

Про оптимізаційний підхід в задачі вибору схеми хіміотерапії

В. П. Марценюк, Р. Б. Ладика, О. Я. Ковальчук

Тернопільська державна медична академія ім. І.Я.Горбачевського, Україна

В роботі представлено модель хіміотерапії в ході лікування онкологічних захворювань. Запропоновано методику перевірки оптимальності режимів лікування, яка може бути зведена до задачі існування розв'язків алгебраїчних нерівностей. Оптимальний процес системи збудовано в явному вигляді з використанням спеціальних функцій.

2000 Mathematics Subject Classification 93C10, 92C50.

Детерміновані математичні моделі привернули увагу дослідників, які аналізували режими хіміотерапії при лікуванні онкологічних захворювань. Одне з головних завдань було перевірити оптимальність існуючих методів приписування ліків і там, де відповідь негативна, запропонувати альтернативні методики. Ці моделі переважно включали одне або більше диференціальних рівнянь, що описували ріст пухлини та модель токсичної дії хіміопрепарату. Згідно цього метою є досягнення компромісу між руйнуванням клітин пухлини та токсичною дією на нормальні клітини. При розв'язуванні вищевказаної задачі робилося чимало підходів. Ріст пухлини описувався рівняннями різних типів (рівняння Гомперца, логістичне та лінійне диференціальне). В деяких випадках пухлина вважалася однорідною, тоді як в інших як така, що складається з кількох частин (наприклад, стійка до хіміопрепарату та навпаки - чутлива [1]). При плануванні оптимальної терапії аналізувалося чимало спеціальних феноменів. Серед них були - розвиток опірності злоякісних клітин хіміопрепарату [2], ефект блокування [4] (він означає, що хіміопрепарат не лише вбиває клітини пухлини, але й блокує їх розвиток у клітинному циклі). Показником токсичності в різних дослідженнях вважали: загальне число хіміопрепарату, введенного в ході лікування [4]; підтримання популяцій нормальних клітин вище заданих рівнів [1]-[4]. Існувала також розхожість в цілях лікування. В одних випадках метою було мінімізувати загальне число введенного хіміопрепарату при обмеженні, що наприкінці лікування розмір пухлини не перебільшить заданого рівня. В інших - мінімізувати розміри пухлини після фіксованого часу терапії при збереженні токсичності в заданих межах. Відомі також спроби мінімізувати токсичність та розміри пухлини

одночасно [5]. В даній роботі буде використано модель хіміотерапії, запропоновану в [7]. Її сенс - в одночасному впливі хіміопрепарату на злоякісні та нормальні клітини. Вплив запізнення в часі тут не розглядається, хоча він також може призвести до несподіваних ефектів.

Модель, що вивчатиметься, складається із системи диференціальних рівнянь. Одне з рівнянь описуватиме динаміку пухлини, тоді як інші характеризуватимуть динаміку кількох популяцій нормальних клітин. Враховується вплив пухлини на нормальні клітини. При цьому розміри популяцій нормальних клітин не можуть падати нижче певних заданих рівнів. Такі вимоги до методик лікування відповідають обмеженням на токсичність як хіміо- так і радіотерапій. Метою лікування є досягнення мінімального розміру пухлини, який визначається числом клітин пухлини. Робляться наступні припущення. 1. Популяції як ракових, так і нормальних клітин, є однорідними, тобто динаміка їх росту є однаковою для усіх частин популяцій. 2. Популяції як ракових, так і нормальних клітин підлягають законам популяційної динаміки (динаміка Гомперца). 3. Ракові клітини мають негативний і стримуючий вплив на нормальні клітини. 4. Опромінення та хіміопрепарат вбивають як ракові, так і нормальні клітини.

Опираючись також на результати робіт [6]-[8], приходимо до наступної задачі оптимального керування:

$$I(L(t), N_i(t), c(t), r(t)) = -L(T) \rightarrow \sup \quad (1)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha_L L(t) \ln \frac{\theta_L}{L(t)} - \beta_L c(t) L(t) - \gamma_L r(t) L(t) \quad (2)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \alpha_i N_i(t) \ln \frac{\theta_i}{N_i(t)} - \beta_i c(t) N_i(t) - \gamma_i r(t) N_i(t) - \sigma_i L(t) N_i(t), \quad (3)$$

$$i = \overline{1, m}, t \in [t_0, T]$$

з початковими умовами:

$$L(t_0) = L_0, \quad (4)$$

$$N_i(t_0) = N_{i,0}, \quad (5)$$

обмеженнями "комфортності лікування":

$$c(t) + \delta r(t) \leq u_{\max}, t \in [t_0, T], \quad (6)$$

та обмеженнями токсичності:

$$N_i(t) \geq N_i^-, i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Тут $L(t)$ - загальне число ракових клітин в момент часу t ; $N_i(t)$ - розмір i -ї популяції в момент часу t ; керування $c(t)$ відповідає концентрації першого

хіміопрепарату, $r(t)$ - вказує концентрацію другого хіміопрепарату; Θ_L - найбільший розмір популяції ракових клітин; Θ_i - звичайний розмір i -ї популяції нормальних клітин. Висуваються наступні природні вимоги:

$$0 < L_0 < \theta_L, \quad (8)$$

$$0 < N_i^- < N_{i,0} \leq \theta_i, i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Обмеження (6) запропоноване у роботі [6] і має наступний зміст: одночасно пацієнт може сумарно отримати не більше $u_{\max}$ одиниць хіміопрепаратів. При цьому константа δ вказує на той факт, що одиницю другого хіміопрепарату в δ разів комфортніше (або навпаки - менш комфортно) отримати порівняно з першим хіміопрепаратом. Як показано в роботі [4], популяції нормальних клітин мають більшу швидкість росту в порівнянні з раковими, тобто:

$$\alpha_i > \alpha_L, i = \overline{1, m} \quad (10)$$

У задачі (1)-(9) здійснимо заміну змінних:

$$l(t) = \ln \frac{\theta_L}{L(t)}, x_i = \ln \frac{\theta_i}{N_i(t)}. \quad (11)$$

При цьому задача (1)-(9) набуває вигляду:

$$I_1(l(t), x_i(t), c(t), r(t)) = -l(T) \rightarrow \sup \quad (12)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = -\alpha_L l(t) + \beta_L c(t) + \gamma_L r(t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= -\alpha_i x_i(t) + \beta_i c(t) + \gamma_i r(t) + \sigma_i \theta_L e^{l(t)}, \\ i &= \overline{1, m}, t \in [t_0, T], \end{aligned} \quad (14)$$

$$l(t_0) = \ln \frac{\theta_L}{L_0}, \quad (15)$$

$$x_i(t_0) = \ln \frac{\theta_i}{N_{i,0}}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} c(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \in U = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ r \end{pmatrix} : c, r \geq 0, c + \delta r \leq u_{\max} \right\}, t \in [t_0, T], \quad (17)$$

та обмеженнями токсичності:

$$x_i(t) \leq \ln \frac{\theta_i}{N_i^-}, i = \overline{1, m}. \quad (18)$$

При цьому нерівності (8)-(10) залишаються в силі. Зазначимо, що вигляд термінальної частини критерію якості (12) спрощено без втрати загальності. Для знаходження оптимального керування задачі (12)-(18) скористаємося

принципом максимуму Л.С.Понтрягіна для задачі з фазовими обмеженнями [9]. Застосуванню принципу максимуму можна надати конструктивнішого характеру, здійснивши інтегрування нелінійної задачі (13)-(16) з використанням спеціальних функцій. На жаль, зробити це в аналітичному вигляді не вдається. При інтегруванні буде використано поняття інтегральної показникової функції порядку α .

Означення 1. Інтегральною показниковою функцією порядку α називається спеціальна функція вигляду:

$$Ei(\alpha, t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^s}{s^\alpha} ds.$$

Тут при $t \geq 0$ інтеграл вважається в сенсі головного значення, тобто:

$$Ei(\alpha, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^s}{s^\alpha} ds + \int_{\epsilon}^t \frac{e^s}{s^\alpha} ds \right].$$

Зазначимо, що при $\alpha = 1$ функція $Ei(\alpha, t)$ співпадає з інтегральною показниковою функцією $Ei(t)$, введеною Ейлером [10].

Лема 1. При натуральних значеннях α функція $Ei(\alpha, t)$ може бути виражена через значення $Ei(t)$, а саме:

$$Ei(\alpha, t) = \frac{e^t t^{-\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k-1)!}{t^k} - e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^k} + t Ei(t)}{t(\alpha-1)!}$$

Доведення. Скориставшись інтегруванням за частинами, функцію $Ei(\alpha+1, t)$ виразимо через значення $Ei(\alpha, t)$, а саме:

$$Ei(\alpha, t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^s}{s^\alpha} ds = \frac{e^s}{s^\alpha} \Big|_{-\infty}^t + \alpha \int_{-\infty}^t \frac{e^s}{s^{\alpha+1}} ds = \frac{e^t}{t^\alpha} + \alpha Ei(\alpha+1, t), \quad (19)$$

звідки

$$Ei(\alpha+1, t) = \frac{1}{\alpha} \left(Ei(\alpha, t) - \frac{e^t}{t^\alpha} \right),$$

причому

$$Ei(1, t) = Ei(t). \quad (20)$$

Розв'язуючи рекурентне співвідношення (19) з початковою умовою (20), маємо:

$$Ei(\alpha, t) = \frac{e^t t^{-\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)k!t^k} \Gamma(\alpha) - e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(1+k)}{\Gamma^2(1)k!t^k} + t Ei(t)}{t\Gamma(\alpha)},$$

звідки при натуральних значеннях α отримуємо твердження лема.

Лема 2. Нехай a, b, c, f, t_0 - довільні константи. Тоді має місце співвідношення:

$$\int_{t_0}^t e^{a+bs+fe^{c(s-t_0)}} ds = \frac{e^{a+bt_0}}{cf^{\frac{b}{c}}} \left(Ei \left(1 - \frac{b}{c}, fe^{c(t-t_0)} \right) - Ei \left(1 - \frac{b}{c}, f \right) \right)$$

Доведення. При обчисленні інтегралу слід виконати заміну змінних $e^{c(s-t_0)} = \xi$ і використати означення інтегральної показникової функції.

