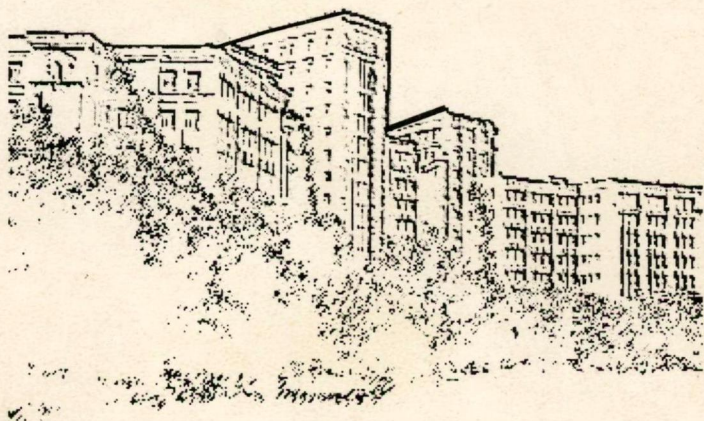


ISSN 0453-8048

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету ім. В.Н. Каразіна



№ 605

Харків  
2003

**K-14038**

**П329697**

V.N. Karazin Kharkiv National University



8

00419327



Заснований у 1965 р.

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету



№ 605

Серія

«Математичне моделювання.

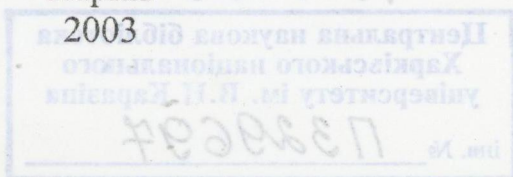
Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 2

Харків

2003



УДК 518.12:518.5+681.3.06+007.5

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі обчислювального експерименту на базі математичних моделей методів дискретних особливостей, присвячені побудові та аналізу математичних моделей електромагнітних явищ, моделям та мовам, пов'язаним з проектуванням інформаційних систем, дослідженням у галузі інформаційних управляючих систем і комп'ютеризації управління технологічними процесами, а також окремі роботи з математичного моделювання динамічних процесів, випадкових процесів, мереж. За винятками, що зазначені у самих статтях, усі інші роботи надійшли до редакції (після останніх виправлень) у жовтні-грудні 2003 р.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

**Редакційна колегія:**

**Азаренков М.О.**, (гол. редактор), д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Гандель Ю.В.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Жолткевич Г.М.**, (заст. гол. редактора), д.т.н., с.н.с., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Золотарьов В.О.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Куклін В.М.**, д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Лазурик В.Т.**, д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Любарський М.Г.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Мацевитий Ю.М.**, д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Мищенко В.О.**, (відпов. секретар), к.ф.-м.н., доц., ММФ і ФКН ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Раскін Л.Г.**, д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

**Рвачев В.Л.**, д.ф.-м.н., академік НАН України, проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

**Руткас А.Г.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Соколов О.Ю.**, д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського "ХАІ"

**Стервоєдов М.Г.**, к.ф.-м.н., доц., ІВТ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Целуйко О.Ф.**, к.ф.-м.н., доц., ФКН ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Черваньов І.Г.**, д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Шейко Т.В.**, д.ф.-м.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ ім. В.Н. Каразіна

**Щербина В.А.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна

Адреса редакційної колегії: 61077, м. Харків, майд. Свободи, 4, ХНУ, кафедра математичного моделювання і матзабезпечення ЕОМ, к.11-09.  
Тел. 45-74-68, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол №12 від 28 листопада 2003 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

© Харківський національний університет, 2003

Ж-14038



Численное решение методом граничных элементов  
динамических задач теории упругости  
для тел с трещинами в пространстве изображений Лапласа

А. А. Бобылев, О. В. Тейтель

*Днепропетровский национальный университет, Украина*

The questions of boundary element method practical realization for solving of elastodynamic problems for finite bodies with cracks in the Laplace transformation space are considered. The comparative analysis with model problem of calculation effectiveness of different integral expressions for solving is conducted.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению динамических задач теории упругости для тел с трещинами является подход, основанный на применении интегральных преобразований. При этом, если рассматриваются установившиеся колебания тела, обычно используется интегральное преобразование Фурье, в случае же неустановившихся движений тела используется интегральное преобразование Лапласа. Аналитическое решение полученных граничных задач в пространстве изображений Лапласа удается найти только для тел канонической формы, поэтому в подавляющем большинстве практических задач приходится использовать численные методы [1].

Анализ опубликованных работ отечественных и зарубежных ученых [2, 3] показал, что перспективным направлением является применение к решению данного класса задач метода граничных элементов. Одной из проблем, возникающих при численной реализации метода граничных элементов, является выбор наиболее рационального с точки зрения вычислительной эффективности интегрального представления решения.

В настоящей работе авторами рассмотрены вопросы практической реализации метода граничных элементов и выполнен сравнительный анализ вычислительной эффективности различных вариантов метода граничных элементов при решении динамических задач теории упругости для тел с трещинами в пространстве изображений Лапласа.

Рассматривается невесомое упругое однородное изотропное тело, которое занимает плоскую конечную область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  и содержит трещину в форме незамкнутой двусторонней кривой Ляпунова  $\Gamma_1$ .

Поверхность тела  $\Gamma$  состоит из двух непересекающихся частей  $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_u$ . На части поверхности  $\Gamma_S$  заданы граничные условия в напряжениях, а на части поверхности  $\Gamma_u$  - в перемещениях. В пространстве изображений они имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}(x, k)v_j(x) &= \bar{q}_{si}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_S, \\ \bar{u}_i(x, k) &= \bar{g}_i(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_u.\end{aligned}\quad (1)$$

Граничные условия на берегах трещины в пространстве изображений Лапласа задаются в виде

$$\bar{\sigma}_{ij}^-(x, k)v_j(x) = -\bar{\sigma}_{ij}^+(x, k)v_j(x) = \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_t, \quad (2)$$

знаки "+" и "-" относятся к противоположным берегам трещины.

Задача состоит в определении изображений полей перемещений  $\bar{u}(x, k)$ , деформаций  $\bar{\varepsilon}(x, k)$  и напряжений  $\bar{\sigma}(x, k)$ , удовлетворяющих уравнению движения в перемещениях, имеющему в пространстве изображений Лапласа вид (3)

$$(C_1^2 - C_2^2)\bar{u}_{i,ij} + C_2^2\bar{u}_{j,ii} - k^2\bar{u}_j = 0, \quad (3)$$

где  $k$  - параметр преобразования Лапласа,  $C_1$  и  $C_2$  - скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно, равные

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad C_2^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho},$$

соотношениям Коши, закону Гука, граничным условиям на поверхности тела  $\Gamma$  (1) и берегах трещины  $\Gamma_t$  (2).

Введем граничные потенциалы для задачи в изображениях

$$U_i^k(\varphi, x, S) = \int_S U_{ij}(x, \xi, k)\varphi_j(\xi, k)dS; \quad (4)$$

$$W_i^k(\psi, x, S) = \int_S W_{ij}(x, \xi, k)\psi_j(\xi, k)dS; \quad (5)$$

$$K_i^k(\varphi, x, S) = \int_S K_{ij}(x, \xi, k)\varphi_j(\xi, k)dS; \quad (6)$$

$$F_i^k(\psi, x, S) = \int_S F_{ij}(x, \xi, k)\psi_j(\xi, k)dS. \quad (7)$$

Здесь  $U_{ij}(x, \xi, k)$  - фундаментальное решение уравнения движения в пространстве изображений Лапласа [4],  $\varphi, \psi$  - плотности потенциалов простого и двойного слоя соответственно,  $S$  - кривая Ляпунова класса  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Остальные ядра получаются применением специального дифференциального оператора к  $U_{ij}(x, \xi, k)$ . Соответствующие выражения приведены в работе [2].

Учитывая свойства упругих потенциалов и граничные условия на поверхности тела и трещины, можно записать несколько вариантов систем граничных интегральных уравнений для непрямой и прямой формулировок метода граничных элементов.

Непрямой метод граничных элементов.

Вариант 1:

$$1/2\varphi_i(x, k) + K_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + K_i^k(\varphi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{si}(x, k),$$

$$\forall x \in \Gamma_S,$$

$$U_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + U_i^k(\varphi, x, \Gamma_u) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{g}_i(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (8)$$

$$K_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + K_i^k(\varphi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_l.$$

Вариант 2:

$$F_i^k(\psi, x, \Gamma_S) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{si}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$-1/2\psi_i(x, k) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_S) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{g}_i(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_u,$$

$$F_i^k(\psi, x, \Gamma_S) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_l. \quad (9)$$

Вариант 3:

$$1/2\varphi_i(x, k) + K_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{si}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$-1/2\psi_i(x, k) + U_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{g}_i(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_u,$$

$$K_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_l. \quad (10)$$

Вариант 4:

$$F_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + K_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{q}_{si}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$-1/2\psi_i(x, k) + U_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + W_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = \bar{g}_i(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_u,$$

$$F_i^k(\varphi, x, \Gamma_S) + K_i^k(\psi, x, \Gamma_u) + F_i^k(\psi, x, \Gamma_l) = -\bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_l. \quad (11)$$

Прямой метод граничных элементов.

Вариант 1:

$$\begin{aligned} -U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + \frac{1}{2}\bar{u}_{si}(x, k) + W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_l) = \\ = U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_l) = \\ = -U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + \frac{1}{2}\bar{g}_i(x, k) + W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (12) \end{aligned}$$

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_l) =$$

$$= -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_i.$$

Вариант 2:

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = \frac{1}{2}\bar{q}_{si}(x, k) - K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$\frac{1}{2}\bar{q}_{ui}(x, k) - K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) - F_i^k(\delta, x, \Gamma_{2t}), \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (13)$$

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_i,$$

Вариант 3:

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = \frac{1}{2}\bar{q}_{si}(x, k) - K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = -U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + \frac{1}{2}\bar{g}_i(x, k) + W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (14)$$

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_i.$$

Вариант 4:

$$-U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + \frac{1}{2}\bar{u}_{si}(x, k) + W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S,$$

$$\frac{1}{2}\bar{q}_{ui}(x, k) - K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) - F_i^k(\delta, x, \Gamma_{2t}), \quad \forall x \in \Gamma_u, \quad (15)$$

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) = \\ = -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ii}(x, k), \quad \forall x \in \Gamma_i.$$

Для численного решения полученных систем граничных интегральных уравнений (8)-(15) применяется метод граничных элементов с дискретизацией уравнений методом коллокаций. В качестве граничных элементов используются одноузловые элементы с постоянной аппроксимацией неизвестных функций. Вычисление интегралов, входящих в системы граничных интегральных уравнений, производится двумя способами. Если точка коллокации не принадлежит граничному элементу, то вычисляемый по этому элементу

интеграл является регулярным и его значение определяется численно с помощью квадратурных формул Гаусса. Если же точка коллокации принадлежит граничному элементу, то интеграл по этому элементу имеет особенность и вычисляется аналитически.

В качестве модельной рассматривается задача о плоской деформации под действием ударной нагрузки однородного изотропного упругого тела, занимающего круговую область  $\Omega$  радиуса  $R$ . Тело содержит прямолинейную трещину  $\Gamma_t$  длиной  $l$ , расположенную на диаметре тела с центром в точке  $O$ .

Проведенный авторами на основании вычислительных экспериментов сравнительный анализ показал, что расхождение численных результатов, полученных для рассмотренных интегральных представлений решения при одинаковой граничноэлементной аппроксимации не превышало 2%.

Зависимость изображения нормального раскрытия в центре трещины от параметров граничноэлементной сетки для случая, когда на поверхности тела заданы нормальные напряжения  $\bar{q}_s$ , а на поверхности трещины нормальные напряжения  $\bar{q}_t$  приведена в табл. 1. Параметры материала тела, внешняя нагрузка и размеры тела имели следующие значения:  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $k = 6.356$ ,  $\bar{q}_s = 20$  МПа,  $\bar{q}_t = 20$  МПа,  $R = 10$  м. В табл. 1 введены следующие обозначения:  $N_1$  – число граничных элементов на берегах трещины  $\Gamma_t$ ,  $N_2$  – число граничных элементов на границе тела  $\Gamma$ .

Таблица 1. Изображение нормального раскрытия в центре трещины

	$N_1 = 11$	$N_1 = 31$	$N_1 = 51$	$N_1 = 71$	$N_1 = 91$
$N_2 = 100$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 200$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 350$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 550$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 800$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728

Таким образом, разработанные вычислительные алгоритмы обеспечивают высокую точность и устойчивость численных результатов и в дальнейшем могут быть использованы при исследовании ударных взаимодействий упругих тел конечных размеров с трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, - 1985. – 264 с.
2. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Неклассические проблемы механики разрушения. Том 4. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев: Наукова Думка, - 1993. – 237 с.
3. Masahiro A., Tadaharu A., Hiroyuki M. Boundary element analysis for unsteady elastodynamic problems based on the Laplace transform // JSME Int. J. A. - 1999, - 42, N 4, - P. 507-514.
4. Cruse T. A., Rizzo F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem // J. Math. Anal. Appl. - 1968, 22, N1. P.244259.

21 мая 2003 г.

$N_1 = 21$	$N_1 = 71$	$N_1 = 21$	$N_1 = 31$	$N_1 = 11$	$N_1 = 100$
$N_2 = 200$	$N_2 = 250$	$N_2 = 350$	$N_2 = 250$	$N_2 = 800$	

Вісник Харківського національного університету  
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи  
управління»

УДК 533.6

№ 605, 2003, с. 9-14

## Некоторые результаты применения метода дискретных вихрей при исследованиях аэродинамических характеристик органов управления и механизации

В. И. Бушуев, В. В. Зубок

*Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского Москва, Россия*

Results of numerical studies of aerodynamic characteristics of an aircraft with mechanization controls in the takeoff and landing position are given in this work. The problem was solved by the discrete vortex method under nonlinear stationary conditions at continuous flow taking into account the construction's solidity.

Одним из путей повышения эффективности летательных аппаратов (ЛА) является все более широкое использование рулевых поверхностей и механизации в системах автоматического управления в качестве органов для непосредственного управления аэродинамическими силами (НУАС), для расширения диапазона допустимых режимов полета, а также улучшения взлетно-посадочных характеристик.

Проектирование рулевых поверхностей и органов механизации различного назначения требует проведения большого объема исследований, причем если говорить об экспериментальных исследованиях, то они достаточно сложны (особенно в силу малых размеров рулей) и требуют значительных затрат материальных ресурсов. Программы экспериментальных исследований могут быть значительно сокращены, если они будут составляться с учетом априорной информации, полученной с помощью численных методов.

В настоящее время в связи с развитием вычислительной техники, совершенствованием математических моделей ЛА и их частей достоверность результатов численных экспериментов в значительной мере удовлетворяет потребностям практики. Так, для расчета аэродинамических характеристик ЛА широко применяется метод дискретных вихрей.

В качестве примера в работе представлены некоторые результаты расчетов аэродинамических характеристик самолета типа Ил-76 как с неотклоненной, так и с отклоненной механизацией крыла.

Самолет Ил-76 представляет собой свободнонесущий моноплан нормальной схемы с высокорасположенным крылом большого удлинения ( $\lambda = 8,5$ ) и умеренной стреловидности ( $\chi_{0,25} = 25^\circ$ ) однокилевым Т-образным хвостовым оперением.

На крыле размещены два пятисекционных предкрылка вдоль всего размаха, два двухсекционных трехщелевых раздвижных закрылка с дефлектором. Угол установки крыла относительно строительной горизонтали составляет  $+3^\circ$ . Угол

установки крыла относительно строительной горизонтали составляет  $+3^\circ$ . Угол поперечного "V" консоли крыла равен  $-3^\circ$ . Крыло самолета сконструировано из профилей ЦАГИ серии П - 151. Относительная толщина профиля изменяется от 13 % в центральной части крыла до 10 % на конце крыла. Крыло имеет геометрическую крутку (максимальный отрицательный угол закрутки концевых сечений консолей составляет  $-3^\circ$ ) и аэродинамическую крутку, состоящую в том, что относительная кривизна профиля увеличивается с 0,8% вблизи фюзеляжа до 2% в концевых сечениях крыла.

Установлены следующие положения механизации крыла и, соответственно, конфигурации самолета:

1. взлетная конфигурация (ВК) - секции закрылков отклоняются на углы  $30^\circ - 28^\circ$  (начиная с внутренней секции), а предкрылки - на  $14^\circ$ ;
2. посадочная конфигурация (ПК) - секции закрылков отклоняются на углы  $43^\circ - 40^\circ$  (при этом хвостовые звенья закрылков отклонены относительно основных на угол равный  $20^\circ$ ), предкрылки - на  $25^\circ$ ;
3. маневренная конфигурация (МК) - механизация крыла не отклонена.

Характерной особенностью самолета является отклонение закрылков на режиме взлета на углы  $30^\circ - 28^\circ$  при сомкнутых звеньях, что приводит к тому, что закрылки становятся однощелевыми.

Математическое моделирование производилось по принятому в методе дискретных вихрей подходу, основанному на замене схематизированных поверхностей ЛА системой вихревых отрезков [1]. При этом задача решалась в нелинейной стационарной постановке с учетом телесности элементов ЛА, включая органы механизации крыла.

Схематизация ЛА выполнялась следующим образом. Поверхности крыла, горизонтального и вертикального оперений моделировались как телесные объекты, а их форма описывалась в соответствии с заданными геометрическими параметрами, в том числе были смоделированы все щели между предкрылком и основной частью крыла, а также между звеньями закрылков [2]. Фюзеляж моделировался приближенно в виде тела прямоугольного сечения, сформированного плоскими панелями, но с сохранением, в основном, его обводов.

При математическом моделировании количество дискретных вихрей, размещаемых на поверхностях ЛА составляло: в ПК - 1828, во ВК - 1492, в МК - 920 вихрей. Расчеты проводились при трех значениях угла атаки ( $\alpha=0.5^\circ$ , и  $10^\circ$ ) для всех рассмотренных конфигураций самолета.

