

Еквівалентність. Факторизація. Конгруентність.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.О. Шугайло О.О

Травень — 2015

Зміст

1	Еквівалентність та факторизація	2
1.1	Означення еквівалентності	2
1.2	Розбиття	4
1.3	Класифікації	6
1.4	Поповнення площини нескінченно віддаленими точками. Проективна площина	7
1.5	Відношення рівнообразності	8
1.6	Порівняння за певним модулем. Класи лишків .	8
1.7	Означення кількості, потужності, кардинально- го числа за допомогою еквівалентностей	9
1.8	Частково впорядкована множина еквівалентно- стей	10
1.9	Факторизація	13
2	Використання еквівалентностей в геометрії	14
2.1	Афінна еквівалентність	14
2.2	Склеювання та вклеювання.	16
2.3	Риманова площина і дійсна площина	18

3	Застосування еквівалентностей а алгебри — конгруенції та факторизація за конгруенцією.	18
3.1	Конгруенції універсальних алгебр	18
3.2	Факторизація груп	19
3.2.1	Означення, що стосуються груп.	19
3.2.2	Суміжні класи групи по підгрупі та інваріантні підгрупи	21
3.2.3	Зв'язок між конгруенціями групи та інваріантними підгрупами	26
3.2.4	Приклад факторизації групи.	29
3.3	Факторизація кілець	29
3.3.1	Означення, що стосуються кілець.	29
3.3.2	Факторизація кілець та ідеали.	30
3.3.3	Приклади ідеалів та конгруенцій кільця .	33
4	Унари з малою кількістю елементів та ґратки їх конгруенцій	34

1 Еквівалентність та факторизація

1.1 Означення еквівалентності

Бінарне відношення $\sim$ на непорожній множині A називається відношенням еквівалентності, якщо воно задовольняє три умови

- $x \sim x$ для будь-якого $x \in A$ (рефлексивність);
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симетричність);
- $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow x \sim z$ (транзитивність).

Еквівалентністю є відношення паралельності на множині прямих. Дійсно, кожна пряма паралельна сама собі (рефлексивність виконується), якщо пряма a паралельна прямій b ,

то пряма b паралельна прямій a (симетричність виконується), і якщо пряма a паралельна прямій b , а пряма b паралельна прямій c , то a паралельна c (транзитивність).

Відношення еквівалентності вельми нагадує відношення рівності — найважливіше відношення математики. Відношення $=$ є відношенням еквівалентності, оскільки воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Проте відношення $=$ має додаткову сувору та обтяжливу властивість:

- $a = b$ в тому і тільки тому випадку, коли кожна властивість, яку має a , має також b , і навпаки, кожна властивість, яку має b , має також a .

В такому розумінні рівності два трикутники з відповідно рівними сторонами можуть бути не рівними (див. рис.1)

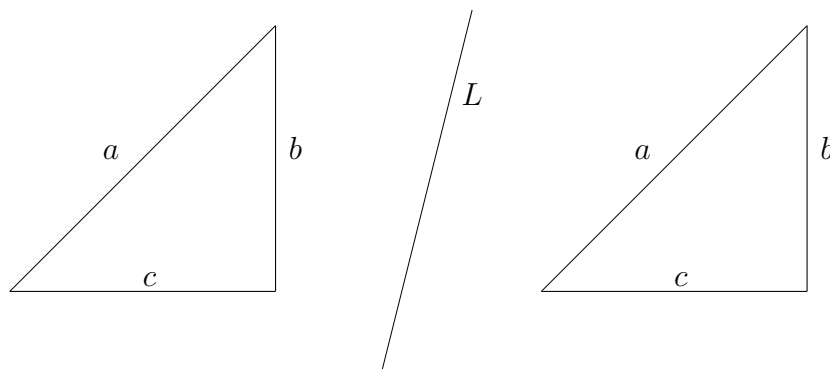


Рис. 1: Два трикутники з відповідно рівними сторонами не рівні, оскільки один з них знаходиться зліва від прямої L , а другий справа.

Мовна практика дозволяє замість словосполучи “два елемента еквівалентні відносно еквівалентності α ” казати “два елементи рівні.” Знову ж — коли це не призводить до непорозумінь. Коли в міркуваннях еквівалентні елементи не розрізняють, то кажуть, що це міркування проводять “з точністю до еквівалентності α ”.

1.2 Розбиття

Нехай задана непорожня множина A і на ній відношення еквівалентності $\sim$. З кожним елементом $a \in A$ пов'яжемо підмножину

$$\bar{a} = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Ця підмножина не порожня, оскільки $a \in \bar{a}$. Також

$$\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A.$$

Знову, це впливає із того, що $a \in \bar{a}$.

Є ще й третя властивість підмножин $\bar{a}$: Якщо $a, b \in A$, і $\bar{a} \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Перевіримо цю третю властивість множин $\bar{a}$ методом від протилежного. Отже, нехай

$$a, b \in A, \quad \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset, \quad c \in \bar{a} \cap \bar{b}, \quad a \sim c, b \sim c.$$

За транзитивністю відношення $\sim$ маємо $a \sim b$. Нам потрібно довести, що $\bar{a} = \bar{b}$.

Нагадаємо, що для доведення того, що дві множини рівні, потрібно довести, що кожний елемент першої множини лежить в другій і кожен елемент другої лежить в першій. Отже нам потрібно довести дві речі а) $x \in \bar{a} \Rightarrow x \in \bar{b}$, і б) $x \in \bar{b} \Rightarrow x \in \bar{a}$.

Доводимо а). Нехай $x \in \bar{a}$, тобто $x \sim a$. Оскільки $a \sim b$, то за транзитивністю $\sim$ із $x \sim a, a \sim b$ маємо $x \sim b$ і $x \in \bar{b}$.

Симетричним чином доводимо б). Нехай $x \in \bar{b}$, тобто $x \sim b$. Оскільки $a \sim b$, то за транзитивністю $\sim$ із $x \sim b, a \sim b$ маємо $x \sim a$ і $x \in \bar{a}$.

Цим закінчене доведення рівності $\bar{a} = \bar{b}$, якщо $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, і, відповідно, рівності $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$, якщо $\bar{a} \neq \bar{b}$.

Підмножини $\bar{a}$ для $a \in A$ називають класами еквівалентності. В цій термінології можна сказати, що при заданій еквіва-

лентності $\sim$ на множині A існують підмножини (класи еквівалентності) $K_i, i \in I$, що задовольняють умови ¹

$$K_i \neq \emptyset, \quad i \in I; \quad (1)$$

$$\bigcup_{i \in I} K_i = A; \quad (2)$$

$$K_i \neq K_j \Rightarrow K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i, j \in I. \quad (3)$$

Представлення множини A у вигляді об'єднання підмножин $K_i, i \in I$, що задовольняють умови (1), (2), (3), називають розбиттям множини A , а підмножини $K_i, i \in I$ називають класами розбиття. Розбиття множини на чотири класи зображене на рис. 2.

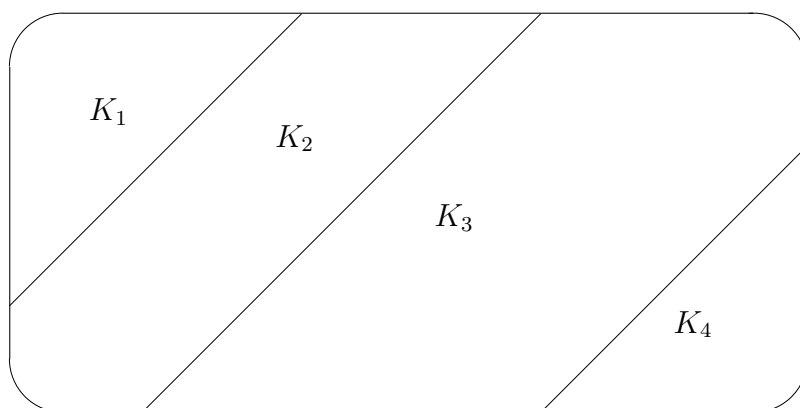


Рис. 2: Множина розбита на чотири класи — K_1, K_2, K_3, K_4 ..

Можна сказати, що кожна еквівалентність визначає розбиття — класами розбиття є класи еквівалентності.

Якщо є розбиття $K_i, i \in I$ множини A , то можна ввести еквівалентність $\sim$ на A вважаючи

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in K_i \text{ для деякого } i \in I.$$

Таким чином виникає канонічна бієкція між еквівалентностями на множині та розбиттями цієї множини.

¹ I — довільна непорожня множина індексів.

Для прикладу, розглянемо тривимірний простір в шкільній аксіоматиці. Назвемо його евклідовим. Виберемо у цьому просторі точку і викинемо її. Одержимо евклідовий простір без однієї точки. Будемо вважати дві точки в цьому просторі без вибраної точки еквівалентними, якщо вони лежать на одному промені, що виходить із вибраної точки. В кожному класі відповідного розбиття лежить одна і тільки одна точка на відстані 1 від початку променя. Тому є канонічна бієкція між класами еквівалентності і точками одиничної сфери.

1.3 Класифікації

Розбиття тих чи інших понять називають також класифікацією. Прикладом дуже вдалої класифікації хімічних елементів дає таблиця Менделєєва. “Вдалість” полягає в тому, що вона допомогла передбачити певні властивості певних хімічних елементів і навіть передбачити існування хімічних елементів.

Інтенсивно використовується класифікація рослин та тварин. Та і політичні устрої поділяються на невелику кількість типів (класів).

Як приклад невдалої класифікації можна взяти давньокитайську класифікацію тварин: Тварини діляться на

- ті, що належать імператору;
- бальзамованих;
- приручених;
- молочних поросят;
- сирен;
- казкових;
- бродячих собак;

- що буянять, мов божевільні;
- незчисленних;
- що намальовані тонкою щіточкою на верблюжій шерсті;
- решту;
- що недавно розбили горщик;
- що здалеку здаються мухами.

1.4 Поповнення площини нескінченно віддаленими точками. Проективна площина

Розглянемо площину — в шкільній аксіоматиці. Назвемо її евклідовою площиною.

Класи паралельних прямих назвемо нескінченно віддаленими точками. Сукупність усіх нескінченно віддалених точок назвемо нескінченно віддаленою прямою. Додамо до всіх точок евклідової площини нескінченно віддалені, а до всіх прямих — нескінченно віддалену пряму і одержимо так звану проективну площину. Вважається, що через дві нескінченно віддалені точки проходить нескінченно віддалена пряма, звичайна пряма проходить через ту нескінченно віддалену точку, якій вона належить — нагадаємо, що нескінченно віддалена точка це клас паралельних прямих і кожна пряма належить якомусь одному класу. В проективній площині всі прямі перетинаються, паралельних прямих немає.

Розглянемо сферу. Діаметрально протилежні точки назвемо еквівалентними. Класи еквівалентності утворюють проективну площину. Прямими в цій площині є всі ті класи, елементи яких лежать на одному великому колі сфери.

1.5 Відношення рівнообразності

Будь-яке відображення f із множини A в множину B задає на множині A відношення еквівалентності, яке називають відношенням рівнообразності:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Класами еквівалентності будуть непорожні повні прообрази точок із B .

1.6 Порівняння за певним модулем. Класи лишків

Виберемо натуральне число $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ і будемо вважати, що два цілі числа еквівалентні, якщо їх різниця ділиться на n . Факт, що $a, b \in \mathbb{Z}$ еквівалентні, записується у вигляді

$$a \equiv b \pmod{n}. \quad (4)$$

Цю еквівалентність називають порівнянням за модулем n . Числа $a, b \in \mathbb{Z}$, для яких виконується (4), називають порівнюваними за модулем n . В кожному класі еквівалентності є одне і тільки одне із чисел $0, 1, 2, \dots, n-1$ — ці числа називають (в такому мовному оточенні) лишками за модулем n . Самі класи еквівалентності називають класами лишків за модулем n . Коли $n = 2$, маємо два класи лишків —

$$\bar{0} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2k, \dots\}, \quad \bar{1} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k+1), \dots\}.$$

Якщо $n = 3$, маємо 3 класи лишків —

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{0, \pm 3, \pm 6, \dots, \pm 3k, \dots\}, & \bar{1} &= \{1, -2, 4, -5, 7, -8, \dots, \pm(3k+1), \dots\}, \\ \bar{2} &= \{2, -1, 5, -4, 8, -7, \dots, \pm(3k+2), \dots\}. \end{aligned}$$

На класах лишків за модулем n вводять операції додавання та множення наступними правилами

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}. \quad (5)$$

За цим визначенням, для $n = 13$ буде

$$\overline{10} + \overline{12} = \overline{22} = \overline{9}, \quad \overline{10} \cdot \overline{12} = \overline{120} = \overline{3},$$

Теорема 1.1 *Операції додавання та множення класів лишків, що визначені правилами (5), визначені коректно, тобто коли $\overline{x_1} = \overline{x_2}, \overline{y_1} = \overline{y_2}$, то також $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}, \overline{x_1 y_1} = \overline{x_2 y_2}$.*

Доведення. Доведення. Рівності $\overline{x_1} = \overline{x_2}, \overline{y_1} = \overline{y_2}$ означають, що для деяких цілих k_1, k_2 можна записати

$$x_1 - x_2 = k_1 n, \quad y_1 - y_2 = k_2 n.$$

Тепер можна записати

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = k_1 n + k_2 n = (k_1 + k_2) n,$$

що означає $\overline{x_1 + y_1} = \overline{x_2 + y_2}$, а також

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - x_2 y_2 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_1 = (x_1 - x_2) y_1 + \\ &+ (y_1 - y_2) x_2 = k_1 n y_1 + k_2 n x_2 = n(k_1 y_1 + k_2 x_2), \end{aligned}$$

що означає $\overline{x_1 y_1} = \overline{x_2 y_2}$. ■

Множина класів лишків за модулем n разом з введеними операціями додавання та множення називається кільцем класів лишків за модулем n і позначається $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ або $\mathbb{Z}_n$.

1.7 Означення кількості, потужності, кардинального числа за допомогою еквівалентностей

Множини можна вважати еквівалентними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Множини в одному класі мають одну і ту ж кількість елементів (якщо вони скінченні), або рівнопотужні (якщо вони нескінченні). Класи еквівалентності називають кількостями, потужностями, кардинальними числами або кардиналами.

1.8 Частково впорядкована множина еквівалентностей

На множині можна ввести багато розбиттів і, відповідно, можна ввести багато відношень еквівалентності. Серед усіх еквівалентностей виділяють дві — класи однієї одноелементні, а друга має один клас, він містить всі елементи множини. Ці дві еквівалентності називають тривіальними.²

За визначенням, еквівалентність α менше або дорівнює еквівалентності β на множині A тоді і тільки тоді, коли

$$\forall x, y \in A ((x, y) \in \alpha \Rightarrow (x, y) \in \beta).$$

Іншими словами, еквівалентність α менше або дорівнює еквівалентності β в тому і тільки тому випадку, коли кожен клас еквівалентності α повністю міститься в деякому класі еквівалентності β . Для прикладу, нехай множина A складається із 5 елементів: $A = \{a, b, c, d, e\}$. На цій множині розглянемо 5 відношень еквівалентності, що задані розбиттями:

α	задана розбиттям	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\};$
β	задана розбиттям	$\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\};$
γ	задана розбиттям	$\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{e\};$
δ	задана розбиттям	$\{a, b, c, d\}, \{e\};$
ε	задана розбиттям	$\{a, b, c, d, e\}.$

Тут α та ε — тривіальні відношення еквівалентності, α — найменша, а ε — найбільша еквівалентність.

$$\alpha \leq \beta \leq \delta \leq \varepsilon, \quad \alpha \leq \gamma \leq \delta \leq \varepsilon,$$

β і γ не порівнювані еквівалентності — тобто жодне із співвідношень $\beta \leq \gamma$, $\gamma \leq \beta$ не є правильним.

²Латинське слово *trivius* утворене із двох слів *tres* і *via*. Перше означає три, а друге — дорога. А саме слово *trivius* означає те, що лежить на перехресті трьох доріг. Слово *trivium* означає саме перехрестя (тридоріжжя). Пізніше *trivium* означав навчальний цикл із трьох предметів — граматики, діалектики та риторики.