Введемо послідовності функцій $\{l_k(t)\}_{k=0,1,2,\dots}$, $\{x_{i,k}(t)\}_{k=0,1,2,\dots}$, $i = \overline{1, m}$, і послідовність моментів часу $\{t_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, які визначаються з рівностей:

$$l_0(t) = \ln \left(\frac{\theta_L}{L_0} \right),$$

$$l_{k+1}(t) = \frac{\zeta_L(k)u_{max}}{\alpha_L} + e^{-\alpha_L(t-t_k)} f_k,$$

$$x_{i,0} = \ln \frac{\theta_i}{N_{i,0}},$$

$$x_{i,k+1}(t) = x_{i,k}(t_k) e^{-\alpha_i(t-t_k)} + \frac{\zeta_i(k)u_{max}}{\alpha_i} e^{-\alpha_i(t-t_k)} + e^{-\alpha_i t} g_k^i(t)$$

$$t_{k+1} = \arg \min \left\{ t : \exists i^* \in \overline{1, m} : l_k(t_k) e^{-\alpha_{i^*}(t-t_k)} + x_{i^*,k+1}(t) = \ln \frac{\theta_{i^*}}{N_{i^*}} \right\},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Тут введено позначення:

$$\zeta_L(k) = \begin{cases} \frac{\gamma_L}{\delta}, & k - \text{парне} \\ \beta_L, & k - \text{непарне} \end{cases}$$

$$\zeta_i(k) = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{\delta}, & k - \text{парне} \\ \beta_i, & k - \text{непарне} \end{cases}$$

$$f_k = l_k(t_k) - \frac{\zeta_L(k)u_{max}}{\alpha_L},$$

$$d_k^i(t) = \theta_L \sigma_i \frac{e^{(\alpha_i - \alpha_L)t_k + \frac{\zeta_L(k)u_{max}}{\alpha_L}}}{-\alpha_L f_k \frac{\alpha_L - \alpha_i}{\alpha_L}} \left(Ei \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_L}, f_k e^{-\alpha_L(t-t_k)} \right) - Ei \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_L}, f_k \right) \right),$$

$$g_k^i(t) = \theta_L \sigma_i \frac{e^{\frac{\zeta_L(k)u_{max}}{\alpha_L} + \alpha_i t_k}}{-\alpha_L f_k \frac{-\alpha_i}{\alpha_L}} \left(Ei \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_L} + 1, f_k e^{-\alpha_L(t-t_k)} \right) - Ei \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_L} + 1, f_k \right) \right),$$

Теорема. Нехай $u^*(t) = (c^*(t), r^*(t))^T$, $l^*(t), x_i^*(t), i = \overline{1, m}$ - оптимальні керування та траєкторії задачі (12)-(18), причому оптимальне керування є кусково-сталим і приймає значення $(0, \frac{u_{\max}}{\delta})$ і $(u_{\max}, 0)$. Припустимо, що на початковому відрізку траєкторії оптимальне керування має вигляд $u^*(t) = \left(0, \frac{u_{\max}}{\delta} \right)^T$. Тоді існують послідовності констант $C_l(k), C_i(k), i = \overline{1, m}, k = 0, 1, 2, \dots$, які для довільного $t \in [t_k, t_{k+1}]$ є розв'язками системи нерівностей:

- при парних значеннях k - розв'язками системи (21)-(22)

$$F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) < 0, \quad (21)$$

$$F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) > 0 \quad (22)$$

або системи (23)-(24)

$$F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) > 0, \quad (23)$$

$$F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) - F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) < 0, \quad (24)$$

- при непарних значеннях k - розв'язками системи (25)-(26)

$$F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) > 0, \quad (25)$$

$$F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) < 0 \quad (26)$$

або системи (27)-(28)

$$F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) > 0, \quad (27)$$

$$F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) - F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) < 0. \quad (28)$$

При умові, що $T \in [t_k, t_{k+1}]$, мають місце рівності:

$$-1 = C_l(\bar{k})e^{\alpha_L T} + e^{\alpha_L T} \sum_{i=1}^m C_i(\bar{k})d_k^i(T). \quad (29)$$

Тут

$$F_k^1(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) = C_l(k)\beta_L e^{\alpha_L t} - \sum_{i=1}^m C_i(k) \left(\beta_L e^{\alpha_L t} d_k^i(t) + \beta_i e^{\alpha_i t} \right),$$

$$F_k^2(t; C_l(k), C_1(k), \dots, C_m(k)) = C_l(k)\gamma_L e^{\alpha_L t} - \sum_{i=1}^m C_i(k) \left(\gamma_L e^{\alpha_L t} d_k^i(t) + \gamma_i e^{\alpha_i t} \right).$$

При цьому послідовності констант $C_i(k), i = \overline{1, m}, k = 0, 1, 2, \dots$ є монотонно зростаючими, тобто $C_i(k) \leq C_i(k+1), i = \overline{1, m}, k = 0, 1, 2, \dots$

Доведення. В початковий момент часу $x_i(t_0) = \ln \frac{\theta_i}{N_{i,0}} < \ln \frac{\theta_i}{N_i}$, $i = \overline{1, m}$.

Тому, в силу неперервності, існує відрізок $[t_0, t_1]$, на якому $x_i(t) < \ln \frac{\theta_i}{N_i}$, i

тому $v_i(t) = 0, t \in [t_0, t_1], i = \overline{1, m}$. Згідно принципу максимуму на цьому відрізьку оптимальне керування може бути двох типів: або $u^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_{\max}}{\delta} \end{pmatrix}$, або $u^*(t) = \begin{pmatrix} u_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$. Згідно припущень теореми $u^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_{\max}}{\delta} \end{pmatrix}, t \in [t_0, t_1]$. Тоді, розв'язуючи вихідну систему диференціальних рівнянь, з врахуванням початкових умов, отримуємо:

$$\begin{aligned} l(t) &= l_1(t) \\ x_i(t) &= x_{i,1}(t). \end{aligned}$$

Рівняння для спряжених функцій на цій ділянці мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dp_l(t)}{dt} &= p_l(t)\alpha_L - \sum_{i=1}^m p_i(t)\sigma_i\theta_L e^{l_k(t)}, \\ \frac{dp_i(t)}{dt} &= p_i(t)\alpha_i, i = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (30)$$

при $k = 0$. Знайдемо загальний розв'язок цієї системи, який залежить від довільних сталих $C_l(0)$ та $C_i(0), i = \overline{1, m}$:

$$p_i(t) = C_i(0)e^{\alpha_i t}, i = \overline{1, m}$$

$$p_l(t) = C_l(0)e^{\alpha_L t} - e^{\alpha_L t} \sum_{i=1}^m C_i(0)d_k^i(t).$$

При обчисленні $p_l(t)$ в інтегралі для визначеності було покладено інтервал інтегрування $[t_0, t]$.

Введемо позначення:

$$p_l(t)\beta_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\beta_i = \Phi(t),$$

$$p_l(t)\gamma_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\gamma_i = \Psi(t).$$

Згідно принципу максимуму, для того, щоб на відрізьку $t \in [t_0, t_1]$ оптимальне керування було $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_{\max}}{\delta} \end{pmatrix}$, з необхідністю повинна виконуватися одна з таких умов: а) $\Phi < 0, \Psi > 0$, б) $0 < \Phi < \Psi$. Вони означають, що сталі $C_l(0), C_i(0), i = \overline{1, m}$ потрібно підібрати так, щоб виконувалася або умова а), або умова б). Розглянемо випадок а) $\Phi < 0, \Psi > 0, t \in [t_0, t_1]$. Використовуючи означення $\Phi(t), \Psi(t)$, отримуємо наступні нерівності:

$$p_l(t)\beta_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\beta_i < 0,$$

$$p_l(t)\gamma_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\gamma_i > 0,$$

або з врахуванням розв'язків спряженої системи нерівності (21)-(22) при $k = 0$. Якщо маємо випадок б) $0 < \Phi < \Psi$, то це означає, що виконуються нерівності:

$$0 < p_l(t)\beta_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\beta_i < p_l(t)\gamma_L + \sum_{i=1}^m p_i(t)\gamma_i, t \in [t_0, t_1] \quad (21)$$

або, з врахуванням розв'язків спряженої системи, дані нерівності еквівалентні (23)-(24) при $k = 0$. В момент часу t_1 функція $x_{i*}(t)$ торкається осі

$$x_{i*}(t) = \ln \frac{\theta_{i*}}{N_{i*}}. \quad (23)$$

Розглянемо властивості оптимального процесу на відрізку $[t_1, t_2]$, на якому оптимальне керування $u^*(t) = \begin{pmatrix} u_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$. Тоді, розв'язуючи вихідну систему диференціальних рівнянь, з врахуванням початкових умов в точці t_2 , отримуємо:

$$l(t) = l_2(t), x_i(t) = x_{i,2}(t).$$

Рівняння для спряжених функцій на цій ділянці у випадку існування оптимального керування мають вигляд (30) при $k = 1$. Загальний розв'язок системи (30) на проміжку $[t_1, t_2]$, який залежить від довільних сталих $C_l(1)$ та $C_i(1), i = \overline{1, m}$:

$$p_i(t) = C_i(1)e^{\alpha_i t}, i = \overline{1, m}$$

$$p_l(t) = C_l(1)e^{\alpha_L t} - e^{\alpha_L t} \sum_{i=1}^m C_i(1)d_k^i(t).$$

При обчисленні $p_l(t)$ в інтегралі для визначеності було покладено інтервал інтегрування $[t_1, t]$. В силу принципу максимуму на інтервалі $[t_1, t_2]$ повинна виконуватися одна з таких умов: а) $\Phi > 0, \Psi < 0$, б) $0 < \Psi < \Phi$.

З врахуванням значень спряжених функцій на інтервалі $[t_1, t_2]$ маємо системи нерівностей а)(25)-(26) або б)(27)-(28) при $k = 1$, яким повинні задовольняти константи $C_l(1)$ та $C_i(1), i = \overline{1, m}$.