После проведения расчетов получены распределенные и суммарные аэродинамические характеристики отдельных частей и самолета в целом.

Однако особый интерес представляют распределенные и суммарные

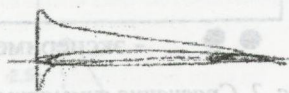
поэтому они и будут представлены здесь главным образом.

Приведены результаты сравнения расчетных зависимостей  $C_p(\bar{x})$  (рис. 1) в некотором сечении крыла и  $C_{ya}(\alpha)$  (рис. 2) самолета с экспериментальными данными [3]. Из анализа кривых, представленных на рис. 1, следует, что в расчетах удастся качественно верно смоделировать особенности обтекания как исходного нещелевого, так и достаточно сложного многощелевого крыла.

*Экспериментальные данные*

$$\alpha = 8^\circ, \delta = 43^\circ/40^\circ$$

$$\alpha = 8^\circ, \delta = 0$$



*Результаты расчетов*

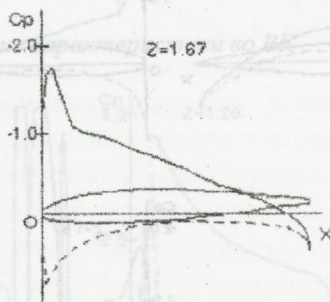
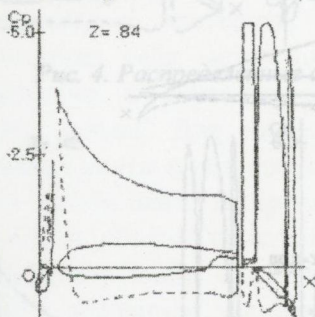


Рис. 1. Сравнение распределенных аэродинамических характеристик

Что касается суммарных аэродинамических характеристик, то заметно удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными (рис. 2). При этом можно отметить существенный прирост коэффициента подъемной силы при отклонении закрылков во взлетное или посадочное положения по сравнению с маневренной конфигурацией.

Наибольшей информативностью о распределении нагрузки по поверхности крыла и механизации обладают зависимости  $C_p(\bar{x})$ . Эти зависимости приведены при угле атаки  $\alpha = 10^\circ$  в шести сечениях крыла (в долях центральной хорды крыла) для трех конфигураций самолета: маневренной (рис. 3), взлетной (рис. 4) и посадочной (рис. 5). Из этих зависимостей можно видеть, как меняется нагрузка каждого из элементов крыла при изменении угла атаки и углов отклонения механизации. Так, с отклонением закрылков до углов  $43^\circ/40^\circ$  происходит наибольшее нагружение сечений крыла, что согласуется с

зависимостями, представленными на рис. 2.

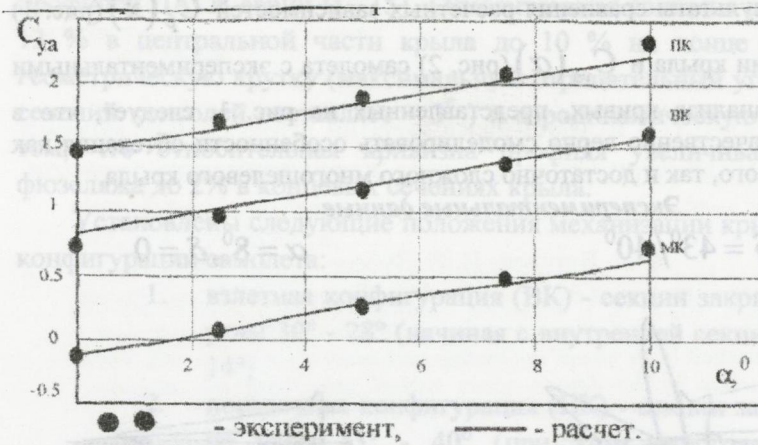


Рис. 2. Сравнение суммарных аэродинамических характеристик

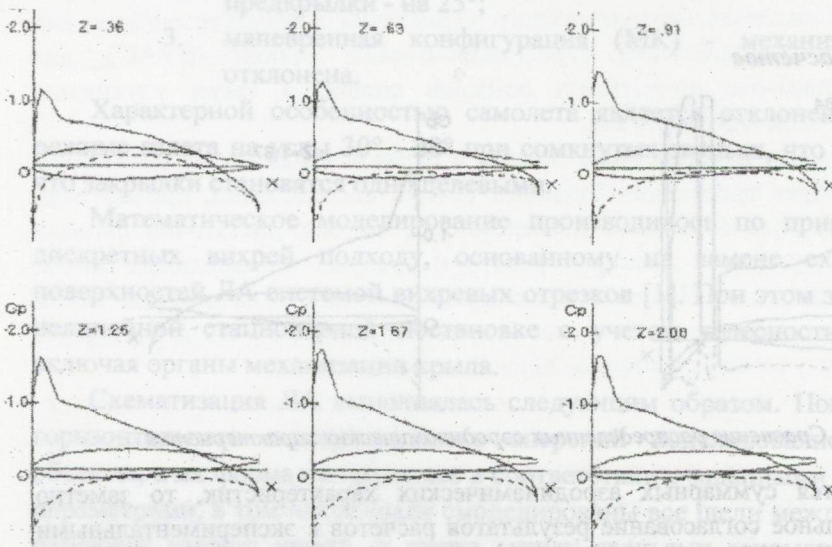


Рис. 3. Распределенные аэродинамические характеристики в МК

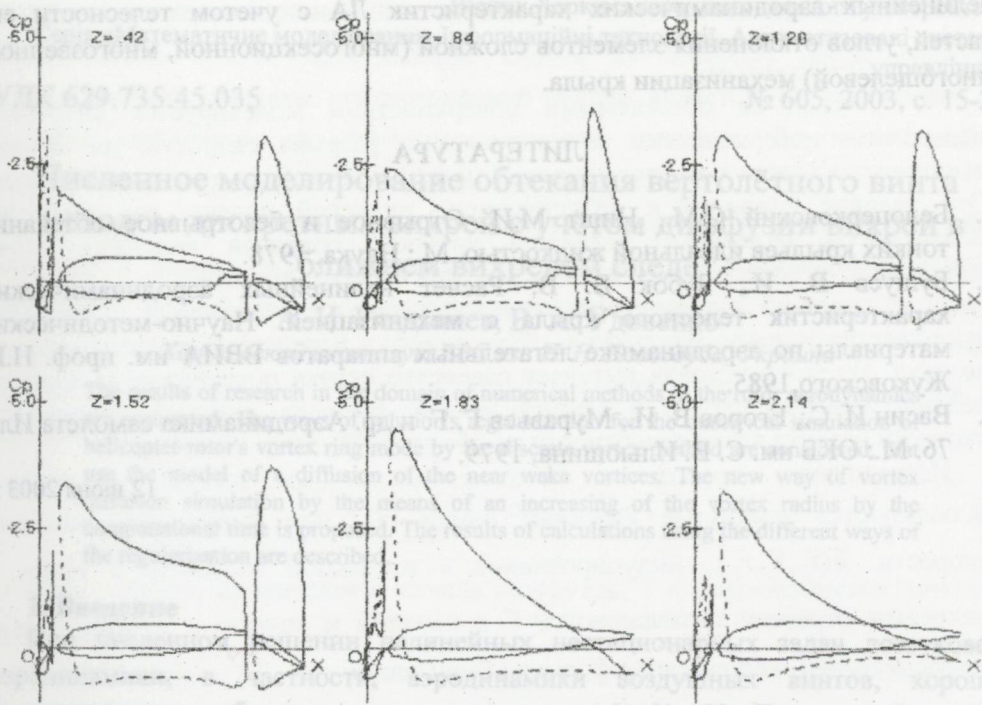


Рис. 4. Распределенные аэродинамические характеристики во ВК

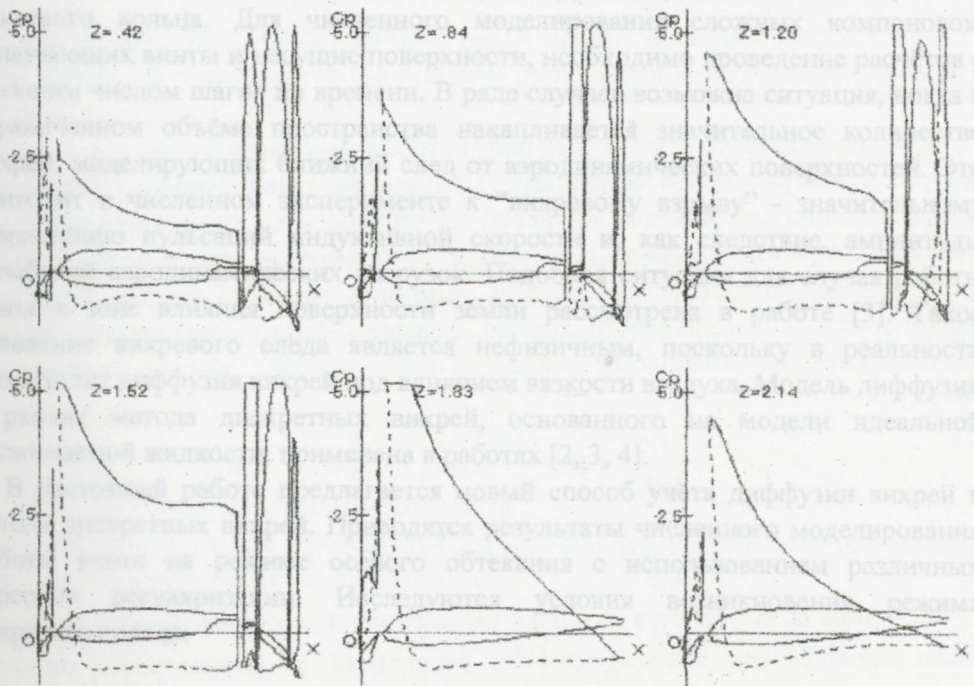


Рис. 5. Распределенные аэродинамические характеристики в ПК

Таким образом, представленные материалы расчетов свидетельствуют о достаточно высокой достоверности и информативности исследований

нелинейных аэродинамических характеристик ЛА с учетом телесности его частей, углов отклонения элементов сложной (многосекционной, многозвенной, многощелевой) механизации крыла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Бушуев В. И., Зубок В. В. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик телесного крыла с механизацией. Научно-методические материалы по аэродинамике летательных аппаратов ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1985.
3. Васин И. С., Егоров В. И., Муравьев Г. Г. и др. Аэродинамика самолета Ил - 76. М.: ОКБ им. С. В. Ильюшина, 1979.

12 июня 2003 г.

## Численное моделирование обтекания вертолётного винта методом дискретных вихрей с учётом диффузии вихрей в ближнем вихревом следе

А. И. Гладышев, В. А. Удовенко

*Харьковский институт ВВС им. И. Н. Кожедуба, Украина*

The results of research in the domain of numerical methods in the rotor aerodynamics are accounted. The ways of solution's regularization for the numerical simulation of helicopter rotor's vortex ring mode by the discrete vortex method are considered, that use the model of a diffusion of the near wake vortices. The new way of vortex diffusion simulation by the means of an increasing of the vortex radius by the computational time is proposed. The results of calculations using the different ways of the regularization are described.

### 1. Введение

При численном решении нелинейных нестационарных задач дозвуковой аэродинамики, в частности, аэродинамики воздушных винтов, хорошо зарекомендовал себя метод дискретных вихрей [1, 2]. Так, в работе [1], применительно к вертолётным винтам, проведено исследование режима вихревого кольца. Для численного моделирования сложных компоновок, включающих винты и несущие поверхности, необходимо проведение расчётов с большим числом шагов по времени. В ряде случаев возможна ситуация, когда в ограниченном объёме пространства накапливается значительное количество вихрей, моделирующих ближний след от аэродинамических поверхностей. Это приводит в численном эксперименте к «вихревому взрыву» - значительному возрастанию пульсаций индуктивной скорости и, как следствие, амплитуды колебаний аэродинамических нагрузок. Подобная ситуация для случая работы винта в зоне влияния поверхности земли рассмотрена в работе [3]. Такое поведение вихревого следа является нефизичным, поскольку в реальности происходит диффузия вихрей под влиянием вязкости воздуха. Модель диффузии в рамках метода дискретных вихрей, основанного на модели идеальной несжимаемой жидкости, применена в работах [2, 3, 4].

В настоящей работе предлагается новый способ учёта диффузии вихрей в методе дискретных вихрей. Приводятся результаты численного моделирования работы винта на режиме осевого обтекания с использованием различных способов регуляризации. Исследуются условия возникновения режима вихревого кольца.

### 2. Математическая модель аэродинамики винта

Численное исследование аэродинамики воздушного винта проводится при таких предположениях:

- воздух вокруг винта считается невязким и несжимаемым;
- за пределами обтекаемых поверхностей и следа за ними поток является безвихревым;
- след за обтекаемыми поверхностями моделируется вихревыми пеленами - поверхностями тангенциального разрыва скорости, на которых выполняется условие отсутствия разности давления с обеих сторон поверхности. Это условие приводит к представлению вихревой пелены как свободной поверхности, отдельные элементы которой, сохраняя величину скачка потенциала на себе, перемещаются с местной скоростью потока;
- вблизи линии схода вихревой пелены с обтекаемой поверхности выполняется условие Чаплыгина - Жуковского - Кутта о конечности скорости воздуха. Из этого условия вытекает равенство скачка потенциала на элементе пелены, который сходит в данный момент времени, разности потенциалов скорости воздуха возле поверхности по обе стороны от линии схода.

Исследования проводятся методом дискретных вихрей, в котором используются замкнутые вихревые рамки [5]. Для вычисления величины скорости  $\vec{w}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , индуцированной в идеальной жидкости в точке  $\vec{r}_0$  вихревым отрезком интенсивности  $\Gamma$  с началом и концом в точках  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно, используется формула Био-Савара:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad (1)$$

где  $r$  - расстояние от точки  $\vec{r}_0$  до оси вихря,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - углы, которые составляют с осью вихря векторы  $\vec{r}_{10} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$  и  $\vec{r}_{20} = \vec{r}_0 - \vec{r}_2$ .

Как видно из формулы (1), в точках, которые находятся близко к оси отрезка, скорости неограниченно возрастают. Применение такой формулы для расчета скорости, индуцированной вихревой поверхностью, дискретизованной как система вихревых отрезков, приводит к некорректным результатам. Поэтому при расчете скоростей используется величина «радиуса вихря»  $R_v$  [1]. На расстояниях от оси вихревого отрезка, меньших  $R_v$ , индуцированные скорости вычисляются по линейному закону. Точнее говоря, обычно используется формула

$$w = \begin{cases} \frac{\Gamma r}{4\pi R_v^2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) & \text{при } r \leq R_v, \\ \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) & \text{при } r > R_v. \end{cases} \quad (2)$$

Величина  $R_v$  выбирается из общей рекомендации, состоящей в том чтобы она была меньше, чем минимальное из расстояний от контрольных точек до вихревых отрезков, которые моделируют несущие поверхности. Но на исследуемых режимах работы винта возникает численная неустойчивость

расчётного процесса из-за накопления большого количества свободных вихрей в ограниченном объёме пространства. Одним из способов предотвращения "раскачивания" решения нестационарной задачи является использование  $R_{\epsilon}$ , больших найденного по этой рекомендации значения. Другим способом является применение модели диффузии вихрей пелены.

Модель диффундирующего вихря является способом приближённого учёта вязкости в рамках подхода, основанного на модели идеальной жидкости. Отправной точкой для этой модели является известное решение задачи о диффузии прямолинейного одиночного бесконечного вихря в безграничной жидкости [6]. Согласно этому решению, скорость в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от оси вихря, равна

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right), \quad (3)$$

где  $t$  - время, прошедшее с начала диффузии,  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости.

В монографии [2] для плоского случая осуществляется определение по формуле (3) скорости, индуцированной каждым из системы вихрей, моделирующих след. При этом уравнения Навье-Стокса движения вязкой жидкости выполняются приближённо.

В работе [4] используется уменьшение циркуляции вихрей следа с течением времени по закону

$$\Gamma = \Gamma_0 \left( 1 - \exp\left(-\frac{K}{4t}\right) \right), \quad (4)$$

где  $\Gamma_0$  - начальная циркуляция,  $K$  - эмпирическая константа.

В статье [3] для пространственной задачи предлагается учитывать диффузию вихрей с помощью введения в формулу (1) множителя, убывающего с течением времени:

$$\tilde{w} = w \left( 1 - \exp\left(\frac{At - B}{t}\right) \right), \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  - эмпирические коэффициенты.

В настоящей работе исследуется вычисление скоростей, индуцированных вихревыми отрезками пелен, по формуле

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right) (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad (6)$$

которая при стремлении точек  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  к бесконечности переходит в (3).

Введя безразмерные величины  $\bar{w} = w/V$ ,  $\bar{r} = r/L$ ,  $\bar{t} = tV/L$ ,  $\bar{\Gamma} = \Gamma/(LV)$ ,  $Re = LV/\nu$ ,

где  $L$  и  $V$  - характерные значения длины и скорости,  $Re$  - число Рейнольдса, имеем:

$$\bar{w} = \frac{\bar{\Gamma}}{4\pi\bar{r}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Re \cdot \bar{r}^2}{4\tau}\right) \right) (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2). \quad (7)$$

Для вертолётного винта в качестве  $L$  берётся его радиус  $R$ , в качестве  $V$  - скорость движения конца лопасти  $\omega R$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения винта. В дальнейшем черту над обозначениями безразмерных величин опускаем.

### 3. Аппроксимация скорости, индуцированной диффундирующим вихревым отрезком, с помощью радиуса вихря

Вычисление индуцированной скорости по формуле (7) требует заметного усложнения алгоритма расчёта по сравнению с (1). В частности, экспоненциальная функция должна вычисляться заново для каждого набора  $\bar{r}_0$ ,  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_2$  и  $\tau$ . Поскольку при решении задачи в нестационарной постановке вычисление скорости, индуцированной вихревым отрезком, является наиболее часто выполняемой процедурой, то такое усложнение расчётной формулы существенно увеличивает время счёта на ЭВМ.