Нагадаємо, що бінарне відношення, а еквівалентність є бінарним відношенням, це певна підмножина декартового квадрата множини. Тому теоретико-множинний перетин двох бінарних відношень також є бінарним відношенням.

Теорема 1.2 *Теоретико-множинний перетин будь-якої сукупності еквівалентностей є еквівалентністю.*

Доведення. Нехай на множині M задана сукупність еквівалентностей $\alpha_i \subseteq M^2, i \in I$. Розглянемо теоретико-множинний перетин

$$\alpha = \bigcap_{i \in I} \alpha_i.$$

Потрібно довести, що α є еквівалентністю, тобто α є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням.

Візьмемо довільний елемент $a \in M$. Оскільки всі відношення α_i є еквівалентностями, то вони рефлексивні і $(a, a) \in \alpha_i$. Звідси випливає, що

$$(a, a) \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i = \alpha.$$

Рефлексивність відношення α доведена.

Доведемо симетричність відношення α . Виберемо два елементи $a, b \in M$ такі, що $(a, b) \in \alpha$. Тоді для кожного $i \in I$ $(a, b) \in \alpha_i$. Оскільки всі відношення α_i є еквівалентностями, то вони симетричні і $(b, a) \in \alpha_i$. Звідси випливає, що

$$(b, a) \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i = \alpha.$$

Симетричність відношення α доведена.

Подібним чином дододимо транзитивність відношення α :

$$(a, b), (b, c) \in \alpha \Rightarrow \forall i \in I ((a, b), (b, c) \in \alpha_i) \Rightarrow \forall i \in I ((a, c) \in \alpha_i) \Rightarrow (a, c) \in \alpha.$$

■

Теорема 1.3 *Всі еквівалентності на множині утворюють ґратку, тобто кожні дві еквівалентності мають точну верхню і точну нижню межу в члм усіх еквівалентностей.*

Доведення. Доведення теореми конструктивне — тобто ми вкажемо точну нижню і точну верхню межу для будь-яких двох еквівалентностей.

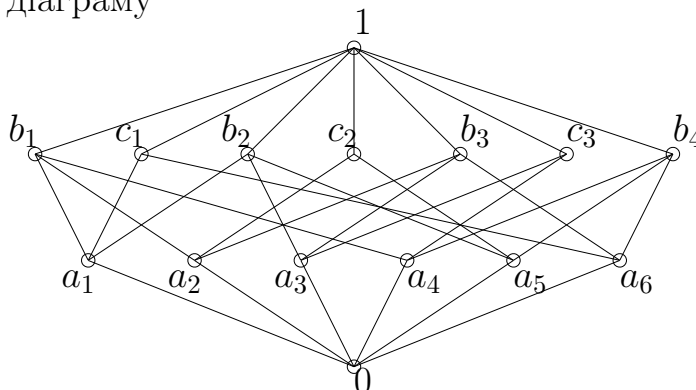
Нехай M — множина і α, β — дві еквівалентності на цій множині. Тоді

$$\inf(\alpha, \beta) = \alpha \cap \beta, \quad \sup(\alpha, \beta) = \bigcap_{\gamma \supset \alpha, \gamma \supset \beta} \gamma.$$

■

Приклад 1 ґратки L всіх еквівалентностей на чотириелементній множині $\{a, b, c, d\}$

Ґратка L має діаграму



В цій ґратці позначено: 0 — це найменша еквівалентність, в якій всі класи одноелементні. Еквівалентності $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ мають лише один неоднорелементний клас — він двоелементний. Неоднорелементним класом у $a_1 \in \{1, 2\}$, у $a_2 \in \{1, 3\}$, у $a_3 \in \{1, 4\}$, у $a_5 \in \{2, 4\}$ і у a_6 неоднорелементним класом є $\{3, 4\}$.

Еквівалентність 1 найбільша, вона має єдиний клас $\{1, 2, 3, 4\}$.

Еквівалентності $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3$ мають такі класи

$$\begin{aligned}
b_1 &= \{1, 2, 3\}, \{4\} \\
b_2 &= \{1, 2, 4\}, \{3\} \\
b_3 &= \{1, 3, 4\}, \{2\} \\
b_4 &= \{2, 3, 4\}, \{1\} \\
c_1 &= \{1, 2\}, \{3, 4\} \\
c_2 &= \{1, 3\}, \{2, 4\} \\
c_3 &= \{2, 3\}, \{1, 4\}
\end{aligned}$$

1.9 Факторизація

Нехай задана множина A і на ній відношення еквівалентності $\sim$, що має класи $K_i, i \in I$. Фактормножиною $A/\sim$ називають множину, елементами якої є класи еквівалентності $K_i, i \in I$. Процес переходу від множини до фактормножини називають факторизацією, факторизацією множини A за еквівалентністю $\sim$. Розглядають відображення $\pi : A \rightarrow A/\sim$, де кожному елементу множини A ставить у відповідність той клас (елемент фактормножини), якому він належить. Оскільки класи еквівалентності не порожні, то це сюр'єктивне відображення. Воно природне, всім зрозуміле, тому його називають канонічним, канонічною сюр'єкцією із множини в фактормножину.

Нехай задані дві множини A, B і відображення f із A в B . Тоді ми маємо відношення еквівалентності $\sim$ — відношення рівнообразності, фактормножину $A/\sim$, і канонічне сюр'єктивне відображення $sur : A \rightarrow A/\sim$. Також ми маємо підмножину $f(A) \subseteq B$ і канонічне вкладення (канонічну ін'єкцію) $inj : f(A) \rightarrow B$. Відображення f визначає бієктивне відображення bij із фактормножини $A/\sim$ в $f(A)$ — кожному класу еквівалентності ставиться у відповідність той елемент образу, в який переходять всі елементи класу. Таким чином, будь-яке відображення f розкладається у добуток трьох відображень —

сюр'єктивного, бієктивного та ін'єктивного:

$$f = inj \cdot bij \cdot sur.$$

Для прикладу візьмемо відображення із 5-елементної множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ в себе, що задане образами кожного елемента:

$$f(a) = c, \quad f(b) = a, \quad f(c) = e, \quad f(d) = c, \quad f(e) = a.$$

Тоді $f(A) = \{a, c, e\}$, $A/\sim = \{\{a, d\}, \{b, e\}, \{c\}\}$, і ми можемо виписати дії відповідних відображень:

$$sur(a) = \{a, d\}, sur(d) = \{a, d\}, sur(b) = \{b, e\}, sur(e) = \{b, e\}, sur(c) = \{c\};$$

$$bij(\{a, d\}) = c, \quad bij(\{b, e\}) = a, \quad bij(\{c\}) = e;$$

$$inj(a) = a, inj(c) = c, inj(e) = e.$$

2 Використання еквівалентностей в геометрії

2.1 Афінна еквівалентність

В геометрії криві та поверхні часто задають рівняннями. Якщо дві криві можна задати одним і тим же рівнянням, тільки в різних декартових (не обов'язково прямокутних) системах координат, то такі криві називають афінно еквівалентними.

Наприклад, можна довести, що коло з рівнянням

$$x^2 + y^2 = 1$$

і еліпс (див. рис. 3) афінно еквівалентні, а коло і парабола афінно не еквівалентні.

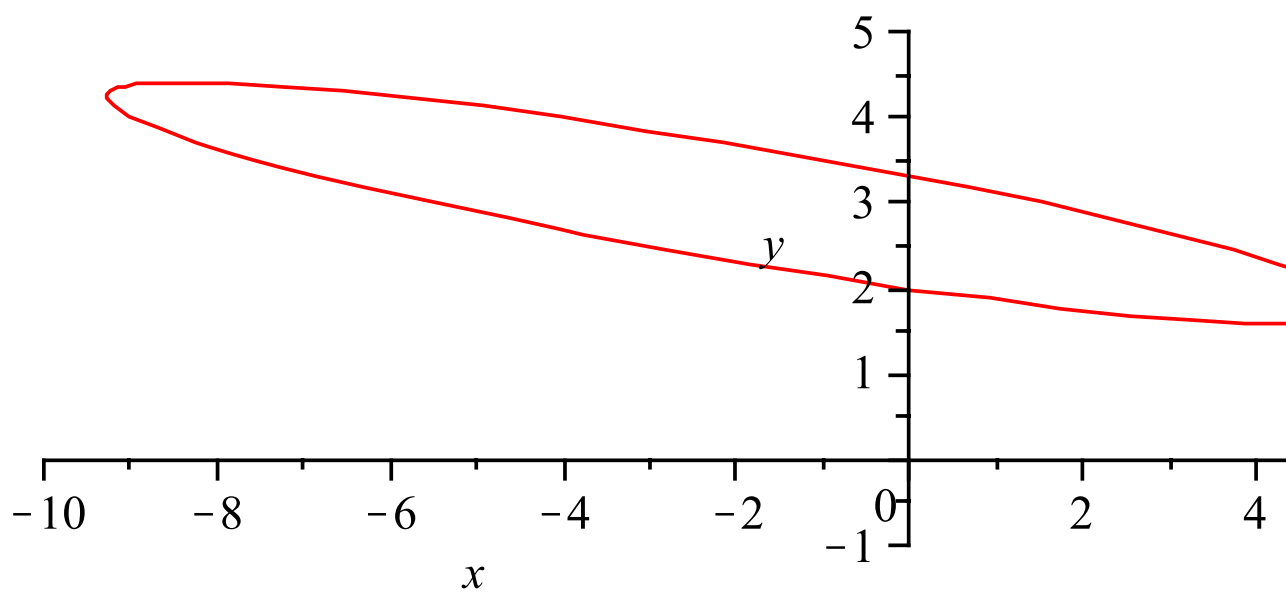


Рис. 3: Еліпс, що афінно еквівалентний колу

2.2 Склеювання та вклеювання.

Беремо прямокутник A зі сторонами 2 та 4 на декартовій площині:

$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 2\}. \quad (6)$$

Склеюємо в цьому прямокутному аркуші протилежні сторони, тобто вважаємо, що точки з координатами $(-1, y)$ та $(1, y)$ це одна і та ж точка. Побутові уявлення про склеювання в математиці формалізується за допомогою еквівалентності. В нашому випадку вводимо еквівалентність

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{або } (x_1 = x_2, y_1 = y_2), \text{ або } (y_1 = y_2, \{x_1, x_2\} = \{-1, 1\}).$$

Неодноеlementними класами цієї еквівалентності є класи $\{(-1, y), (1, y)\}$, коли $-2 \leq y \leq 2$. Після склеювання прямокутник (один геометричний об'єкт) перетворюється в циліндр (інший геометричний об'єкт).

Шляхом 'склеювання', тобто факторизації — кажучи формалізованою мовою, можна одержувати геометричні об'єкти з досить незвичними властивостями.

Можна профакторизувати прямокутник (6) за еквівалентністю, неодноеlementними класами якої є пари точок $\{(-1, y), (1, -y)\}$, $-2 \leq y \leq 2$. Після факторизації за цією еквівалентністю одержимо так званий лист М'юбіуса (див. рис. 4 справа).

Належним чином попарно "склеївши" і бічні сторони прямокутника (6) і верхню та нижню одержимо так звану пляшку Клейна (див. рис. 4 зліва).

Вирізавши площинами на сфері дві "шапочки" і приклеївши до них денця циліндра ми одержимо "сферу з ручками". Дещо важче уявити, що буде, коли вирізати в сфері площиною "шапочку" і вклеїти замість неї лист М'юбіуса.

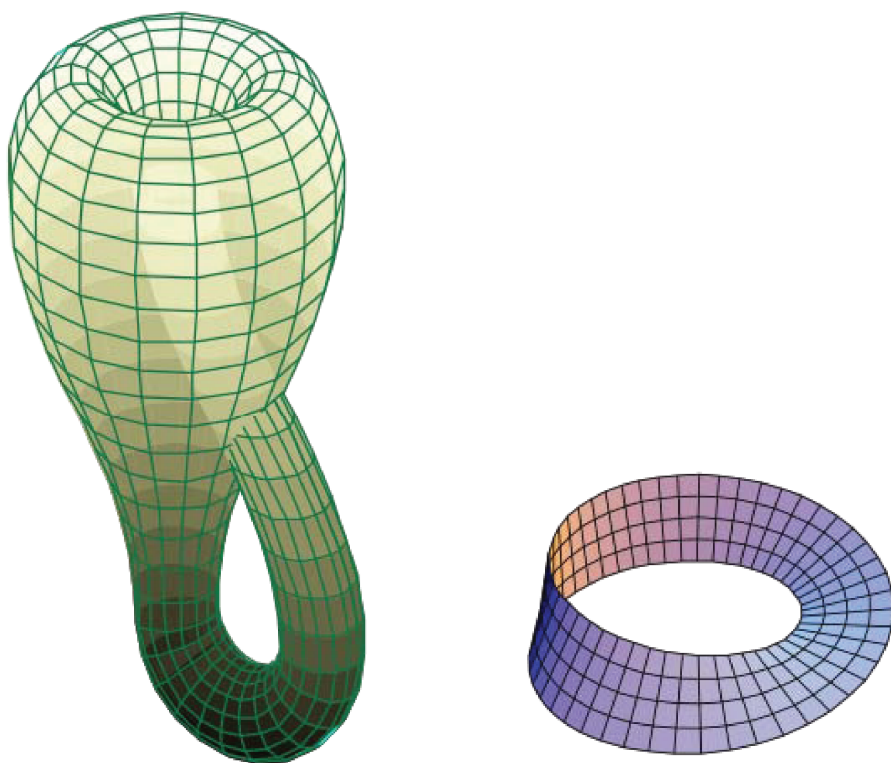


Рис. 4: Пляшка Клейна (зліва) та лист М'юбіуса (справа) є факторпросторами, одержані із прямокутника склеюванням протилежних сторін

2.3 Риманова площина і дійсна площина

Введемо на дійсній площині з прямокутною декартовою системою координат полярну систему координат. Кожна точки (x, y) що відрізняється від початку координат, одержує дві полярні координати — модуль r , та аргумент φ , які визначаються умовами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Для початку координат маємо модуль $r = 0$, а аргумент не визначений.

Ми можемо розглядати множину полярних координат (r, φ) без обмеження $0 \leq \varphi < 2\pi$, тобто при всіх $-\infty < \varphi < \infty$. В цій новій множині точка (r, φ) і точка $(r, \varphi) + 2\pi$ це різні точки. Множина точок (r, φ) без обмеження на аргумент називається римановою площиною.

На римановій площині можна ввести еквівалентність — дві точки еквівалентні, якщо модулі у них однакові, а аргументи відрізняються на $2k\pi$, k — ціле число.

Профакторизувавши риманову площину за введеною еквівалентністю ми одержуємо звичайну дійсну площину із полярною системою координат.

3 Застосування еквівалентностей а алгебрі — конгруенції та факторизація за конгруенцією.

3.1 Конгруенції універсальних алгебр

Нагадаємо, що універсальна алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Xi \rangle$ має носій A , множину, на якій діють операції, та сигнатуру Ξ , множину операцій на A .

Конгруенцією універсальної алгебри $\mathcal{A}$ називають таку еквівалентність $\sim$ на носіїв A , яка “узгоджена” з усіма операціями із сигнатури, в тому розумінні, що для будь-якої n —місної операції $f \in \Xi$

$$a_1 \sim b_1, \quad a_2 \sim b_2, \quad \dots, a_n \sim b_n \Rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \sim f(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

3.2 Факторизація груп

3.2.1 Означення, що стосуються груп.

Нагадаємо, що

Групою називають універсальну алгебру з непорожнім носієм і сигнатурою, що складається із трьох операцій:

- асоціативної бінарної операції, яку звичайно називають множенням або додаванням;
- унарної операції, яку звичайно називають “знаходження оберненого елемента”, або “знаходження протилежного елемента”;
- нульової, виділеного елемента, який називають одиницею, або нулем.

