мінімальні мажоранти зростання цілих функцій і зображення часткою мероморфних.// Доп. НАН України. (в друці)
20. Васильків Я. В., Тарасюк С. І. Мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в R^m функцій нескінченного порядку. // Вісник Харківського національного університету, Сер. "Математика, прикладна математика і механіка" – 2001. – 514.– С. 177-182.
21. Васильків Я. В. Про зростання субгармонійних в C функцій нескінченного порядку.// Укр. мат. журн. (прийнято до друку)
22. Rao N. V., Shea D. F. Growth problems for subharmonic functions of finite order in space.// Trans. Amer. Math. Soc.– 1977.– 230.– P. 347-370.

Динамика пластины, взаимодействующей с вязкой несжимаемой жидкостью

И. И. Иевлев

Харьковский национальный университет, Украина

В работе рассматривается динамика круглой пластины, закрывающей цилиндрический сосуд, полностью заполненный вязкой несжимаемой жидкостью. Задача решается приближенно с привлечением метода Галеркина и преобразования Лапласа по времени. Приведенный алгоритм решения может служить основой для технических расчетов определения времени затухания вредных колебаний в демпфирующих устройствах.
2000 *Mathematics Subject Classification* 76D05, 74K20.

В основном демпфирующие устройства, применяемые в технике, используют явление рассеяния энергии при протекании вязкой жидкости через узкие каналы. В этом случае проблемы гидродинамики сводятся к проблемам гидравлики, для которых имеется достаточно много хорошо разработанных методик расчета. В настоящей работе рассматривается упрощенная модель демпфирующего устройства, применяемого для гашения пространственных вредных колебаний конструктивных элементов, выполненных в виде тонкой пластины (люки топливных баков летательных аппаратов, большие зеркала телескопов,...).

Пусть вязкая несжимаемая жидкость полностью заполняет прямой круговой цилиндр радиуса R_0 и высоты h . Дно цилиндра твердое, стенки проницаемы для жидкости. Примем следующие предположения: для пластины выполняется гипотеза Кирхгофа [1]; деформации в срединной поверхности пластины отсутствуют; пластина по периметру шарнирно оперта; давление над пластиной и на боковой стенке цилиндра равно атмосферному; действием силы тяжести пренебрегаем; движения пластины и жидкости осесимметричные и малые. Последнее предположение позволяет линеаризовать уравнения и граничные условия.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат в центре дна сосуда, и осью Oz , совпадающей с осью цилиндра. Обозначим через Ω внутреннюю область сосуда: $(0 \leq r < R_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < h)$, Σ_0 срединную поверхность пластины в равновесии: $(z = h)$, Σ_1 дно сосуда: $(z = 0)$, Σ_2 боковую поверхность цилиндра: $(r = R_0)$.

Тогда краевая задача в линейной постановке имеет вид [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\Omega) \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] \quad (\Omega) \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\Omega) \quad (3)$$

$$2\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} - p = 0 \quad (\Sigma_0) \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v_z \quad (\Sigma_0) \quad (5)$$

$$v_r = 0 \quad (\Sigma_0) \quad (6)$$

$$v_r = 0, \quad v_z = 0 \quad (\Sigma_1) \quad (7)$$

$$w = 0, \quad \nu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (1 - \nu_0) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \quad (L_0) \quad (8)$$

$$\int_0^{R_0} r \frac{\partial w}{\partial t} dr + R_0 \int_0^h v_r \Big|_{r=R_0} dz = 0 \quad (9)$$

Здесь v_r, v_z – радиальная и вертикальная составляющие скорости движения жидкости, ρ, ρ_0 – плотности жидкости и материала пластины, p – давление, w – перемещение срединной поверхности пластины вдоль оси Oz , $D = 2h_0^3 E_0 / 3(1 - \nu_0^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, E_0, ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, $L_0 = \Sigma_2 \cap \Sigma_0$.

Для корректной постановки задачи динамики вязкой жидкости в сосуде требуется дополнительное граничное условие на Σ_2 . Примем следующее допущение: растекание жидкости вне цилиндра соответствует течению Пуазейля между параллельными твердыми стенками [2]. Тогда можно считать, что вертикальная составляющая скорости v_z на Σ_2 равна нулю, а радиальная составляющая v_r на Σ_2 имеет параболический профиль

$$v_z = 0, \quad v_r = 6U_R(1 - z/h)z/h \quad (10)$$

где U_R – некоторая неизвестная константа, определяемая из условия (9) равенства расхода жидкости через Σ_0 и Σ_2 .

Будем считать глубину жидкости малой по сравнению с шириной сосуда: $h \ll R_0$. В этом случае уравнения (2)–(3), согласно теории мелкой воды, упрощаются [2]

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (11)$$

Учитывая малость глубины жидкости, представим зависимости v_r , v_z от переменной z в виде полиномов, удовлетворяющих условиям (5-7)

$$v_r = 6U(1 - z/h)z/h, \quad v_z = \frac{\partial w}{\partial t}z/h \quad (12)$$

Интегрирование второго уравнения (11) по z в этом случае дает зависимость для давления $p(t, r, z) = p_0 - [(\rho z^2)/(2h)][(\partial^2 w)/(\partial t^2)]$, где $p_0 = p_0(t, r) = p(t, r, 0)$; $p_0(t, R_0) = 0$.