Однако, как показывает рис. 1, зависимости от  $r$  множителей

$$w_1(r) = \frac{1}{r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Re \cdot r^2}{4\tau}\right) \right) \text{ и } w_2(r) = \begin{cases} \frac{r}{R_0^2} & \text{при } r \leq R_0, \\ \frac{1}{r} & \text{при } r > R_0, \end{cases} \quad (8)$$

входящих соответственно в формулы (7) и (2), достаточно близки друг к другу при надлежащем выборе  $R_0$ .

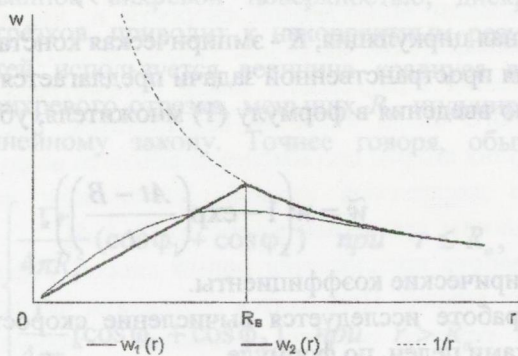


Рис. 1

Величину  $R_0$  целесообразно выбрать таким образом, чтобы обеспечить наименьшее значение функции

$$I(R_g) = \int_0^{\infty} (w_1(r) - w_2(r))^2 dr = \int_0^{R_g} \left( \frac{1}{r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Re \cdot r^2}{4\tau}\right) \right) - \frac{r}{R_g^2} \right)^2 dr + \int_{R_g}^{\infty} \left( \frac{1}{r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Re \cdot r^2}{4\tau}\right) \right) - \frac{1}{r} \right)^2 dr. \quad (9)$$

Функция  $I(R_g)$  достигает минимума при значении  $R_g$ , для которого

$$\begin{aligned} \frac{dI(R_g)}{dR_g} &= \frac{4}{R_g^3} \left( \frac{2}{3} R_g - \int_0^{R_g} \exp\left(-\frac{Re \cdot r^2}{4\tau}\right) dr \right) = \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}}{R_g^3} \sqrt{\tau} \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{R_g}{2} \sqrt{\frac{Re}{\tau}} \right) - \operatorname{erf}\left( \frac{R_g}{2} \sqrt{\frac{Re}{\tau}} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-\theta^2) d\theta. \quad (11)$$

функция ошибок, известная из теории вероятностей. Выражение (10)

представляет собой уравнение относительно величины  $\xi = \frac{R_g}{2} \sqrt{\frac{Re}{\tau}}$ , численное решение которого даёт значение  $\xi_m = 1,215537$ . Таким образом, наилучшая аппроксимация функции  $w_1(r)$  выражением вида  $w_2(r)$  достигается при

$$R_g = 2 \sqrt{\frac{\tau}{Re}} \xi_m. \quad (12)$$

Выражение (12) позволяет использовать для вычисления скорости, индуцированной диффундирующим вихрем, обычный алгоритм, основанный на формуле (2). При этом массив значений  $R_g$ , соответствующих различным количествам временных шагов, прошедших от образования вихревых отрезков, можно вычислить заранее. В результате машинное время, требуемое для расчёта с учётом диффузии вихрей, практически не отличается от времени счёта без учёта диффузии.

#### 4. Результаты расчётов

Проведены расчёты осевого обтекания трёхлопастного рулевого винта вертолётa. Относительная величина хорды лопасти составляет  $\bar{b} = b/R = 0,138$ , относительный радиус втулочного сечения  $\bar{r}_{om} = 0,21$ . Каждая лопасть винта моделируется жёсткой тонкой несущей поверхностью и представляется 45 вихревыми ячейками (9 вдоль размаха и 5 вдоль хорды). Лопаста вращаются с фиксированной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси вращения винта. Вектор воздушной скорости вертолётa  $\vec{V}$  направлен вправо вдоль оси вращения винта.

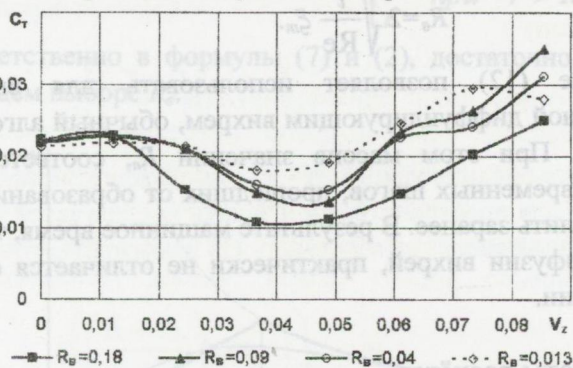
Угол установки лопастей равняется  $\varphi = 13^\circ$ . Вихревые пелены сходят с задних кромок лопастей. Шаг по времени выбирается из условия поворота винта на угол  $\Delta\psi = 15^\circ$ .

Для описанного винта рассчитывалась величина коэффициента силы тяги:

$$C_T = \frac{T}{\rho \frac{(\omega R)^2}{2} F},$$

где  $T$  - сила тяги винта,  $F = \pi R^2$  - площадь, ометаемая винтом,  $\rho$  - плотность воздуха. Расчеты  $C_T$  проведены для относительных скоростей полёта вертолёта вправо в диапазоне  $V_z = 0 \div 0,09$ .

Исследовалась возможность сглаживания решения задачи с помощью применения увеличенного, но фиксированного значения радиуса вихря. На рис. 2а показаны значения  $C_T$  в зависимости от скорости полёта вертолёта вбок, рассчитанные при величинах  $R_v = 0,013, 0,04, 0,09, 0,18$  и осреднённые с 104 по 199 шаг по времени (за 4 оборота винта), а на рис. 2б - осреднённые с 208 по 399 шаг (8 оборотов). Из анализа рисунков следует, что с возрастанием скорости движения вправо коэффициент силы тяги сначала возрастает, а затем уменьшается, достигая минимума при  $V_z = 0,04 \div 0,05$ , а в дальнейшем снова увеличивается. Это означает, что при таких скоростях винт попадает в режим вихревого кольца. В то же время необходимо отметить, что увеличение количества расчётных шагов приводит к нерегулярному поведению зависимости  $C_T(V_z)$  и к возрастанию осреднённых характеристик, что свидетельствует об усилении неустойчивости решения на режиме вихревого кольца.



а

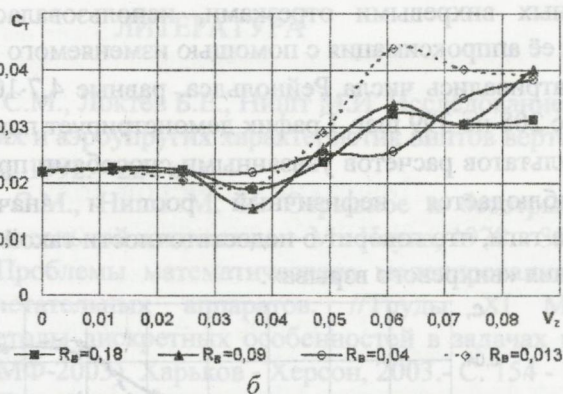


Рис. 2. Зависимость  $C_m(V_z)$  при фиксированных  $R_e$ :  
 а - осреднение с 104 по 199 шаг, б - с 208 по 399 шаг

Другим способом регуляризации решения является использование затухающей с течением расчётного времени циркуляции вихрей. На рис. 3 показаны результаты расчёта коэффициента тяги винта, выполненного с применением формулы (4), осреднённые с 208 по 399 шаг. Для безразмерной величины  $k=KV/L$  использовались значения  $k=40$  (в соответствии с рекомендацией работы [4]), а также  $k=200$ . Радиус вихря оставался постоянным в течение расчёта и составлял 0,013 и 0,09. Для сравнения показана также зависимость  $C_T(V_z)$ , соответствующая отсутствию диффузии и значению  $R_e=0,09$ . Из графика видно, что затухание интенсивности вихрей в случае  $k=200$ , при котором через 399 шагов с момента образования вихря сохраняется 38% от его первоначальной величины, довольно слабо влияет на регуляризацию поведения тяги винта. Напротив, при  $k=40$ , когда на 399-м шаге со времени схода интенсивность вихря составляет 9% от исходной, наблюдается гладкий характер протекания кривой, даже при отсутствии дополнительной регуляризации с помощью радиуса вихря.

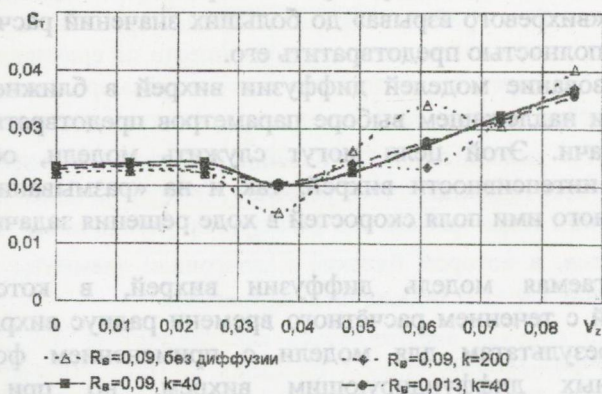


Рис. 3. Зависимость  $C_m(V_z)$  при использовании уменьшения интенсивности вихрей

На рис. 4 показаны зависимости коэффициента тяги от скорости движения вправо, полученные с учётом диффузии вихрей. При нахождении скоростей,

индуцированных вихревыми отрезками, использовалась формула (6) либо предлагаемая её аппроксимация с помощью изменяемого в ходе расчёта радиуса вихря. Рассматривались числа Рейнольдса, равные  $4,7 \cdot 10^3$  и  $2 \cdot 10^5$ . Осреднение проводилось с 208 по 399 шаг. График демонстрирует плавность изменения  $C_T$  и близость результатов расчётов указанными способами при  $Re=4,7 \cdot 10^3$ . В случае  $Re=2 \cdot 10^5$  наблюдается нефизичный рост и значительные колебания коэффициента тяги, что говорит о недостаточности такой степени диффузии для предотвращения «вихревого взрыва».

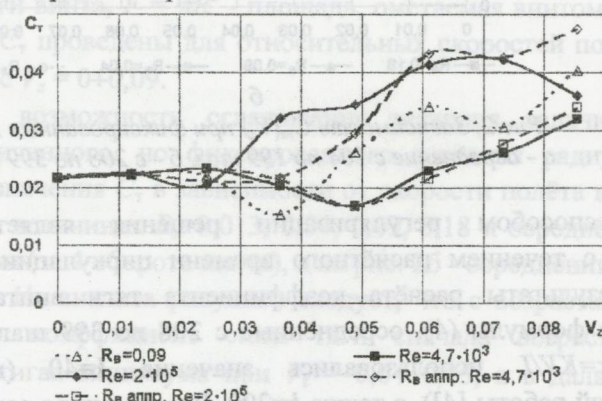


Рис. 4. Зависимость  $C_m(V_z)$  при использовании «размывания» индуцированной скорости

## 5. Выводы

1. Результаты расчётов показывают, что при численном моделировании режима вихревого кольца воздушного винта с помощью традиционного метода дискретных вихрей возникает явление «вихревого взрыва», которое характеризуется резкими пульсациями вычисляемых скоростей воздуха и аэродинамических нагрузок и приводит к некорректному нахождению осреднённых аэродинамических характеристик. Использование увеличенного фиксированного значения радиуса вихря даёт возможность отсрочить наступление «вихревого взрыва» до больших значений расчётного времени, но не позволяет полностью предотвратить его.

2. Использование моделей диффузии вихрей в ближнем вихревом следе позволяет при надлежащем выборе параметров предотвратить «раскачивание» решения задачи. Этой цели могут служить модели, основанные как на уменьшении интенсивности вихрей, так и на «размывании» в пространстве индуцированного ими поля скоростей в ходе решения задачи в нестационарной постановке.

3. Предлагаемая модель диффузии вихрей, в которой используется возрастающий с течением расчётного времени радиус вихря, даёт результаты, близкие к результатам для модели с применением формулы скоростей, индуцированных диффундирующим вихрем, но при этом позволяет существенно экономить время счёта на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Локтев Б.Е., Ништ М.И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов. - М.: Машиностроение, 1992. - 224 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
3. Крицкий Б.С. Проблемы математического моделирования аэродинамики винтокрылых летательных аппаратов. //Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003). Харьков - Херсон, 2003.- С. 154 - 158.
4. Андронов П.Р. Численное моделирование обтекания двух круглых соосных дисков с учётом диссипации завихренности в следе. //Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2000). Орёл, 2000.- С. 28 - 32.
5. Апарин В. А., Дворак А. В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками. //Труды ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, вып. 1313, 1986.- С. 424 - 429.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2.- М. : Физматгиз, 1963.- 727 с.

## Дифракция плоской волны на два-периодической идеально проводящей ленточной двухслойной решётке

А. Г. Грунёв, В. А. Щербина

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

We study the three-dimensional diffraction problem for the plane wave on the two - periodically conductive lattice which is constructed from the system of tapes orthogonal to each and located in the parallel planes. The boundary problem is reduced to the system of the hypersingular integral equations. We describe also the algorithm of the numerical simulation.

1991 Mathematics Subject Classification 45-99

Дифракция плоской волны на решётке является одной из базовых задач радиофизики. Теория антенн, дифракционных решёток, фильтров и экранов, защищающих от электромагнитных волн в заданном интервале частот – вот те задачи, при решении которых используется теория решёток.

В точной постановке без упрощающих предположений задача о дифракции решалась до недавних пор в двумерном варианте, т.е. не в пространстве, а на плоскости. ([1]-[7], [10]-[16]) Вообще следует заметить, что литература по этим вопросам очень обширна.

В нашей работе в точной постановке рассматривается два-периодическая решётка, что делает задачу дифракции на ней существенно трёхмерной. Предложенный в [17] одним из авторов метод позволил сформулировать алгоритм для численного моделирования решения, одинаково эффективный в ближней и в дальней зоне. Авторам не известны работы, в которых была бы использована сходная методика.

Используемый в работе вариант метода граничных гиперсингулярных интегральных уравнений имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционной методикой. При переходе от плоских задач к трёхмерным одномерная сетка на границе (решётки) переходит в двумерную, т.е. система из  $N$  заменяется системой из  $N^2$  линейных алгебраических уравнений, что ведёт к резкому росту погрешности для приближённого решения. Это увеличение размерности СЛАУ в предложенном ниже методе нейтрализуется улучшением "качества" матрицы коэффициентов, в которой близкие к диагонали элементы в  $\delta^{-2}$  раз больше остальных (если через  $\delta$  обозначить шаг сетки).

### 1. Постановка задачи

В данной работе предлагается метод решения задачи рассеяния электромагнитной волны, нормально падающей на плоскую два-периодическую дифракционную решётку, представляющую собой,

совокупность  $S$  тонких идеально проводящих лент, которые расположены в параллельных плоскостях  $x_3 = \pm h$  (рис. 1.). В безразмерной системе координат ширина лент принимается равной двум, а периоды решётки по переменным  $X_1, X_2$  равным  $2d$  ( $d > 1$ ).

Задача состоит в нахождении вектора напряжённости полного электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  во всём пространстве. Полное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  является суперпозицией падающего поля  $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ , представляющего собой плоскую монохроматическую волну и возмущения  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ , которое порождено наличием экрана  $S$ , т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x})$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{k} e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})}, \mathbf{p}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \mathbf{p} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_3, (\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) = 0$$

где  $\mathbf{p}$  - волновой вектор,  $\mathbf{k}$  - вектор поляризации.

Таким образом, необходимо вне поверхности  $S$  определить решение системы однородных уравнений

$$\Delta \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \quad (1.1)$$

$$(\nabla, \mathbf{E}_1(\mathbf{x})) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \quad (1.2)$$

с краевым условием

$$[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}(\mathbf{x})] = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in S \quad (1.3)$$

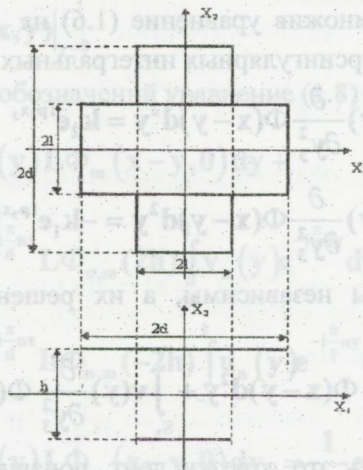


Рис. 1.

которое означает, что тангенциальная составляющая вектора напряжённости полного электрического поля на идеально проводящих лентах обращается в ноль. Условие (1.2) обеспечивает отсутствие зарядов вне поверхности  $S$ . Кроме того, решение должно удовлетворять условию излучения, обеспечивающему отсутствие в представлении для  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$  волн, приходящих из бесконечности.

Кроме этих условий на  $E_1(\mathbf{x})$  естественно потребовать, чтобы  $E_1(\mathbf{x}) = E_1(\mathbf{x} + 2n_1\mathbf{e}_1\mathbf{d} + 2n_2\mathbf{e}_2\mathbf{d})$ .

В силу периодичности  $E_0(\mathbf{x})$ ,  $E_1(\mathbf{x})$  достаточно рассмотреть задачу в базовой ячейке  $\Sigma = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}_1| < \mathbf{d}, |\mathbf{x}_2| < \mathbf{d}\}$ .

Ищем решение в виде

$$E_1(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{S_0} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (1.4)$$

где  $S_0 = S \cap \Sigma$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{y}) = j_1(\mathbf{y})\mathbf{e}_1 + j_2(\mathbf{y})\mathbf{e}_2$ ,  $\Phi(\mathbf{x})$  - фундаментальное два - периодическое решение уравнения

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) + p^2\Phi(\mathbf{x}) = \sum_n \delta(\mathbf{x} - 2n\mathbf{d}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.5)$$

где  $2n\mathbf{d} = 2\mathbf{d}(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2)$ . Ясно, что  $E_1(\mathbf{x})$  будет удовлетворять всем условиям задачи, если за счёт выбора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$  удастся удовлетворить краевому условию (1.3).