Якщо в групі G бінарна операція названа множенням, унарна операція названа “знаходження оберненого елемента”, а виділений елемент названий одиницею, то групу називають мультиплікативною. Аксиоми мультиплікативної групи записуються у вигляді:

- $\forall a, b, c \in G \quad (ab)c = a(bc);$
- $\exists 1 \in G \quad \forall a \in G \quad 1a = a1 = a;$

- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad ab = ba = 1.$

Якщо в групі G бінарна операція названа додаванням, унарна операція названа “знаходження протилежного елемента”, а виділений елемент названий нулем, то групу називають адитивною. Аксиоми адитивної групи записуються у вигляді:

- $\forall a, b, c \in G \quad (a + b) + c = a + (b + c);$
- $\exists 0 \in G \quad \forall a \in G \quad 0 + a = a + 0 = a;$
- $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad a + b = b + a = 0.$

Традиція дозволяє для групи і для її носія використовувати одне і те ж позначення. Таким чином, коли є дві групи G_1, G_2 , то можна використовувати запис $G_1 \subseteq G_2$, в якому уже через G_1, G_2 позначені носії груп. Також можна використовувати запис

$$G = \langle G; \cdot, {}^{-1}, e \rangle,$$

в якому зліва від знака рівності через G позначена група, а справа від знака рівності та ж буква використана для позначення носій групи.

Кажуть, що група G_1 є підгрупою групи G_2 коли

- $G_1 \subseteq G_2$, виділений елемент (одиниця чи нуль) групи G_1 є виділеним елементом групи G_2 ,
- застосування бінарної чи унарної операцій групи G_1 до елементів із G_1 дасть той же результат, що і застосування до цих елементів відповідних операцій групи G_2

Дві групи G_1, G_2 вважаються ізоморфними, коли існує так званий ізоморфізм із однієї групи в другу, тобто існує бієкція

$$f : G_1 \rightarrow G_2,$$

яка переводить виділений елемент у виділений, і яка узгоджена з бінарною та унарною операцією — для мультиплікативної групи це означає

$$\forall x, y \in G_1 f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

3.2.2 Суміжні класи групи по підгрупі та інваріантні підгрупи

Нехай $G = \langle G; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ і її підгрупи $H = \langle H; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$. Для кожного елемента $g \in G$ можна розглядати дві множини

$$g \cdot H = \{g \cdot h | h \in H\}, \quad (7)$$

і

$$H \cdot g = \{h \cdot g | h \in H\}. \quad (8)$$

Для заданої групи G її елемента $g \in G$ та підгрупи $H \subseteq G$ множина $g \cdot H$ називається лівим суміжним класом, а множина $H \cdot g$ називається правим суміжним класом елемента $g \in G$ групи G по підгрупі H .

Теорема 3.1 (Про класи суміжності групи) *Ліві класи суміжності групи по підгрупі мають наступні властивості*

1. Об'єднання класів суміжності є вся група;
2. Різні класи суміжності мають порожній перетин;
3. Класи суміжності рівнопотужні (мають одну і ту ж кількість елементів, що і підгрупа).

Ті ж самі властивості мають і праві класи суміжності групи по підгрупі.

Доведення. Оскільки $1 \in H$ і для кожного $g \in G$

$$g \cdot 1 = g \in g \cdot H,$$

то кожний елемент всієї групи знаходиться в певному лівому класі суміжності і об'єднанням класів суміжності є вся група. Перша властивість перевірена.

Другу властивість переформулюємо у вигляді: “Якщо два ліві класи суміжності мають непорожній перетин, то ці класи збігаються.” Доведемо другу властивість саме в такому формулюванні.

Нехай є два ліві класи суміжності $K_1 = g_1H$ і $K_2 = g_2H$. Припустимо, що ці класи мають непорожній перетин: $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ і $g \in K_1 \cap K_2$, тобто для деяких $h_1, h_2 \in H$

$$g = g_1h_1 = g_2h_2. \quad (9)$$

Потрібно довести, що

$$\forall x \in G \quad (x \in K_1 \Leftrightarrow x \in K_2).$$

Припустимо, що $x \in K_1$, і для деякого $y_1 \in H$ можна записати

$$x = g_1y_1.$$

Домножимо рівності (9) справа на h_1^{-1} . Одержимо

$$g_1 = g_2h_2h_1^{-1}.$$

Оскільки H є підгрупою групи G , то $h_2h_1^{-1} \in H$, $h_2h_1^{-1}y_1 \in H$. Звідси випливає, що

$$x = g_1 \cdot (h_2h_1^{-1}y_1) \in K_2.$$

Зворотна імплікація доводиться точно так же.

Друга властивість доведена.

Переходимо до третьої властивості.

За означенням, дві множини рівнопотужні (якщо вони нескінченні) або мають одну і ту ж кількість елементів в тому і тільки тому випадку, коли існує взаємно однозначна відповідність між елементами цих множин. Бієкція між підгрупою H і класом суміжності gH встановлюється правилом

$$h \in H \rightarrow gh.$$

Так побудоване відображення є відображенням “на”, тобто сюр’єктивним, тому що за означенням класу суміжності всі елементи лівого класу суміжності можна записати у вигляді gh для деякого $h \in H$.

Так побудоване відображення є відображенням “в”, тобто ін’єктивним, тому що

$$gh_1 = gh_2 \Rightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Теорема доведена повністю. ■

Теорема 3.1 показує, що ліві класи суміжності групи по підгрупі утворюють розбиття групи, праві класи суміжності утворюють розбиття групи, а відношення “лежати в одному лівому класі суміжності” і відношення “лежати в одному правому класі суміжності” є відношенням еквівалентності.

Наслідком теореми 3.1 є

Теорема 3.2 (Про подільність порядку групи на порядок підгрупи)

Якщо група має скінченну кількість елементів, то для будь-якої підгрупи кількість елементів групи ділиться на кількість елементів у цій підгрупі.

Групи із скінченною кількістю елементів називають скінченними, а кількість елементів в скінченній групі називають її порядком. В цій термінології наведену теорему можна переформулювати наступним чином “В скінченній групі порядок підгрупи завжди є дільником порядку групи.”

Доведення. Твердження теореми випливає із 3-ої властивості в теоремі 3.1 лівих суміжних класів групи по підгрупі. Згідно з цією властивістю кількість елементів в групі є добутком кількості класів суміжності на кількість елементів у підгрупі. Отже кількість елементів групи ділиться на кількість елементів підгрупи. ■

Із теореми 3.2 випливає, що група порядку 5 має лише 2 підгрупи — одиничну, що складається лише із одиниці, і підгрупи, що збігається із усією групою.

Розглянемо приклад. Візьмемо групу S_3 . Її елементами є підстановки третього степеня, тобто бієктивні відображення триелементної множини в себе:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $a^2 = e$, а e є одиницею групи, то $H = \{e, a\}$ є підгрупою групи S_3 . Працюючи з відображеннями потрібно мати на увазі, що за неомовленістю, коли на елемент діє композиція двох відображень, то першим діє те відображення, яке стоїться справа, тобто діє правило

$$(fg)(x) = f(g(x)).$$

Згідно з цим правилом, оскільки $a(2) = 3$, а $b(3) = 3$, то $ba(2) = 3$. Випишемо ліві суміжні класи групи S_3 по підгрупі H :

$$aH = eH = H, \quad bH = d_1H = \{b, d_1\}, \quad cH = d_2H = \{c, d_2\}.$$

Випишемо праві суміжні класи групи S_3 по підгрупі H :

$$Ha = He = H, \quad Hb = Hd_2 = \{b, d_2\}, \quad Hc = Hd_1 = \{c, d_1\}.$$

Ми бачимо, що лівий суміжний клас елемента $b \in S_3$ не збігається з правим суміжним класом цього елемента. При вивченні факторизації груп важливими є ті підгрупи, в яких ліві суміжні класи збігаються з відповідними правими суміжними класами.

Теорема 3.3 (Про збіжність лівих та правих суміжних класів)

Ліві суміжні класи групи G по підгрупі H збігаються з правими суміжними класами тоді і тільки тоді, коли для будь-якого елемента $g \in G$ виконується рівність

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg | h \in H\} = H.$$

Доведення. Припустимо, що для $g \in G$ виконується рівність $gH = Hg$, тобто для кожного $h_1 \in H$ існує елемент $h_2 \in H$ такий, що $gh_1 = h_2g$. А це означає, що для кожного $h_1 \in H$ можна записати $g^{-1}gh_1g \in H$, $g^{-1}Hg \subseteq H$. Для елементів $h, ghg^{-1} \in H$ можна записати $g^{-1}(ghg^{-1})g = h$. А це означає, що $g^{-1}Hg \supseteq H$. Таким чином ми довели рівність $g^{-1}Hg = H$.

Припустимо, що для $g \in G$ виконується рівність $g^{-1}Hg = H$. Тоді для кожного $h_1 \in H$ існує $h_2 \in H$ і для кожного $h_2 \in H$ існує $h_1 \in H$ такі, що $g^{-1}h_1g = h_2$, $gh_2 = h_1g$. А це означає, що $gH = Hg$. Рівність лівих і правих суміжних класів доведена.

Теорема доведена. ■

Теорема 3.3 дозволяє ввести означення

Підгрупа H групи G називається інваріантною підгрупою або нормальним дільником, коли виконується одна із умов

- ліві суміжні класи групи G по підгрупі H збігаються з правим суміжними класами;
- для кожного елемента $g \in G$ виконується рівність

$$g^{-1}Hg = H.$$

В згаданому вище прикладі групи S_3 підгрупа $H_1 = \{e, a\}$ не інваріантна, а підгрупа $H_2 = \{e, d_1, d_2\}$ інваріантна, або є нормальним дільником.

В комутативних групах всі підгрупи є інваріантні, тому що ліві суміжні класи і праві суміжні класи в них є одне і те ж.

3.2.3 Зв'язок між конгруенціями групи та інваріантними підгрупами

За означенням конгруенції універсальної алгебри

Еквівалентність $\sim$ на мультиплікативній групі G є конгруенцією тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$

- $x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2 \Rightarrow x_1 \cdot y_1 \sim x_2 \cdot y_2$;
- $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_1^{-1} \sim x_2^{-1}$.

Теорема 3.4 (Про зв'язок між конгруенціями та інваріантними підгрупами)

Між конгруенціями на групі і інваріантними підгрупами є канонічна взаємно однозначна відповідність: інваріантній підгрупі відповідає конгруенція, класами якої є класи суміжності, а конгруенції відповідає інваріантна підгрупа, яка є класом одиниці.

Доведення. Нехай задана мультиплікативна група G , на ній задана конгруенція $\sim$, і H — клас одиниці (множина всіх елементів групи, що конгруентні одиниці). Покажемо, що H є інваріантною підгрупою.

Виберемо два елементи $x, y \in H$. За означенням множини H $x \sim 1, y \sim 1$. За означенням конгруенції групи звідси випливає, що

$$x \cdot y \sim 1 \cdot 1 = 1, \quad x^{-1} \sim 1^{-1} = 1.$$

Отже, H є підгрупою.

Виберемо два елементи $g \in G$ і $h \in H$. Тоді $g \sim g, g^{-1} \sim g^{-1}, h \sim 1$ і

$$g^{-1}h \sim g^{-1} \cdot 1 = g^{-1}, \quad g^{-1}hg \sim g^{-1}g = 1, \quad g^{-1}hg \in H.$$

Отже підгрупа H інваріантна.

Перевіримо, що класи суміжності є класами конгруенції.

Виберемо два елементи x, y із одного класу суміжності $gH, g \in G$. Тоді $x = gh_1, y = gh_2$ для деяких $h_1, h_2 \in H$. Оскільки $h_1 \sim h_2$, то $gh_1 \sim gh_2$ і $x \sim y$. Ми довели, що коли два елементи лежать в одному класі суміжності, то в они лежать в одному класі конгруенції.

Виберемо два елементи $x, y \in G, x \sim y$. Оскільки $x^{-1} \sim x^{-1}$, то

$$xx^{-1} \sim yx^{-1}, \quad 1 \sim yx^{-1}, \quad yx^{-1} = h \in H, \quad y = hx, \quad y \in Hx,$$

тобто x, y належать одному класу суміжності Hx .

Переходимо до другої половини теореми — доведемо, що суміжні класи по інваріантній підгрупі є класами конгруенції. Отже маємо інваріантну підгрупу $H \subseteq G$ і класи суміжності $gH = Hg, g \in G$. Покажемо, що відношення “ $x \sim y \Leftrightarrow$ два елементи x, y лежать в одному класі суміжності” є відношенням конгруентності.

Те, що відношення $x \sim y$ є відношенням еквівалентності, випливає із теореми 3.1. Лишилося перевірити дві імплікації

$$x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2 \Rightarrow x_1y_1 \sim x_2y_2; \quad (10)$$

$$x \sim y \Rightarrow x^{-1} \sim y^{-1}. \quad (11)$$

Перевіримо імплікацію 10. Для цього виберемо довільні x_1, x_2, y_1, y_2 такі, що $x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2$, тобто такі, що x, x_2 лежать в одному класі суміжності, і y_1, y_2 також лежать в одному класі суміжності. Нехай $x_1, x_2 \in g_1 H, y_1, y_2 \in g_2 H$ для певних $g_1, g_2 \in G$ і, відповідно, для деяких $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$ можна записати

$$x_1 = g_1 h_1, \quad x_2 = g_1 h_2, \quad y_1 = g_2 h_3, \quad y_2 = g_2 h_4.$$

Тепер

$$x_1 y_1 = (g_1 h_1)(g_2 h_3) = g_1 (h_1 g_2) h_3, \quad x_2 y_2 = (g_1 h_2)(g_2 h_4) = g_1 (h_2 g_2) h_4. \quad (12)$$

Оскільки підгрупа H інваріантна, то ліві суміжні класи по ній збігаються з правими суміжними класами (за означенням), то

$$g_2 H = H g_2,$$

і для деяких $h_5, h_6 \in H$ можна написати

$$h_1 g_2 = g_2 h_5, \quad h_2 g_2 = g_2 h_6.$$

Останні рівності дозволяють переписати (12) у вигляді

$$x_1 y_1 = (g_1 g_2)(h_5 h_3), \quad x_2 y_2 = (g_1 g_2)(h_6 h_4). \quad (13)$$

Тепер ми бачимо, що і $x_1 y_1$ і $x_2 y_2$ лежать в одному суміжному класі — в класі $g_1 g_2 H$, і, таким чином, еквівалентні. Імплікація (10) доведена.

Якщо $x, y \in G$ і $x \sim y$, тобто $x, y \in gH$ для деякого $g \in G$, то для деяких $h_1, h_2 \in H$

$$x = g h_1, x^{-1} = (h_1)^{-1} g^{-1}, \quad y = g h_2, y^{-1} = (h_2)^{-1} g^{-1}.$$

Виписані рівності показують, що і x^{-1} і y^{-1} лежать в одному класі суміжності класі елемента g^{-1} . Імплікація (11) доведена.

І доведення теореми завершене. ■

3.2.4 Приклад факторизації групи.

Розглянемо одиничне коло — воно складається із точок, що мають координати

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 2\pi).$$

Перетворимо коло в групу, ввівши операцію множення точок

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)).$$

В цій групі одиницею є точка $(1, 0)$, а оберненим елементом до точки $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ буде точка $(\cos(2\pi - \alpha), \sin(2\pi - \alpha))$.

Виберемо в цій групі підгрупу H , що складається із двох точок — $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Класами суміжності по цій підгрупі будуть пари вигляду

$$(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos(2\pi - \alpha), \sin(2\pi - \alpha)), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Факторгрупа G/H ізоморфна всій групі G , ізоморфізм встановлюється правилом: класу, що містить точку $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, ставиться у відповідність точка $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$.

3.3 Факторизація кілець

3.3.1 Означення, що стосуються кілець.

Нагадаємо, що

Кільцем називають універсальну алгебру з непорожнім носієм і сигнатурою, що складається із чотирьох операцій:

- бінарної операції додаванням;
- бінарної операції множення;
- унарної операції “знаходження протилежного елемента”;

- нульової, виділеного елемента, який називають нулем.

Аксіоми кільця $K = \langle K; +, -, \cdot, 0 \rangle$ мають вигляд

$$\forall a, b, c \in K \quad (ab)c = a(bc);$$

$$\forall a, b, c \in K \quad (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$\forall a, b, c \in K \quad (a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac;$$

$$\forall a \in K \quad a + 0 = 0 + a = a;$$

$$\forall a \in K \quad a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

$$\forall a, b \in K \quad a + b = b + a.$$

Звернемо увагу, що кільце можна розглядати як адитивну групу, якщо звужити сигнатуру — викинути з неї множення.