Уравнение (1) и первое уравнение в (11) заменим осредненными по глубине

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU) = 0, \quad \rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\rho h}{6} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{12\nu}{h^2}U \quad (13)$$

Исходя из уравнений (4), (5), (11), (13), можно получить одно уравнение относительно неизвестной $w = w(t, r)$, которое в данном приближении имеет вид

$$\frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{12\nu}{h^2} \frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta^3 w = 0 \quad (14)$$

Это уравнение дополняется граничными условиями в точках контура L_0

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \quad (15)$$

и начальным условиями

$$w(0, r) = w_0(r), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, r) = w_1(r) \quad (16)$$

Для решения краевой задачи (14)–(16) воспользуемся преобразованием Лапласа по времени. Тогда для изображения $W = W(s, r)$, где s – комплексный параметр, получим следующие соотношения

$$D\Delta^3 W - \left(\frac{\rho}{h}s^2 + \frac{12\nu}{h^3}s\right)W + \left(\frac{\rho}{h}s + \frac{12\nu}{h^3}\right)w_0 + \frac{\rho}{h}w_1 = 0 \quad (17)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0 \quad (r = R_0)$$

Приближенное решение задачи (17) будем разыскивать в виде отрезка ряда Фурье-Бесселя [3]

$$W(s, r) = \sum_{k=1}^n A_k(s)J_0(\mu_k r/R_0) \quad (18)$$

где J_0 - функция Бесселя нулевого порядка, μ_k - ее корни.

Систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $A_k(s)$ получим из второго граничного условия (17) и ортогональности невязки уравнения (17) (после подстановки в него представления (18)) к $(n-1)$ функциям $1, r, \dots, r^{n-2}$ в смысле скалярного произведения в $L_{2,r}(0, R_0)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k \mu_k J_1(\mu_k) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n A_k \left[D(\mu_k/R_0)^6 + \frac{\rho}{h} s^2 + \frac{12\nu}{h^3} s \right] \int_0^{R_0} r^{m+1} J_0(\mu_k r/R_0) dr &= \\ = \left(\frac{\rho}{h} s + \frac{12\nu}{h^3} \right) \int_0^{R_0} r^{m+1} w_0(r) dr + \frac{\rho}{h} \int_0^{R_0} r^{m+1} w_1(r) dr & \end{aligned} \quad (19)$$

$m = 0, 1, \dots, n-2$.

После нахождения коэффициентов $A_k(s)$ посредством обратного преобразования Лапласа переходим от изображения $W(s, r)$ к оригиналу $w(t, r)$.

Рассмотрим пример, когда в (18) $n = 2$ и начальные условия имеют вид $w_0(r) = bJ_0(\mu_1 r/R_0)$, $w_1(r) = 0$

В этом случае решение имеет вид

$$w(t, r) = b \exp\left(-\frac{6\nu}{\rho h^2} t\right) \frac{\sin(\omega t + \psi)}{\omega} \times \quad (20)$$

$$\times [0.892J_0(2.41r/R_0) + 0.515J_0(5.52r/R_0)]$$

где

$$\omega = \sqrt{36.83 \frac{Dh}{\rho R_0^6} - \frac{36\nu^2}{\rho^2 h^4}}, \quad \psi = \arctan\left(\frac{\omega h^2 \rho}{6\nu}\right) \quad (21)$$

Отсюда видно, что решение задачи (14)-(16) отражает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания

$$d = (6\pi\nu)/(\rho\omega h^2)$$

Зависимость декремента затуханий от толщины слоя жидкости h и от вязкости ν изображена на рис.1 для следующих значений физических параметров: $R_0 = 0.2$ м, $E = 20.5 \cdot 10^{10}$ н м⁻², $\nu_0 = 0.28$, $\rho = 900$ кг м⁻³, $\nu = 0.1 \div 2$ н с м⁻², $h = 0.01 \div 0.05$ м; для рис.1а) - $\nu = 0.66$ н с м⁻², для рис.1б) - $h = 0.012$ м. Из графиков видно, что d с увеличением толщины слоя уменьшается, а с увеличением ν растет. Значительное увеличение вязкости или уменьшение толщины слоя приводит к тому, что движения пластины и жидкости перестают носить характер колебаний.

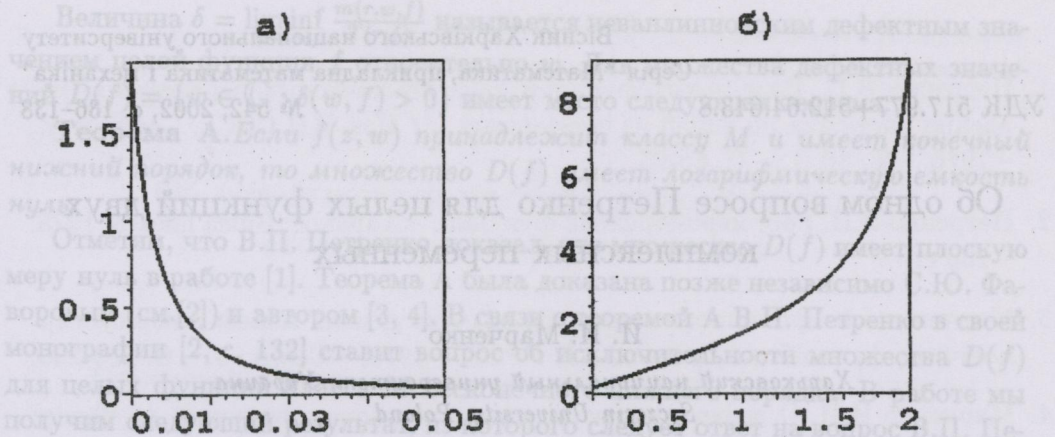


Рис. 1: Зависимость декремента затухания а) от толщины слоя и б) от вязкости

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. - М.: Наука, - 1979. - 320 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, - 1970. - 904 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, - 1970. - 720 с.