Згідно принципу максимуму для задачі з фазовими обмеженнями [9], у точці t_1 можливий стрибок спряжених функцій так, що повинні виконуватися нерівності:

$$p_i(t_1^-) \leq p_i(t_1^+), i = \overline{1, m}.$$

Використовуючи явний вигляд спряжених функцій, отримуємо нерівності:

$$C_i(0) \leq C_i(1), i = \overline{1, m}$$

В момент часу $t_2 > t_1$ функція $x_{j^*}(t)$ торкається осі

$$x_{j^*}(t) = \ln \frac{\theta_{j^*}}{N_{j^*}}.$$

Продовжуючи далі конструювання оптимального процесу таким же чином для $k = 2, 3, \dots$, а також враховуючи умову трансверсальності [11], яка призводить до (29), отримуємо твердження теореми.

Зауваження 1. Для пошуку оптимального керування слід розглянути ще випадок, коли керування починається з $u(t) = \begin{pmatrix} u_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$. При побудові відповідних траєкторій та нерівностей слід замінити функції $\zeta_L(k), \zeta_i(k)$ на

$$\zeta_L(k) = \begin{cases} \gamma_L, & k - \text{непарне} \\ \beta_L, & k - \text{парне} \end{cases}$$

$$\zeta_i(k) = \begin{cases} \gamma_i, & k - \text{непарне} \\ \beta_i, & k - \text{парне} \end{cases}$$

Далі слід порівняти отримані значення $l(T)$.

Отже, було розглянуто задачу побудови режимів хіміотерапії, як задачу оптимального керування з фазовими обмеженнями. Запропоноване представлення розв'язків системи через інтегральні показникові функції певного порядку. Це дозволило звести вихідну оптимізаційну задачу до проблеми відшукування розв'язків системи алгебраїчних нерівностей. Запропоновану методику можна використати як для перевірки оптимальності вже існуючих режимів хіміотерапії, так і для побудови нових [11]. Зазначимо, що система, що розглядалася, може бути використана також для моделювання терапевтичного лікування за допомогою n хіміопрепаратів шляхом введення додаткових змінних. В наступних дослідженнях слід було б врахувати неоднорідність пухлини, а також блокуючий вплив хіміопрепаратів на клітинні цикли.

Подяка. Автор вдячний рецензентам за зауваження, що дозволили значно покращити статтю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Costa M.I.S., Boldrini J.L., Bassanezi R.C. Drug kinetics and drug resistance in optimal chemotherapy. // *Math. Biosci.* – 1995. – **125**. – P. 191-209.
2. Costa M.I.S., Boldrini J.L., Bassanezi R.C. Optimal chemotherapy: A case study with drug resistance, saturation effect, and toxicity. // *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* – 1994. – **11**. – P. 45-59.
3. Murray J.M. Optimal drug regimens in cancer chemotherapy for single drugs with block progression through the cell cycle. // *Math. Biosci.* – 1994. – **123**. – P. 183-213.
4. Swan G.W. Role of optimal control theory in cancer chemotherapy. // *Math. Biosci.* – 1990. – **101**. – P. 237- 284.
5. Zietz S. Nicolini C. Mathematical approaches to optimization of cancer chemotherapy. // *Bull. Math. Biol.* – 1979. – **41**. – P. 305-324.
6. Ледли Р., Ластед Л. Медицинская диагностика и современные методы выбора решения. в сб. “Математические проблемы в биологии” под ред. Р.Беллмана. – М.: Мир, 1966. – С. 141-198.
7. Matveev A.S., Savkin A.V. Optimal chemotherapy regimens: influence of tumors on normal cells and several toxicity constraints. // *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.* – 2001. – **18**. – P. 25-40.
8. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд-во иностр.лит., 1961. – 248 с.
9. Андреева Е.А., Бенке Х. Оптимизация управляемых систем. – Тверь, 1996. – 164 с.
10. Математический энциклопедический словарь. /Гл. ред. Ю.В.Прохоров. – М.: Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.
11. Марценюк В.П., Кравець Н.О. Медична інформатика. Методи системного аналізу. – Тернопіль: Укрмедкнига, 2002. – 180 с.

Качественное исследование процессов
структурирования магнитной жидкости

Н. Ф. Пацегон, Л. Н. Попова, С. А. Свириденко

Харьковский национальный университет, Украина

Рассматриваются процессы структурирования магнитной жидкости, т.е. возникновение и разрушение агрегатов из магнитных частиц, входящих в состав жидкости. В предположении, что диффузионными процессами в жидкости можно пренебречь, исследуется однопараметрическая динамическая система второго порядка, описывающая изменение магнитного состояния жидкости, покоящейся в постоянном однородном магнитном поле. Найдены состояния равновесия жидкости и бифуркационные значения параметра, которым служит напряженность магнитного поля. При различных значениях параметра построены фазовые портреты системы на плоскости. *2000 Mathematics Subject Classification* 76W05.

Магнитные жидкости представляют собой искусственно синтезируемые среды, которые содержат взвесь мельчайших частиц ферромагнетика, покрытых поверхностно-активным веществом, в жидком носителе [1]. Первые магнитные жидкости были получены в 60-х годах XX века и применяются с тех пор в уплотнениях, подшипниках, амортизаторах, тепло-массообменниках, измерительных приборах и печатающих устройствах. Область использования магнитных жидкостей постоянно расширяется. В последнее время они все чаще находят применение в биологии и медицине.

Основные проблемы, возникающие при использовании магнитных жидкостей на практике, связаны с агрегацией магнитных частиц, входящих в состав жидкости. Однако чаще всего при решении конкретных задач процессы агрегации частиц либо вообще не учитываются, либо агрегаты считаются сформировавшимися и неизменяющимися во времени [2,3]. Цель настоящей работы – исследовать динамику возникновения и разрушения агрегатов в объеме жидкости, покоящейся в постоянном однородном магнитном поле. При этом используется модель среды с изменяющейся микроструктурой [4], которая учитывает наличие цепочечных агрегатов из магнитных частиц в жидкости, а её магнитное состояние описывает с помощью двух параметров – параметра эффективного магнитного поля и среднего числа частиц в агрегатах. В работе [5] рассмотрены кривые намагничивания такой среды, а также исследованы

условия возникновения в ней нестационарных структур типа волн переключения и их устойчивость. Там же приводится краткий обзор публикаций по вопросам структурирования магнитной жидкости, которые появились в последние годы в отечественной и зарубежной периодике.

1. Модель жидкости. Рассмотрим модель среды, в которой возможно образование и разрушение агрегатов, содержащих конечное число магнитных частиц [4]. Магнитное состояние такой среды определяется параметром эффективного магнитного поля λ и средним числом частиц в агрегатах ν^{-1} . Если жидкость покоится в постоянном однородном магнитном поле, эволюция во времени ее магнитного состояния описывается системой уравнений:

$$\tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} = D_\lambda \Delta \lambda + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \quad \tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} = D_\nu \Delta \nu + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H). \quad (1)$$

Функции $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H)$ и $Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H)$ имеют вид:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = \frac{1}{2\rho} [M^2 - M_*^2 - 2\beta M_s^2 (\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*})],$$

$$Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = \frac{n_1 k T}{\rho} [f(\xi) - f(\xi_*) + \alpha(\nu - \nu_{1*})(\nu - \nu_{2*})(\nu - \nu_{3*})].$$

Здесь $\xi = m_1 H_e / (k T \nu)$, $H_e = H + \lambda M$, $n_1 = c_1 \rho / M$ — объемная плотность феррочастиц, c_1 — массовая концентрация частиц, предполагаемая постоянной, M — масса одиночной феррочастицы, k — постоянная Больцмана; намагниченность жидкости определяется уравнением $M = M_s L(\xi)$, $L(\xi) = \text{cth} \xi - 1/\xi$ — функция Ланжевена, M_* — намагниченность структурирования жидкости, $M_* = M_s L(\xi_*) = M_s L_*$; $M_s = m_1 n_1$ — намагниченность насыщения жидкости; λ_{i*} , ν_{i*} ($i = \overline{1, 3}$) — равновесные значения λ и ν при $M = M_*$, причем $\lambda_{1*} > \lambda_{3*} > \lambda_{2*}$; $\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$; $\nu_{1*} > \nu_{3*} > \nu_{2*}$; $\nu_{i*} - \nu_{j*} = m_1 M_s L_*(\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (k T \xi_*)$; $\alpha = (k T / (m_1 M_s))^3 (\xi_* / L_*)^4 \beta$; $f(\xi) = \ln(\text{sh} \xi / \xi) - \xi L(\xi)$. Параметры $\tau_\lambda, \tau_\nu, D_\lambda$ и D_ν считаются постоянными.

Однородное равновесное состояние жидкости в магнитном поле H удовлетворяет условиям:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0. \quad (2)$$

При фиксированных значениях ρ, T и $\beta < 0$ эти уравнения определяют многозначные зависимости $\lambda(M)$ и $\nu(M)$. График функции $\lambda(M)$ представляется в виде объединения трех однозначных ветвей $\lambda^{(i)}(M)$, $i = \overline{1, 3}$ (Рис.1). На ветви $\lambda^{(1)}(M)$ параметр λ изменяется от λ' до $\lambda(0)$, на ветви $\lambda^{(2)}(M)$ — от λ'' до λ' , а на ветви $\lambda^{(3)}(M)$: $\lambda < \lambda''$. Значения λ' и λ'' представляют собой точки экстремума функции $M(\lambda)$, обратной к функции $\lambda(M)$:

$$\lambda^{(1)'} = \lambda_{3*} \pm \frac{\langle \lambda \rangle}{2\sqrt{3}},$$

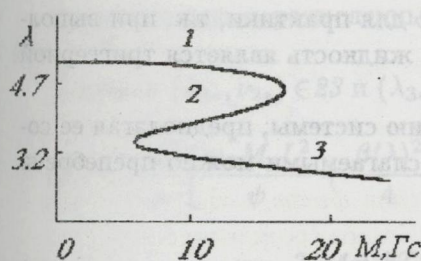


Рис. 1: Зависимость λ от M ($m_1 = 10^{-16}$ эрг/Гс, $M_s = 40$ Гс, $\xi_* = 1$, $\beta = -0.1$, $\lambda_{3*} = 4$, $\langle \lambda \rangle = -2$).