3.3.2 Факторизація кілець та ідеали.

З процесом факторизації кілець тісно пов'язані так звані ідеали.

Підкільце I кільця K називається ідеалом, коли для будь-яких $x \in I, y \in K$ буде $xy \in I$ і $yx \in I$.

Теорема 3.5 (Про зв'язок між конгруенціями та ідеалами кільця)

Між ідеалами кільця та конгруенціями існує канонічна (природна) взаємно однозначна відповідність — кожній конгруенції ставиться у відповідність клас нуля, а кожному ідеалу ставиться у відповідність конгруенція, класами якої є класи суміжності адитивної групи кільця по ідеалу (він є адитивною підгрупою адитивної групи кільця).

Доведення. Покажемо, що в кільці K для заданої конгруенції $\sim$ клас нуля

$$I = \{x \in K | x \sim 0\}$$

взажди є ідеалом.

Дійсно, для будь-яких $x, y \in I$

$$x \sim 0, y \sim 0 \Rightarrow xy \sim 0, x + y \sim 0, -x \sim 0,$$

тобто $xy, x + y, -x \in I$ і I є підкільцем кільця K .

А оскільки для будь-яких $x \in I, y \in K$

$$x \sim 0, y \sim y \Rightarrow xy \sim 0, yx \sim 0,$$

то $xy, yx \in I$. Те, що I є ідеалом, доведено.

Покажемо, що кожному ідеалу відповідає одна і тільки одна конгруенція, для якої клас нуля збігається із цим ідеалом — класами еквівалентності цієї конгруенції будуть класи суміжності:

$$x + I = \{x + y | y \in I\}. \quad (14)$$

Нехай маємо ідеал $I \subseteq K$ кільця K . Класи (14) задають еквівалентність, тобто

- якщо два класи мають непорожній перетин, то в они збігаються
- кожен елемент кільця знаходиться в певному класі.

тому що ми можемо розглядати кільце як адитивну групу, а ідеал, як підгрупу цієї групи. А для груп ми перевірили, що класи суміжності утворюють розбиття і, відповідно, задають еквівалентність.

Лишилося перевірити, що так визначена еквівалентність є конгруенцією, тобто для будь-яких $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$

$$x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2 \Rightarrow x_1 \cdot y_1 \sim x_2 \cdot y_2; \quad (15)$$

$$x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2; \quad (16)$$

$$x_1 \sim x_2 \Rightarrow -x_1 \sim -x_2. \quad (17)$$

Будемо користуватися тим, що два елементи $a, b \in K$ лежать в одному класі суміжності по ідеалу I тоді і тільки тоді, коли $a - b \in I$. Справді, коли $a, b \in K$ і $a - b = c \in I$, тоді $a = b + c, b = b + 0$ і $a, b \in b + I$ — обидва елементи лежать в одному класі суміжності. Якщо ж два елементи $a, b \in K$ лежать в одному класі суміжності $c + I$, тоді для деяких $x, y \in I$ $a = c + x, b = c + y$ і $a - b = (c + x) - (c + y) = x - y \in I$.

Нижче $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ будуть означати елементи кільця K такі, що, $x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2$ і, відповідно, для деяких елементів $a, b \in K$

$$x_1, x_2 \in a + I, \quad y_1, y_2 \in b + I.$$

А це означає, що для деяких елементів $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$

$$x_1 = a + u_1, \quad x_2 = a + u_2, \quad y_1 = b + v_1, \quad y_2 = b + v_2.$$

Введені позначення дозволяють провести обчислення:

$$x_1 y_1 = (a + u_1)(b + v_1) = ab + (u_1 b + a v_1 + u_1 v_1),$$

$$x_2 y_2 = (a + u_2)(b + v_2) = ab + (u_2 b + a v_2 + u_2 v_2).$$

Оскільки I є ідеалом, то

$$(u_1 b + a v_1 + u_1 v_1), (u_2 b + a v_2 + u_2 v_2) \in I,$$

і

$$x_1 y_1, x_2 y_2 \in ab + I.$$

Перевірку імплікації (15) завершено

Подібним чином

$$x_1 + y_1 = (a + u_1) + (b + v_1) = a + b + (u_1 + v_1), \quad x_2 + y_2 = (a + u_2) + (b + v_2) = a + b + (u_2 + v_2)$$

і

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in (a + b) + I.$$

Перевірку імплікації (16) завершено

Для перевірки імплікації (17) досить виписати елементи $-x_1 = -a - u_1$, $-x_2 = -a - u_2$ і побачити, що $-x_1, -x_2 \in -a + I$.

Кільце є адитивною групою. І конгруенція кільця є конгруенцією цієї адитивної групи. Тому за теоремою 3.1 клас нуля задає єдину конгруенцію групи і, відповідно, не більше однієї конгруенції кільця.

Теорема доведена повністю. ■

3.3.3 Приклади ідеалів та конгруенцій кільця

В кільці цілих чисел ідеалами є підкільця вигляду

$$n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots, \pm kn, \dots\}, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

В розділі 1.6 ми окремо, з огляду на особливу важливість, розглянули кільце класів лишків за модулем $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Кільце класів лишків за натуральним модулем n є факторкільцем кільця цілих чисел по ідеалу $n\mathbb{Z}$.

У множині многочленів два многочлени можна вважати еквівалентними, якщо їх різниця ділиться на $x^2 + 1$. Класи цієї еквівалентності називають комплексними числами.

Вказана еквівалентність є конгруенцією кільця многочленів з дійсними коефіцієнтами. А поле комплексних чисел є факторкільцем кільця многочленів по ідеалу тих многочленів, які діляться на $x^2 + 1$.

Наведені два приклади — кільце класів лишків та поле комплексних чисел, стало використовуються всіма розділами математики. До їх означення існують і інші підходи, в залежності від методичних міркувань, від підготованості слухачів.

4 Унари з малою кількістю елементів та ґратки їх конгруенцій

В пропонуваному розділі наведені приклади унарів з невеликою кількістю елементів та ґраток їх конгруенцій. Цей матеріал зручний для практикування в знаходженні всіх конгруенцій універсальної алгебри.