Об одном вопросе Петренко для целых функций двух
комплексных переменных

И. И. Марченко

Харьковский национальный университет, Украина
Szczecin University, Poland

Строится целая функция двух переменных, медленно растущая по одной из них, для которой множество дефектных значений совпадает со всей комплексной плоскостью. Этот пример дает ответ на вопрос В.П. Петренко. 2000 *Mathematics Subject Classification* 30D15, 30D35.

Напомним основные величины, характеризующие распределение значений целых функций двух комплексных переменных, введенных В.П. Петренко в работе [1]. Пусть $f(z, w)$ — целая функция двух комплексных переменных такая, что $f(z_0, w) \neq \text{const}$ для каждого фиксированного $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z, w_0) \neq \text{const}$ для каждого фиксированного $w_0 \in \mathbb{C}$. Пусть $M(z, R, f) = \max_{|w|=R} |f(z, w)|$.

Для каждого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ положим

$$m(r, w, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{M(re^{i\theta}, 1 + |w|, f)}{|f(re^{i\theta}, w)|} d\theta, \quad (21)$$

$$T(r, R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, R, f) d\theta.$$

Функция $f(z, w)$ принадлежит классу M , если для каждого $x \geq 1$ имеет место

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T(1, r^x, f)}{T(r, 1, f)} = C(x, f) < \infty.$$

Если функция f принадлежит классу M , тогда функция $T(r, f) := T(r, 1, f)$ называется характеристикой этой функции. По характеристике естественным образом определяется порядок и нижний порядок функции f из класса M :

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Величина $\delta = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, w, f)}{T(r, f)}$ называется неванлинновским дефектным значением целой функции f относительно w . Для множества дефектных значений $D(f) = \{w \in \mathbb{C} : \delta(w, f) > 0\}$ имеет место следующая теорема.

Теорема А. Если $f(z, w)$ принадлежит классу M и имеет конечный нижний порядок, то множество $D(f)$ имеет логарифмическую емкость нуль.

Отметим, что В.П. Петренко доказал, что множество $D(f)$ имеет плоскую меру нуль в работе [1]. Теорема А была доказана позже независимо С.Ю. Фаворовым (см. [2]) и автором [3, 4]. В связи с теоремой А В.П. Петренко в своей монографии [2, с. 132] ставит вопрос об исключительности множества $D(f)$ для целых функций класса M бесконечного нижнего порядка. В работе мы получим следующий результат, из которого следует ответ на вопрос В.П. Петренко.

Теорема 1. Существует целая функция из класса M бесконечного нижнего порядка, для которой множество дефектных значений совпадает со всей комплексной плоскостью.

Доказательство. Рассмотрим целую функцию

$$g(z, w) = e^{(z+w)e^z}.$$

Покажем, что $g(z, w)$ принадлежит классу M .

$$M(z, R, g) = \max_{|w|=R} |e^{(z+w)e^z}| = |e^{ze^z}| e^{Re^{r \cos \theta}},$$

где $z = re^{i\theta}$. Отсюда

$$T(r, R, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, R, g) d\theta = R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} d\theta = R\varphi(r),$$

где $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} d\theta > \frac{1}{3} e^{r/2}$. Таким образом, для всех $x \geq 1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(1, r^x, g)}{T(r, 1, g)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(1)r^x}{\varphi(r)} = 0.$$

Следовательно, функция $g(z, w)$ принадлежит классу M . Вычислим дефект этой функции в точке $w \in \mathbb{C}$.

$$m(r, w, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{M(re^{i\theta}, 1 + |w|, g)}{|g(re^{i\theta}, w)|} d\theta =$$

$$(1 + |w|)\varphi(r) - |w| \arg w,$$

Легко видеть, что $T(r, g) = T(r, 1, g) = \varphi(r)$. Следовательно, для всех $w \in \mathbb{C}$ $\delta(w, g) = 1 + |w| \geq 1$. Теорема 1 доказана.

Это исследование частично поддерживается грантом INTAS-99-0089.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Петренко В.П. Рост целых функций двух комплексных переменных, медленно растущих по одной из переменных. // Изв. АН СССР. Серия мат., - 1976. - Т. 40, 1. - С. 65-95.
- 2. Петренко В.П. Рост мероморфных функций. - Харьков: Вища школа, 1978. - 136 с.
- 3. Марченко І.І. Зростання та розподіл значень деяких класів плюрісубгармонічних функцій. // Доповіді АН УРСР. - 1979. - Сер.А, 4. - С. 259-263.
- 4. Марченко И.И. О дефектах плюрісубгармонических функций. // Вісник Харківського університету. Сер. матем., прикл. матем. і механіка. - 1999. - 444. - С. 89-93.