Выбор решения такого вида обосновывается ещё и тем, что потенциал двойного слоя имеет непрерывную производную при переходе через поверхность. Подставляя выражение (1.4) в условие (1.3), получим уравнение относительно вектора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$ , которое после простых преобразований будет иметь вид

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = (\mathbf{k}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{e}_2) e^{ip_3x_3}, \mathbf{x} \in S_0 \quad (1.6)$$

или, покомпонентно, домножив уравнение (1.6) на  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  скалярно, получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_{S_0} j_1(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = \mathbf{k}_2 e^{ip_3x_3} \\ \int_{S_0} j_2(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = -\mathbf{k}_1 e^{ip_3x_3} \end{cases}, \mathbf{x} \in S_0 \quad (1.7)$$

Уравнения этой системы независимы, а их решение сводится к решению уравнения

$$\int_{S_1} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} + \int_{S_2} \mathbf{v}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = \mathbf{k} e^{ip_3x_3}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{x}_3 = \pm \mathbf{h}$ ,  $S_1, S_2$  - это отрезки лент, попавшие в базовую ячейку  $\Sigma$ . Таким образом, для рассматриваемой решётки поставленная задача сводится к решению граничного уравнения для вектора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$  в векторной форме (1.6) или к системе гиперсингулярных интегральных уравнений (1.7), которая сводится к решению гиперсингулярного уравнения (1.8).

## 2. Дискретизация

Функция  $u(y)$  периодична по  $y_1$ , а  $v(y)$  периодична по  $y_2$  и они допускают разложение

$$u(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi m \frac{y_1}{d}} u_m(y_2), \quad v(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{y_2}{d}} v_n(y_1)$$

Функция  $\Phi(x)$  - гладкая при фиксированном  $x_3 \neq 0$  два - периодическая функция по переменным  $x_1, x_2$ , так что её коэффициенты Фурье в разложении

$$\Phi(x) = \sum_{n_1, n_2} e^{i\frac{\pi}{d}(n_1 x_1 + n_2 x_2)} \Phi_{n_1, n_2}(x_3) \quad (x_3 \neq 0) \quad (2.1)$$

экспоненциально быстро убывают при  $|n_1| + |n_2| \rightarrow \infty$ . В разложении

$$\Phi(x) = \sum_n e^{i\frac{\pi}{d} n x_1} \Phi_n(x_2, x_3) \quad (2.2)$$

коэффициенты  $\Phi_n(x_2, 0)$  - периодические обобщённые функции, которые мы будем рассматривать как слабый предел при  $x_3 \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\int_{-d}^d \Phi_n(y, 0) \psi(y) dy = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-d}^d \Phi_n(y, x) \psi(y) dy,$$

где  $\psi(y)$  - гладкая периодическая функция.

Тоже самое справедливо и для функций

$$L\Phi_n(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_n(x, y) \Big|_{y=0}$$

С учётом введенных обозначений уравнение (1.8) сводится к системе вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^1 u_m(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy + \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{d} n x} L\Phi_{n,m}(2h) \int_{-1}^1 v_n(y) e^{-i\frac{\pi}{d} n y} dy_1 = \frac{1}{2d} e^{i p_3 h} \delta_{m,0} \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{d} n x} L\Phi_{n,m}(-2h) \int_{-1}^1 u_n(y) e^{-i\frac{\pi}{d} n y} dy_2 + \\ & \int_{-1}^1 v_m(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy_1 = \frac{1}{2d} e^{-i p_3 h} \delta_{m,0} \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; |x| < 1.$$

Входящий в эти уравнения гиперсингулярный интегральный оператор вида

$$\int_{-1}^1 u(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy \quad (2.4)$$

определён на функциях вида  $u(y) = w(y)\sqrt{1-y^2}$ ,  $w(y) \in C^{1,\alpha}[-1,1]$  [8].  
 Неизвестные  $u_n(y), v_n(y)$  принадлежат этому классу [9], и мы, не меняя названий искомым функций, всюду в (2.3) заменим  $u_n(y) \rightarrow u_n(y)\sqrt{1-y^2}, v_n(y) \rightarrow v_n(y)\sqrt{1-y^2}$ . Оператор (2.4) после простых преобразований сводится к интегралу вида

$$\int_{-1}^1 \frac{F(x-y)}{(x-y)^2} \sqrt{1-y^2} dy \quad (2.5)$$

где  $F(x-y) = w(y)L\Phi_n(x-y, 0)(x-y)^2$  - Гельдерева функция, т.е.  $F \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$ .

Для приближённого вычисления интеграла (2.4) воспользуемся следующей квадратурной формулой, предложенной в [3]

$$[D\gamma](t_j) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda(t_k) (1-t_k^2) \frac{1-(-1)^{j+k}}{(t_j-t_k)^2} - \frac{n}{2} \gamma(t_j) \quad (2.6)$$

где оператор  $D\gamma(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{(s-t)^2} \sqrt{1-t^2} dt$ ,  $t_k = \cos \frac{\pi k}{n}$ ,  $k = 1..n$ . После замены рядов по  $m$  частичными суммами, а интегралов - суммами вида (2.6), система (2.3) сведётся к системе линейных алгебраических уравнений для значений неизвестных  $u_n(y), v_n(y)$  в узлах сетки.

### 3. Фундаментальное решение

Два - периодическое фундаментальное решение исследуемой задачи удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi(x) + p^2\Phi(x) = \sum_n \delta(x-2nd) \quad (3.1)$$

Подставляя (2.1) в (3.1), получим для неизвестных коэффициентов  $\Phi_{n,m}(z)$  следующее уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_{n,m}^2 \right) \Phi_{n,m}(z) = \delta(z), \mu_{n,m}^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 (m^2 + n^2) - p^2,$$

С учётом условия излучения

$$\Phi_{n,m}(x_3) = \begin{cases} -\frac{e^{-\mu_{n,m}|x_3|}}{2\mu_{n,m}}, \mu_{n,m}^2 > 0 \\ \frac{ie^{-|\mu_{n,m}|x_3|}}{2|\mu_{n,m}|}, \mu_{n,m}^2 < 0 \\ |x_3|/2, \mu_{n,m}^2 = 0 \end{cases}$$

Поскольку решение уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \pm a^2 \right) u_{\pm}(x, z) = \delta(x)\delta(z), \quad a > 0$$

с учётом условия излучения имеет вид

$$u_+(x, z) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(a\sqrt{x^2+z^2}), \quad u_-(x, z) = \frac{-1}{2\pi} K_0(a\sqrt{x^2+z^2}) \quad \text{и}$$

$u_0 = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2+z^2)$ , то  $L\Phi_n(x, 0)$  можно представить в виде сумм формальных рядов

$$L\Phi_m(x, 0) = \begin{cases} \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\lambda_m|x-2nd|)}{|x-2nd|}, \lambda_m^2 = \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 - p^2 > 0 \\ \frac{-i\lambda_m}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(\lambda_m|x-2nd|)}{|x-2nd|}, \lambda_m^2 = p^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-2nd|^2}, p^2 = \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Что касается первой суммы из стоящих справа в (3.2), то она экспоненциально быстро сходится. На интервале  $|x| < 1$  только слагаемое при  $n = 0$  в этой сумме является обобщённой функцией. Сходится и третья сумма в (3.2). Что касается второй суммы по  $n$ , то она нуждается в регуляризации.

#### 4. Регуляризация

$$\Phi_m(x, z) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \Phi_{m,n}(z) = \frac{1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{e^{-\mu_{m,n}|z|}}{2\mu_{m,n}}$$

$$\text{где } \mu_{m,n} = \begin{cases} \pi\gamma\sqrt{(m^2+n^2)/\gamma^2-1}, (m^2+n^2)/\gamma^2 > 1 \\ i\pi\gamma\sqrt{1-(m^2+n^2)/\gamma^2}, (m^2+n^2)/\gamma^2 < 1 \end{cases},$$

где  $\gamma = 4/\lambda$ , т.е. равно отношению периода решётки к длине падающей волны. Таким образом

$$L\Phi_m(x, 0) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{\mu_{m,n}}{2} \quad - \text{ обобщённо сходящийся ряд Фурье.}$$

Рассмотрим следующее уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left( \left( \frac{\pi\gamma_q}{2} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{2} \right)^2 \right) \right) \Psi_m(x, z; \gamma_q) = \delta(z) \sum_n \delta(x-4n).$$

т.е.

$$\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \gamma_q) = \frac{-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_0 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 + \gamma_q^2} \sqrt{(x/2 - 2n)^2 + (z/2)^2} \right) \quad [8]$$

а с другой стороны

$$\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{e^{-v_{m,n}(\gamma_q)|z|}}{2v_{m,n}(\gamma_q)},$$

$$\text{где } v_{n,m}^2(\gamma_q) = \left( \frac{\pi \gamma_q}{l} \right)^2 \left( (m^2 + n^2) / \gamma_q^2 + 1 \right)$$

Таким образом  $\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{v_{m,n}(\gamma_q)}{2}$ . Представим  $L\Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  в виде

$$L\Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{-1}{8l^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \left( \mu_{m,n} - \sum_{q=1}^3 C_q v_{m,n} \right) -$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^3 C_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0 \left( \pi \sqrt{m^2 + \gamma_q^2} \sqrt{(x/2 - 2n)^2 + (z/l)^2} \right)$$

Выберем коэффициенты  $C_q$  так, чтобы при  $\gamma^2 > m^2$ , т.е. в (3.2)

$$p^2 - \left( \frac{\pi m}{d} \right)^2 > 0, \quad \mu_{m,n} - \sum_{q=1}^3 C_q v_{m,n}(\gamma_q) = 0 \left( \frac{1}{n^5} \right)$$

Решая эту систему, получим

$$C_q = (-1)^{q-1} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^3 \frac{(\gamma^2 - \gamma_r^2)}{(\gamma_q^2 - \gamma_r^2)} \quad (3.1)$$

т.е. коэффициенты  $C_q$  не зависят от  $m, n$ .

## 5. Численный эксперимент

При проведении численного эксперимента было получено достаточно точное решение для длинных волн. При уменьшении длины падающей волны до величины полпериода решётки наблюдается резкое колебание энергии. На рис. 2-3 изображена зависимость осреднённой по периоду мощности отражённой волны в дальней зоне электромагнитного поля от параметра  $\gamma = 4/\lambda$  на одной сетке и удвоенной сетке.

$$N(\gamma) = \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 |E_1(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2$$

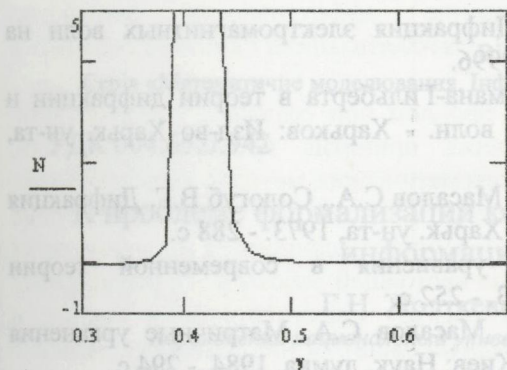


Рис. 2

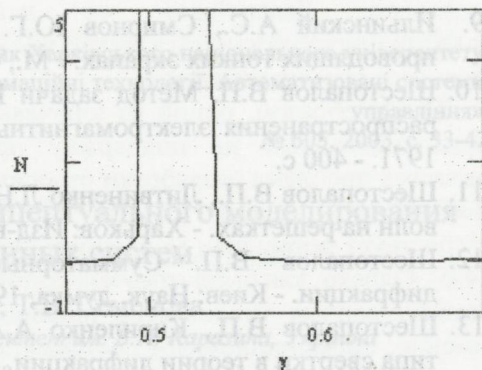


Рис. 3

В последние годы резко увеличился интерес к численному моделированию решений трёхмерных задач дифракции. Данная работа на важном для приложений примере демонстрирует большие возможности нового метода как раз для численного моделирования решений пространственных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. - ЖТФ, 1962, 32:4, с. 371-394.
2. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики. // Теория функций, функциональный анализ их приложения - 1982. - вып. 38, - с. 15-18.
3. Гандель Ю.В. Методы дискретных особенностей в задачах электродинамики. // Вопросы кибернетики. - Москва: Изд-во АН СССР, 1986. - ВК - №124 - с. 166-183.
4. Гандель Ю.В., Кравченко В.Ф., Морозова Н.Н. Дифракция электромагнитных волн на решетке из тонких сверхпроводящих лент. // Электромагнитные волны и электронные системы. - М. - 1997. - т.2, №2. - с. 14-26.
5. Гандель Ю.В. Методы парных сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. // Электромагнитные явления. - 1998. - т.1, №1. - с. 220-232.
6. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Особенности численного решения сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на многоэлементных решетках. // Электромагнитные явления. - 2001. - т.3, №3. - с. 53-61
7. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование численного решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках. // Дифференциальные уравнения. - 2003. - т.39, №9
8. Гандель Ю.В., Ерёменко С.В., Полянская Т. В. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей двумерных задач дифракции электромагнитных волн. - Х.:ХГУ, - 1992.

9. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. - М., - 1996.
10. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. - 400 с.
11. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. - 288 с.
12. Шестопапов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. - Киев: Наук. думка, 1983. - 252 с.
13. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. - Киев: Наук. думка, 1984. - 294 с.
14. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Дифракционные решетки. - Киев: Наук. думка, 1986. - 232 с. - (Резонансное рассеяние волн: В 2-х т.; Т.1).
15. Шестопапов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток. - Киев: Наук. думка, 1989. - 216 с.
16. Шестопапов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, 1997. - 284 с.
17. Щербина В. А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в  $\mathbf{R}^3$ . // Электромагнитные явления - 1998. - т. 1. №4.
18. Щербина В. А. Периодические фундаментальные решения для уравнения Гельмгольца. // ЖВМ и МВ - 1989. - т. 29. №2.

## К проблеме формализации концептуального моделирования информационных систем

Г.Н. Жолткевич, Т.В. Семенова

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

In the present paper the problem of the information system modelling is considered. The approach to the data modelling using the algebraic structures was made. As a result the mathematical data model has been built. The model obtained consists two levels, these are structural and semantic ones. The mechanism of the correctness verification of the data model was developed.

Характерный для современного общества процесс массового внедрения информационных технологий, базирующихся на обработке информации при помощи вычислительной техники, приводит к росту спроса на информационные системы различного назначения. Такие системы должны соответствовать ряду требований, среди которых:

адекватность – достоверное отражение в информационной системе фактов и закономерностей предметной области;

открытость – обеспечение возможности реструктуризации информационной базы системы в связи с развитием знаний о ее предметной области;

гибкость – обеспечение возможности реализации различных, удобных с точки зрения разных категорий пользователей, представлений фактов и закономерностей предметной области;

эффективность – достижение оптимального для заказчика соотношения между ценой разработки информационной системы и ожидаемым доходом от ее использования.

Применяемые в настоящее время при разработке информационных систем технологические решения в той или иной мере ориентированы на реализацию этих требований. Они базируются на использовании инструментальных средств, позволяющих построить различные модельные взгляды на проектируемую систему. Интеграция этих моделей обеспечивает достаточно адекватное описание разрабатываемой системы. Ярким примером этого подхода являются технологические решения, базирующиеся на языке UML [1-2].

Формализация средств представления модельных взглядов на проектируемую систему открывает путь к использованию в процессе разработки CASE (computer aided software engineering) – средств, например Rational Rose. Применение существующих CASE-средств позволяет значительно повысить эффективность процессов разработки программного обеспечения. Однако указанные средства обеспечивают прежде всего, интеграцию проектных данных, фиксацию текущей проектной ситуации в репозитории проекта, но не поддерживают механизмы принятия проектных решений. Кроме того, реализация в информационной системе пп. 2 и 3 из перечисленных выше требований представляется весьма сомнительной с точки зрения указанных

подходов. Дальнейшее же повышение эффективности разработки информационных систем связано как раз с автоматизацией принятия решений в процессе проектирования.

Таким образом, одной из ключевых проблем при создании CASE-средств, ориентированных на поддержку процесса принятия проектных решений, является проблема разработки строгих математических методов моделирования достаточно широкого класса предметных областей. В настоящее время существует формализм моделирования в терминах реляционной модели данных [4-6]. Однако, как было отмечено авторами настоящей работы в [7], реляционная модель данных неадекватна широкому спектру информационных систем, а именно, информационным системам, ориентированным на поддержку научных исследований. Такое положение стимулировало настоящую работу, результатом которой стала описанная ниже модель.

Пусть  $N$  – конечное множество, элементы которого соответствуют именам понятий предметной области,  $R$  – конечное множество, элементы которого соответствуют именам ролей, т.е. ссылкам внутри экземпляра понятия на его структурные части.

Обозначим через  $M(R, N)$  множество частичных отображений из  $R$  в  $N$ . Для областей определения отображений  $f \in M(R, N)$  будем использовать обозначение  $dom(f)$ . Будем также обозначать через  $\varepsilon$  отображение с пустой областью определения.

Кроме того, будем использовать стандартные обозначения  $R^*$  – для множества всех слов над  $R$ ,  $R^+$  – для множества непустых слов над  $R$ ,  $e$  – для пустого слова.

#### Определение 1.

Полусхемой предметной области назовем тройку  $S = (N, R, D)$ , где  $N$ ,  $R$  – конечные множества,  $D \subset N \times M(R, N)$ , для которой выполняются следующие условия:

1. если  $(n, \varepsilon) \in D$ , где  $n \in N$ , то  $\{f \in M(R, N) \mid (n, f) \in D\} = \{\varepsilon\}$ ;

2. если для  $n \in N$ ,  $f, g \in M(R, N)$ ,  $r \in R$  одновременно выполнено

2.1.  $(n, f) \in D$ ,

2.2.  $(n, g) \in D$ ,

2.3.  $r \in dom(f) \cap dom(g)$ ,

то  $f(r) = g(r)$ .

Условие 2 определения позволяет корректно задать частичное отображение  $\tau: N \times R \rightarrow N$  следующим образом:  $\tau(n, r)$  определено в том и только том

случае, если существует  $f \in M(R, N)$ , для которого  $(n, f) \in D$ ,  $r \in \text{dom}(f)$  при этом  $\tau(n, r) = f(r)$ .