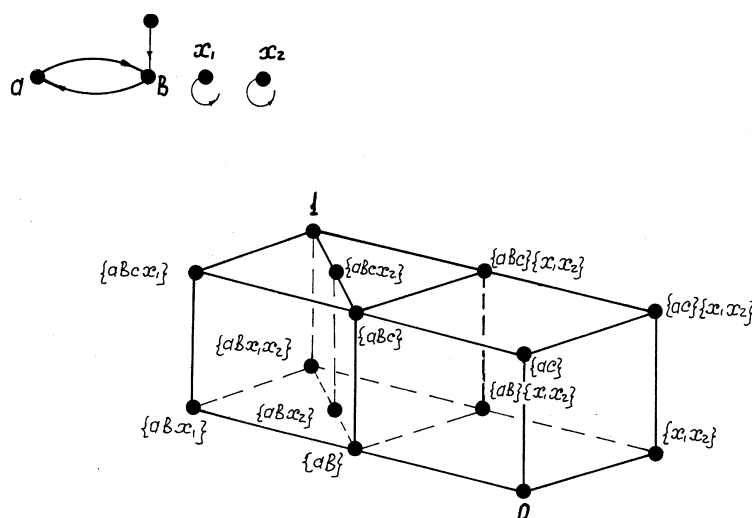


Рис. 5: Унар 1 та його ґратка конгруенцій

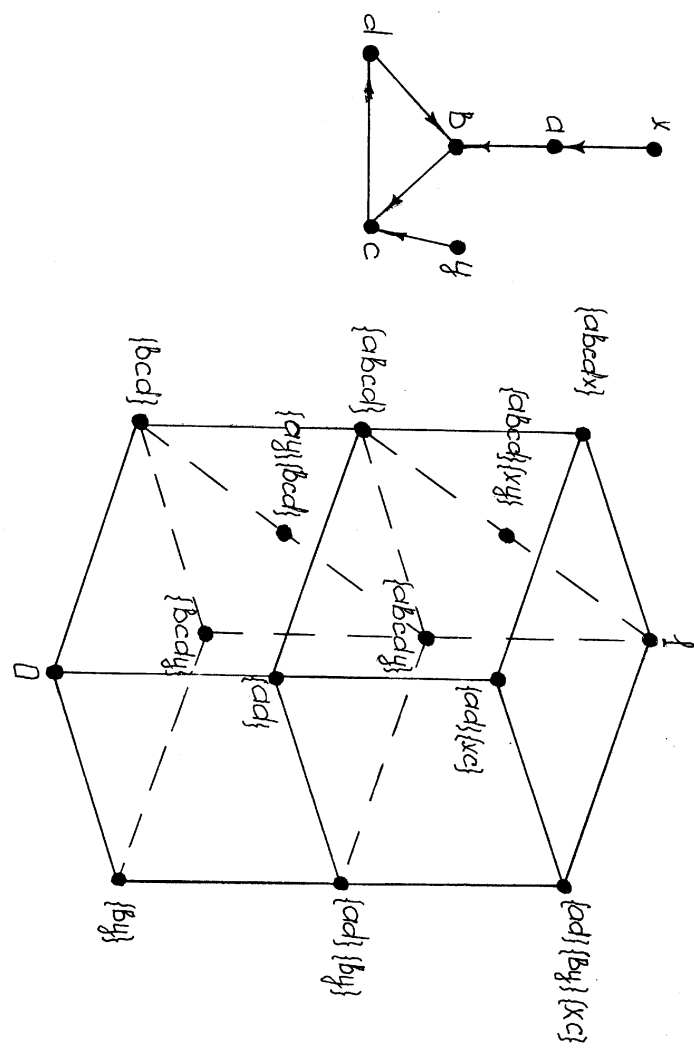


Рис. 6: Унар 2 та його гратка конгруенцій

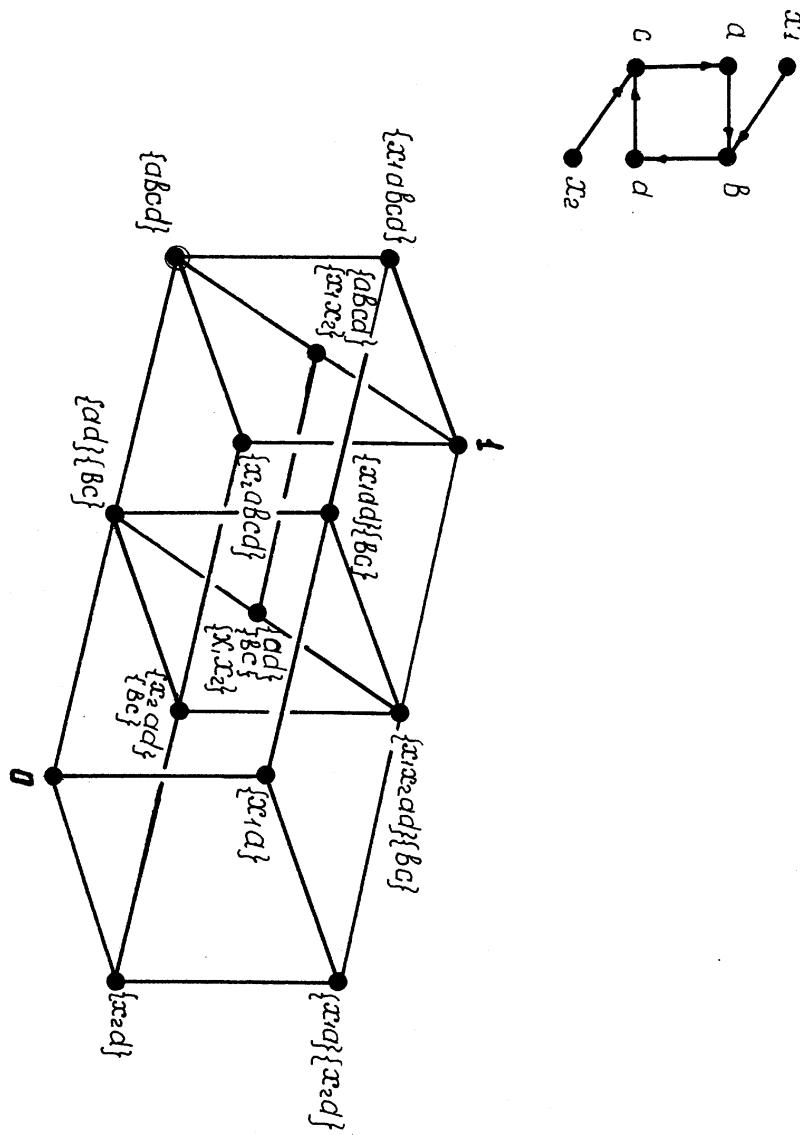


Рис. 7: Унар 3 та його гратка конгруенцій

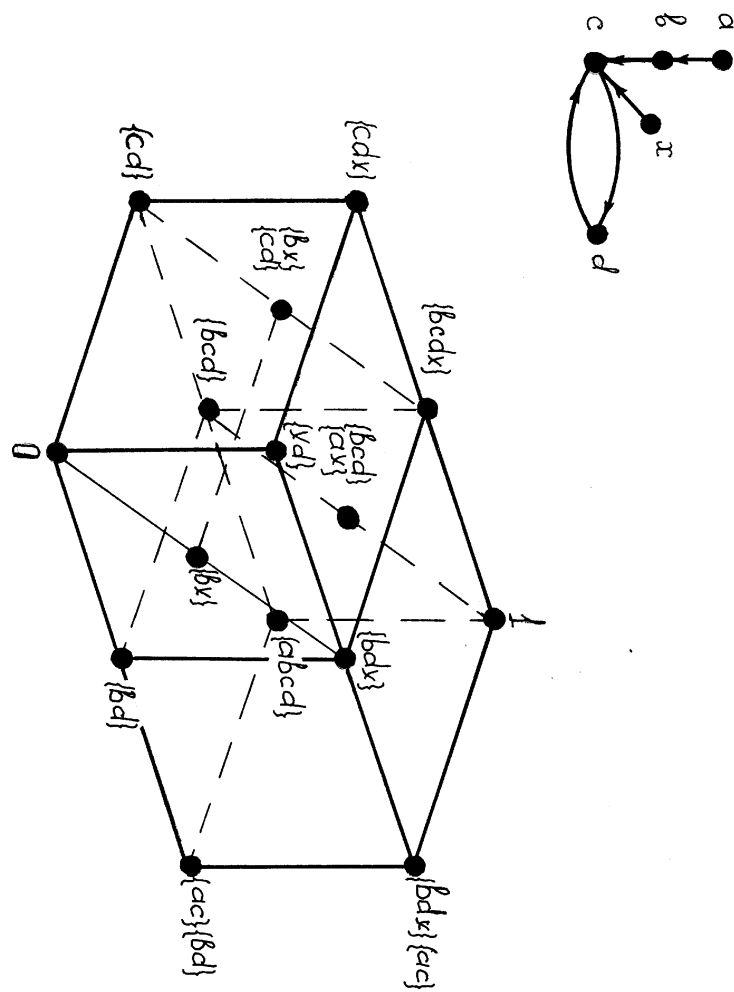


Рис. 8: Унар 4 та його гратка конгруенцій

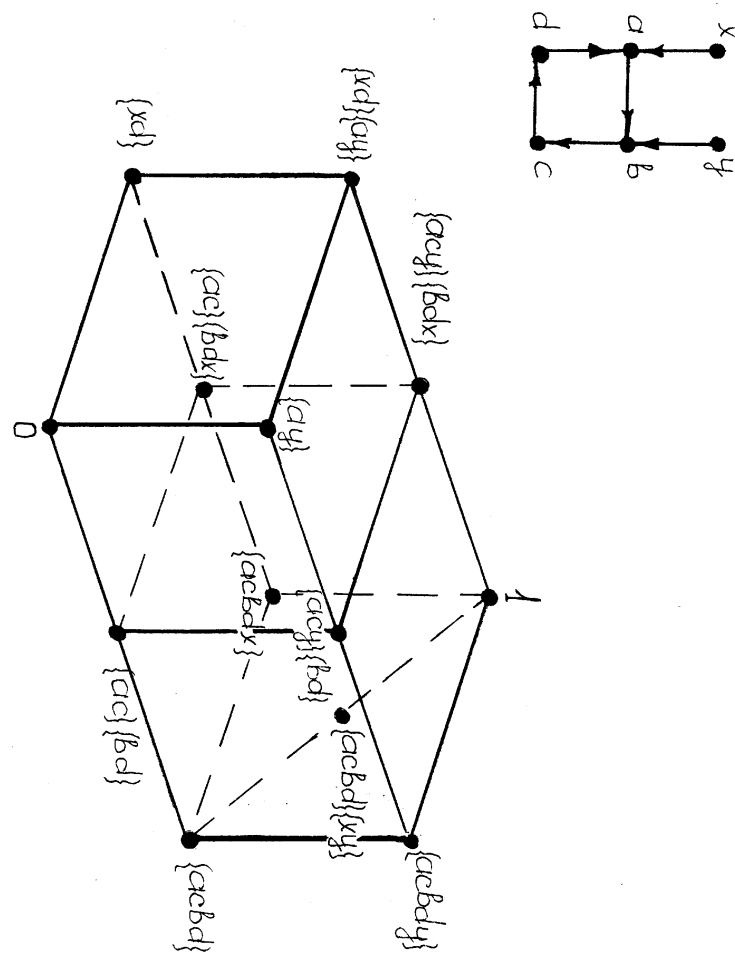


Рис. 10: Унар 6 та його ґратка конгруенцій

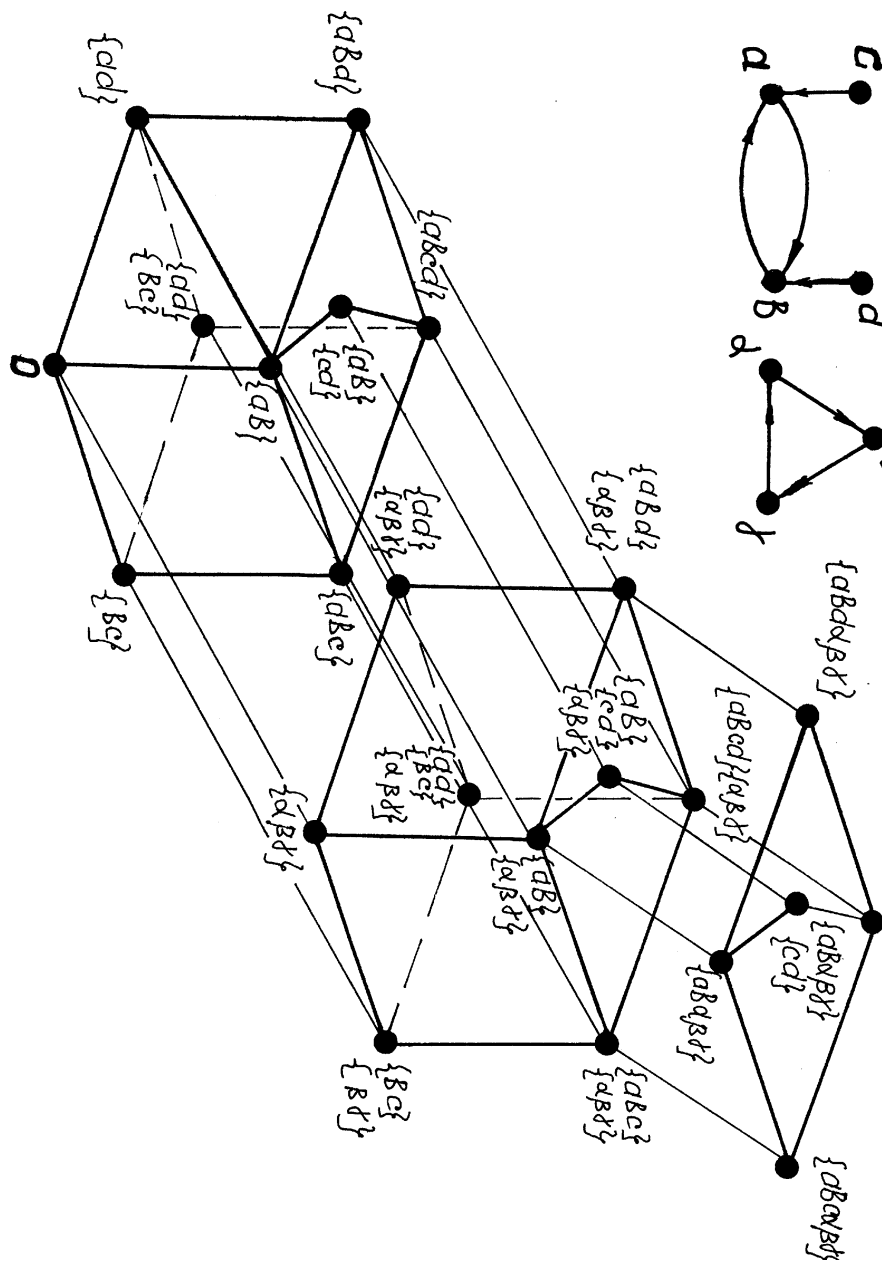


Рис. 11: Унар 7 та його ґратка конгруенцій

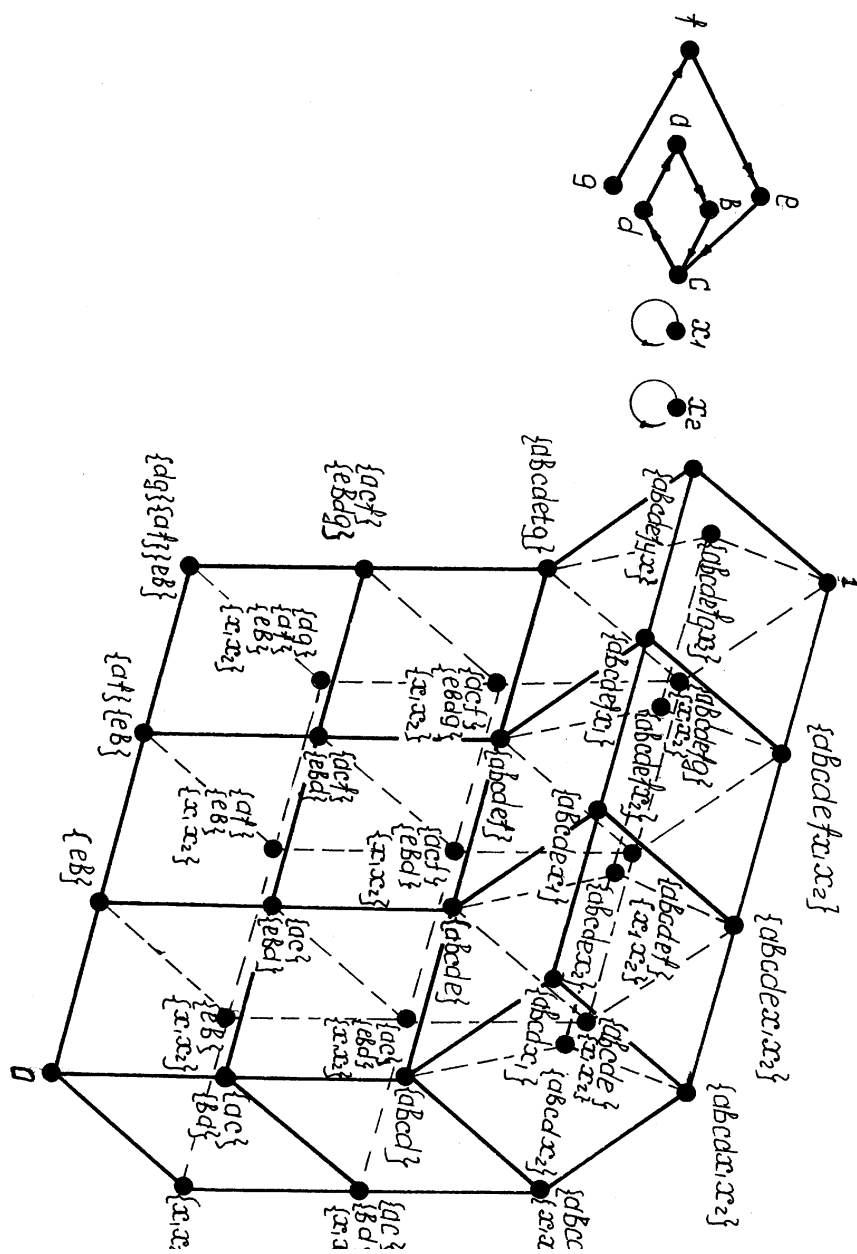


Рис. 12: Унар 8 та його ґратка конгруенцій

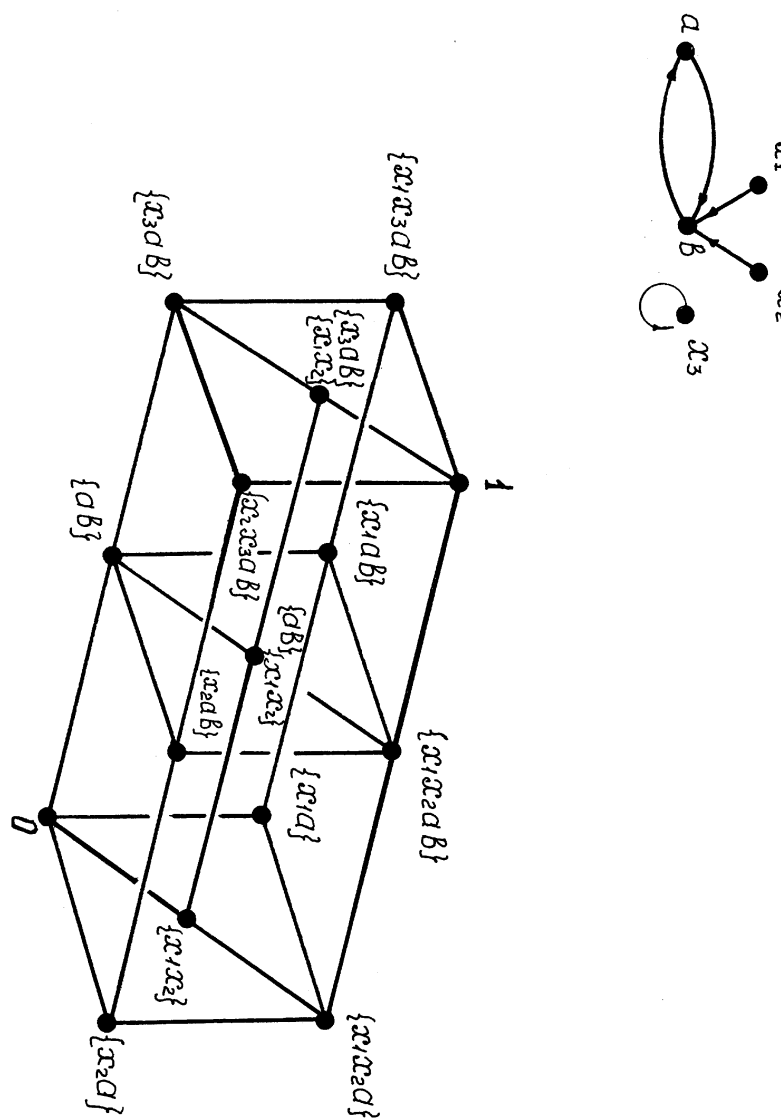


Рис. 13: Унар 9 та його ґратка конгруенцій

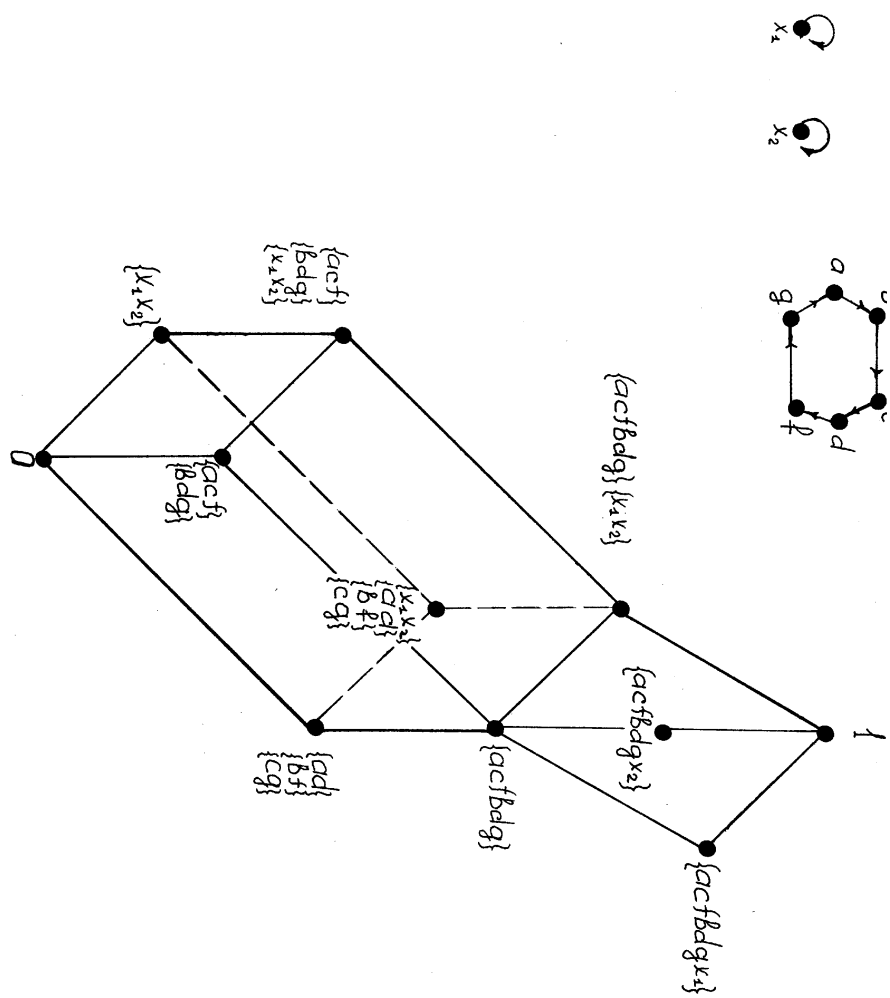


Рис. 14: Унар 10 та його ґратка конгруенцій

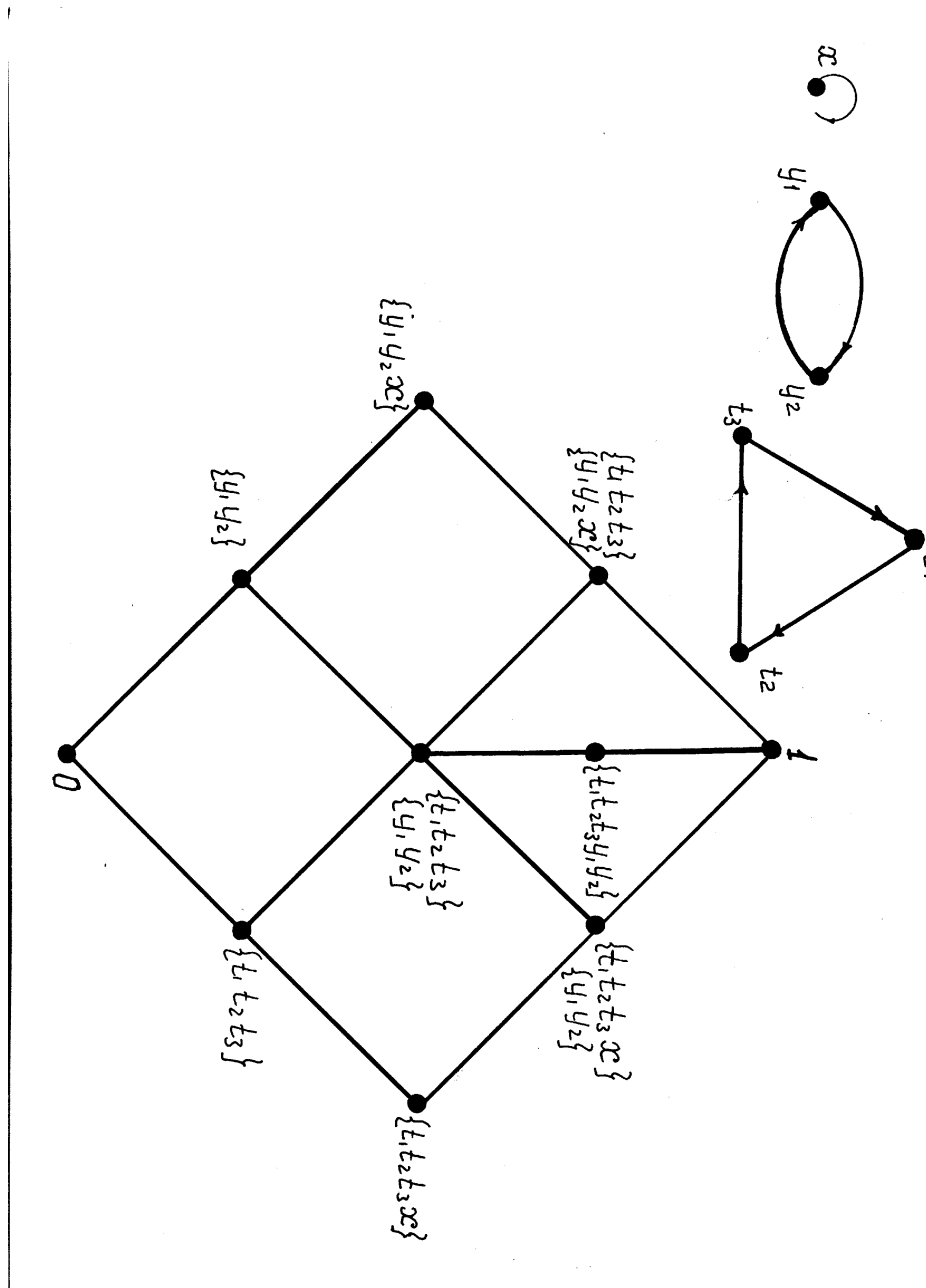


Рис. 15: Унар 11 та його гратка конгруенцій

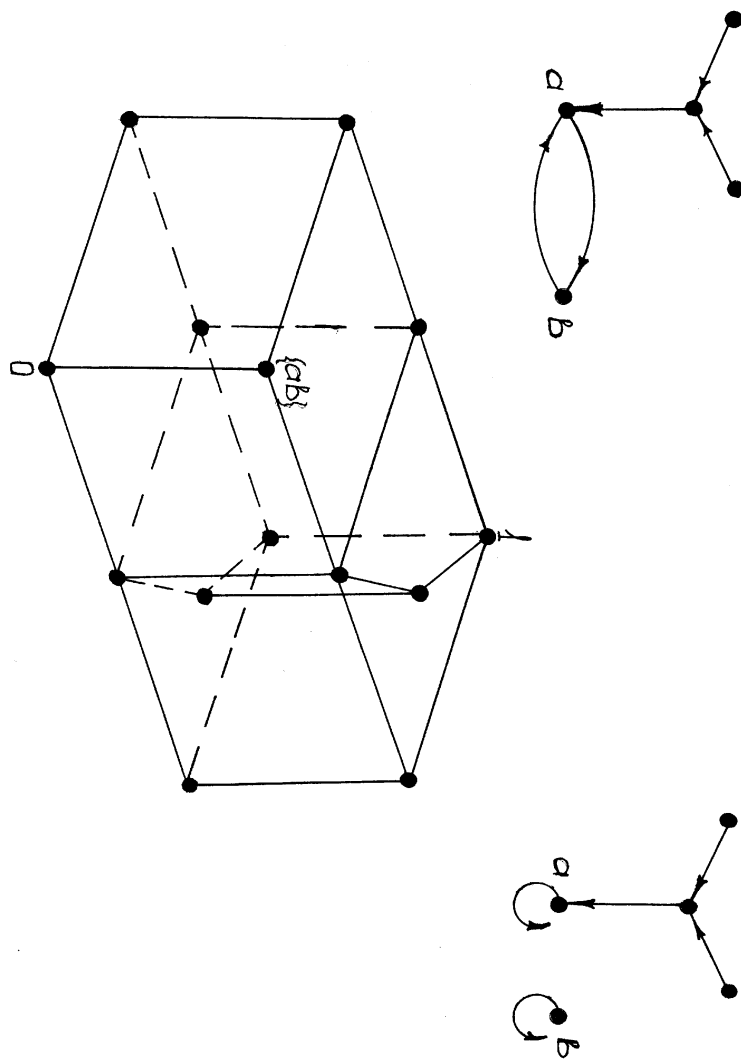


Рис. 16: Унар 12 та його ґратка конгруенцій

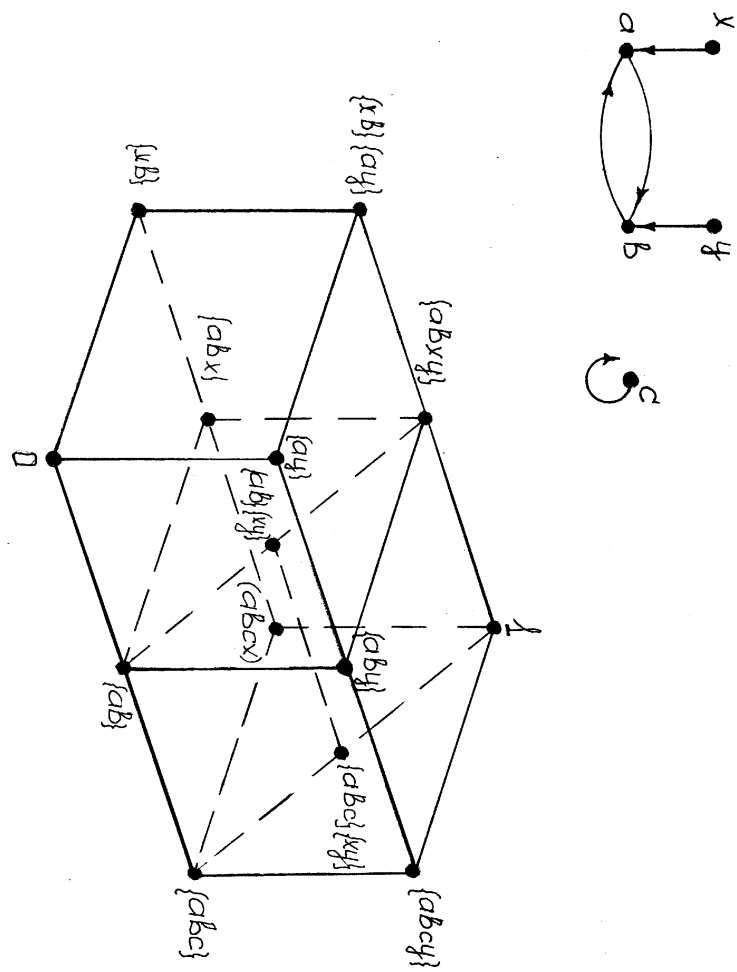