Покажем, что $\psi(w, z)$ принадлежит классу M .

Напомним основные свойства, характеризующие распределение значений целых функций двух комплексных переменных. Пусть $f(z, w)$ — целая функция двух комплексных переменных такая, что $f(z_0, w) \neq \infty$ для каждого фиксированного $z_0 \in \mathbb{C}$. Пусть $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z, w)|$.

Для каждого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ пусть $\psi(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, f) d\theta$.

$$\psi(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, f) d\theta$$

$$\psi(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, f) d\theta$$

$$0 = \frac{\psi(r, w)}{\psi(r, w)} \lim_{r \rightarrow \infty} = \frac{T(r, f)}{T(r, f)} \lim_{r \rightarrow \infty}$$

Функция $f(z, w)$ принадлежит классу M , если для каждого $\epsilon \geq 1$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} = C(\epsilon, f)$$

Если функция f принадлежит классу M , то функция $T(r, f) = T(r, 1, f)$ называется ее характеристикой. Функция $\psi(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, f) d\theta$ называется ее характеристикой по w . Теорема 1. Пусть $f(z, w)$ принадлежит классу M . Тогда $\psi(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log M(re^{i\theta}, f) d\theta$.

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

Об устойчивости системы двух связанных
стохастических осцилляторов

Э. Ю. Железнякова

Харьковский государственный экономический университет, Украина

В работе изучается система двух линейных связанных осцилляторов со случайными марковскими конечнозначными коэффициентами. Получены точные уравнения для моментов первого и второго порядка решения, основанные на переходе к соответствующей системе интегральных уравнений Вольтерра и усреднении итераций этих уравнений. При этом анализ устойчивости в среднем или среднеквадратичном сводится к исследованию корней соответствующего характеристического полинома.

Ряд прикладных задач (например, анализ взаимодействия колебаний в открытых неоднородных резонаторах [1] и другие) приводит к необходимости изучать пары связанных стохастических осцилляторов. Для вероятностного анализа линейных дифференциальных уравнений в настоящее время разработано достаточно много как точных, так и приближенных методов [2, 3, 5, 6]. Однако, если исходное дифференциальное уравнение или система уравнений имеет комплекснозначные решения, то применение этих методов требует, чаще всего, предварительного отделения вещественной и мнимой частей уравнения, что существенно затрудняет доведение результата до численных расчетов, необходимых для решения прикладных задач. В то же время, если ограничиться специальными классами случайных возмущений, то можно предложить простой способ получения таких уравнений для моментов первого и второго порядка исходной стохастической системы в общем случае, который основан на усреднении итераций соответствующего интегрального уравнения Вольтерра и не требует работы с распределениями вероятностей решения, что позволяет рассматривать и комплекснозначные решения.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_1^2 (1 + n(t)) A_1 + k_{12} \frac{dA_2}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 A_2}{dt^2} + \omega_2^2 (1 + n(t)) A_2 + k_{21} \frac{dA_1}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где $n(t)$ - двузначный однородный марковский процесс, принимающий значения ± 1 , причем смена знаков происходит в случайные моменты времени, которые распределены по закону Пуассона с параметром v .

Целью настоящей работы является исследование устойчивости в среднем систем типа (1) в пространстве параметров k_{12}, k_{21}, v . Такого рода проблема возникает при изучении взаимодействия модовых колебаний в резонаторах, заполненных статистически нестационарной средой [8]. Для удобства запишем пару переменных A_1 и A_2 в виде вектора \vec{a} . Система переписывается в виде:

$$\frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} + \begin{pmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{pmatrix} \frac{d \vec{a}}{dt} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \vec{a} = \begin{pmatrix} n(t) & 0 \\ 0 & n(t) \end{pmatrix} \vec{a}.$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \vec{a} = \hat{N} \vec{a}, \quad \text{где } \hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 & k_{12} \frac{d}{dt} \\ k_{21} \frac{d}{dt} & \frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{N} = n(t) \cdot I.$$

Запишем решение системы в форме Коши:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 + \int_0^t n(\tau) \hat{g}(t - \tau) \vec{a}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\hat{g}(t, \tau)$ - матрица Коши уравнения $\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \vec{a} = f$.

Проведем в (2) одну итерацию:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 + \int_0^t n(\tau) \hat{g}(t - \tau) \vec{a}_0 d\tau + \iint_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t} n(\tau_1) n(\tau_2) \hat{g}(t - \tau_2) \hat{g}(\tau_2 - \tau_1) \vec{a}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3)$$

Переходим в (3) к математическим ожиданиям тогда, учитывая, что при $\tau_1 < \tau_2$, и $M \{n(\tau_2) / \vec{a}(\tau_1)\} = e^{2v(\tau_2 - \tau_1)}$, и, следовательно $M \{n(\tau_1) n(\tau_2) / \vec{a}(\tau_1)\} = e^{2v(\tau_2 - \tau_1)} M(a(\tau_1))$, приходим к замкнутому интегральному уравнению для $m(t) = M(a(t))$:

$$\vec{m}_1(t) = \vec{a}_0 + \int_0^t n(\tau) \hat{g}(t - \tau) \vec{a}_0 d\tau + \iint_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t} n(\tau_1) n(\tau_2) \hat{g}(t - \tau_2) \hat{g}(\tau_2 - \tau_1) \vec{m}_1(\tau_1) e^{-2v(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_1 d\tau_2. \quad (4)$$