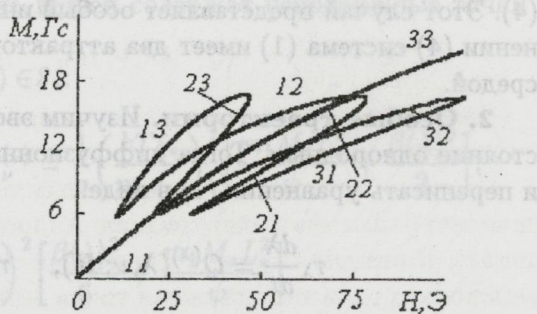


Рис. 2: Кривая намагничивания ($\nu_{3*} = 0.25$)

где $\langle \lambda \rangle \equiv \lambda_{2*} - \lambda_{1*} (< 0)$.

Аналогично определяются ветви функции $\nu(M)$.

Система (2) и уравнение $M = M_s L(\xi)$ задают гладкую самопересекающуюся кривую намагничивания, которая состоит из девяти ветвей однозначности функции $M(H)$. Будем обозначать их двузначным числом ij , $i, j = \overline{1, 3}$, где $i(j)$ указывает номер ветви $\lambda(M)$ ($\nu(M)$) (Рис.2) [5]. Концами этих ветвей являются начало координат, точки с вертикальной касательной и точка $(\bar{H}, \bar{M})$, ордината которой определяется из уравнений $f(\bar{\xi}) = f(\xi_*) + \alpha \nu_{1*} \nu_{2*} \nu_{3*}$, $\bar{M} = M_s L(\bar{\xi})$. При построении модели предполагается, что выполняется условие парамагнитности среды $3kT\nu > m_1 M_s \lambda$.

Рассматриваемая жидкость в различных магнитных полях может иметь от одного до девяти однородных равновесных состояний. Устойчивость таких состояний обеспечивается условиями [5]:

$$Q_\lambda^{(\lambda)} < 0, \quad Q_\nu^{(\nu)} < 0, \quad \Delta \equiv Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - [Q_\nu^{(\lambda)}]^2 > 0. \quad (3)$$

Анализ показывает, что при выполнении неравенства

$$-\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} > \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)}, \quad (4)$$

асимптотически устойчивым однородным равновесным состояниям соответствуют точки ветвей 21 и 23 кривой намагничивания, при

$$\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} < -\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} < \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)}, \quad (5)$$

устойчивым состояниям отвечают внутренние точки ветви 23; а если не выполняется ни одно из условий (4), (5), жидкость неустойчива в любом магнитном поле. Далее считаем, что параметры жидкости удовлетворяют неравенству

(4). Этот случай представляет особый интерес для практики, т.к. при выполнении (4) система (1) имеет два аттрактора, а жидкость является триггерной средой.

2. Особые траектории. Изучим эволюцию системы, предполагая ее состояние однородным. Тогда диффузионными слагаемыми можно пренебречь и переписать уравнения (1) в виде:

$$\tau_\lambda \frac{d\lambda}{dt} = Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \quad \tau_\nu \frac{d\nu}{dt} = Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H). \quad (6)$$

Это однопараметрическая динамическая система второго порядка. Параметром служит напряженность магнитного поля H , фазовым пространством является плоскость (λ, ν) .

Решения уравнений (6) во многих случаях определяют асимптотику решений задачи в частных производных (1).

Простые особые точки системы имеют действительные характеристические числа

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\tau_\lambda^{-1} Q_\lambda^{(\lambda)} + \tau_\nu^{-1} Q_\nu^{(\nu)} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\tau_\lambda^{-1} Q_\lambda^{(\lambda)} + \tau_\nu^{-1} Q_\nu^{(\nu)} \right]^2 + 4 \tau_\lambda^{-1} \tau_\nu^{-1} (Q_\nu^{(\lambda)})^2}$$

и являются либо седлами (при $\Delta < 0$), либо узлами (при $\Delta > 0$): устойчивыми, если $Q_\lambda^{(\lambda)} < 0$, $Q_\nu^{(\nu)} < 0$, и неустойчивыми, если $Q_\lambda^{(\lambda)} > 0$, $Q_\nu^{(\nu)} > 0$. Других простых особых точек в рассматриваемом случае быть не может, так как условия $Q_\lambda^{(\lambda)} > 0$, $Q_\nu^{(\nu)} < 0$ и $Q_\lambda^{(\lambda)} < 0$, $Q_\nu^{(\nu)} > 0$ несовместимы с неравенством $\Delta > 0$.

В пределах одной ветви однозначности функции $M(H)$ тип состояния равновесия системы не изменяется. Его нетрудно определить при значениях λ и ν , соответствующих намагниченности структурирования $M = M_*$.

В точке $(\lambda_{1*}, \nu_{3*}) \in 12$ и точке $(\lambda_{2*}, \nu_{3*}) \in 32$:

$$Q_\lambda^{(\lambda)} = \frac{M_s^2}{\rho} \left[\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi} - \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{2} \right] > 0, \quad Q_\nu^{(\nu)} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{k T \xi_*}{m_1 L_*} \right)^2 \left[\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi} - \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{4} \right] > 0,$$

$$\Delta = \beta \left(\frac{n_1 k T \xi_* \langle \lambda \rangle}{\rho L_*} \right)^2 \left[\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{8} - \frac{3 m_1 M_s L_*^2}{4 \psi} \right] > 0.$$

Следовательно состояния равновесия на этих ветвях являются неустойчивыми узлами.

В точках $(\lambda_{1*}, \nu_{1*}) \in 11$, $(\lambda_{1*}, \nu_{2*}) \in 13$ и $(\lambda_{2*}, \nu_{2*}) \in 33$:

$$\Delta = - \left(\frac{\beta n_1 k T \xi_* \langle \lambda \rangle^2}{2 \rho L_*} \right)^2 < 0,$$

а в точках $(\lambda_{3*}, \nu_{3*}) \in 22$ и $(\lambda_{2*}, \nu_{1*}) \in 31$:

$$\Delta = - \left(\frac{\beta n_1 k T \xi_* \langle \lambda \rangle^2}{4 \rho L_*} \right)^2 < 0.$$

Следовательно перечисленные пять ветвей содержат неподвижные точки типа *седло*.

В точках $(\lambda_{3*}, \nu_{2*}) \in 23$ и $(\lambda_{3*}, \nu_{1*}) \in 21$:

$$Q_{\lambda}^{(\lambda)} = \frac{M_s^2}{\rho} \left[\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi} + \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{4} \right], \quad Q_{\nu}^{(\nu)} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{k T \xi_*}{m_1 L_*} \right)^2 \left[\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi} + \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{2} \right],$$

$$\Delta = \frac{3}{4} \beta \left(\frac{n_1 k T \xi_* \langle \lambda \rangle}{\rho L_*} \right)^2 \left[\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} + \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi} \right].$$

Из неравенства (4) следует, что $Q_{\lambda}^{(\lambda)} < 0$, $Q_{\nu}^{(\nu)} < 0$, $\Delta > 0$ и состояния равновесия, расположенные на ветвях 21, 23, являются устойчивыми узлами, то есть аттракторами системы (6).

В точках соединения двух ветвей однозначности функции $M(H)$ (таких точек - восемь, они соответствуют значениям H_i , $i = \overline{1, 8}$, в которых кривая намагничивания имеет вертикальную касательную): $\Delta = 0$, одно из характеристических чисел обращается в нуль и система испытывает бифуркацию типа *седло-узел*: при переходе через бифуркационное значение параметра H_i либо два состояния равновесия исчезают, либо появляется два новых состояния равновесия: *седло* и *узел*.

Фазовый портрет динамической системы на плоскости при фиксированном значении $H \neq H_i$, $i = \overline{1, 8}$ определяется особыми траекториями, к которым относятся неподвижные точки, сепаратрисы седел и предельные циклы, соответствующие изолированным периодическим решениям. Особые траектории разбивают плоскость на ячейки, внутри каждой из которых все неособые (обыкновенные) траектории ведут себя одинаково.

Число и характер неподвижных точек системы при произвольных значениях H определяются аналитически, координаты этих точек, от которых зависит их взаимное расположение, можно найти численно.

Рассмотрим сепаратрисы седловых неподвижных точек. Угловые коэффициенты α_1 и α_2 направлений сепаратрис в малой окрестности седла задаются выражениями [6]:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2Q_{\nu}^{(\lambda)}} \left[\frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\nu}} Q_{\nu}^{(\nu)} - Q_{\lambda}^{(\lambda)} \mp \sqrt{\left(\frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\nu}} Q_{\nu}^{(\nu)} - Q_{\lambda}^{(\lambda)} \right)^2 + 4 \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\nu}} [Q_{\nu}^{(\lambda)}]^2} \right], \quad (7)$$

где α_1 определяет *входящую*, а α_2 — *выходящую* сепаратрису.

Поскольку $Q_{\nu}^{(\lambda)} < 0$ при любом значении $H \neq 0$, из (7) следует, что $\alpha_1 > 0$, а $\alpha_2 < 0$.

В конечной области фазовой плоскости сепаратрисы можно найти численно, решая задачу Коши одним из методов Рунге-Кутты. Для *выходящих* сепаратрис начальные условия задаются вблизи седла на прямых с угловым коэффициентом α_2 . Для *входящих* сепаратрис начальные условия ставятся на прямых с коэффициентом α_1 , при этом вместо (6) интегрируется система

$$\tau_\lambda \frac{d\lambda}{dt} = -Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \quad \tau_\nu \frac{d\nu}{dt} = -Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H).$$

Исследуем вопрос о предельных циклах, т.е. о периодических процессах в жидкости.

Система (6) не имеет неподвижных точек типа *фокус*, следовательно она не может испытывать бифуркацию Андронова-Хопфа (рождения предельного цикла). В интервале изменения напряженности магнитного поля $(0, H_1)$ имеется только одна неподвижная точка типа *седло*. Из теории индексов Пуанкаре следует, что в этом интервале изменения H в системе не может быть замкнутых фазовых траекторий [6]. При переходе через бифуркационное значение $H = H_1$ на фазовой плоскости появляются две неподвижные точки: седло и узел. Других качественных изменений фазовый портрет системы при этом не испытывает. Аналогичные выводы можно сделать и относительно других точек бифуркации H_i , $i = \overline{2, 8}$. Таким образом система (6) не имеет предельных циклов. Физически это обусловлено тем, что нет источника энергии, который бы поддерживал колебательный режим в системе.