Рис. 17: Унар 13 та його ґратка конгруенцій

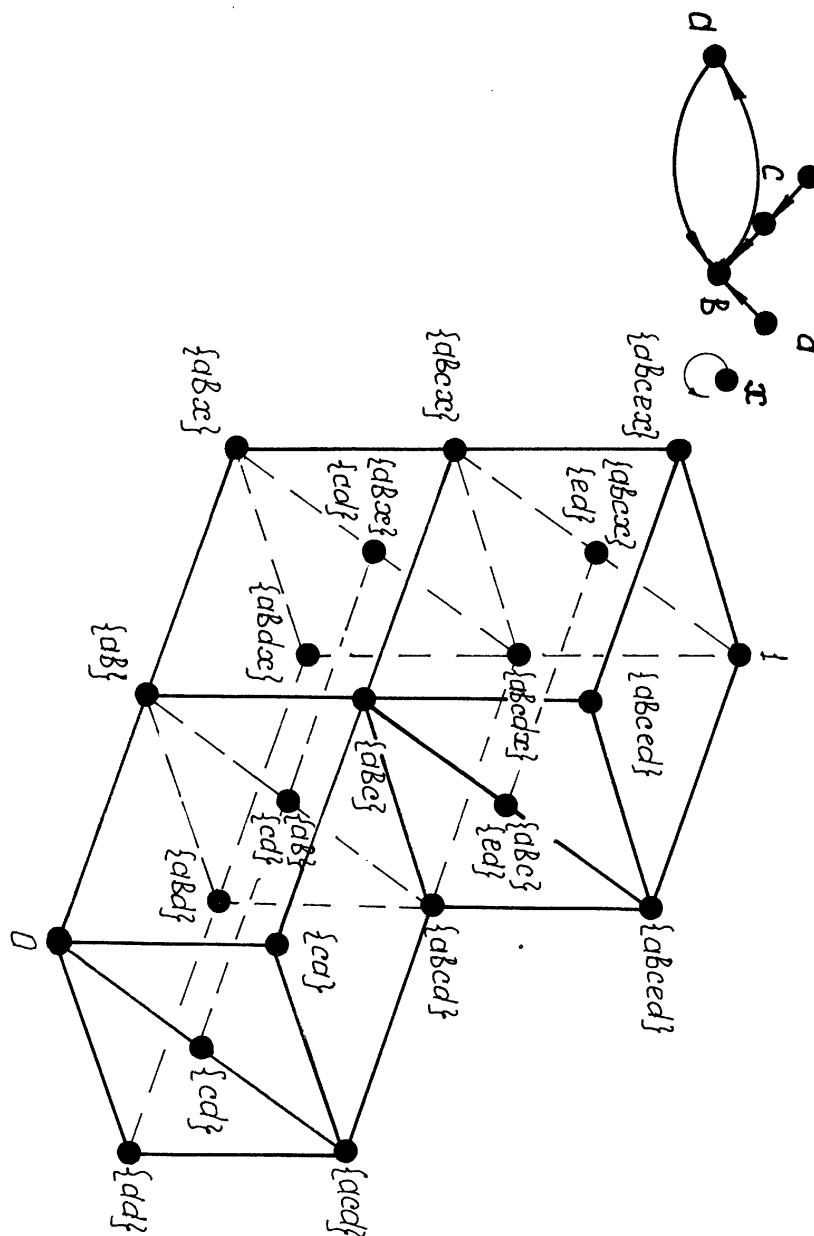


Рис. 18: Унар 14 та його гратка конгруенцій

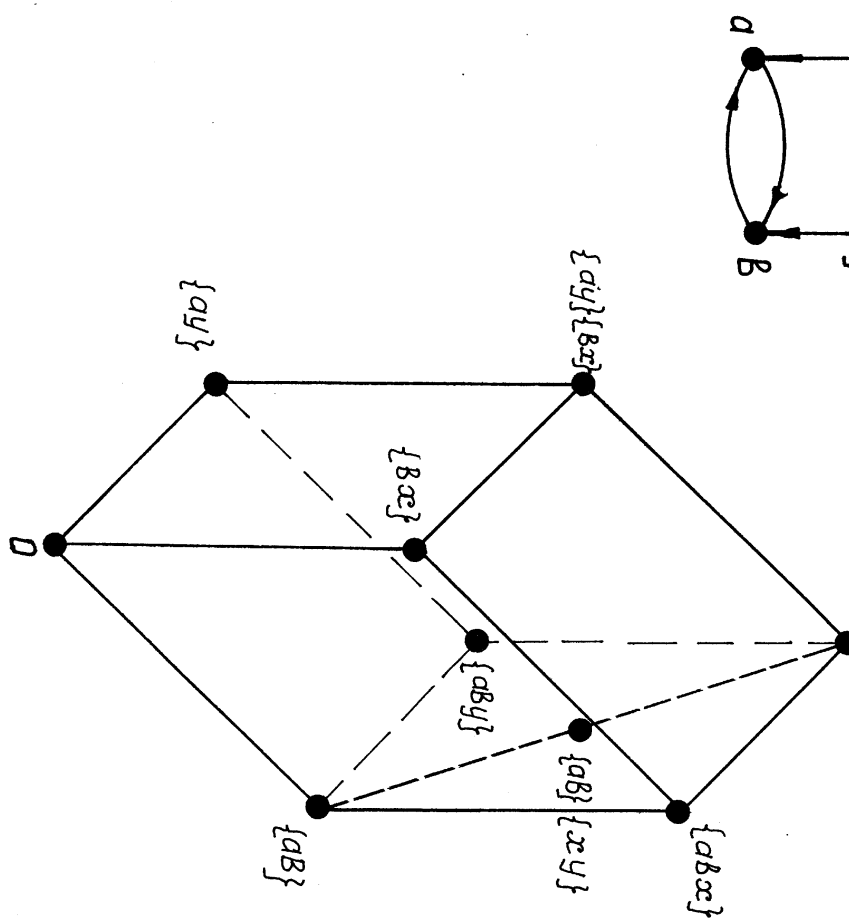


Рис. 19: Унар 15 та його ґратка конгруенцій

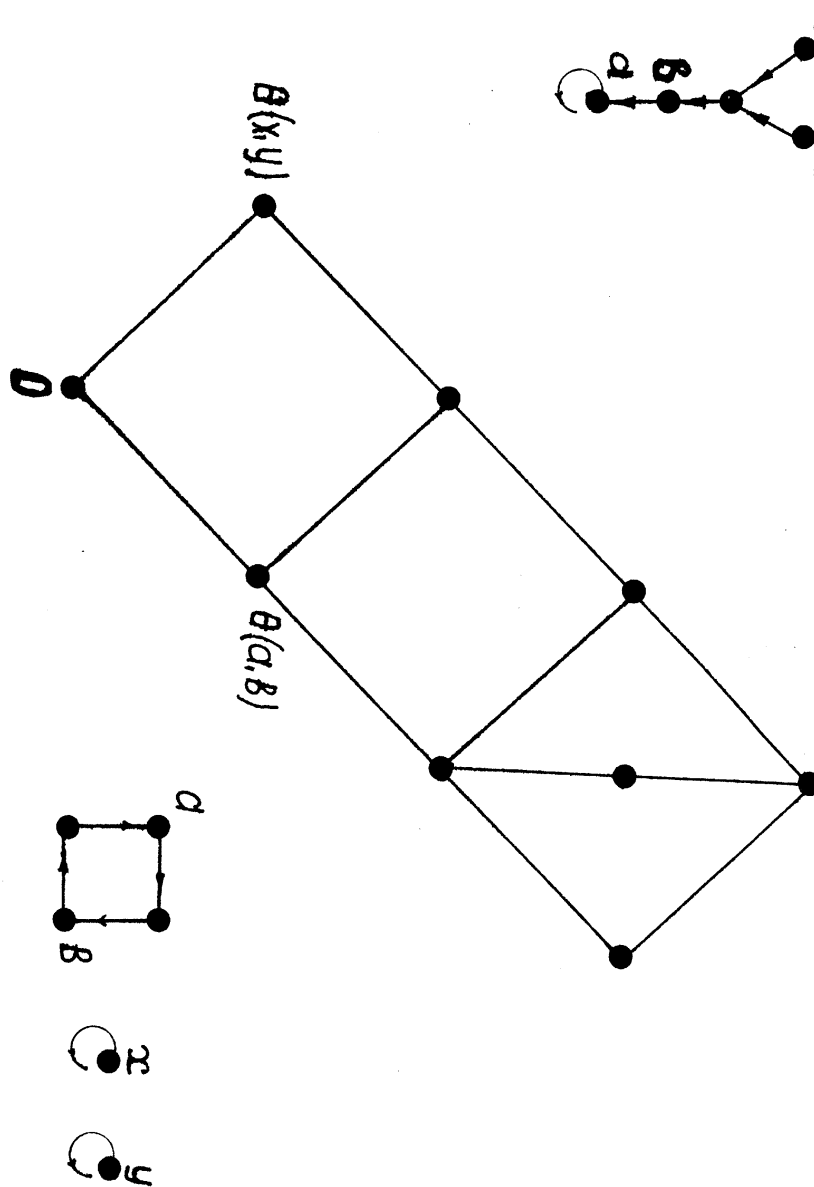


Рис. 20: Унар 16 та його ґратка конгруенцій

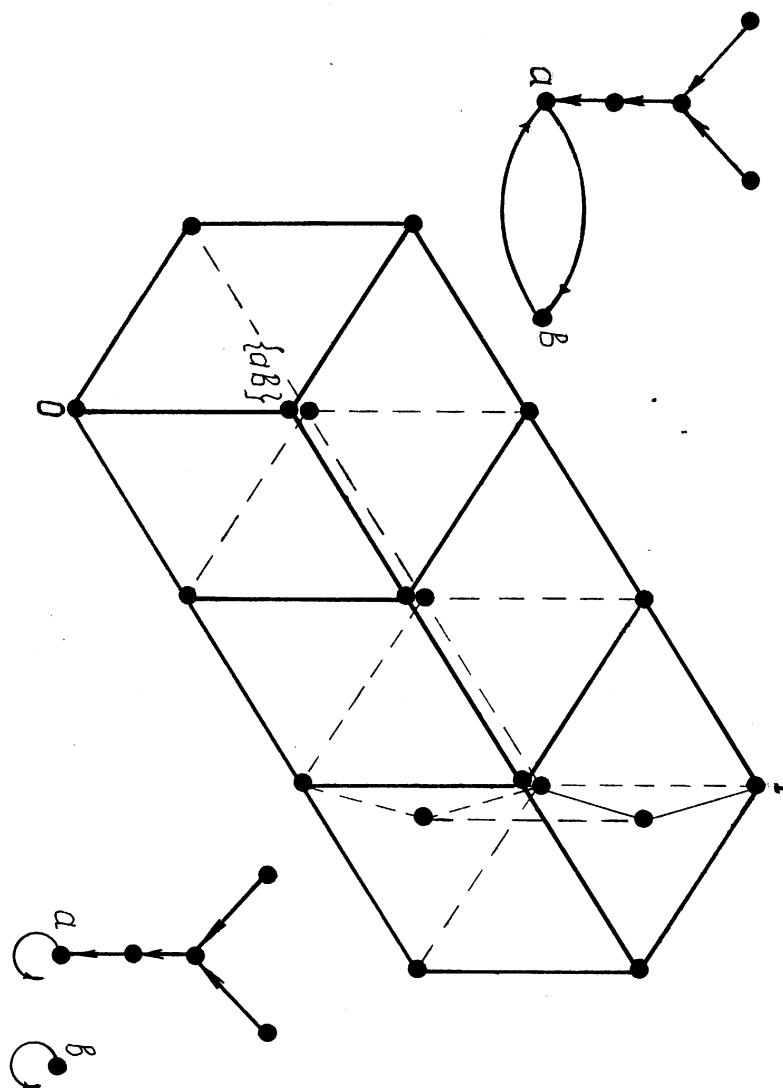


Рис. 21: Унар 17 та його ґратка конгруенцій

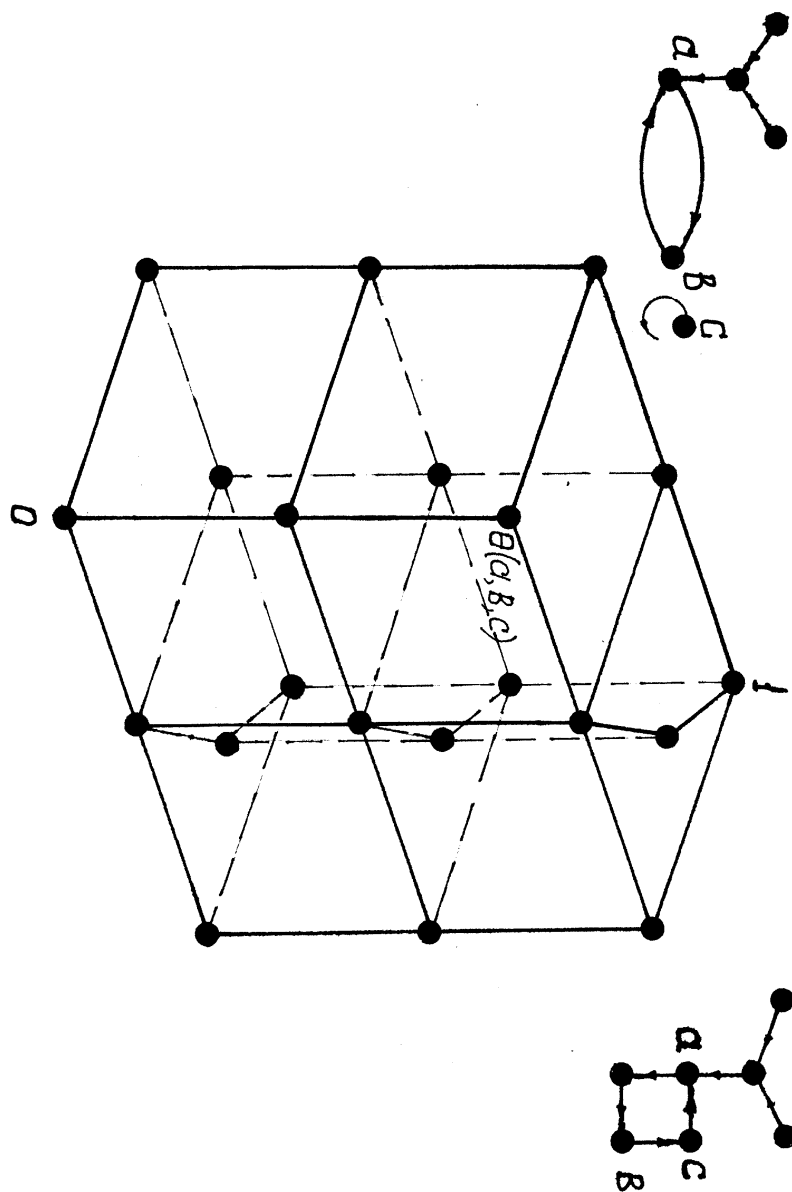


Рис. 22: Унар 18 та його ґратка конгруенцій

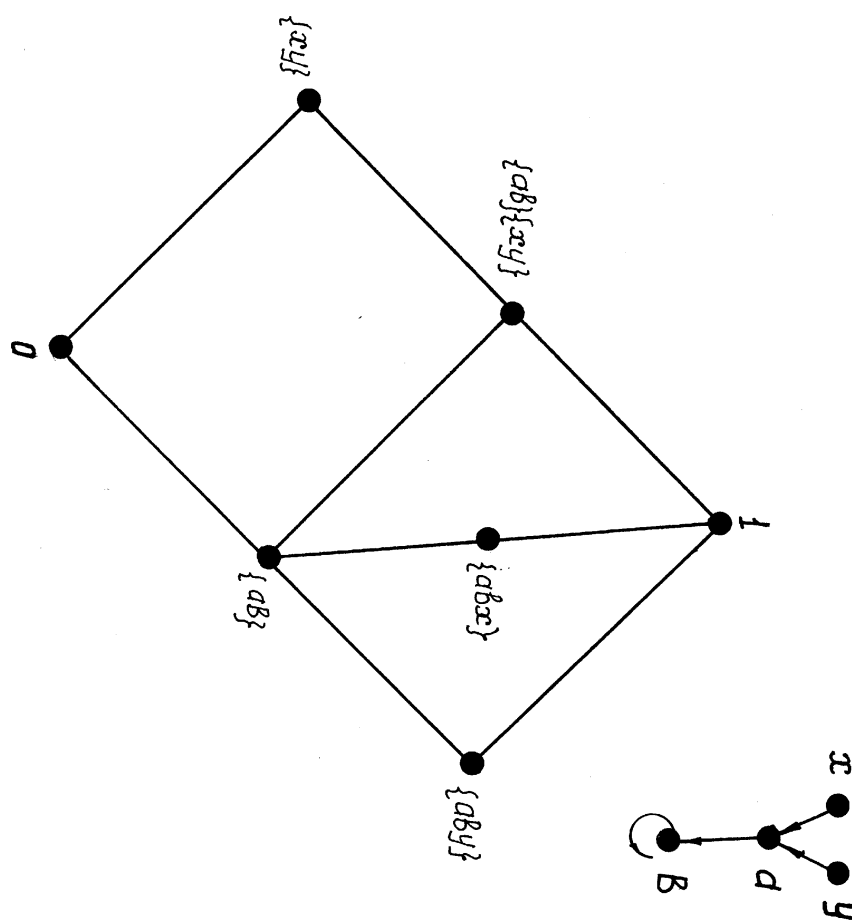


Рис. 23: Унар 19 та його гратка конгруенцій

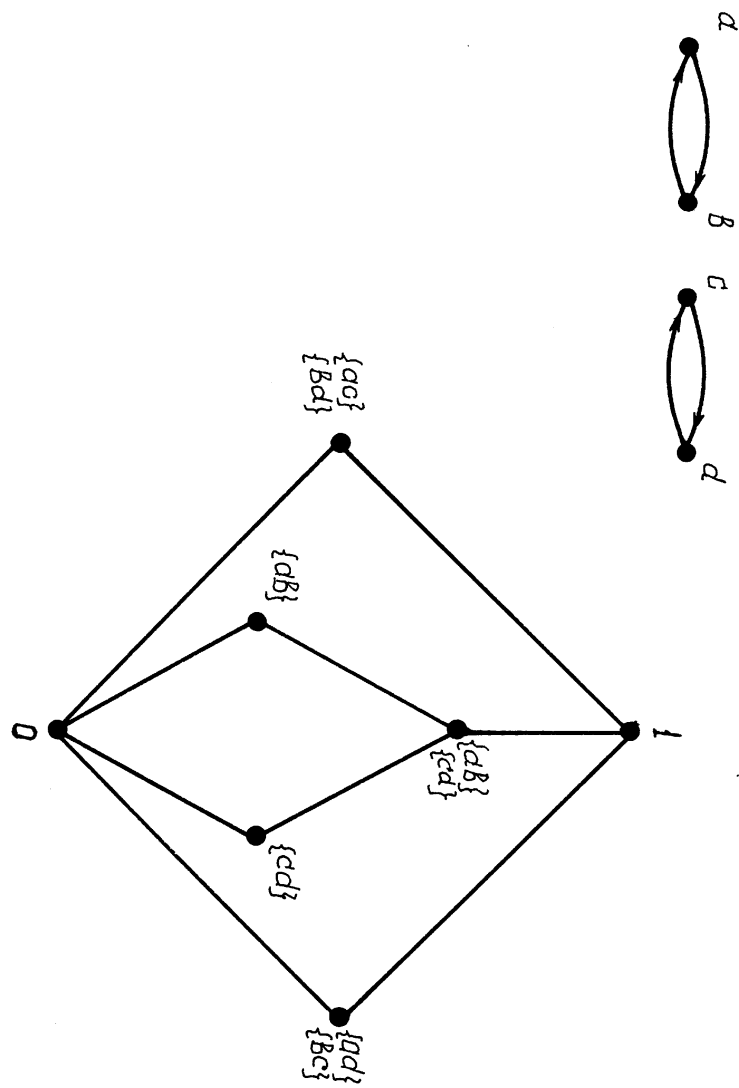


Рис. 24: Унар 20 та його гратка конгруенцій

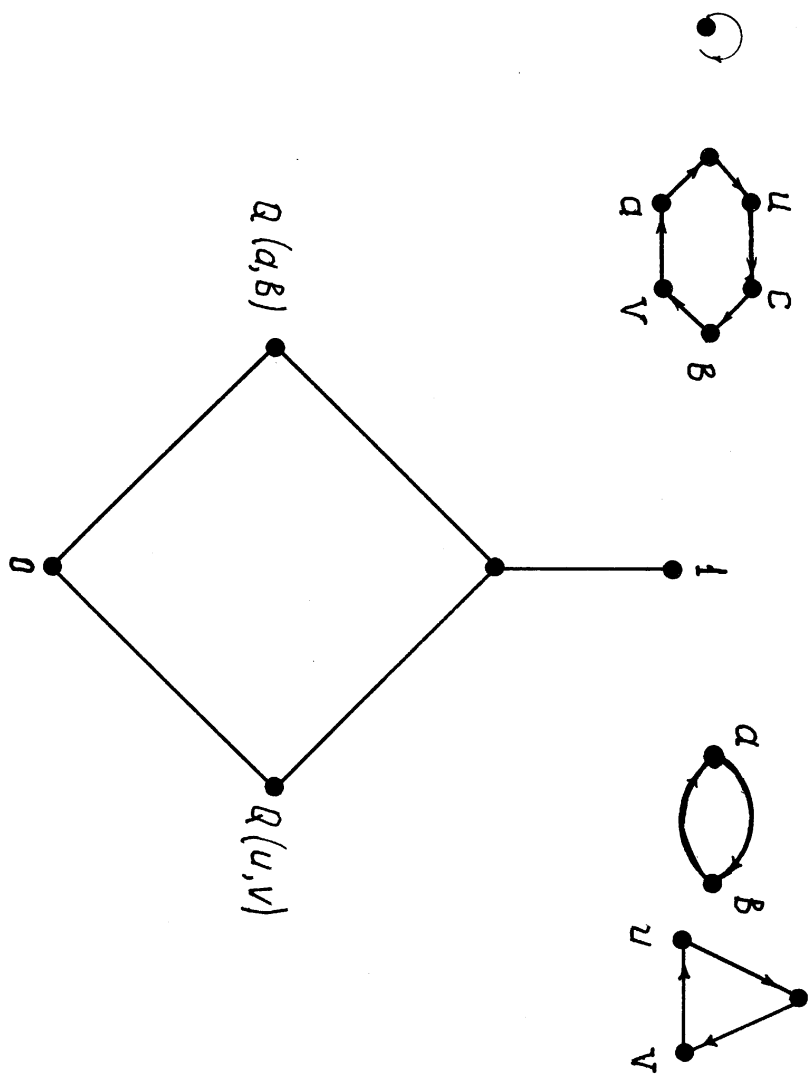


Рис. 25: Унар 21 та його ґратка конгруенцій

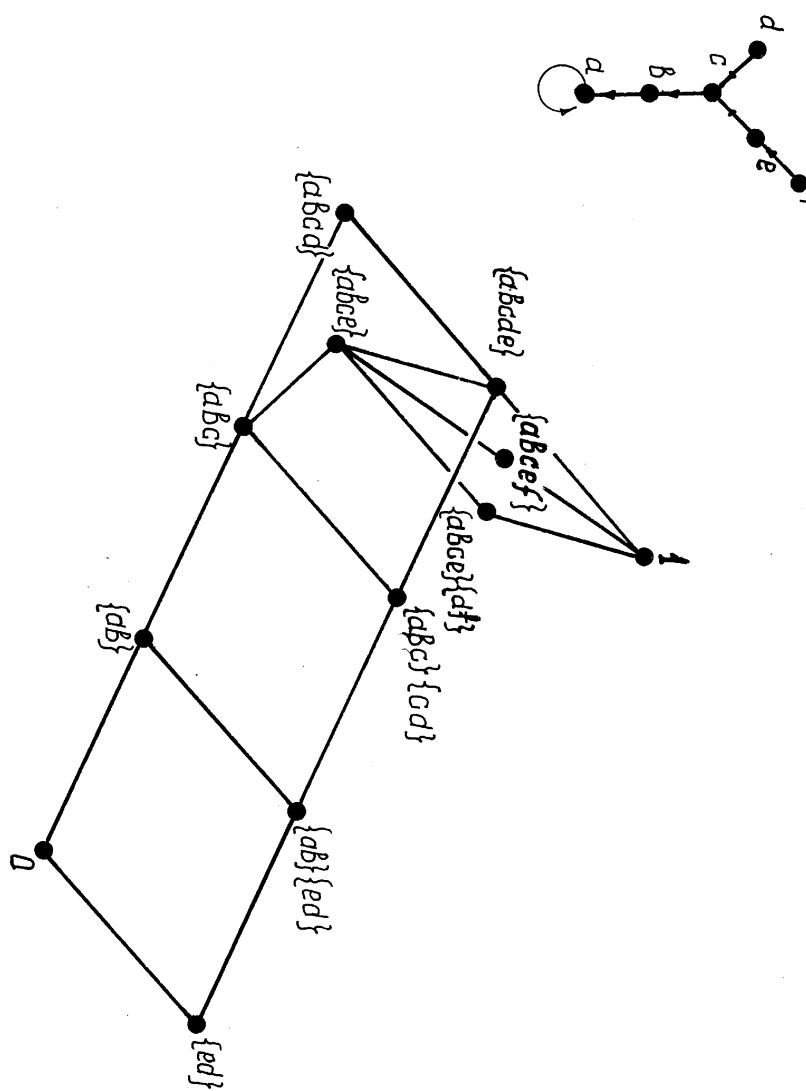


Рис. 26: Унар 22 та його ґратка конгруенцій

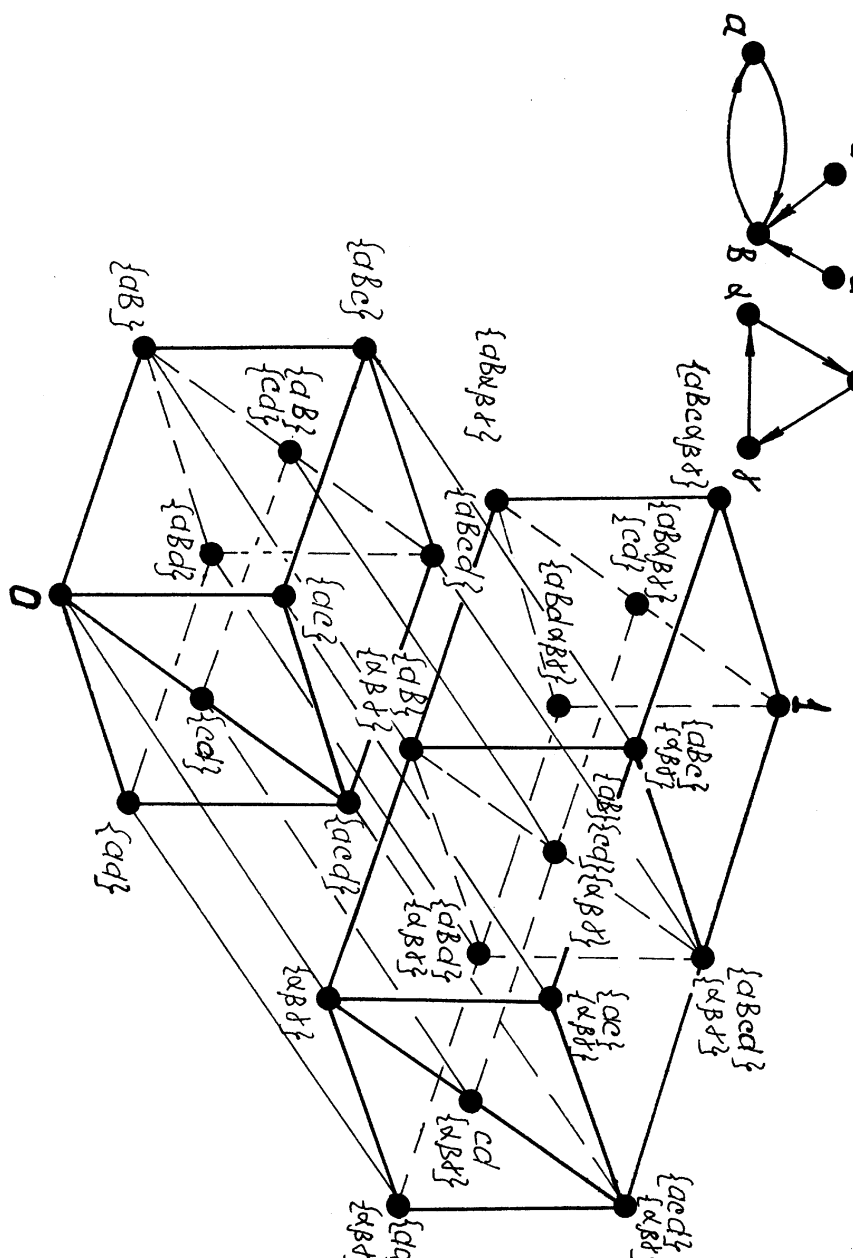


Рис. 28: Унар 24 та його гратка конгруенцій

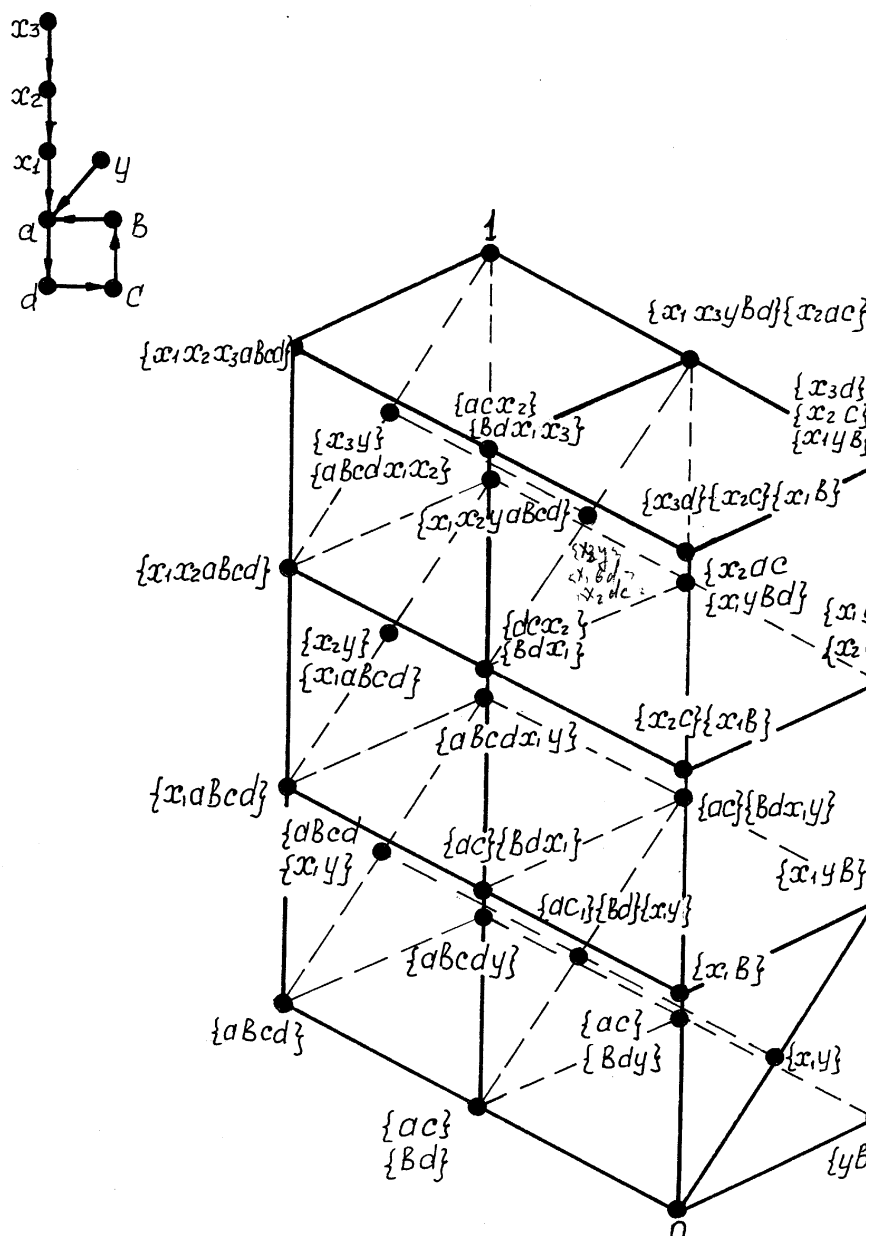


Рис. 29: Унар 25 та його ґратка конгруенцій