### Определение 2.

**Именующей нитью** понятия  $n$  назовем элемент  $(n, w)$  из множества  $N \times R^*$ , который удовлетворяет одному из следующих условий:

1.  $w = e$  и  $(n, \varepsilon) \in D$ ;
2. для  $w = r_1 r_2 \dots r_k$  в последовательности  $n_0 = n$ ,  $n_i = \tau(n_{i-1}, r_i)$ , где  $i = 1, \dots, k$ , все члены определены.

Множество именующих нитей понятия  $n$  будет обозначаться через  $T(n)$ .

Именующие нити обладают следующим очевидным свойством.

### Утверждение 1.

Если  $t = (n, r_1 \dots r_k)$  – именующая нить, то для всякого  $1 \leq m < k$   $t' = (n, r_1 \dots r_m)$  также является именующей нитью.

Для именующей нити  $t = (n, w)$  длина слова  $w$  будет называться длиной именующей нити и обозначаться  $|t|$ . Можно рассмотреть расширенный вариант частичного отображения  $\tau: N \times R^* \rightarrow N$ , которое определено ниже.

### Определение 3.

Пусть  $t \in T(n)$ , тогда

1. если  $|t| = 0$ , то  $\tau(t) = n$ ;
2. если  $|t| = k$ , то  $\tau(t) = n_k$ , где  $n_0 = n$ ,  $n_i = \tau(n_{i-1}, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , а  $t = (n, r_1 \dots r_k)$ .

### Определение 4.

Понятие  $n \in N$  такое, что  $(n, \varepsilon) \in D$  будем называть **базовым понятием**.

Обозначим через  $N_0$  множество базовых понятий полусхемы  $S$ .

### Определение 5.

Пусть  $n \in N$ ,  $t \in T(n)$ . Если  $\tau(t) \in N_0$ , то  $t$  будем называть **терминальной именующей нитью**.

Обозначим через  $T_0(n)$  множество терминальных нитей понятия  $n$ , а через  $F(T_0(n))$  множество всех конечных подмножеств множества  $T_0(n)$ .

Ключевым в предлагаемой модели является следующее

Определение 6.

**Образцом понятия**  $n \in N$  называется конечное множество  $p$  терминальных именуемых нитей этого понятия, удовлетворяющее следующему условию: для всякой именуемой нити  $t = (n, w) \in p$  и для всякого представления  $w$  в виде  $w_1 r w_2$ , где  $w_1, w_2 \in R^*$ ,  $r \in R$ , найдется единственное отображение  $f \in M(R, N)$ , для которого  $(\tau(n, w_1), f) \in D$ ,  $r \in \text{dom}(f)$ , и для всех  $r' \in \text{dom}(f)$  в  $p$  найдется нить вида  $(n, w_1 r' v_r)$  для некоторого  $v_r \in R^*$ .

Обозначим через  $P(n)$  множество образцов понятия  $n \in N$ , а через  $P = \bigcup_{n \in N} P(n)$  – множество всех образцов понятий из  $N$ .

Определение 7.

Будем говорить, что образец  $p \in P(n)$  имеет **сигнатуру**  $f \in M(R, N)$ , если выполнены следующие два условия:

1.  $(n, f) \in D$
2.  $p = \bigcup_{r \in \text{dom}(f)} \{t \in p \mid \exists (w \in R^*) t = (n, rw)\}$

Определение 8.

Полусхема  $S = (N, R, D)$  называется **схемой**, если для любых  $n \in N$  и  $f \in M(R, N)$ , для которых выполнено  $(n, f) \in D$ , можно построить хотя бы один образец  $p \in P(n)$  с сигнатурой  $f$ .

В общем случае не для каждого  $n \in N$  может быть построен образец (будем называть такие понятия **плохо определенными**). В связи с этим возникает следующая задача: для заданной полусхемы найти необходимые и достаточные условия существования образцов. Решение этой задачи требует введения ряда вспомогательных конструкций.

Пусть задана полусхема  $S = (N, R, D)$ . Определим последовательность подмножеств множества  $N$  следующим образом:

положим  $N^{(0)} = N_0$ , и для  $k > 0$ , определим

$$N^{(k)} = N^{(k-1)} \cup \left\{ n \in N \setminus N^{(k-1)} \mid \exists (f \in M(R, N)) \mid (n, f) \in D \wedge \text{im } f \subset N^{(k-1)} \right\}.$$

Очевидно, что  $\{N^{(k)} \mid k \geq 0\}$  является возрастающей по вложению последовательностью подмножеств множества  $N$ . В силу конечности

последнего она, очевидно, стабилизируется, т.е. найдется такое  $m$ , что  $N^{(m)} = N^{(m+1)} = \dots$ . Обозначим через  $N_\infty = \bigcup_{k \geq 0} N^{(k)}$ .

### Теорема 1.

Множество  $N_\infty$  состоит из тех и только понятий, которые имеют хотя бы один образец.

### Доказательство.

Докажем сначала, что любое понятие из  $N_\infty$  имеет хотя бы один образец.

Пусть  $n \in N_\infty$ , тогда обозначим через  $m(n) = \min(k \mid n \in N^{(k)})$ .

Доказательство проведем индукцией по  $m(n)$ .

Если  $m(n) = 0$ , то утверждение очевидно.

Предположим, что утверждение верно для случая  $m(n) < k$ , и покажем, что оно верно для  $m(n) = k$ .

Действительно, в случае  $m(n) = k$  для  $n$  выполняется следующее соотношение

$$\exists (f \in M(R, N)) \mid (n, f) \in D \wedge \text{im } f \subset N^{(k-1)}.$$

Используя это отображение  $f$ , построим образец  $p$  для такого  $n$ . Выберем  $r \in \text{dom}(f)$ . В силу предположения индукции  $f(r)$  имеет хотя бы один образец. Пусть  $p_r = \{t_1, t_2, \dots, t_{s(r)}\}$  – любой образец  $f(r)$ , где  $t_i = (f(r), w_i)$ .

Построим множество  $p^{(r)} = \{(n, r w_i) \mid i = 1, \dots, s(r)\}$ . Определим теперь  $p = \bigcup_{r \in \text{dom}(f)} p^{(r)}$ . Очевидно, что  $p$  – образец  $n$ .

Докажем обратное утверждение: любое понятие из  $N$ , для которого можно построить образец, принадлежит множеству  $N_\infty$ , т.е.  $m(n) < \infty$ .

Пусть  $n \in N$  и существует образец  $p$  для  $n$ .

Так как  $p$  – конечное множество терминальных именующих нитей, то в этом множестве существует нить  $t = (n, w)$  максимальной длины. Обозначим соответствующую длину через  $m$ . Очевидно, что в силу построения последовательности  $\{N^{(k)} \mid k \geq 0\}$  выполняется неравенство  $m(n) \leq m$ , что и завершает доказательство теоремы.

### Теорема 2.

Пусть задана полусхема  $S = (R, N, D)$ , тогда тройка  $S' = (R', N', D')$ , где  $N' = N_\infty$ ,  $D' = D \setminus \{(n, f) \in D \mid f \in F\}$ ,  $R' = \bigcup_{f \in M(R, N) \setminus F} \text{dom}(f)$ , где  $F$  определено соотношением:  $F = \{f \in M(R, N) \mid \exists (r \in \text{dom } f) f(r) \in N \setminus N_\infty\}$ , является схемой.

Доказательство.

Заметим, что определение  $D'$  может быть переписано следующим образом:

$$D' = \{(n, f) \in D \mid \text{im } f \subset N_\infty\}.$$

Пусть  $n \in N'$ , тогда в силу построения  $N'$  выполнено

$$\exists (f \in M(R, N)) \mid (n, f) \in D \wedge \text{im } f \subset N_\infty,$$

а значит может быть построен хотя бы один образец  $n$  с сигнатурой  $f$ . Так как это верно для любого отображения  $f$  такого, что  $(n, f) \in D'$  в силу определения  $D'$ , то  $S'$  является схемой. Доказательство завершено.

Теорема 3.

Пусть задана полусхема  $S = (R, N, D)$  и по ней построена схема  $S' = (R', N', D')$ , тогда множества образцов у  $S$  и  $S'$  совпадают.

Доказательство.

Включение  $P' \subset P$  очевидно.

Докажем обратное включение, используя метод доказательства от противного.

Предположим, что  $\exists (n \in N) \exists (p \in P(n)) p \notin P'(n)$ . В силу определения  $S'$  такое возможно только в одном из двух случаев:

1.  $n \notin N_\infty$ ,
2. образец  $p$  имеет сигнатуру  $f$ , для которой  $(n, f) \in D$  и  $f \in F$ .

Если  $n \notin N_\infty$ , то для понятия  $n$  нельзя построить ни одного образца в силу теоремы 2, что противоречит определению схемы.

Если образец  $p$  имеет сигнатуру  $f$  такую, что  $f \in F$ , тогда  $\exists (r \in \text{dom}(f)) f(r) \notin N_\infty$ . Следовательно, для  $f(r)$  не может быть построено ни одного образца, что влечет за собой невозможность построения образца и для  $n$ , что также противоречит определению схемы.

Таким образом,  $P \subset P'$ , что и доказывает теорему.

Определение 9.

Функцию  $f \in M(R, N)$  будем называть **сигнатурой** понятия  $n \in N$ , если выполнено соотношение  $(n, f) \in D$ .

Определение 10.

Будем говорить, что два понятия являются **структурными синонимами**, если наборы их сигнатур совпадают.

Для большинства предметных областей характерно наличие отношения обобщения, которое в предлагаемой модели может быть введено следующим образом.

Определение 11.

Будем говорить, что понятие  $n$  **обобщает** понятие  $m$ , если  $\forall (f \in M(R, N)) ((m, f) \in D \Rightarrow (n, f) \in D)$ .

Обозначение:  $n \supset m$ .

Очевидно, что определенное таким образом отношение обобщения является рефлексивным и транзитивным.

Утверждение 1.

Если  $n \supset m$  и  $m \supset n$ , то понятия  $m$  и  $n$  имеют одинаковый набор сигнатур, т.е. являются структурными синонимами. При этом отношение "быть структурными синонимами" является отношением эквивалентности.

Доказательство непосредственно следует из определений.

Отметим, что для построенной математической модели существует простой механизм проверки ее корректности.

В первую очередь речь идет об алгоритмах, определяющих, является ли заданная полусхема схемой, и выделяющих множества плохо определенных понятий в противном случае.

Алгоритм 1.

Вход: полусхема  $S = (N, R, D)$ .

Выход: множество плохо определенных понятий  $N_b$ .

```

{
  N* = N0
  do {
    Ntemp = { n : N | ∃ (f : M(R, N)) (n, f) ∈ D ∧ ∀ (r : dom f) f(r) ∈ N* };
    N* = N* ∪ Ntemp;
  } while (N* ≠ Ntemp);

```

$$N_b = N \setminus N^*;$$

Обозначения:

- $N$  — множество понятий предметной области;
- $N_b$  — множество плохо определенных понятий;
- $N_0$  — множество базовых понятий;
- $N_{temp}$  — вспомогательное множество;
- $N^*$  — итерационно формируемое множество понятий, для которых можно построить хотя бы один образец.

Сходимость алгоритма обеспечивается за счет конечности множества  $N$ .

Если в результате работы алгоритма  $N_b = \emptyset$ , то исходная полусхема  $S$  является схемой.

В процессе определения схемы часть понятий могут находиться в отношении обобщения. Для нахождения таких понятий можно воспользоваться следующим алгоритмом.

#### Алгоритм 2.

Вход: понятия  $n$  и  $m$ .

Выход: сообщение о взаимосвязи понятий.

```

{
  F1 = { f : M(R, N) | (n, f) ∈ D }
  F2 = { f : M(R, N) | (m, f) ∈ D }
  F = F1 ∩ F2
  if (F = F1) { return "m обобщает n"; }
  else
  if (F = F2) { return "n обобщает m"; }
  else { return "понятия не находятся в отношении обобщения"; }
}

```

Обозначения:

$F_1$  - множество сигнатур понятия  $n$ ;

$F_2$  - множество сигнатур понятия  $m$ ;

$F$  - множество сигнатур, принадлежащих и понятию  $n$ , и понятию  $m$ .

На этапе конструирования модели важно уметь выделять структурные синонимы. Для этого можно использовать изложенный выше алгоритм с небольшими изменениями.

Алгоритм 3.

Вход: два понятия  $n$  и  $m$ .

Выход: сообщение о наличии структурной синонимии понятий

$$F_1 = \{f : M(R, N) | (n, f) \in D\}$$

$$F_2 = \{f : M(R, N) | (m, f) \in D\}$$

$$F = F_1 \cap F_2$$

if ( $F = F_1$ )

if ( $F = F_2$ ) { return " $n$  и  $m$  - структурные синонимы"; }

else { return " $m$  обобщает  $n$ "; }

else

if ( $F = F_2$ ) { return " $n$  обобщает  $m$ "; }

else { return "понятия не находятся в отношении обобщения"; }

Дальнейшее построение моделей данных для описания предметных областей может быть проведено достаточно стандартным способом.

Рассмотрим многоосновную алгебру  $A$  [8], сорта которой находятся во взаимно - однозначном соответствии с множеством  $N_0$ :  $A = (\{A_n | n \in N_0\}, \Omega)$ .

Тогда для каждого образца  $p = \{t_1, t_2, \dots, t_s\}$  можно построить экземпляр понятия как элемент множества  $\prod_{i=1..s | \tau(n, w_i) \in N_0} \{(w_i, v_i)\}$ , где  $v_i \in A_{\tau(n, w_i)}$ .

Таким образом, открывается возможность дальнейшего расслоения данных путем наложения условий на экземпляры в терминах многоосновной алгебры  $A$ . Экземпляры, удовлетворяющие этим условиям, могут интерпретироваться как *примеры* понятия, а не удовлетворяющие - как *контрпримеры*.

Подводя итоги изложенному, отметим, что предложенная модель носит четырехуровневый характер (рис. 1), что позволяет достаточно хорошо отразить как структурные связи объектов предметной области, так и семантические ограничения целостности данных.

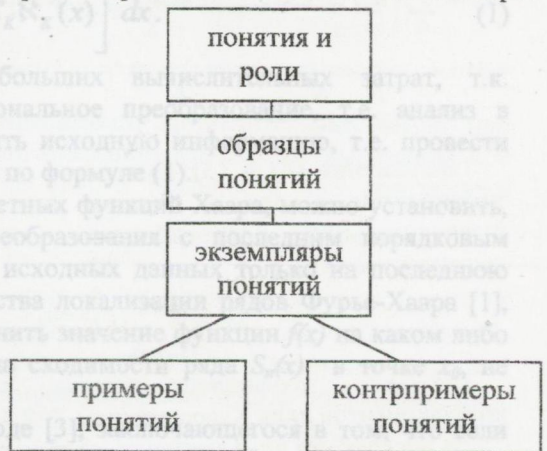
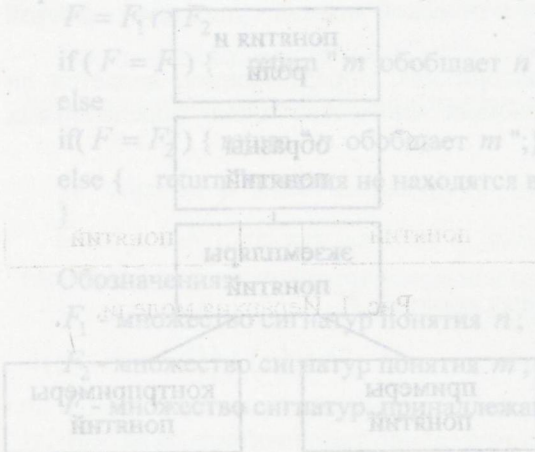


Рис. 1. Иерархия модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мацяшек Л. А. Анализ требований и проектирование систем. Разработка информационных систем с использованием UML, - М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 432 с.
2. Ларман К. Применение UML и шаблонов проектирования, - М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 496 с.
3. Таундсен К., Фохт Д. Программирование и программная реализация экспертных систем на персональных ЭВМ. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 320 с.
4. Майер Д. Теория реляционных баз данных, - М.: Мир, 1987. – 608 с.
5. Цикридис Д., Лоховский Ф. Модели данных, - М.: Финансы и статистика, 1985. – 344 с.
6. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных, 6-е издание. – Москва – С. Петербург – Киев: Вильямс, 1999. – 846 с.
7. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В. Концептуальное моделирование данных в исследовательских информационных системах средствами реляционных СУБД. – Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2002, №15. – С. 75-79.
8. Плоткин Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1991. – 448 с.



На этапе конструирования модели важно уметь выделять структурные синонимы. Для этого можно использовать изложенный выше алгоритм с небольшими изменениями.

## Метод вычисления ошибки сжатия данных в системе Хаара

В. Г. Иванов

*Национальная юридическая академия Украины им. Я. Мудрого*

Outcomes of an evaluation of an error of data compression with usage of orthogonal conversions of Haar are reduced. It is shown, that the rejection of a conversion efficiency with the last serial number influences at restoring input datas only the last pair of references. Analytical expressions of computing expenditures of deriving of an error of compression are obtained and graphs of associations of these expenditures, as functions of an aspect ratio are reduced.

В задачах сжатия данных с использованием ортогональных преобразований необходимо оценить ошибку восстановления исходной информации при усечении обобщенного ряда, то есть отбрасывания коэффициентов с большими порядковыми номерами в сторону их уменьшения.

Известен метод оценки сходимости усеченного ряда Хаара [1, 2], который заключается в том, что вычисляют коэффициенты Хаара по формуле

$C_k = \int_0^T f(x) \aleph_k(x) dx$ , где  $\aleph_k(x)$  - функции Хаара, восстанавливают исходную информацию  $S_n(x)$  по этим коэффициентам, приравнивая некоторые из них нулю

$S_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k \aleph_k(x)$  и находят сумму квадратов разности между исходными и

восстановленными данными

$$\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \aleph_k(x) \right]^2 dx. \quad (1)$$

Однако, этот метод требует больших вычислительных затрат, т.к. необходимо произвести само ортогональное преобразование, т.е. анализ в дискретном базисе Хаара, восстановить исходную информацию, т.е. провести синтез и наконец, вычислить ошибку  $\varepsilon$  по формуле (1).