3. Фазовые портреты. Точки бифуркации H_i делят полуось OH на девять интервалов, внутри каждого из которых система является грубой, а изменение параметра H не влияет на качественную структуру разбиения фазовой плоскости на траектории. При $H = H_i$ система становится негрубой, а переход через значение H_i вызывает перестройку фазового портрета.

При $m_1 = 10^{-16}$ эрг/Гс, $M_s = 40$ Гс, $\xi_* = 1$, $\beta = -0.1$, $\lambda_{3*} = 4$, $\langle \lambda \rangle = -2$ и $\nu_{3*} = 0.25$ для точек бифуркации получены следующие значения: $H_1 \approx 10.82$ Э, $H_2 \approx 21.03$ Э, $H_3 \approx 21.88$ Э, $H_4 \approx 31.0$ Э, $H_5 \approx 46.86$ Э, $H_6 \approx 74.92$ Э, $H_7 \approx 78.64$ Э, $H_8 \approx 105.05$ Э.

По своему физическому смыслу параметры λ и ν должны удовлетворять неравенствам: $\lambda > 0$ и $0 < \nu \leq 1$. Следовательно фазовые траектории следует рассматривать в области G , ограниченной прямыми $\lambda = 0$, $\nu = 1$ и $3kT\nu = m_1 M_s \lambda$. Последнее равенство следует из условия парамагнитности среды.

При построении фазового портрета системы необходимо учитывать, что фазовые траектории не могут пересекаться, а в малой окрестности любой обыкновенной точки они образуют параллельное векторное поле. Кроме того, нужно принимать во внимание, что в грубой системе не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло. Эти соображения и полученные ранее результаты позволяют определить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории при любом значении H .

На рис.3 представлены фазовые портреты системы при $H_1 < H < H_7$. Показаны только особые траектории, образующие границы ячеек на плоскости и однозначно определяющие поведение всех обыкновенных траекторий системы.

Все ячейки рассматриваемой системы являются односвязными и принадлежат одному из четырех типов. Граница ячеек первого типа содержит неустойчивый узел, два седла, две сепаратрисы одного седла, стремящиеся к нему при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, и две сепаратрисы второго седла, стремящиеся

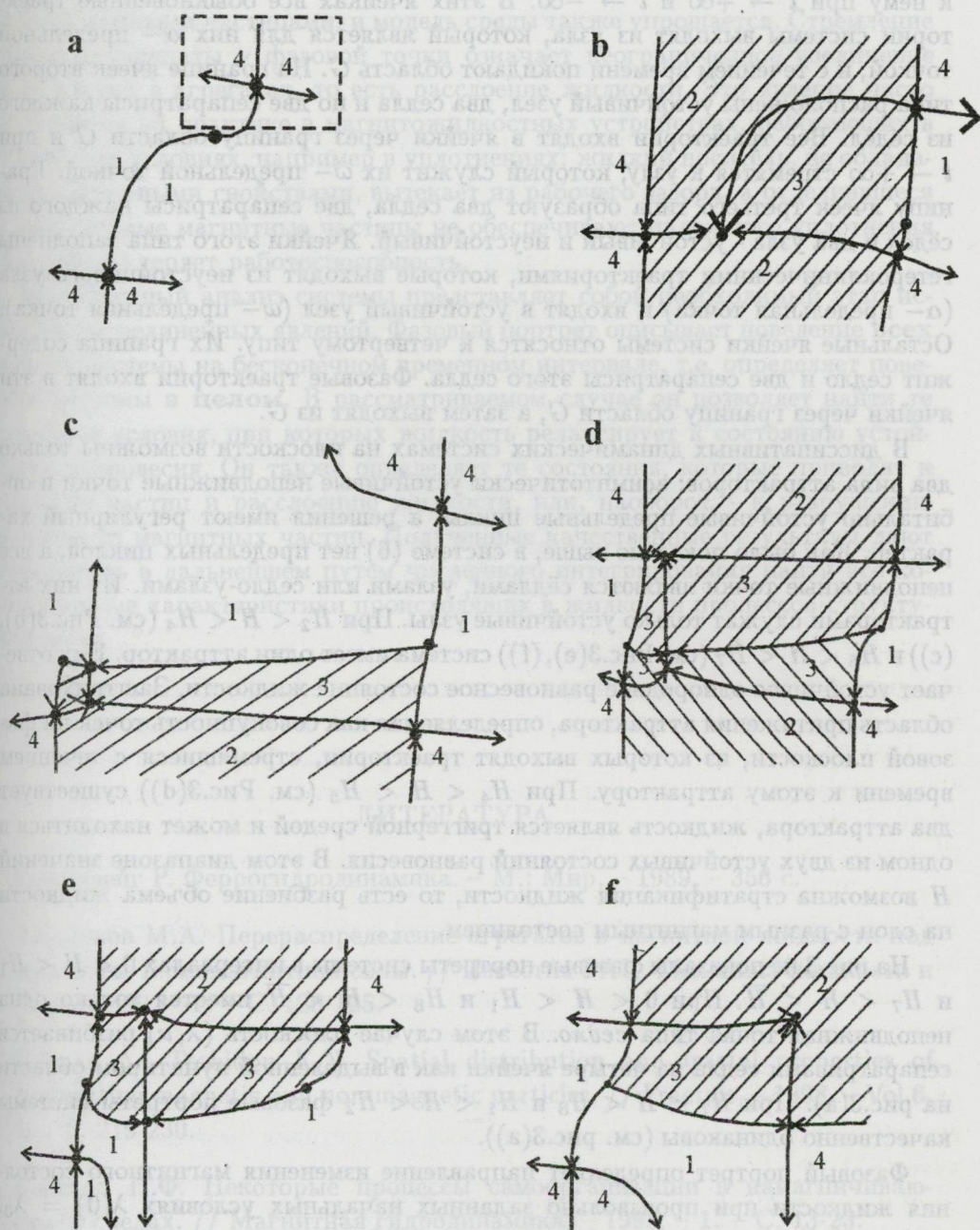


Рис. 3: Картина разбиения фазовой плоскости на траектории: а - $H_1 < H < H_2$, б - $H_2 < H < H_3$, в - $H_3 < H < H_4$, д - $H_4 < H < H_5$, е - $H_5 < H < H_6$, ф - $H_6 < H < H_7$. Цифры указывают на тип ячейки

к нему при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. В этих ячейках все обыкновенные траектории системы выходят из узла, который является для них α -предельной точкой, и с течением времени покидают область G . На границе ячеек второго типа расположены устойчивый узел, два седла и по две сепаратрисы каждого из седел. Все траектории входят в ячейки через границу области G и при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к узлу, который служит их ω -предельной точкой. Границу ячеек третьего типа образуют два седла, две сепаратрисы каждого из седел и два узла - устойчивый и неустойчивый. Ячейки этого типа заполнены гетероклиническими траекториями, которые выходят из неустойчивого узла (α -предельная точка) и входят в устойчивый узел (ω -предельная точка). Остальные ячейки системы относятся к четвертому типу. Их граница содержит седло и две сепаратрисы этого седла. Фазовые траектории входят в эти ячейки через границу области G , а затем выходят из G .

В диссипативных динамических системах на плоскости возможны только два вида аттракторов: асимптотически устойчивые неподвижные точки и орбитально устойчивые предельные циклы, а решения имеют регулярный характер. Как было показано выше, в системе (6) нет предельных циклов, а все неподвижные точки являются седлами, узлами или седло-узлами. Из них аттракторами служат только устойчивые узлы. При $H_2 < H < H_4$ (см. Рис.3(b), (c)) и $H_5 < H < H_7$ (см. Рис.3(e), (f)) система имеет один аттрактор. Ему отвечает устойчивое однородное равновесное состояние жидкости. Заштрихована область притяжения аттрактора, определяемая как совокупность точек на фазовой плоскости, из которых выходят траектории, стремящиеся с течением времени к этому аттрактору. При $H_4 < H < H_5$ (см. Рис.3(d)) существует два аттрактора, жидкость является триггерной средой и может находиться в одном из двух устойчивых состояний равновесия. В этом диапазоне значений H возможна стратификация жидкости, то есть разбиение объема жидкости на слои с разным магнитным состоянием.

На рис.3 не показаны фазовые портреты системы в интервалах $0 < H < H_1$ и $H_7 < H < \bar{H}$. При $0 < H < H_1$ и $H_8 < H < \bar{H}$ имеется только одна неподвижная точка типа *седло*. В этом случае плоскость (λ, ν) разбивается сепаратрисами седла на четыре ячейки как в выделенной пунктиром области на рис.3(a). При $H_7 < H < H_8$ и $H_1 < H < H_2$ фазовые портреты системы качественно одинаковы (см. рис.3(a)).

Фазовый портрет определяет направление изменения магнитного состояния жидкости при произвольно заданных начальных условиях $\lambda(0) = \lambda_0$, $\nu(0) = \nu_0$. Если точка (λ_0, ν_0) принадлежит области притяжения аттрактора (λ_e, ν_e) , то жидкость со временем релаксирует к состоянию равновесия (λ_e, ν_e) . Если при движении фазовой точки на траектории параметр ν убывает, в жидкости идет процесс агрегации, то есть укрупнения агрегатов из магнитных частиц, если - возрастает - то, наоборот, происходит распад агрегатов. Выход фазовой траектории на прямую $\nu = 1$ означает полный распад всех агрегатов. В дальнейшем поведение такой жидкости описывается более простой моделью, не учитывающей агрегацию частиц. Если на фазовой траектории параметр λ

обращается в нуль, можно пренебречь магнитным полем, создаваемым отдельными магнитными частицами, и модель среды также упрощается. Стремление к нулю координаты ν фазовой точки означает неограниченное увеличение числа частиц в агрегатах, то есть расслоение жидкости. Это явление часто наблюдается на практике в магнитожидкостных устройствах, работающих в статических условиях, например в уплотнениях: жидкий носитель, не обладающий магнитными свойствами, вытекает из рабочего зазора, а отделившиеся от него твердые магнитные частицы не обеспечивают надежного уплотнения и устройство теряет работоспособность.