Введем матричное ядро $\hat{\omega}(t) = n^2 \int_0^t e^{-2v\tau} \hat{g}(t - \tau) g(\tau) d\tau$. Тогда уравнение

(4) принимает вид $\vec{m}_1(t) = \vec{a}_0 + \int_0^t \hat{\omega}(t - \tau) \vec{m}_1(\tau) d\tau$, а $\omega(\tau)$ является, как доказано в работе [4], функцией Коши для уравнения

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \cdot \hat{L} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \vec{m}_1(t) = \vec{m}_1(t) \quad (n^2(t) = 1) \quad (5)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\det \left\{ \hat{L}(\lambda) \hat{L}(\lambda + 2v) - I \right\} = 0$, и исследование устойчивости сводится к изучению этого характеристического уравнения.

Рассмотрим другую задачу, которую и проанализируем более подробно:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_1^2 A_1 + k_{12} n(t) \frac{dA_2}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 A_2}{dt^2} + \omega_2^2 A_2 + k_{21} n(t) \frac{dA_1}{dt} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

где $n(t)$ - двузначный однородный марковский процесс, принимающий значения ± 1 , причем смена знаков происходит в случайные моменты времени, которые распределены по закону Пуассона с параметром v .

В работе [5] получена формула

$$\left\langle n(t) \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} + 2v \right\rangle \langle n(t) x \rangle \quad (7)$$

заменяем x на $\frac{dy}{dt}$, тогда $\frac{dx}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$,

$$\left\langle n(t) \frac{d^2 y}{dt^2} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} + 2v \right\rangle \left\langle n(t) \frac{dy}{dt} \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 \langle n(t) y \rangle \quad (8)$$

Запишем систему для средних. Из первого уравнения системы (6) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle A_1 \rangle = \omega_1^2 \langle A_1 \rangle + k_{12} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \cdot \langle A_2 n(t) \rangle = 0 \quad (9)$$

из второго уравнения системы (6) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle A_2 \rangle = \omega_2^2 \langle A_2 \rangle + k_{21} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \cdot \langle A_1 n(t) \rangle = 0 \quad (10)$$

Домножим теперь первое и второе уравнения системы (6) на $n(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_1}{dt^2} n(t) + \omega_1^2 A_1 n(t) + k_{12} \frac{dA_1}{dt} n^2(t) = 0, \\ \frac{d^2 A_2}{dt^2} n(t) + \omega_2^2 A_2 n(t) + k_{21} \frac{dA_2}{dt} n^2(t) = 0. \end{cases}$$

Записав эти уравнения для средних и заметив, что $n^2(t) = 1$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle A_1 n(t) \rangle + \omega_1^2 \langle A_1 n(t) \rangle + k_{12} \frac{d}{dt} \langle A_2 \rangle = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle A_2 n(t) \rangle + \omega_2^2 \langle A_2 n(t) \rangle + k_{21} \frac{d}{dt} \langle A_1 \rangle = 0. \end{cases}$$

Применим к ним формулу (8):

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 \langle A_1 n(t) \rangle + \omega_1^2 \langle A_1 n(t) \rangle + k_{12} \frac{d}{dt} \langle A_2 \rangle = 0, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 \langle A_2 n(t) \rangle + \omega_2^2 \langle A_2 n(t) \rangle + k_{21} \frac{d}{dt} \langle A_1 \rangle = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, уравнения (9-11) образуют замкнутую систему относительно переменных $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \langle A_1 n(t) \rangle, \langle A_2 n(t) \rangle$:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle A_1 \rangle = \omega_1^2 \langle A_1 \rangle + k_{12} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \langle A_2 n(t) \rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle A_2 \rangle = \omega_2^2 \langle A_2 \rangle + k_{21} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \langle A_1 n(t) \rangle, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 \langle A_1 n(t) \rangle + \omega_1^2 \langle A_1 n(t) \rangle + k_{12} \frac{d}{dt} \langle A_2 \rangle = 0, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 \langle A_2 n(t) \rangle + \omega_2^2 \langle A_2 n(t) \rangle + k_{21} \frac{d}{dt} \langle A_1 \rangle = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Обозначим $\langle A_1 \rangle \pm \langle A_2 \rangle = A_{\pm}$, $\langle A_1 n(t) \rangle \pm \langle A_2 n(t) \rangle = B_{\pm}$, $k_{12} \pm k_{21} = k_{\pm}$, $\omega_1^2 \pm \omega_2^2 = \omega_{\pm}^2$. Запишем сумму и разность первого и второго уравнения системы:

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_+^2 \right) A_+ + k_+ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) B_+ = 0, \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_-^2 \right) A_- + k_- \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) B_- = 0. \end{cases}$$

То же самое сделаем с третьим и четвертым уравнениями системы (12):

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 + \omega_+^2 \right) B_+ + k_+ \frac{d}{dt} A_+ = 0, \\ \left(\left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 + \omega_-^2 \right) B_- + k_- \frac{d}{dt} A_- = 0. \end{cases}$$

Обозначим через оператор L , оператор $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{\pm}^2 \right)$, через оператор L_v оператор $\left(\left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 + \omega_{\pm}^2 \right)$. Подействуем оператором L на третье уравнение системы. Получаем: $L \cdot L_v B_+ + k_+ L \frac{d}{dt} A_+ = 0$.