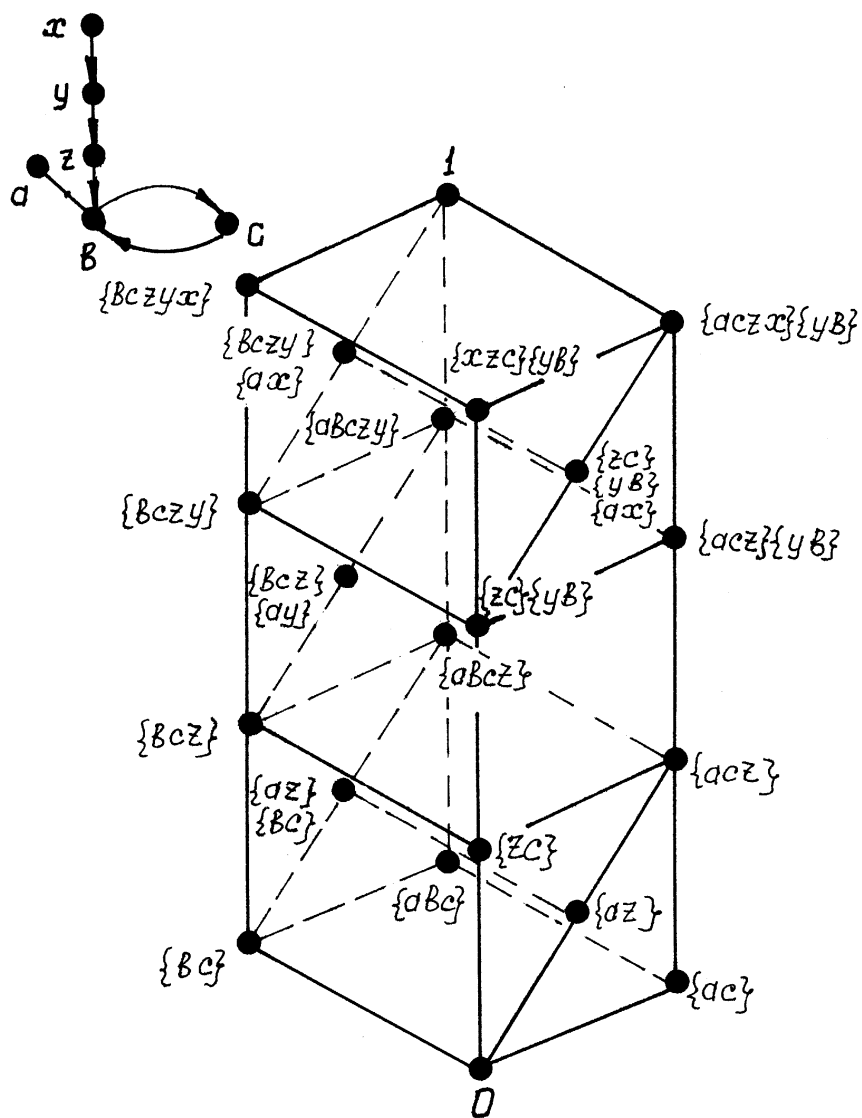


Рис. 30: Унар 26 та його гратка конгруенцій

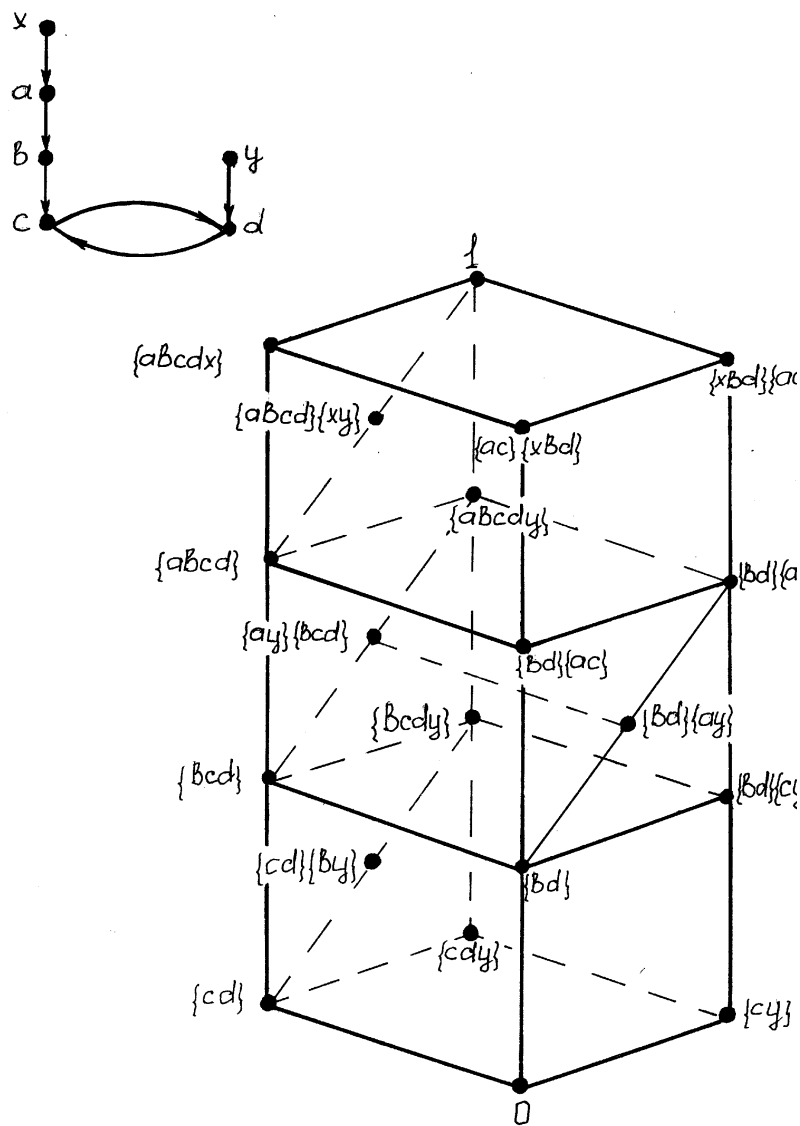


Рис. 32: Унар 28 та його гратка конгруенцій

Показчик

бієкція

канонічна, 5

бутилка Клейна, 16

циліндр, 16

число

кардинальне, 9

комплексне, 33

еквівалентність, 2

афінна, 14, 16

найбільша, 10

найменша, 10

тривіальна, 10

еквівалентності

більші та менші, 10

частковий порядок, 14

не порівнювані, 10

елемент

виділений

групи, 20

кільця, 33

еліпс, 16

факторизація, 13, 16

за еквівалентністю, 13

факторкільце, 33

фактормножина, 13

факторпростір, 16

гратка, 34

всіх еквівалентностей, 12

група, 20

групи

ізоморфні, 21

ідеал, 33

ізоморфізм, 21

кардинал, 9

кільце

цілих чисел, 33

класів лишків, 9, 33

многочленів, 33

кількість, 9

клас

суміжний

лівий, 21

правий, 21

класи

еквівалентності, 4, 16

лишків, 8

розбиття, 5

конгруенція

групи, 26

кільця, 33

унара, 34

універсальної алгебри, 18

лист М'юбіуса, 16

лишки

за модулем, 8