Качественный анализ системы представляет собой необходимый этап исследования нелинейных явлений. Фазовый портрет описывает поведение **всех** решений системы на бесконечном временном интервале, т.е. определяет поведение системы **в целом**. В рассматриваемом случае он позволяет найти те начальные условия, при которых жидкость релаксирует к состоянию устойчивого равновесия. Он также определяет те состояния, которые приводят к агрегации частиц и расслоению жидкости, или, наоборот, - к разрушению агрегатов из магнитных частиц. Полученные качественные результаты дают возможность в дальнейшем путем численного интегрирования найти все количественные характеристики происходящих в жидкости процессов структурирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. - М.: Мир, - 1989. - 356 с.
2. Лушников М.А. Перераспределение агрегатов в магнитной жидкости под действием терромагнитной силы. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. - 1999. - 1. - С. 120-125.
3. Provata A., Trohidou K.N. Spatial distribution and fractal properties of aggregating magnetic and non-magnetic particles. // Fractals. - 1998. - Vol.6, 3. - P. 219-230.
4. Пацегон Н.Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах. // Магнитная гидродинамика. - 1993. - 1. - С. 13-23.
5. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Волновые структуры в магнитной жидкости. // Прикладная гидромеханика. - 2000. - Т. 2(74), 4. - С. 58-66.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М.: Наука, - 1990. - 488 с.

Голоморфные почти периодические функции в
различных метриках¹

О.И. Удодова

Харьковский национальный университет, Украина

В работе классическая теорема Бора о голоморфных почти периодических функциях в полосе распространяется на голоморфные почти периодические функции в трубчатой области конечномерного векторного пространства. Кроме равномерной метрики рассматриваются также метрики Степанова, Вейля, Безиковича.

2000 *Mathematics Subject Classification* 42A75, 30B50.

Согласно известной теореме Бора [3], голоморфная и равномерно ограниченная функция в полосе, которая почти периодична на одной прямой внутри полосы, будет почти периодической внутри полосы. В [13] этот результат был распространен на голоморфные функции многих переменных, при этом, кроме равномерной метрики, рассматривалась также интегральная метрика Степанова. Аналоги теоремы Бора для голоморфных функций в полосе для метрики Безиковича были также получены в [1] и [14], при этом в [1] рассматривались функции конечного порядка роста в полосе, которые ограничены на каждой прямой из полосы.

Заметим, что голоморфная функция конечного порядка роста в достаточно узкой полосе ограничена максимумом модулей своих значений на границах полосы, поэтому для таких функций из почти периодичности в равномерной метрике на границах полосы также следует почти периодичность внутри полосы. Аналог этого утверждения для метрики Безиковича был получен в [1].

В настоящей работе предлагается новый подход, который позволяет получить многомерные аналоги теоремы Бора для метрик Вейля и Безиковича, а также соответствующие многомерные результаты для функций конечного порядка роста в метрике Бора (равномерной), Степанова (интегральной), Вейля и Безиковича. Кроме того, получены многомерные аналоги теоремы о функциях конечного порядка роста, почти периодических на границе. Для точной формулировки результатов введем следующие обозначения.

¹Работа поддержана INTAS-грантом №99-00089

Пусть K - ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. *Трубчатым (или цилиндрическим) множеством* с основанием K называется множество вида

$$T_K = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m : x \in \mathbb{R}^m, y \in K\}.$$

Для ограниченных непрерывных функций f и g на T_K положим

$$d_K^C(f, g) = \sup_{z \in T_K} |f(z) - g(z)|.$$

Далее, для $p \geq 1$ будем рассматривать функции на T_K , которые локально интегрируемы в p -той степени на любой вещественной плоскости

$$T_{\{y_0\}} = \{z = x + iy_0 : x \in \mathbb{R}^m\}, \quad y_0 \in K.$$

Положим

$$d_{p,K}^S(f, g) = \sup_{z \in T_K} \left(\int_{\|t\| \leq \frac{1}{2}} |f(z+t) - g(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_{p,K}^W(f, g) = \lim_{X \rightarrow \infty} \sup_{z \in T_K} \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| \leq \frac{X}{2}} |f(z+t) - g(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_{p,K}^B(f, g) = \lim_{X \rightarrow \infty} \sup_{y \in K} \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| \leq \frac{X}{2}} |f(iy+t) - g(iy+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\|t\| = \max_{1 \leq i \leq m} |t^i|$ для $t = (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^m$. Отметим, что для любого $p \geq 1$ выполняются неравенства

$$d_{p,K}^B(f, g) \leq d_{p,K}^W(f, g) \leq d_{p,K}^S(f, g) \leq d_K^C(f, g).$$

(Неравенство между $d_{p,K}^W(f, g)$ и $d_{p,K}^S(f, g)$ доказывается так же, как и в [5] для $m = 1$).

Функцию $f(z)$, $z = x + iy$ назовем d -почти периодической на T_K , если ее можно аппроксимировать в метрике d конечными экспоненциальными суммами вида

$$P(x, y) = \sum c_k(y) e^{i\langle x, \lambda_k \rangle}, \quad (1)$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$, а $c_k(y)$ - непрерывные функции на K (иначе говоря, обобщенные тригонометрические полиномы с коэффициентами из $C(K)$).

В случае метрики $d = d_K^C$ получается класс почти периодических функций по Бору на T_K . Для метрик $d = d_{p,K}^S$, $d = d_{p,K}^W$, $d = d_{p,K}^B$ соответствующие классы естественно назвать соответственно почти периодическими по

Степанову порядка p , почти периодическими по Вейлю порядка p и почти периодическими по Безиковичу порядка p функциями на T_K .

Поскольку каждая сумма вида (1) равномерно ограничена на T_K , то d -почти периодическая функция на T_K обладает свойством $d(f, 0) < \infty$. С помощью аппроксимации d -почти периодической функции $f(z)$ суммами (1) можно показать существование предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| \leq \frac{x}{2}} f(z+t) dt, \quad (2)$$

этот предел не зависит от $x \in \mathbb{R}^m$ и является непрерывной функцией от $y \in K$.

Отметим, что в случае $d = d_K^C$, $d = d_{p,K}^S$, $d = d_{p,K}^W$ почти периодическую функцию можно определять и другим, эквивалентным способом, используя понятие ε -почти периода (при $m = 1$ см. [5], [2], при $m > 1$ и $d = d_K^C$ см. [9], [10].)

Определение. Функцию $f(z)$, $z \in T_D$, D - область в $\mathbb{R}^m$, назовем d -почти периодической внутри T_D , если она является d -почти периодической функцией на любом трубчатом множестве T_K , K - компакт в D .

Нам понадобится также следующее определение.

Определение. Функция $f(z)$ в T_D имеет конечный порядок внутри T_D , если для каждого компакта $K \subset D$ существует конечное $B = B(K)$ такое, что в T_K выполняется неравенство $|f(z)| \leq c e^{B|z|}$ с некоторой константой $c = c(K) < \infty$.

Отметим, что любая голоморфная функция в T_D , удовлетворяющая условию $d(f, 0) < \infty$ на любом компакте $K \subset D$, имеет в T_D конечный порядок.²

Класс голоморфных почти периодических функций в метрике d_K^C и произвольном m рассматривался в работах [7]-[11]; как отмечено в [13], класс голоморфных почти периодических функций в метрике $d = d_{p,K}^S$ совпадает с ним (при $m = 1$ это известная теорема Бора). Голоморфные почти периодические функции в метрике $d = d_{p,K}^B$ рассматривались в [1], [14], но только при $m = 1$.

Результатом настоящей работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в трубчатой области T_D с выпуклым основанием $D \subset \mathbb{R}^m$. Если функция $f(z)$ ограничена относительно метрики d на T_K для каждого компакта $K \subset D$, и при этом $f(z)$ - d -почти периодическая функция на плоскости $T_{\{y_0\}}$, $y_0 \in D$, то $f(z)$ - d -почти периодическая функция внутри T_D .

² Действительно, для $z_0 \in T_D$ имеем при некотором $r < \infty$ и больших $\|z_0\|$

$$|f(z_0)| \leq c \int_{B(r)} |f(z)| dx dy \leq c \sup_{\|y-y_0\| \leq r} \int_{\|x\| \leq 2\|z_0\|} |f(x, y)| dx \leq c' \|z_0\|^m d(f, 0)$$

Отметим, что в случае $d = d_K^C$ и $d = d_{p,K}^S$ эта теорема уже была доказана в [13].

Условие равномерной ограниченности можно ослабить:

Теорема 2. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в трубчатой области T_D с выпуклым основанием $D \subset \mathbb{R}^m$, конечного порядка внутри T_D , и пусть $f(z)$ ограничена в метрике d на $T_{\{y\}}$ для каждого $y \in D$. Тогда если $f(z)$ - d -почти периодическая функция на плоскости $T_{\{y_0\}}$, $y_0 \in D$, то $f(z)$ - d -почти периодическая функция внутри T_D .

В следующей теореме вместо условия ограниченности в метрике d предполагается d почти периодичность на конечном наборе плоскостей.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в трубчатой области T_D , пусть $f(x + iy)$ есть d -почти периодическая функция на плоскостях $T_{\{y_j\}}$, $j = 1, \dots, N$, $y_j \in D$, и пусть для некоторого $B < \infty$ такого, что $\max |y_j - y_k| < \frac{\pi}{2B}$, выполняется неравенство $|f(z)| \leq se^{B|z|}$ при $z \in T_{\text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}}$. Тогда $f(z)$ - d -почти периодическая функция на множестве $T_{\text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}}$.

Отметим, что близкая к теореме 3 теорема для метрик d_K^C и $d_{p,K}^S$ была доказана в [13].

Доказательство указанных теорем опирается на возможность аппроксимировать почти периодические функции в метрике d экспоненциальными суммами специального вида, так называемыми суммами Бохнера-Фейера.