Так как операторы L и $\frac{d}{dt}$ коммутируют, а $LA_+ = -k_+ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) B_+$, то это выражение принимает вид $LL_v B_+ - k_+ \frac{d}{dt} \left(k_+ \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) \right) B_+ = 0$.

$$\text{Или же } \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_+^2 \right) \cdot \left(\left(\frac{d}{dt} + 2v \right)^2 + \omega_+^2 \right) - k_+^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} + 2v \right) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda^2 + \omega_+^2) \cdot ((\lambda + 2v)^2 + \omega_+^2) - k_+^2 \lambda(\lambda + 2v) = 0$, или, после раскрытия скобок, $\lambda^4 + 4v\lambda^3 + (2\omega_+^2 + 4v^2 - k_+^2)\lambda^2 + (4\omega_+^2 v - 2k_+^2 v)\lambda + 4\omega_+^2 v^2 + \omega_+^4 = 0$.

Для исследования устойчивости используем критерий Лъенара-Шипара [7]:

$$1. \quad (2\omega_+^2 + 4v^2 - k_+^2) > 0,$$

$$2. \quad (4\omega_+^2 v - 2k_+^2 v) > 0,$$

$$3. \quad \begin{vmatrix} (4\omega_+^2 v - 2k_+^2 v) & (4\omega_+^2 v^2 + \omega_+^4) & 0 \\ 4v & (2\omega_+^2 + 4v^2 - k_+^2) & (4\omega_+^2 v - 2k_+^2 v) \\ 0 & 1 & 4v \end{vmatrix} =$$

$$= -16\omega_+^2 v^2 k_+^2 - 32k_+^2 v^4 + 4k_+^4 v > 0$$

Выражение 1. Есть следствие выражения 2. Поделим выражения 2. и 3. на v ($v > 0$). В 2. получаем: $k_+^2 < 2\omega_+^2$. Из 3. получаем: $k_+^2 - (4\omega_+^2 + v + 8v^3) > 0$.

Следовательно, $2\omega_+^2 > (4\omega_+^2 + v + 8v^3)$, или $\omega_+^2 + (1 - 2v) > 4v^3$, то есть $\omega_+^2 > \frac{4v^3}{1-2v}$. Получаем такую область устойчивости: $|\omega_+| > \sqrt{\frac{4v^3}{1-2v}}$, причем правая часть имеет смысл при $v = (0, 0.5)$.

Условия 1-3 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы максимальная реальная часть корней характеристического уравнения была больше нуля. Аналогично получаются условия для второго и третьего уравнений. Для исследования устойчивости в среднеквадратическом, необходимо систему (6) переписать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = (\hat{A} + \hat{B} n(t)) \xi, \tag{13}$$

где $\xi = (A_1, \frac{dA_1}{dt}, A_2, \frac{dA_2}{dt})^*$ (* - означает транспонирование).

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда для моментов второго порядка нетрудно получить следующую замкнутую систему уравнений: $\frac{d\eta}{dt} = \hat{D} \eta$, где матрица \hat{D} имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 & \hat{A}_1 - 2vI \end{pmatrix},$$

$\eta = (\xi_1^2, \xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \xi_1\xi_4, \xi_2^2, \xi_2\xi_3, \xi_2\xi_4, \xi_3^2, \xi_3\xi_4, \xi_4^2)^*$ (* - означает транспонирование), при этом элементы матриц $\hat{A}_1 = (a_{ik})$, $\hat{B}_1 = (b_{ik})$, ($i = \overline{1, 10}$, $j = \overline{1, 10}$) равны $a_{12} = 2, a_{21} = -\omega_1^2, a_{25} = 1, a_{34} = 1, a_{36} = 1, a_{43} = -\omega_2^2, a_{47} = 1, a_{52} = -2\omega_1^2, a_{63} = -\omega_1^2, a_{67} = 1, a_{74} = -\omega_1^2, a_{76} = -\omega_2^2, a_{89} = 2, a_{98} = -\omega_2^2, a_{910} = 1, a_{1010} = -2\omega_2^2, b_{23} = -k_{12}, b_{42} = -k_{21}, b_{56} = -2k_{12}, b_{68} = -k_{12}, b_{75} = -k_{21}, b_{79} = -k_{12}, b_{96} = -k_{21}, b_{108} = -2k_{21}$, остальные элементы нулевые.

Анализ соответствующего характеристического уравнения может быть проведен численными методами так же как и в предыдущем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. // М.: Изд. Сов. радио, - 1966. - 476 с.
2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайных неоднородных средах. // М.: Наука, - 1980. - 336 с.
3. Стратанович Г.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. // М.: Сов. радио, - 1961. - 558 с.

4. Бендерский М.М. Определение области устойчивости линейного дифференциала второго порядка со случайными коэффициентами специального типа. // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5. – В. 10. – С. 1885-1888.
5. Шапиро В.Е., Логинов В.М. Динамические системы при случайных воздействиях. – Новосибирск: Наука, 1983. – 160 с.
6. Янцевич А.А., Ясницкая Н.Н., Бендерский М.М., Баранов В.И. К теории колебаний в нестационарной случайной среде. // Радиопизика и радиоастрономия. – 1999. – Т. 4, 2. – С. 145-152.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. // Москва: Наука, 1988. – 548 с.
8. Третьяков О.А. Метод модового базиса в задачах электродинамики. // Радиотехника и электроника. – 1986. – Т. 31. – В. 6. – С. 1071.