метод

від протилежного, 4

міркування

з точністю до еквівалентно-
сті, 3

множина	нескінченно віддалена, 7
декартів квадрат, 11	прямі
множини	проективної площини, 7
рівнопотужні, 9, 23	рефлексивність, 2
носій	рівність
групи, 20	множин, 4
кільця, 29	трикутників, 16
операція	з точністю до руху, 16
групи	розбиття, 2, 23
бінарна, 20	розкладення
нульарна, 20	відображення у добуток, 13
нульмісна, 20	сфера
унарна, 20	з ручками, 16
кільця	сигнатура
додавання, 29	групи, 20
множення, 29	кільця, 29
нуль, 29	симетричність, 2
знаходження протилежно-	склеювання, 16
го, 29	шапочка
підгрупа, 20	сфери, 16
інваріантна, 21	точка
нормальний дільник, 21	нескінченно віддалена, 7
площина	транзитивність, 2
Римана, 16	унар, 34
дійсна, 16, 18	відношення
евклідова, 7	еквівалентності, 2
проективна, 7	паралельності, 3
поле	рефлексивне, 2
комплексних чисел, 33	рівнообразності, 8
потужність, 9	рівності, 3
простір	симетричне, 2
евклідовий, 6	транзитивне, 2
пряма	відображення

канонічне сюр'єктивне, 13

‘на‘, 23

‘в‘, 23