Исследуя детально природу дискретных функций Хаара, можно установить, что отбрасывание коэффициента преобразования с последним порядковым номером влияет при восстановлении исходных данных только на последнюю пару отсчетов. Это вытекает из свойства локализации рядов Фурье-Хаара [1], заключающегося в том, что если изменить значение функции  $f(x)$  на каком либо отрезке  $[x_1, x_2]$ , то это не отразится на сходимости ряда  $S_n(x)$  в точке  $x_0$ , не принадлежащей  $[x_1, x_2]$ .

Это свойство используется в методе [3], заключающегося в том, что если задан вектор исходных отсчетов размерности  $N$ , то отбрасывают условный последний коэффициент ряда  $S_n(x)$  с номером  $N$ , не вычисляя его, и последнюю пару исходных отсчетов заменяют их среднеарифметическим значением "m". Вычисляют ошибку  $\varepsilon$ , как сумму квадратов разности между этой парой отсчетов

и полученным средним значением. Отбрасывают следующий  $(N-1)$  условный коэффициент ряда и предпоследнюю пару отсчетов заменяют их среднеарифметическим, вычисляют ошибку по определенному выше правилу и суммируют ее с ошибкой, полученной на первом шаге. Процедуру обнуления коэффициентов продолжают до получения заданной ошибки  $\varepsilon$ , причем порядковые номера заменяемых отсчетов их среднеарифметическим значением "m" соответствуют правилу образования коэффициентов Хаара [4].

Если размерность вектора  $N$  исходных данных равна 16, то ошибку сжатия можно записать в виде:

$$\varepsilon = (x_{16} - m)^2 + (x_{15} - m)^2, \quad (2)$$

где  $x_{16}$  и  $x_{15}$  значения исходных отсчетов, а  $m$  — их среднее арифметическое.

После несложных преобразований (2) можно привести к виду:

$$\varepsilon = x_{16}^2 + x_{15}^2 - \frac{1}{2}(x_{16} + x_{15})^2, \quad (3)$$

Объем вычислений при этом составит 3 операции сложения и 3 операции умножения. Считаем, что по времени выполнения операции суммирования и вычитания одинаковые, а времени выполнения операции деления на число, кратное степени двойки можно пренебречь.

В общем случае среднеквадратическая ошибка преобразования при отбрасывании коэффициентов с большими порядковыми номерами в сторону их уменьшения может быть записана в виде:

$$\varepsilon_k = \sum_K \left\{ x_{2k-N}^2 + x_{2k-(N+1)}^2 - \frac{1}{2} [x_{2k-N} + x_{2k-(N+1)}]^2 \right\}, \quad (4)$$

где  $k=N, N-1, \dots, \frac{N}{2} + 1$ , или

$$\varepsilon_k = \sum_K \left\{ x_{4k-N}^2 + x_{4k-(N+1)}^2 + x_{4k-(N+2)}^2 + x_{4k-(N+3)}^2 - \frac{1}{4} [x_{4k-N} + x_{4k-(N+1)} + x_{4k-(N+2)} + x_{4k-(N+3)}]^2 \right\}, \quad (5)$$

где  $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{N}{4} + 1$ .

Выражения (4) и (5) позволяют получить значение ошибки при сжатии информации в два и четыре раза, а число необходимых при этом вычислительных операций типа сложения-вычитания можно оценить выражением вида:

$$M = \sum_{k=2}^N \frac{N}{K} (2^{2+\log_2 K} + 1), \quad (6)$$

где  $k$  — коэффициент сжатия, характеризующий число ненулевых коэффициентов ряда Хаара, причем  $k=2, 4, \dots, N$ .

В дискретном виде значение ошибки по выражению (1) будет выглядеть

$$\varepsilon^* = \sum_{i=1}^N \left[ x_i - \sum_{k=1}^N C_K S_K \right]^2, \quad (7)$$

где  $x_i$  — значение исходных данных, а  $C_k$  и  $N_k$  соответственно коэффициенты и функции Хаара.

Выполняя анализ и синтез в базисе Хаара с использованием быстрых алгоритмов [4], число необходимых вычислительных операций для выражения (7) можно записать как:

$$M^* = 4N_{сл.} - 4_{сл.} + 2_{умн.} - 4_{умн.} + N_{сл.} + N_{умн.} \quad (8)$$

Заменяя также, как и в (6) одну операцию умножения, как две операции сложения и приравнявая операции суммирования и вычитания, выражение (8) приводится к виду:

$$M^* = 11N_{сл.} \quad (9)$$

Используя при вычислении (7) прямые методы, т.е. не быстрые алгоритмы, получим оценку числа операций типа сложения-вычитания:

$$Q = 3N_{сл.}^2 - 2N_{сл.} \quad (10)$$

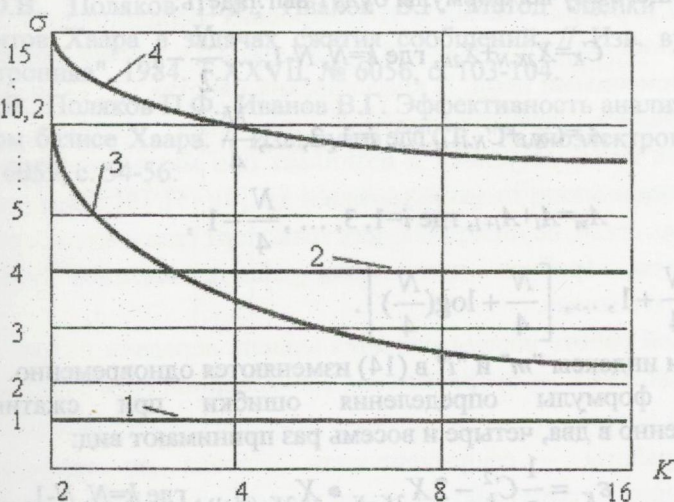


Рис. 1. Графики зависимостей вычислительных затрат при получении ошибки сжатия

На рис. 1. приведены графики зависимости вычислительных затрат при получении ошибки сжатия, как функции коэффициента сжатия (выражения 6, 9 и 10). Причем график 1 построен по (10), а графики 2 и 3 получены в

относительных единицах как  $\sigma = \frac{Q}{M^*}$  и  $\sigma = \frac{Q}{M}$  при  $N=16$ .

Из анализа приведенных кривых следует, что при коэффициенте сжатия равным двум, вычислительная эффективность  $\sigma$  метода по формуле (6) кривая 3, достаточно высока. Она в десять раз превосходит методы прямых вычислений (формула (10), кривая 1) и в два с половиной раза выше метода оценки ошибки с использованием быстрых вычислений (формула (9), кривая 2). С увеличением коэффициента сжатия эта эффективность падает, оставаясь однако, всегда выше метода прямых вычислений. Следует также заметить, что на практике системы сжатия данных на базе функций Хаара не используют коэффициенты сжатия

больше, чем 4-5 раз, так как в противном случае ошибка преобразования становится слишком большой (20 и более процентов).

Покажем далее в нашей работе, что объем вычислений в методах по формулам (4) и (5) может быть уменьшен.

Как и ранее, для простоты рассуждений зададимся размерностью вектора исходных данных  $N$  равным шестнадцати и образуем промежуточные суммы следующего вида:

$$\begin{aligned} C_{16} &= X_{16} + X_{15}; C_{15} = X_{14} + X_{13}; C_{14} = X_{12} + X_{11}; C_{13} = X_{10} + X_9; \\ C_{12} &= X_8 + X_7; C_{11} = X_6 + X_5; C_{10} = X_4 + X_3; C_9 = X_2 + X_1; \text{ и} \\ A_1 &= C_{16} + C_{15}; A_2 = C_{14} + C_{13}; A_3 = C_{12} + C_{11}; A_4 = C_{10} + C_9; \\ A_5 &= A_1 + A_2; A_6 = A_3 + A_4; \end{aligned} \quad (11)$$

Для общего случая формулы будут выглядеть:

$$C_k = X_{2k-N} + X_{2k}, \text{ где } k = N, N-1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (12)$$

$$A_i = C_{N-i} + C_{N-i+1}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, \frac{N}{4}. \quad (13)$$

$$A_m = A_i + A_{i+1}, \text{ где } i = 1, 3, \dots, \frac{N}{4} - 1, \quad (14)$$

$$a \ m = \frac{N}{4} + 1, \dots, \left[ \frac{N}{4} + \log_2 \left( \frac{N}{4} \right) \right].$$

Причем индексы " $m$ " и " $i$ " в (14) изменяются одновременно.

Тогда формулы определения ошибки при сжатии информации соответственно в два, четыре и восемь раз принимают вид:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} C_k^2 - 2X_{2k-N} \cdot X_{2k-(N+1)}, \text{ где } k = N, N-1, \dots, \frac{N}{2} + 1. \quad (15)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2k-1} + 2A_i, \text{ где } k = \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{4} + 1. \quad (16)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2k-1} + 6A_i, \text{ где } k = \frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{4} - 1, \text{ а } i = 1, 2, \dots, \frac{N}{4}. \quad (17)$$

Общий объем вычислений по выражениям (15-17) составит:

$$M_6^* = \sum_{K=2}^N \frac{N}{K} (\log_2 N + K), \text{ где } K = 2, 4, 8, \dots, N. \quad (18)$$

Кривая 4 на рис. 1. соответствует полученному выражению (18) и построена в относительных единицах по отношению к методу с использованием не быстрых алгоритмов. Как видно из графиков, эффективность  $\sigma$  предложенного метода (формула 18) с увеличением коэффициента сжатия уменьшается, оставаясь однако, всегда лучше (как минимум в 2 раза) известных и рассмотренных выше способов (кривые 1, 2 и 3).

Таким образом, предложенный быстрый метод оценки сходимости коэффициентов Хаара в задачах сжатия данных позволяет существенно

сократить число необходимых вычислительных операций для нахождения ошибки при условном отбрасывании коэффициентов ряда, минуя этапы анализа и синтеза в этом базисе. Высвободившееся процессорное время устройств сжатия данных можно использовать для решения других задач информационного содержания, что в целом будет способствовать повышению эффективности работы систем цифровой обработки сигналов и позволит им приблизиться к режиму реального времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
2. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М.: Сов. радио, 1972. – 352 с.
3. Соболев Ю.В., Поляков П.Ф., Иванов В.Г. Метод оценки сходимости коэффициентов Хаара в задачах сжатия сообщений. // Изв. вузов СССР. "Радиоэлектроника", 1984. Т. XXVII, № 6056, с. 103-104.
4. Соболев Ю.В., Поляков П.Ф., Иванов В.Г. Эффективность анализа и синтеза в дискретном базисе Хаара. // Изв. вузов СССР. "Радиоэлектроника", 1983. Т. XXVI, № 6059, с. 54-56.

## Анализ математической модели сети с вырождением

П. С. Кабелянц

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

In the paper there is considered a transmission problem for a flow in engineering networks. Existence conditions for transfer maps are formulated in network the cases of linear and non-linear dependence between variables. The general solvability problem of a degenerate system is considered too.

### 1. Введение.

Задача передачи сигналов и построения передаточного отображения для электрических цепей изучалась в [1], но только в случае линейной зависимости между переменными цепи. В классических работах [2], [3] по сетевому анализу рассматривались преимущественно линейные системы. Задача анализа нелинейных сетей актуальна и возникает при математическом моделировании систем газодинамики, гидродинамики и др. [4], [5], [6]. Сложность современных инженерных сетей, осуществляющих транспорт газа и жидкости от источников к потребителям, требует применения общих методов теории графов и нелинейного анализа.

В данной работе рассматривается модель передачи потока (жидкости, газа) от  $p$  источников к  $p$  потребителям в инженерной сети с произвольным числом внутренних ветвей.

Цель работы – сформулировать условия на параметры внутренних трубопроводов и геометрию сети, при которых любое значение входных данных источника позволяет однозначно найти давления и потоки на внутренних участках и на выходе к потребителю.

### 2. Пример передающей сети с одним источником и потребителем.

Описание математической модели и решение поставленной задачи мы осуществим предварительно на примере инженерной сети, изображенной на рис. 1. Хотя для самого примера шаги преобразований достаточно элементарны, их представления используются при анализе произвольной сети в п. 3.

Кривая 4 на рис. 1. соответствует полученному выражению (18) и построена в относительных единицах по отношению к метрике с использованием быстрых алгоритмов. Как видно из графиков, эффективность с предложенным методом (формула 18) с увеличением коэффициента сжатия уменьшается, но остается однако, всегда лучше (как минимум в 2 раза) известным и рассмотренным выше способом (кривые 1, 2 и 3).

Таким образом, предложенный быстрый метод оценки сходимости коэффициентов Хаара в задачах сжатия данных позволяет существенно

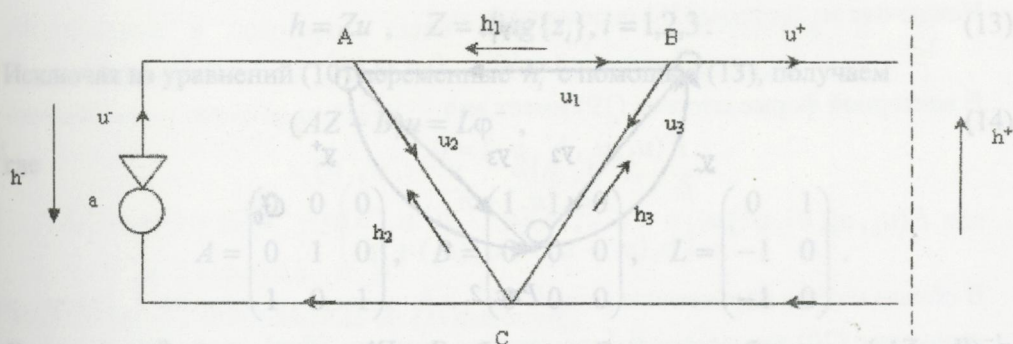


Рис. 1.

На входе сети активный элемент *a* (насосная станция, вентилятор и т.п.) создает разность давлений  $h^-$  и поток  $u^-$ . На выходе сети “потребитель” получает поток  $u^+$  при разности давлений  $h^+$ . Внутренними (пассивными) элементами сети являются участки трубопровода AB, AC, BC. Каждому из этих участков трубопровода соответствуют две неизвестные величины:  $h_j$  – разность давлений на этом участке и  $u_j$  – величина потока на этом участке. Введем векторы

$$\varphi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Все давления и потоки связаны линейными законами сохранения. Давления  $h_j$  и потоки  $u_j$  на трех внутренних участках трубопровода связаны линейными или нелинейными зависимостями

$$h = Z(u), \tag{1}$$

математическая форма и параметры которых уточняются ниже. Наша цель – сформулировать условия на параметры внутренних трубопроводов, при которых любое значение входных данных источника – вектора  $\varphi^-$  – позволяет однозначно найти компоненты векторов  $\varphi^-, \varphi^+$ , то есть давления и потоки на внутренних участках и на выходе к потребителю. Иначе говоря, ищутся условия существования однозначных отображений  $R$  и  $W$  таких, что

$$u = R(\varphi^-), \tag{2}$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-). \tag{3}$$

Заметим, что ниже в п.3 топология произвольной сети будет учитываться с помощью матриц циклов и сечений, соответствующего ориентированного графа  $G_0$ , который для примера сети рис.1 изображен на рис.2. Мы используем пример графа  $G_0$  рис.2 для иллюстрации топологических ограничений в п.3.

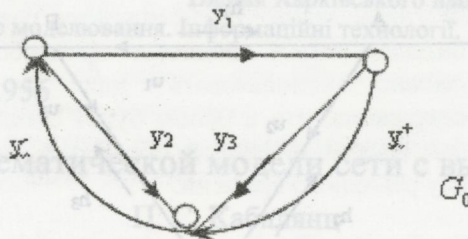


Рис. 2.

Запишем уравнения сохранения потока в узлах графа

$$u^+ - u_1 + u_3 = 0, \quad (4)$$

$$u_1 + u_2 - u^- = 0, \quad (5)$$

и уравнения баланса для разности давлений по замкнутым контурам (ячейкам)

$$h^+ - h_3 = 0, \quad (6)$$

$$h_2 + h^- = 0, \quad (7)$$

$$h_1 - h_2 + h_3 = 0. \quad (8)$$

Преобразуем систему уравнений Кирхгофа (4)–(8) к форме, которая далее будет использоваться для общей передающей сети с произвольным числом источников, потребителей и внутренних трубопроводов. Именно, уравнения (5) и (7) оставим без изменений; к уравнению (4) прибавим уравнение (5); к уравнению (6) прибавим уравнения (7) и (8); к уравнению (8) – уравнение (7):

$$u^+ + u_2 + u_3 - u^- = 0, \quad h^+ + h_1 + h^- = 0, \quad (9)$$

$$u_1 + u_2 - u^- = 0, \quad h_2 + h^- = 0, \quad h_1 + h_3 + h^- = 0. \quad (10)$$

Из (9) можно выразить выходной вектор  $\varphi^+$  через входной вектор  $\varphi^-$  и вектор  $u$ , исключая вектор  $h$  с помощью (1):

$$\varphi^+ = K\varphi^- - Nu - MZ(u). \quad (11)$$

Здесь  $K, M, N$  есть матрицы

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Благодаря (11) задача построения передаточного отображения  $W$  (3) сводится к нахождению отображения  $R$  (2), с помощью которого по заданному входному вектору  $\varphi^-$  определяется внутреннее состояние системы  $u$ . Если отображение  $R$  найдено, то передающее отображение выражается через него формулой

$$W(\varphi^-) = K\varphi^- - MZ(R(\varphi^-)) - NR(\varphi^-). \quad (12)$$

### 2.1. Линейный случай.

Предположим, что в (1) вектор  $h$  выражается через вектор  $u$  линейно с помощью диагональной матрицы импедансов  $Z$ :

$$h = Zu, \quad Z = \text{diag}\{z_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (10) переменные  $h_i$  с помощью (13), получаем

$$(AZ + B)u = L\varphi^-, \quad (14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если  $z_2 z_3 \neq 0$ , то матрица  $AZ + B$  обратима. Вычислив обратную  $(AZ + B)^{-1}$ , получаем из (14) отображение  $R$ , а затем из (12) – отображение  $W$ :

$$u = (AZ + B)^{-1} L\varphi^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & 1 \\ -\frac{1}{z_2} & -\frac{z_1}{z_3} \\ -\frac{z_1 + z_2}{z_2 z_3} & 0 \end{pmatrix} \varphi^- = R\varphi^-,$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = (K\varphi^- - (MZ + N)R)\varphi^- = \begin{pmatrix} -1 - \frac{z_1}{z_2} & -z_1 \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_2 z_3} & 1 + \frac{z_1}{z_2} \end{pmatrix} \varphi^-. \quad (15)$$

Итак, если векторы  $h$  и  $u$  связаны системой линейных уравнений (13) и  $z_2 z_3 \neq 0$ , то существует матричное передаточное отображение  $W$  вида (15).