Численное решение негладких уравнений в задаче быстродействия

В. М. Гавриляко, А. В. Соколов

Харьковский национальный университет, Украина

Целью этой работы является определение целесообразности применения генетических алгоритмов при численном решении задач оптимизации, в которых градиент функционала имеет разрыв первого рода на множестве, имеющем заранее известную структуру.

2000 Mathematics Subject Classification 93B50.

Как известно, использование принципа максимума Понтрягина в задачах оптимального управления во многих случаях приводит к задачам оптимизации функций (решению систем уравнений) с разрывным градиентом. Таковы и системы уравнений, рассмотренные в данной работе:

$$\Phi(x) = y, \quad (1)$$

где $\Phi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Phi(x) \in C^1(\mathbf{R}^2 \setminus M_0)$, $M_0 = \{(x_1, x_2) : x_2 + \frac{x_1|x_1|}{2} = 0\}$.

Такого рода уравнения были получены в [1] при решении задачи быстродействия для системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_1 + by_2 + u, \\ \dot{y}_2 &= y_1, |u| \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Явный вид для функции $\Phi(x)$ получен в зависимости от значений a , b . Возможны 4 различных случая. Так, если матрица системы (2) имеет простой действительный спектр, то $\Phi(x)$ имеет вид:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{\lambda_1 x_1} \left(-e^{2\lambda_1 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} + 2e^{\lambda_1 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) + \\ + \frac{\lambda_1}{a\sqrt{d}} e^{\lambda_2 x_1} \left(e^{2\lambda_2 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} - 2e^{\lambda_2 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) + \frac{1}{a}, \\ x_2 + \frac{x_1|x_1|}{2} \geq 0 \\ \frac{\lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{-\lambda_1 x_1} \left(e^{2\lambda_1 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} - 2e^{\lambda_1 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) + \\ + \frac{\lambda_1}{a\sqrt{d}} e^{-\lambda_2 x_1} \left(-e^{2\lambda_2 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} + 2e^{\lambda_2 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) - \frac{1}{a}, \\ x_2 + \frac{x_1|x_1|}{2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{\lambda_1 x_1} \left(e^{2\lambda_1 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} - 2e^{\lambda_1 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) - \\ - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{\lambda_2 x_1} \left(e^{2\lambda_2 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} - 2e^{\lambda_2 \sqrt{x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right), \\ x_2 + \frac{x_1|x_1|}{2} \geq 0 \\ - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{-\lambda_1 x_1} \left(e^{2\lambda_1 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} - 2e^{\lambda_1 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right) - \\ - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{a\sqrt{d}} e^{-\lambda_2 x_1} \left(-e^{2\lambda_2 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} + 2e^{\lambda_2 \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}} \right), \\ x_2 + \frac{x_1|x_1|}{2} \leq 0 \end{cases}$$

где λ_1, λ_2, d – некоторые постоянные.

Решение системы уравнений (1) будем находить путем минимизации негладкой функции

$$f(x) = \max\{|\Phi_1(x) - y_1|, |\Phi_2(x) - y_2|\}.$$

Градиент $\Phi(x)$ терпит разрыв первого рода на множестве M_0 меры нуль, имеющем специальную структуру. Таким образом $\Phi(x)$ почти дифференцируема [2] и решение системы уравнений возможно, в частности, методами градиентного типа с растяжением пространства [2].

Мы рассмотрим возможность применения при решении этой системы так называемых генетических алгоритмов (ГА), предложенных Джоном Холландом (J.H. Holland [3], Мичиганский университет США) и Дэвидом Гольдбергом (David E. Goldberg, университет штата Алабама США).

Генетические алгоритмы – это алгоритмы поиска, моделирующие законы генетики и естественного отбора Ч. Дарвина. Будучи по своей сути эвристическими, генетические алгоритмы характеризуются большим числом параметров настройки и успех их применения определяется тем, насколько хорошо удалось подобрать эти значения. Целью этой работы является попытка определить целесообразность их применения при численном решении задач оптимизации, в которых градиент функционала имеет разрыв первого рода на множестве, имеющем специальную структуру.

Решение задачи минимизации

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in D, \quad D = \{[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]\} \subset R^2$$

с помощью генетического алгоритма состоит в следующем. Задается число n – так называемая “длина хромосомы”, т.е. длина битовой строки, соответствующей в дальнейшем точке исследуемой части фазового пространства. Определяется максимальное целое число m , двоичная запись которого не превышает n бит. Каждый интервал $[a_i, b_i]$, ($i = 1, 2$) разбивается на m отрезков равной длины $h_i = (b_i - a_i)/m$. Узел сетки $z_{i,j} = \{a_1 + ih_1; a_2 + jh_2\}$ $i, j = 0, 1, \dots, m$