Именно, ядром Бохнера-Фейера называется сумма

$$K_{\left(\begin{smallmatrix} n_1, \dots, n_r \\ \beta_1, \dots, \beta_r \end{smallmatrix}\right)}(t) = \sum_{\substack{|\nu_1| < n_1, \\ \dots \\ |\nu_r| < n_r}} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right) \dots \left(1 - \frac{|\nu_r|}{n_r}\right) e^{i\langle \nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_r \beta_r, t \rangle} \\ = \sum \gamma_j^{(n)} e^{i\langle t, \lambda_j \rangle},$$

где $\beta_1, \dots, \beta_r$ - линейно независимые над $\mathbb{Z}$ вектора в $\mathbb{R}^m$. При этом для любой d -почти периодической функции $f(z)$ можно выбрать такую последовательность β_j и такую последовательность ядер Бохнера-Фейера $K_n(t)$, что обобщенные тригонометрические полиномы

$$\sigma_n(z) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} f(z+t) K_n(t) dt \quad (3)$$

аппроксимируют функцию $f(z)$ в метрике d на T_K , (при $m = 1$, $K = \{0\}$ доказательство имеется в [2], при $m > 1$ и произвольном компакте K доказательство проводится аналогично). Отметим также, что любое ядро Бохнера-Фейера неотрицательно и четно.

Заметим, что если функции $f(x + iy)$ являются d -почти периодическими в T_K , то то же верно для функции $f(x + iy)e^{i\langle z, \lambda \rangle}$. Поэтому (3) можно также

переписать в виде конечной экспоненциальной суммы

$$\sigma_n(z) = \sum \gamma_j^{(n)} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} f(z+t) e^{-i\langle z+t, \lambda_j \rangle} dt \right] e^{i\langle z, \lambda_j \rangle}.$$

Так как внутренний предел существует и не зависит от x , то

$$\sigma_n(z) = \sum \gamma_j^{(n)} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} f(iy+t) e^{-i\langle iy+t, \lambda_j \rangle} dt \right] e^{i\langle z, \lambda_j \rangle}. \quad (4)$$

Кроме функции $\sigma_n(z)$ нам понадобится также функция

$$\sigma_{L,n}(z) = \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} f(z+t) K_n(t) dt.$$

Изучим, как связаны между собой $\sigma_{L,n}(z)$, $\sigma_n(z)$ и $f(z)$. При этом вначале рассмотрим случай фиксированного y , например, $y = 0$.

Лемма 1. Для любых $L \geq L(n)$, $X \geq L$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(t)|^p dt \leq 2^{m+1} \left(\frac{1}{2X} \right)^m \int_{\|t\| < X} |f(t)|^p dt.$$

Доказательство.

В силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(t)|^p dt &\leq \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} \frac{1}{L^m} \int_{\|x\| < \frac{L}{2}} |f(x+t)|^p K_n(x) dx dt \leq \\ &\frac{1}{X^m} \int_{\|u\| < X} |f(u)|^p \frac{1}{L^m} \int_{\|x\| < \frac{L}{2}} K_n(x) dx du. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как среднее значение (2) от функции $K_n(x)$ есть единица, то при L достаточно больших $\frac{1}{L^m} \int_{\|x\| < \frac{L}{2}} K_n(x) dx \leq 2$.

Поэтому из (5) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Если $f(x)$ - d -почти периодическая функция в $T_{\{0\}}$, то $\lim_{L \rightarrow \infty} d(\sigma_{L,n}, \sigma_n) = 0$.

Доказательство.

Запишем $K_n(t)$ в виде конечной суммы $K_n(t) = \sum_j \gamma_j^{(n)} e^{i\langle t, \lambda_j \rangle}$. Имеем

$$\sigma_{L,n}(t) = \sum \gamma_j^{(n)} \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} f(x+t) e^{i\langle t, \lambda_j \rangle} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \gamma_j^{(n)} \left\{ \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} f_j(x+t) dt \right\} e^{-i\langle x, \lambda_j \rangle}, \\
\sigma_n(t) &= \sum \gamma_j^{(n)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| \leq \frac{T}{2}} f(x+t) e^{i\langle t, \lambda_j \rangle} dt \\
&= \sum \gamma_j^{(n)} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| \leq \frac{T}{2}} f_j(x+t) dt \right\} e^{-i\langle x, \lambda_j \rangle},
\end{aligned}$$

где через $f_j(x)$ обозначена функция $f(x)e^{i\langle x, \lambda_j \rangle}$.

Из определения расстояния d следует

$$d(\sigma_{L,n} \sigma_n) \leq \sum \gamma_j^{(n)} d \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} f_j(x+t) dt, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| < \frac{T}{2}} f_j(x+t) dt \right).$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что каждое слагаемое в правой части стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$.

Зафиксируем j и выберем $\varepsilon > 0$. Выберем конечную экспоненциальную сумму $P(x) = \sum a_k e^{i\langle x, \mu_k \rangle}$ так, чтобы $d(f_j, P) < \frac{\varepsilon}{3}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&d \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} f_j(x+t) dt, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| < \frac{T}{2}} f_j(x+t) dt \right) \leq \\
&d \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} f_j(x+t) dt, \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} P(x+t) dt \right) + \\
&d \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| < \frac{L}{2}} P(x+t) dt, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| < \frac{T}{2}} P(x+t) dt \right) + \\
&d \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| < \frac{T}{2}} P(x+t) dt, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^m} \int_{\|t\| < \frac{T}{2}} f_j(x+t) dt \right) \\
&= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Так как $P(t)$ есть d_K^C -почти периодическая функция на $T_{\{0\}}$, то среднее значение от этой функции существует равномерно относительно сдвигов на $x \in \mathbf{R}^m$, и при достаточно больших L выполняется неравенство $A_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Как было отмечено ранее, предел в выражении A_3 не зависит от x , поэтому при любом p и для любой метрики d

$$A_3 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^m} \int_{\|t\| \leq \frac{T}{2}} |P(t) - f_j(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = d_{p,\{0\}}^B(f_j, P) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Проверим, что выражение A_1 также не превосходит $\frac{\varepsilon}{3}$.

В случае $d = d_{\{0\}}^C$ это очевидно.

Далее, для метрики $d = d_{p,\{0\}}^S$ имеем в силу неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(\int_{\|u\| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} f_j(x+t+u) - P(x+t+u) dt \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \int_{\|u\| \leq \frac{1}{2}} |f_j(x+u) - P(x+u)|^p du dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq d_{p,\{0\}}^S(f_j, P) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Для метрики $d = d_{p,\{0\}}^W$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|u\| \leq \frac{X}{2}} \left| \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} f_j(x+t+u) - P(x+t+u) dt \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{X^m} \int_{\|u\| \leq \frac{X}{2}} |f_j(x+u) - P(x+u)|^p du dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq d_{p,\{0\}}^W(f_j, P) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Наконец, при $d = d_{p,\{0\}}^B$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|x\| \leq \frac{X}{2}} \left| \frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} f_j(x+t) - P(x+t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L^m} \int_{\|t\| \leq \frac{L}{2}} \frac{1}{X^m} \int_{\|x\| \leq \frac{X+L}{2}} |f_j(x) - P(x)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \end{aligned}$$

$$\overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{(X+L)^m}{X^m} \cdot \frac{1}{(X+L)^m} \int_{||x|| \leq \frac{X+L}{2}} |f_j(x) - P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= d_{p, \{0\}}^B(f_j, P) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Доказательство теорем 1 - 3 использует также следующие леммы:

Лемма 3. Пусть $\chi(w)$ - субгармоническая функция в полосе

$$S_{0,1} = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < v < 1\}$$

и полунепрерывна сверху в ее замыкании, $\chi(u) \leq M$, $\chi(u+i) \leq M$ при $u \in \mathbb{R}$ и $\chi(w) \leq ce^{B|u|}$ с константой $B < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\chi(w) \leq M$ в $S_{0,1}$ и, кроме того, функция $\phi(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \chi(w)$ выпукла на $[0, 1]$.

Эта лемма для случая, когда $\chi(w) = \log |g(w)|$ для голоморфной в $S_{0,1}$ и непрерывной в $\overline{S_{0,1}}$ функции $g(w)$ имеется, например, в [12], с. 186. Однако доказательство использует только принцип максимума, и поэтому легко переносится на субгармонические функции.

Близкой к этой лемме являются следующие леммы.

Лемма 4. Пусть $\chi(w)$, $w = u + iv$ - субгармоническая функция в прямоугольнике $\{|u| < \frac{R}{2}, 0 < v < 1\}$, полунепрерывная сверху в его замыкании, пусть $\chi(w) \leq M$ при $v = 0$ или $v = 1$, а при $|u| = \frac{R}{2}$ выполняется неравенство $|\chi(w)| \leq ce^{BR}$. Тогда при всех $v \in [0, 1]$ имеем $\chi(iv) \leq M + \frac{16c}{\pi^2} e^{(B - \frac{\pi}{2})R}$.

Доказательство леммы 4.

Рассмотрим гармоническую меру $\omega_R(w)$ отрезков $\{|u| = \frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ относительно прямоугольника $\{|u| \leq \frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$, то есть ограниченную гармоническую функцию в этом прямоугольнике с граничными условиями $\omega_R(\pm \frac{R}{2} + iv) = 1$, $\omega_R(u) = 0$, $\omega_R(u+i) = 0$. Оценим сверху $\omega_R(w)$ на множестве $\{u = 0, 0 \leq v \leq 1\}$. Рассмотрим гармоническую меру $\omega_R^{(1)}(w)$ отрезка $\{u = \frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ относительно прямоугольника $\{|u| \leq \frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ и гармоническую меру $\omega_R^{(2)}(w)$ отрезка $\{u = -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ относительно этого же прямоугольника.

Ввиду единственности гармонической меры имеем

$$\omega_R(w) = \omega_R^{(1)}(w) + \omega_R^{(2)}(w), \quad \omega_R^{(2)}(u+iv) = \omega_R^{(1)}(-u+iv). \quad (6)$$

Рассмотрим гармоническую меру $\omega_R^{(3)}(w)$ отрезка $\{u = -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ относительно полуполосы $\{u \geq -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$. Применив принцип максимума для гармонической функции $\omega_R^{(3)}(w) - \omega_R^{(2)}(w)$ в прямоугольнике $\{|u| \leq \frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$, имеем $\omega_R^{(3)}(w) \geq \omega_R^{(2)}(w)$.