## 2.2. Нелинейный случай.

Предположим теперь, что в (1) компоненты вектора  $h$  зависят от одноименных компонент вектора  $u$  нелинейно:

$$h_i = \varphi_i(u_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Типичным примером нелинейной связи  $\varphi_i$  между давлением и потоком в газовом трубопроводе является квадратичная зависимость  $h_i = r_i u_i^2$  [2], хотя исследуются и другие зависимости. Комбинируя уравнения (10) и (16), получаем  $u_1 + u_2 = u^-$ ,  $0 = \varphi_2(u_2) + h^-$ ,  $0 = \varphi_1(u_1) + \varphi_3(u_3) + h^-$ .

Запишем эту систему уравнений в векторном виде

$$Du = f(t, u), \quad (17)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} u^- \\ \varphi_2(u_2) + h^- \\ \varphi_1(u_1) + \varphi_3(u_3) + h^- \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Исключим из системы (18) переменную  $u_1$ :

$$0 = \varphi_2(u_2) + h^-, \quad 0 = \varphi_1(u^- - u_2) + \varphi_3(u_3) + h^-. \quad (19)$$

В векторной форме система (19) имеет вид

$$F(u_2, u_3, h^-, u^-) = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } F(u_2, u_3, h^-, u^-) = \begin{pmatrix} \varphi_2(u_2) + h^- \\ \varphi_1(u^- - u_2) + \varphi_3(u_3) + h^- \end{pmatrix}.$$

В общем случае переменные сети  $h^-, u^-, u_i, h_i$  зависят от времени  $t$ . Рассмотрим уравнение (20) на некотором промежутке времени  $[0, \tau]$ , и введем обозначения для переменных в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad u^-(0) = u_0^-, \quad h^-(0) = h_0^-.$$

Обозначим через  $B(\bar{x}, r)$  шар в пространстве  $R^i$ :

$$B(\bar{x}, r) = \{x \in R^i : \|x - \bar{x}\|_{R^i} \leq r\}.$$

Для разрешимости уравнения (20) относительно  $u_2, u_3$  и, следовательно, для существования передаточного отображения  $W$ , достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия.

1. Функции  $\varphi_i$  (16) непрерывно дифференцируемы по переменным  $g_i$  в шаре

$$B(u_0, r) \text{ пространства } R^3, \quad u_0 = u(0) = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^T.$$

В начальный момент выполнены равенства

$$2. \quad \varphi_2(u_{20}) = -h_0^-, \quad \varphi_1(u_0^- - u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = -h_0^-.$$

$$3. \quad \frac{d\varphi_2}{du_2}(u_{20}) \frac{d\varphi_3}{du_3}(u_{30}) \neq 0.$$

Условия 2 и 3 позволяют применить теорему о неявной функции [7]. Действительно, условие 2 означает, что при  $t = 0$  уравнение (20) удовлетворяется:

$$F(u_{20}, u_{30}, h_0^-, u_0^-) = 0.$$

Условие 3 означает, что якобиан функции  $F$  по переменным  $u_2, u_3$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_2}{du_2} & 0 \\ -\frac{d\varphi_1}{du_1} & \frac{d\varphi_3}{du_3} \end{pmatrix} = \frac{d\varphi_2}{du_2} \frac{d\varphi_3}{du_3} \text{ при } t = 0 \text{ отличен от нуля. Применяя теорему о}$$

неявной функции к уравнению (20), находим функции

$$u_2 = \alpha(h^-, u^-), \quad u_3 = \beta(h^-, u^-),$$

непрерывные в некотором шаре  $B(\varphi^-(0), r_1)$  пространства  $R^2$  и удовлетворяющие в нем уравнению (20). В том же шаре с помощью (17) находим  $u_1$ , и затем  $h_1$  из (16):

$$u_1(h^-, u^-) = u^- - \alpha(h^-, u^-),$$

$$h_1(h^-, u^-) = \varphi_1(u^- - \alpha(h^-, u^-)), \quad h_2(h^-, u^-) = \varphi_2(\alpha(h^-, u^-)),$$

$$h_3(h^-, u^-) = \varphi_3(\beta(h^-, u^-))$$

Таким образом, отображение  $R$  (2) имеет вид:

$$u = R(\varphi^-) = \begin{pmatrix} u^- - \alpha(h^-, u^-) \\ \alpha(h^-, u^-) \\ \beta(h^-, u^-) \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить передаточное отображение  $W$  (3) по формуле (12):

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = \begin{pmatrix} -h^- - \varphi_1(u^- - \alpha(h^-, u^-)) \\ u^- - \alpha(h^-, u^-) - \beta(h^-, u^-) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Значения выходных переменных  $\varphi^+$  сети рис. 1 в момент времени  $t$  определяется некоторой точкой из допустимого многообразия  $\Xi_t = \{u(t), \varphi^-(t)\}$  в пятимерном пространстве  $R^5$ . При  $t=0$  для начальных данных  $u_0 = u(0)$ ,  $\varphi_0^- = \varphi^-(0)$  допустимое многообразие

$$\Xi_0 = \{(u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_0^-, h_0^-) \in R^5 : \varphi_1(u_0^- - u_{20}) - \varphi_2(u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = 0,$$

$$h_0^- = \varphi_2(u_{20}), \quad u_{10} = u_0^- - u_{20}\}$$

двумерно и определяется поверхностью

$$\Gamma = \{(u_{20}, u_{30}, u_0^-) \in R^3 : \varphi_1(u_0^- - u_{20}) - \varphi_2(u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = 0\}.$$

Итак, если вектор  $(u_{20}, u_{30}, u_0^-)$  принадлежит многообразию  $\Gamma$ , функции  $\varphi_i$  и векторы  $u_{20}, u_{30}$  удовлетворяют условиям 1-3, то существует передаточное отображение  $W$ , имеющее вид (21) и определяющее выходные параметры  $\varphi^+$  по заданным входным параметрам  $\varphi^-$  таким, что  $u^-(0) = u_0^-$ ,  $h^-(0) = h_0^-$ .

### 3. Передающая сеть с $p$ источниками и $p$ потребителями.

Рассмотрим математическую модель передающей инженерной сети рис. 3, которая имеет  $p$  источников,  $p$  потребителей и произвольное число промежуточных (внутренних) ветвей

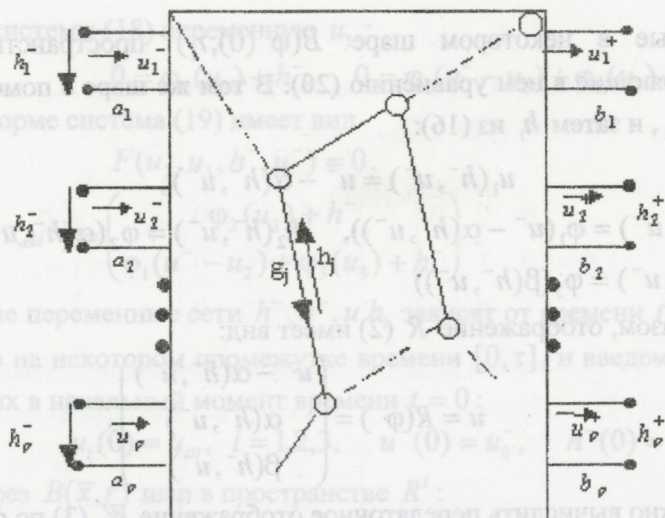


Рис. 3.

На входе сети активные элементы  $a_i$  (насосные станции, вентиляторы и т.п.) создают разности давлений  $h_i^-$  и потоки  $u_i^-$ . На выходе сети "потребители"  $b_i$  получают потоки  $u_i^+$  при разностях давлений  $h_i^+$ . Внутренними (пассивными) элементами сети являются  $m$  участков трубопровода. Каждому из этих участков трубопровода соответствуют две неизвестные величины:  $h_i$  — разность давлений на этом участке и  $u_i$  — величина потока на этом участке [5]. Введем векторы

$$h^- = (h_1^-, \dots, h_p^-)^r, u^- = (u_1^-, \dots, u_p^-)^r, \Phi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix},$$

$$h^+ = (h_1^+, \dots, h_p^+)^r, u^+ = (u_1^+, \dots, u_p^+)^r, \Phi^+ = \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix},$$

$$h = (h_1, \dots, h_m)^r, u = (u_1, \dots, u_m)^r.$$

Как и в разделе 1 будем искать условия существования однозначных отображений  $R$  (2) и  $W$  (3). Для записи уравнений Кирхгофа интерпретируем сеть как ориентированный граф  $G$ , содержащий  $n$  вершин и  $k$  дуг. Обозначим через  $Y^-, Y^+, Y_0$  подмножества дуг, соответствующие входным активным элементам, потребителям на выходе и внутренним элементам соответственно.

Введем векторы разности давлений и потоки всех ветвей

$$\bar{h} = (h_1^+ \dots h_p^+ h_1^- \dots h_p^-)^r, \bar{u} = (u_1^+ \dots u_p^+ u_1^- \dots u_p^-)^r.$$

Уравнения Кирхгофа в векторной форме можно записать как

$$S\bar{u} = 0, \quad Q\bar{h} = 0, \quad (22)$$

где  $S, Q$  – матрицы сечений и циклов графа  $G$ . В работе [1] для записи уравнений передающей электрической цепи вводилась симметричная пара каркасов. Там показано, что наличие симметричной пары каркасов является необходимым и достаточным для существования обратимого передаточного матрицы  $W$  линейной электрической цепи.

По определению модельный граф  $G$  передающей сети обладает симметричной парой каркасов, если множество  $Y_0$  внутренних ветвей содержит такое подмножество внутренних ветвей  $Y_T (\subset Y_0)$ , что  $Y^- \cup Y_T$  есть множество всех дуг некоторого каркаса (остова)  $T_-$  графа  $G$  и одновременно  $Y^+ \cup Y_T$  есть также множество всех дуг некоторого каркаса  $T_+$  графа  $G$ . Каркас  $T_-$  называется *входным*,  $T_+$  – *выходным*, а сама пара  $T_-, T_+$  – называется *симметричной парой каркасов* [1].

Будем предполагать, что в модельном графе  $G$ , отвечающем инженерной сети рис. 3., существует симметричная пара каркасов  $T_-, T_+$ . Вводя множество  $Y_C = Y_0 \setminus Y_T$  внутренних дуг кокаркасов, получаем следующее разбиение множества всех дуг

$$Y = Y^+ \cup Y_T \cup Y_C \cup Y^- \quad (23)$$

В уравнениях Кирхгофа (22) положим  $S = S_+, Q = Q_-$ , где  $S_+$  – фундаментальная матрица сечений графа  $W$  по каркасу  $T_+$ ,  $Q_-$  – фундаментальная матрица циклов графа  $G$  по каркасу  $T_-$  [1], [8].

Соответственно разбиению множества дуг (23) векторы  $\bar{h}$  и  $\bar{u}$  разбиваются на блоки

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} h^+ \\ h_T \\ h_C \\ h^- \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} h^+ \\ h_T \\ h_C \\ h^- \end{pmatrix} \quad (24)$$

Фундаментальные матрицы имеют следующую блочную структуру:

$$\begin{matrix} Y^+ & Y_0^T & Y_0^C & Y^- \\ S_+ = & Y^+ \begin{pmatrix} E_p & 0 & S_1 & S_3 \\ Y_0^T & 0 & E_{n-p-1} & S_2 & S_4 \end{pmatrix}, \\ Q_- = & Y_0^C \begin{pmatrix} 0 & Q_1 & E_{m-n+p+1} & Q_3 \\ Y^+ & E_p & Q_2 & 0 & Q_4 \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad (24)$$

где размерности матричных блоков таковы:  $\bar{\phi}\bar{\phi} - h = Zu$ ,  $D - (n-p-1) \times (m-n+p+1)$ ,  $S_3 - p \times p$ ,  $S_4 - (n-p-1) \times p$ ,  $Q_1 - (m-n+p+1) \times (n-p-1)$ ,  $Q_2 - p \times (n-p-1)$ ,  $Q_3 - (m-n+p+1) \times p$ ,  $Q_4 -$

$p \times p$ . Наконец,  $E_j$  – единичная матрица, размерности  $j$ . Запишем уравнения Кирхгофа (22) с фундаментальными матрицами  $S_+$ ,  $Q_-$  (24):

$$u^+ + S_1 u_C + S_3 u^- = 0, \quad h^+ + Q_2 h_T + Q_4 h^- = 0, \quad (25)$$

$$u_T + S_2 u_C + S_4 u^- = 0, \quad Q_1 h_T + h_C + Q_3 h^- = 0. \quad (26)$$

Из (25) можно выразить выходной вектор  $\varphi^+$  через входной вектор  $\varphi^-$  и вектор  $u$  с помощью (11) со следующими матрицами  $K, M$  и  $N$

$$K = \begin{pmatrix} -Q_4 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}.$$

С учетом (11) задача построения передаточного отображения  $W$  (12) как и в разделе 2 сводится к нахождению отображения  $R$ .

### 3.1. Линейный случай.

Предположим, что зависимость вектора  $h$  от вектора  $u$  является линейной и описывается с помощью диагональной матрицей  $Z$  размерности  $m \times m$ :

$$h = Zu; \quad Z = \text{diag}\{z_T, z_C\}. \quad (27)$$

Выделение диагональных подматриц  $z_T, z_C$  соответствует разбиению векторов  $u$  и  $h$  по внутренним ветвям  $Y_T, Y_C$  (см. (23)):

$$u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_T \\ h_C \end{pmatrix}$$

Комбинируя уравнения (26) и (27), получаем равенство вида (14), с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_1 & E_{m-n-p+1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & S_4 \\ -Q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если  $\det H \neq 0$ ,  $H = (z_C - Q_1 z_T S_2)$ , то матрица  $(AZ + B) = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ Q_1 z_T & z_C \end{pmatrix}$

обратима и можно построить отображение  $R$ , а, значит, и передаточное отображение  $W$  (12):

$$u = R\varphi^- = (AZ + B)^{-1} L\varphi^- = \begin{pmatrix} S_2 H^{-1} Q_3 & S_4 + S_2 H^{-1} Q_1 z_T S_4 \\ -H^{-1} Q_3 & -H^{-1} Q_1 z_T S_4 \end{pmatrix} \varphi^-,$$

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= W(\varphi^-) = (K\varphi^- - (MZ + N)R)\varphi^- = \\ &= \begin{pmatrix} -Q_4 + Q_2 z_T S_2 H^{-1} Q_3 & -Q_4 + Q_2 z_T (S_4 + S_2 H^{-1} Q_1 z_T S_4) \\ S_3 - S_1 H^{-1} Q_3 & S_3 - S_1 H^{-1} Q_1 z_T S_4 \end{pmatrix} \varphi^-. \end{aligned} \quad (28)$$

Итак, если векторы  $h$  и  $u$  связаны системой линейных уравнений (27) и

$$\det(z_C - Q_1 z_T S_2) \neq 0, \quad (29)$$

то существует передаточное отображение  $W$  вида (28), определяющее выходной вектор  $\varphi^+$  по произвольно заданному вектору  $\varphi^-$ .

В примере сети рис.1 для графа  $G_0$  рис.2 имеем  $p=1, n=3, m=3$ . Граф  $G_0$  обладает симметричной парой каркасов  $T_{\pm}$ . Входной  $T_-$  состоит из дуг  $\{y^-, y_1\}$ , выходной  $T_+$  состоит из дуг  $\{y^+, y_1\}$ . Построим фундаментальную матрицу сечений по каркасу  $T_+$  и фундаментальную матрицу циклов по каркасу  $T_-$ :

$$S_+ = \begin{matrix} & y^+ & y_1 & y_2 & y_3 & y^- \\ y^+ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ y_1 & \\ y_2 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ y_3 & \\ y^+ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ясно, что блоки  $S_i, Q_j$  (24) здесь таковы:

$$S_1 = (11), S_2 = (10), S_3 = S_4 = -1, Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = Q_4 = 1.$$

Уравнения (26)–(27) превращаются в уравнения (9)–(10), условие  $\det H \neq 0$  – в условие  $z_2 z_3 \neq 0$ , а передаточное отображение  $W$  (28) – в (15).

### 3.2. Нелинейный случай.

Предположим, что вектор  $h$  зависит от вектора  $u$  нелинейно:

$$h_i = \varphi_i(t, u_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Запишем импедансную зависимость (30) в векторном виде:

$$h_T = \varphi_T(t, u_T), \quad h_C = \varphi_C(t, u_C). \quad (31)$$

Комбинируя уравнения из (26) и (31), получаем

$$u_T + S_2 u_C = -S_4 u^-, \quad (32)$$

$$0 = Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(t, u_T) - \varphi_C(t, u_C). \quad (33)$$

В векторной форме система уравнений (32)–(33) имеет вид  $Du = f(t, u)$  (17) с матрицей  $D$  и отображением  $f$  вида:

$$D = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(t, u_T) - \varphi_C(t, u_C) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Рассмотрим полученное уравнение  $Du = f(t, u)$  на некотором промежутке времени  $[0, \tau]$ , и введем обозначения для переменных в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$u(0) = u_0, \quad u_T(0) = u_{T0}, \quad u_C(0) = u_{C0}, \quad u^-(0) = u_0^-, \quad h^-(0) = h_0^-. \quad (35)$$

**Теорема 1.** Пусть модельный граф  $G$ , отвечающий инженерной сети рис.3, обладает симметричной парой каркасов, импедансная зависимость между параметрами внутренних ветвей сети описывается нелинейными соотношениями (30) и выполнены следующие условия.