ассоциируется с парой бинарных кодов длины n , соответствующих представлению чисел i, j в двоичной системе исчисления. Фиксированная длина двоичной кодировки означает, что любые две из возможных бинарных строк соответствуют точке исследуемого множества D . Далее случайным образом выбирается множество $\Pi(0) \subset D$ узлов сетки. Это множество в теории генетических алгоритмов называют начальной популяцией, а его мощность - M - размером популяции. Каждый элемент популяции представляется таким образом в виде двух строк символов - хромосом. В природе популяция любого вида (растения, животные) не остается неизменной, а все время эволюционирует, адаптируется к окружающей среде. Более приспособленные виды выживают, а менее - вымирают. Этот процесс называют естественным отбором или репродукцией. В нашем случае более приспособленным считается элемент популяции, у которого значение функции $f(x)$ (по терминологии биологов - фитнес) меньше. Смысл репродукции в этом случае таков: у элемента x_1 больше шансов попасть в следующую популяцию чем у x_2 , если $f(x_1) < f(x_2)$. Существует много методов отбора элементов из популяции. Нами реализован так называемый рулеточный выбор (его еще называют стохастическим выбором с замещением). Он состоит в том, что вероятность попадания элемента x_i в следующую популяцию пропорциональна величине $f(x_i) / \sum_{k=1}^{k=M} f(x_k)$.

Следующая важная операция, используемая в генетических алгоритмах - скрещивание (кроссинговер). Она производится следующим образом. В популяции после репродукции берется пара представителей (родителей), случайным образом выбирается место скрещивания k . Если длина хромосомы равна n , то k может принимать значения от 1 до $n - 1$, причем появление каждого из значений равновероятно. После этого получаем два новых представителя (потомка). Один из них получается из символов с 1 по k -ый первого родителя и с $k + 1$ -го по n -ый второго. Другой получается наоборот, с 1-го по k второго родителя и с $k + 1$ -го по n -й первого.

Последняя операция - мутация - играет в генетическом алгоритме второстепенную роль. Ее предназначение то же, что и у скрещивания - обеспечить большее разнообразие представителей, что влечет за собой возможность появления наиболее приспособленных. При этом каждый символ хромосомы меняется на противоположный с некоторой вероятностью $p_m < 1$.

Аналитические методы исследования условий и скорости сходимости ГА наталкиваются на серьезные трудности. Авторам неизвестны эффективные условия сходимости этого алгоритма (кроме эвристических), однако имеется достаточное число задач, успешно решенных с помощью генетического алгоритма [3].

Структура алгоритма, реализованного нами, следующая:

Шаг 1. Задается размер популяции M , вероятность кроссинговера P_c , вероятность мутации P_m , определяется критерий конца вычислений: количество итераций N (количество популяций Π). Шаг 2. Задается случайным образом начальная популяция $\Pi(0)$ Шаг 3. $k = 0$. Шаг 4. Выбирается рулеточным методом $M/2$ пар хромосом из популяции $\Pi(k)$ и применяется операция

кроссинговера к каждой паре с заданной вероятностью P_c . Шаг 5. Операция мутации применяется к каждой хромосоме популяции $\Pi(k)$ с заданной вероятностью P_m . Шаг 6. Отбирается рулеточным методом M хромосом с наилучшим значением целевой функции из получившейся популяции $\Pi(k)$ в новую $\Pi(k+1)$. Шаг 7. $k = k+1$. Шаг 8. Если $k < N$ то возвращаемся к шагу 4. Шаг 9. Вывод (на печать) узла с наилучшим значением целевой функции.

Вычисления на компьютере производились для следующих значений параметров: $a = -0.01$; $b = -1$; $y_1 = 1.7462$; $y_2 = -1.2148$. Тогда $\lambda_1 = 0.887$; $\lambda_2 = 0.1127$; $d = 0.774$; точное решение системы (1) $x_1 = 0.4$; $x_2 = 0.5$. Параметры генетического алгоритма: вероятность кроссинговера $P_c = 1$, вероятность мутации $P_m = 0.01$. Если размер популяции $M = 50$, то значение фитнеса $F(x) = 0.0548$ и $x(1) = 0.4129$; $x(2) = 0.7824$ были достигнуты через 120 популяций. Если размер популяции $M = 100$, то значение фитнеса $F(x) = 0.0026$ и $x(1) = 0.39540$; $x(2) = 0.80248$ были достигнуты через 160 популяций. Если же размер популяции $M = 200$, то значение фитнеса $F(x) = 0.0039$ и $x(1) = 0.40596$; $x(2) = 0.49657$ были достигнуты через 580 популяций.

Интересны результаты решения этой же системы уравнений методом обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства (метод Н.З. Шора [2], стр.174-175).

Так при стартовой точке (1;1), числе итераций – 52, были получены: точка (0.3992; 0.5004) и значение в этой точке целевой функции $f(x) = 0.0006$.

Метод Н.З. Шора, использующий свойство почти дифференцируемости $\Phi(x)$ достигает высокой точности за существенно меньшее число итераций, но, как и все градиентные методы, сильно зависит от выбора стартовой точки, решая в основном задачу нахождения локального экстремума. Генетический алгоритм применим для нахождения глобального экстремума всегда, но использование его оправдано лишь при условии, что у множества разрывов градиента нет никакой специальной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korobov V.I., Ivanova T.I. Nonsmooth Mapping of Linear Control Systems. // Journal of Optimization Theory and Application. – 2001. – vol. 108, 2. – P. 389 - 405.
2. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979. – 200 с.
3. Holland J.H. Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with application to biology, control and artificial intelligence. – London: Bradford book edition, 1994. – 211 p.