1. Импедансные функции  $\varphi_i$  (30) непрерывно дифференцируемы по переменным  $u_i$  в шаре  $B(u_0, r)$  пространства  $R^m$ ;

В начальный момент выполнены равенства

2.  $Q_1\varphi_T(-S_4u_0^- - S_2u_{C0}) + \varphi_C(u_{C0}) = Q_3h_0^-$ ;

3.  $\det\left(Q_1 \frac{\partial\varphi_T}{\partial u_T}(0, u_{T0})S_2 - \frac{\partial\varphi_C}{\partial u_C}(0, u_{C0})\right) \neq 0$ , где  $Q_1, Q_3, S_2, S_4$  – блоки топологических матриц циклов и сечений (24).

Тогда в сети существует передаточное отображение  $W: \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}$ , определенное в некоторой окрестности начального значения входного вектора  $\begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}_{t=0}$ .

**Доказательство.** Выражаем из уравнения (32) переменную  $u_T$ ,  $u^+ + u_2 + u_3 - u^- = 0$ , и подставляем в уравнение (33):

$$F(t, u_C, h^-, u^-) = 0. \quad (36)$$

Здесь  $F(t, u_C, h^-, u^-) = Q_3h^- - Q_1\varphi_T(t, -S_4u^- - S_2u_C) - \varphi_C(t, u_C)$ .

Условия 2 и 3 позволяют применить теорему о неявной функции [7]. Действительно, условие 2 означает, что при  $t=0$  уравнение (36) удовлетворяется:  $F(0, u_{C0}, h_0^-, u_0^-) = 0$ .

Условие 3 означает, что якобиан  $\frac{\partial F}{\partial u_C}$  при  $t=0$  отличен от нуля. Применяя

теорему о неявной функции к уравнению (36), находим функцию  $u_C = \alpha(t, h^-, u^-)$ , удовлетворяющую уравнению (36). Она определена и

непрерывна в некоторой области  $[0, \tau_0] \times B(\varphi^-(0), r_1)$ . Подставляем функцию  $\alpha(t, h^-, u^-)$  в уравнение (32) и находим  $u_T$ :  $u_T = -S_4u^- - S_2\alpha(t, h^-, u^-)$ .

Теперь можно получить отображение  $R$  и передаточное отображение  $W$ :

$$u = R\varphi^- = \begin{pmatrix} -S_4u^- - S_2\alpha(t, h^-, u^-) \\ \alpha(t, h^-, u^-) \end{pmatrix}.$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = \begin{pmatrix} -Q_4 + Q_2 \Phi_T(t, -S_4 u^- - S_2 \alpha(t, h^-, u^-)) \\ S_3 + S_1 \alpha(t, h^-, u^-) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Значение выходного вектора  $\varphi^+$  в момент времени  $t$  определяется некоторой точкой из допустимого многообразия  $\Xi_t = \{u(t), \varphi^-(t)\}$  в пространстве  $R^{m+p}$ .

При  $t = 0$  для начальных данных (35) допустимое многообразие имеет вид  $\Xi_0 = \{(u_{T0}, u_{C0}, u_0^-, h_0^-) \in R^{m+p} : Q_1 \Phi_T(0, -S_4 u_0^- - S_2 u_{C0}) + \Phi_C(0, u_{C0}) = Q_3 h_0^-, u_{T0} = -S_4 u_0^- - S_2 u_{C0}\}$ .

Итак, если вектор  $(u_{C0}, u_0^-, h_0^-)$  принадлежит многообразию  $\Gamma = \{(u_{C0}, u_0^-, h_0^-) \in R^{m-n+3p+1} : Q_1 \Phi_T(0, -S_4 u_0^- - S_2 u_{C0}) + \Phi_C(0, u_{C0}) = Q_3 h_0^-\}$ ,

функции  $\Phi_T, \Phi_C$  и вектор  $u_{C0}$  удовлетворяют условиям 1-3, то существует передаточное отображение  $W$ , имеющее вид (37) и определяющее выходной

вектор  $\varphi^+$  по заданному входному вектору  $\varphi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}$  такому, что

$u^-(0) = u_0^-, h^-(0) = h_0^-$ . Функция  $\varphi^+$  непрерывна в области  $[0, \tau_0] \times B(\varphi^-(0), r_1)$ . Теорема доказана.

Для сети из раздела 1 передаточное отображение  $W$  (37) имеет вид (21).

### 3.3 Случай дифференциальной импедансной зависимости.

Предположим, что в правой части импедансных уравнений (30) можно выделить линейную дифференциальную часть

$$h_T = v_T u_T' + \psi_T(u_T), \quad h_C = v_C u_C' + \psi_C(u_C), \quad (38)$$

где  $v_T, v_C$  – диагональные матрицы.

Тогда векторное уравнение (32) сохраняется, а уравнение (33) заменяется следующим

$$Q_1 v_T u_T' + v_C u_C' = Q_3 h^- - Q_1 \psi_T(u_T) - \psi_C(u_C). \quad (39)$$

Совокупность уравнений (32), (39) записывается в виде векторного дифференциального уравнения

$$Du' = f(t, u), \quad (40)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ Q_1 v_T & v_C \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ Q_3 h^- - Q_1 \psi_T(u_T) - \psi_C(u_C) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Квадратная матрица  $D$  может быть необратимой, и тогда (40) мы называем вырожденным дифференциальным уравнением (по другой терминологии – система дифференциально–алгебраических уравнений – DAEs).

Достаточные условия разрешимости уравнения (40) получены в [10] (теорема 1). Применительно к конкретному виду (41) матрицы  $D$  и функции

$f(t, u)$  указанные условия разрешимости из [10] можно уточнить следующим образом.

**Утверждение 1.** Пусть модельный граф  $G$ , отвечающий инженерной сети рис. 3, обладает симметричной парой каркасов, импедансная зависимость между параметрами внутренних ветвей сети описывается уравнениями (38), функция  $\Psi_T$  удовлетворяет условию Литвица по  $u_T$ , функция  $\Psi_C$  удовлетворяет условию Литвица по  $u_C$ . Если  $\det v_C \neq 0$ , то в сети существует

передаточное отображение  $W: \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}$ , определенное в некоторой окрестности начального значения входного вектора  $\begin{pmatrix} h^- \\ g^- \end{pmatrix}_{t=0}$ .

#### 4. Условия разрешимости вырожденной системы полулинейных уравнений.

Рассмотрим уравнение вида (17) на отрезке  $[0, \tau]$  в общем случае

$$Du(t) = f(t, u), \quad (42)$$

не предполагая, что матрица  $D$  и отображение  $f$  имеют специальный вид (18) или (34). Здесь матрица  $D$  – квадратная вырожденная матрица размерности  $m \times m$ . Значения вектор-функций  $u(t)$  и  $f(t, u)$  лежат в пространстве  $R^m$ .

Рассмотрим линейный оператор  $D: R^m \rightarrow R^m$ , отвечающий матрице  $D$  в координатном базисе  $e_1 = (100\dots 0)^T, \dots, e_m = (00\dots 01)^T$  пространства  $R^m$ , а также сопряженный линейный оператор  $D^*: R^m \rightarrow R^m$ , отвечающий матрице  $D^{Tr}$ .

Пространство  $W$  допускает следующие разложения в ортогональные суммы подпространств:

$$R^m = \text{Im } D^* \oplus \text{Ker } D = \text{Im } D \oplus \text{Ker } D^*, \quad (43)$$

где  $\text{Im } D = \{Dx, x \in R^m\}$ ,  $\text{Im } D^* = \{D^*y, y \in R^m\}$  – образы операторов  $D$  и  $D^*$ , а  $\text{Ker } D$  и  $\text{Ker } D^*$  – ядра операторов  $D$  и  $D^*$ .

Оператор  $D$  имеет следующую блочную структуру относительно разложений (43):

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}: \text{Im } D^* \oplus \text{Ker } D \rightarrow \text{Im } D \oplus \text{Ker } D^*,$$

где  $D_1: \text{Im } D^* \rightarrow \text{Im } D$  есть обратимый оператор.

Введем в  $R^m$  ортопроекторы  $N_1, N_2$  на подпространства  $\text{Ker } D$ ,  $\text{Im } D^*$  и ортопроекторы  $M_1, M_2$  на подпространства  $\text{Ker } D^*$ ,  $\text{Im } D$ :

$$\begin{aligned}
 N_1 : R^m &\rightarrow \text{Im } D^*, & N_2 : R^m &\rightarrow \text{Ker } D, \\
 M_1 : R^m &\rightarrow \text{Im } D, & M_2 : R^m &\rightarrow \text{Ker } D^*, \\
 N_1 + N_2 &= E_m, & N_1^2 &= N_1, & M_1 + M_2 &= E_m, & M_1^2 &= M_1.
 \end{aligned}$$

Проекционным операторам  $N_1, N_2$  и  $M_1, M_2$  в координатном базисе пространства  $R^m$  отвечают матрицы  $N_1, N_2$  и  $M_1, M_2$  размерности  $(m \times m)$ , для которых мы сохраняем обозначения порождающих операторов. Введем

матрицу Якоби  $\frac{\partial f}{\partial u}$  размерности  $m \times m$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $N_i u(t) = u^i(t)$ ,  $M_i f(t, u) = f^i(t, u^1, u^2)$ ,  $N_i u_0 = u_0^i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция  $f(t, u)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных для всех  $t \in [0, \tau]$  и всех  $u$  из некоторого шара  $B(u_0, r)$ ;
- 2) проекция  $f^1$  функции  $f(t, u_1, u_2)$  на подпространство  $\text{Im } D$  не зависит от проекции решения  $u$  на подпространство  $\text{Im } D^*$ :  $f^1(t, u^1, u^2) = \psi(t, u^2)$ ;
- 3) начальное значение правой части содержится в образе оператора  $D$ :  $f(0, u_0) \in \text{Im } D$ ;
- 4) В начальной точке  $(0, u_0)$  справедливо  $\det \left( \frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial f^2}{\partial u^1} D_1^{-1} \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \right) \neq 0$ .

Тогда при всех  $t$  из некоторого нетривиального интервала  $0 \leq t \leq \tau_0$  существует единственное решение  $u(t) = (u_1, \dots, u_m)(t)$  уравнения (42) со значениями в шаре  $B(u_0, r_0)$ .

**Доказательство.** Уравнение (42) можно представить в виде

$$D_1 u^1(t) = f^1(t, u^2), \tag{44}$$

$$0 = f^2(t, u^1, u^2). \tag{45}$$

Выражаем из уравнения (44) переменную  $u^1$

$$u^1(t) = D_1^{-1} f^1(t, u^2) \tag{46}$$

и подставляем в уравнение (45)

$$F(t, u^2) = 0. \quad (47)$$

Здесь  $F(t, u^2) = f^2(t, D_1^{-1} f^1(t, u^2), u^2)$ .

Условия 3–5 позволяют применить теорему о неявной функции [7] к уравнению (47). Действительно, условия 2 и 3 означают, что при  $t = 0$  уравнение (47) удовлетворяется

$$f^2(0, D_1^{-1} f^1(0, u_0^2), u_0^2) = 0.$$

Условие 5 означает, что якобиан  $\frac{\partial F}{\partial u^2}$  при  $t = 0$  отличен от нуля. Применяя теорему о неявной функции к уравнению (47), находим функцию

$$u^2(t) = \alpha(t), \quad (48)$$

удовлетворяющую уравнению (47). Она определена и непрерывна на некотором интервале  $[0, \tau_0]$ . Подставляем функцию  $\alpha(t)$  в уравнение (46) и находим  $u^1$ :

$$u^1(t) = D_1^{-1} f^1(t, \alpha(t)). \quad (49)$$

Тогда, функция  $u(t) = u^1(t) + u^2(t)$  является решением уравнения (42) на нетривиальном интервале  $[0, \tau_0]$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Для модели передающей сети (рис.3) из раздела 2 условия теоремы 2 совпадают с условиями теоремы 1.

Действительно, вычислим проекторы, соответствующие разложению (43)

$$N_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -S_2 \\ 0 & E_{m-n+1} \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-n+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} u_T + S_2 u_C \\ 0 \end{pmatrix}, u_2(t) = \begin{pmatrix} -S_2 u_C \\ u_C \end{pmatrix},$$

$$f_1(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_3 h^- - Q_1 \Phi_T(u_T) - \Phi_C(u_C) \end{pmatrix}.$$

Условия 1 и 2 теоремы 1 совпадают с условиями 1 и 2 теоремы 2. Ясно, что функция  $f_1(t, u^1, u^2)$  не зависит от переменной  $u^1$ . Следовательно, условие 3 теоремы 2 выполнено. Проверим условие 4:

$$\frac{\partial f^1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial u^2} = Q_1 \frac{\partial \Phi_T}{\partial u_T} S_2 - \frac{\partial \Phi_C}{\partial u_C}.$$

Следовательно, условие 4 теоремы 2 совпадает с условием 3 теоремы 1.

### 5. Численное решение начальной задачи для вырожденного дифференциального уравнения.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения вида (40) на отрезке  $[0, \tau]$  в общем случае

$$Du'(t) = f(t, u), \quad (50)$$

$$u = u_0. \quad (51)$$

Здесь матрица  $D$  – квадратная вырожденная матрица размерности  $m \times m$ .

Значения вектор-функций  $u(t)$ ,  $f(t, u)$  и вектор  $u_0$  лежат в пространстве  $R^m$ .

Будем предполагать, что условия утверждения 1 выполнены. Построим вычислительную схему приближенного решения задачи (50)–(51).

Уравнение (50) можно записать в виде

$$D_1 \frac{d}{dt} u^1(t) = f^1(t, u^1, u^2), \quad (52)$$

$$0 = f^2(t, u^1, u^2) \quad (53)$$

с соответствующими начальными условиями  $u^i(0) = N_i u_0 = u_0^i, i = 1, 2$ .

Здесь матрица  $D_1$  и вектор-функции  $u^1(t)$ ,  $f^1(t, u^1, u^2)$ ,  $u^2(t)$  соответствуют

блочному разложению (43). Аппроксимируем производную  $\frac{du^1(t)}{dt}$  в узлах

сетки  $\omega_\delta = \{t_i = i\delta, i = 0, \dots, N, N\delta = \tau\}$  соотношением

$$\frac{du^1}{dt}(t_i) \approx \frac{u^1(t_{i+1}) - u^1(t_i)}{h}, i = 0, \dots, N-1. \quad \text{Обозначим: } u^1(t_i) = u_i^1, u^2(t_i) = u_i^2.$$

Тогда в узлах сетки система уравнений (52)–(53) примет вид

$$\frac{u_i^1 - u_{i-1}^1}{h} = D_1^{-1} f^1((i-1)\delta, u_i^1, u_i^2), \quad (54)$$

$$f^2(i\delta, u_i^1, u_i^2) = 0, \quad (55)$$

$i = 1, \dots, N$ . Для нахождения  $u(t_i)$  из (54) находится  $u_i^1$  через известные  $u_{i-1}^1$  и  $u_{i-1}^2$ , а затем полученный результат подставляется в нелинейное уравнение (55), которое решается относительно  $u_i^2$ , например, методом Ньютона.

Программная реализация предложенного алгоритма осуществлена в среде Visual C++.

Заметим, что для численного решения задачи (50)–(51), можно было применить разностную схему непосредственно к уравнению (50) (смотри, например [11]–[12]). В предложенном методе разностная схема применяется к преобразованной системе (52)–(53), в которой часть уравнений является дифференциальными, часть – алгебраическими. Благодаря этому предложенный алгоритм быстрее сходится к решению исходной задачи.

## 6. Выводы

В работе предложена математическая модель передачи потока в инженерной сети с нелинейными зависимостями между переменными. В разделе 3 получены условия на параметры и топологию сети, при которых любой заданный входной поток при заданном входном давлении однозначно определяют поток и давление, получаемые потребителями. При этом используются как классические методы анализа сетей, которые берут начало от работ Г.Р. Кирхгофа, так и техника анализа многополюсных электрических цепей с помощью графов, развитая в работах А.Г. Руткаса.

В разделе 4 рассмотрена вырожденная система полулинейных уравнений, обобщающая модель передачи потока в инженерной сети из п.3.2. Получены условия локальной разрешимости этой системы. В разделе 5 описан алгоритм численного решения вырожденной системы дифференциальных полулинейных уравнений, обобщающей модель передачи потока из п.3.4.

Предложенная в работе модель может быть использована для управления системами водоснабжения, для обеспечения работы газопроводов, при проектировании шахтно-вентиляционных сетей. Результаты, полученные в статье, позволяют сформулировать условия на геометрию сети, при которых происходит корректная передача векторного потока воды, газа или воздуха от источников к потребителям.

Заметим, что в статье рассмотрена передача потока, усредненного по каждой ветви. Инженерные сети с потоками, зависящими не только от времени, но и от положения на ветви, анализировались в [4], [5], однако задача передачи векторного потока не исследовалась.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Руткас А.Г. Матрицы передачи и рассеяния многополюсника.// Математическое моделирование и теория электрических цепей. – вып. 16. – 1978. – С.3–15.
2. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 274с.
3. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки. – М.: Связь, 1978. – 448с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688с.
5. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. – М.: Стройиздат, 1990. – 366с.
6. Евдокимов А. Г., Петросов В. А. Информационно-аналитические системы управления инженерными сетями жизнеобеспечения населения. – Харьков, 1998. – 411 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.
8. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576с.
10. Кабелянц П.С. Анализ математической модели нелинейной цепи с вырождением.//Радиоэлектроника и информатика. – №3. – 2003.

11. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1989. – 223с.
12. Campbell S.L., Hollenbeck R., Yeomans K. and Zhong Y. Mixed symbolic-numerical computations with general DAEs.// Numerical Algorithms. – 1998. – P. 73–83, 85–94.

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} L(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi = f(x), \quad x \in L.$$