Теперь оценим сверху гармоническую меру $\omega_R^{(3)}(w)$ на множестве $\{u = 0, 0 \leq v \leq 1\}$. Рассмотрим конформное отображение $\zeta(w)$ полуполосы $\{u \geq -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ на верхнюю полуплоскость такое, чтобы отрезок $\{u = -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ перешел в отрезок $\{|\xi| \leq 1, \eta = 0\}$, то есть

$$\zeta(w) = \frac{1}{2} \left(e^{\pi(w + \frac{R}{2})} + e^{-\pi(w + \frac{R}{2})} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

При этом гармоническая мера $\omega_R^{(3)}(w)$ отрезка $\{u = -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ относительно полуполосы $\{u \geq -\frac{R}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$ перейдет в гармоническую меру $\omega_R^{(4)}(\zeta)$ отрезка $\{|\xi| \leq 1, \eta = 0\}$ относительно верхней полуплоскости.

Легко видеть, что $\omega_R^{(4)}(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\pi}$, где $\alpha(\zeta)$ - угол, под которым виден отрезок $\{|\xi| \leq 1, \eta = 0\}$ из точки ζ .

Далее, отрезок $\{u = 0, 0 \leq v \leq 1\}$ переходит в верхнюю половину эллипса

$$\left\{ \zeta = \xi + i\eta : \frac{\xi^2}{ch^2 \frac{\pi R}{2}} + \frac{\eta^2}{sh^2 \frac{\pi R}{2}} = 1, \eta \geq 0 \right\}.$$

Простые вычисления показывают, что для точек ζ из этого множества наибольший угол $\alpha(\zeta)$ будет в точке $\zeta_0 = i sh \frac{\pi R}{2}$. Так как $\sin \frac{\alpha(\zeta_0)}{2} = \frac{1}{|ch \frac{\pi R}{2}|}$, то

$$\alpha(\zeta_0) \leq \frac{8}{\pi^2 \left(e^{\frac{\pi R}{2}} + e^{-\frac{\pi R}{2}} \right)} \leq \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi R}{2}}. \text{ Таким образом, имеем } \omega_R^{(3)}(iv) \leq \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi R}{2}}$$

и $\omega_R^{(2)}(iv) \leq \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi R}{2}}$. Из (6) теперь следует неравенство $\omega_R(iv) \leq \frac{16}{\pi^2} e^{-\frac{\pi R}{2}}$. В силу стандартной оценки субгармонической функции с помощью гармонической меры (см. [6], с. 95) имеем $\chi(iv) \leq ce^{BR} \omega_R(iv) + M(1 - \omega_R(iv))$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $\chi(w)$ - субгармоническая функция в прямоугольнике

$$\Pi = \left\{ w = u + iv, |u| < \frac{R}{2}, 0 < v < 1 \right\},$$

неположительна и полунепрерывна сверху в замыкании этого прямоугольника. Тогда для любых $\alpha < 1$, $\beta \in (0, \frac{R}{2})$ найдется не зависящая от R константа $\gamma > 0$ такая, что если $\chi(u) \leq -1$ при $|u| \leq \beta$, то $\chi(iv) \leq -\gamma$ при $0 \leq v \leq \alpha$.

Доказательство.

Пусть $\tilde{\omega}(w)$ - гармоническая мера отрезка $\{|u| \leq \beta, v = 0\}$ относительно прямоугольника Π , $\omega(w)$ - гармоническая мера отрезка $\{|u| \leq \beta, v = 0\}$ относительно прямоугольника $\{|u| \leq \beta, 0 \leq v \leq 1\}$. Применяя в прямоугольнике $\{|u| \leq \beta, 0 \leq v \leq 1\}$ принцип максимума к функции $\omega(w) - \tilde{\omega}(w)$, получаем, что в этом прямоугольнике $\tilde{\omega}(w) > \omega(w)$. Так как гармоническая функция не может достигать минимума внутри области, то существует $\gamma > 0$ такое, что $\omega(w) > \gamma$ на множестве $\{u = 0, 0 \leq v \leq \alpha\}$.

Рассмотрим функцию $\theta(w) = \chi(w) + \bar{\omega}(w)$. Эта функция ограничена в прямоугольнике Π и не превосходит нуля на границе прямоугольника, действительно, при $|u| \leq \beta$, $v = 0$ имеем $\theta(w) \leq -1 + 1 = 0$, а на остальных сторонах прямоугольника Π имеем $\theta(w) \leq 0$. Поэтому $\chi(w) \leq -\bar{\omega}(w)$ в прямоугольнике Π . Таким образом, на отрезке $\{u = 0, 0 \leq v \leq \alpha\}$ выполняется неравенство $\chi(w) \leq -\bar{\omega}(w) \leq \omega(w) \leq -\gamma$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть D - ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^m$, $0 \in \bar{D}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$, любых $N > -\infty$, $M < \infty$ найдется такое число $N' > -\infty$, что для любой плюрисубгармонической в окрестности $\bar{D}$ функции $\psi(z)$ из неравенств $\psi(z) \leq M$ в $T_{\bar{D}}$ и $\psi(x) \leq N'$ в $\mathbb{R}^m$ следует, что $\psi(z) \leq N$ в $T_{\alpha\bar{D}}$.

Доказательство леммы 6.

Пусть $\psi(z)$ - плюрисубгармоническая функция в окрестности $\bar{D}$, удовлетворяющая условию леммы, $z' = x' + iy'$ - произвольная точка множества $T_{\bar{D}}$. Функция $\chi(w) = \psi(x' + wy')$ не превосходит M в $S_{0,1}$ и удовлетворяет остальным условиям леммы 3, поэтому функция $\varphi(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \chi(w)$ выпукла на $[0, 1]$, в частности $\varphi(\alpha) \leq (1 - \alpha)\varphi(0) + \alpha\varphi(1)$ и, таким образом, $\psi(x' + i\alpha y') \leq (1 - \alpha)N' + \alpha M$. Так как выбор точки $x' + iy' \in \bar{D}$ был произволен, то лемма доказана.

Лемма 7. Пусть D - ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^m$, $0 \in \bar{D}$, и пусть $G = \{z \in \mathbb{C}^m : |x| < \frac{R}{2}, y \in \bar{D}\}$, $R > 2$. Тогда для любых $\alpha \in (0, 1)$, $N > -\infty$, $M < \infty$ найдется такая не зависящая от R константа $N' > -\infty$, что плюрисубгармоническая в окрестности $\bar{G}$ функция $\psi(z)$, удовлетворяющая условиям $\psi(z) \leq M$ в G , $\psi(x) \leq N'$ при $|x| \leq 1$, удовлетворяет также неравенству $\psi(iy) \leq N$ при $y \in \alpha\bar{D}$.

Доказательство леммы 7.

Предположим, что функция $\psi(z)$ плюрисубгармонична в окрестности $\bar{G}$ и удовлетворяет условиям леммы с некоторыми $M < \infty$, $N' > -\infty$. Зафиксируем $y' \in \bar{D}$ и положим для $w = u + iv \in \mathbb{C}$

$$\chi(w) = \frac{\psi(wy') - M}{M - N'}.$$

Функция $\chi(u)$ является неотрицательной субгармонической в окрестности прямоугольника $\{w : |u| \leq \frac{R}{2c}, 0 \leq v \leq 1\}$, где $c = \sup_{y \in \bar{D}} |y|$, и при этом

$\chi(u) \leq -1$ при $|u| \leq \frac{1}{c}$. Поэтому по лемме 5 имеем $\chi(iv) \leq -\gamma$ при $0 \leq v \leq \alpha$ и, следовательно, $\psi(i\alpha y') \leq \gamma(N' - M) + M$. Выбор $y' \in \bar{D}$ был произвольным, поэтому отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.

Не ограничивая общности, будем считать $y_0 = 0$. Пусть K - произвольный компакт в D , $0 \in K$. Выберем выпуклые области D_1, D_2 так, что $K \subset D_1 \subset \subset D_2$

$D_2 \subset \subset D$. Рассмотрим обобщенный тригонометрический полином

$$P_n(z) = \sum \gamma_j^{(n)} \left(\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} f(t) e^{-i\langle t, \lambda_j \rangle} dt \right) e^{i\langle z, \lambda_j \rangle},$$

где $\gamma_j^{(n)}$, λ_j те же, что и в (4), и положим также

$$v_{X,n}(z) = \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |f(z+t) - P_n(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$u_{X,L,n}(z) = \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(z+t) - P_n(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Очевидно, что последние две функции логарифмически плюрисубгармонические в T_D . Из формулы (4) следует, что $P_n(x) = \sigma_n(x)$, поэтому $P_n(x)$ аппроксимирует $f(x)$ в метрике d на $T_{\{0\}}$ и, следовательно, для любого $\delta > 0$ можно найти номер n такой, что $d(f, P_n) < \delta$ на $T_{\{0\}}$.

Пусть L столь большое, что выполнены условия леммы 1. Пользуясь леммой 2, можно также считать $L \geq L(n, \delta_1)$ таким, что на $T_{\{0\}}$ выполняется неравенство

$$d(\sigma_{L,n}, P_n) < \delta_1, \quad (7)$$

δ и δ_1 будут выбраны позже.

Пусть вначале $d = d_{p,K}^W$ - метрика Вейля. Прежде всего, заметим, что для любого фиксированного n функция $P_n(z)$ ограничена в T_{D_2} . Так как $d_{p,D_2}^W(f, 0) = c(D_2) < \infty$, то при X достаточно больших и всех $x + iy \in T_{D_2}$

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |f(x + iy + t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2c(D_2). \quad (8)$$

Теперь по лемме 1, примененной к функции $f(z+t)$, имеем

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|x\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(z+t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{m+1}{p}+1} c(D_2) = c_1(D_2).$$

Далее, из неравенства Минковского следует, что функция $u_{X,L,n}(z)$ ограничена при достаточно больших X равномерно в T_{D_2} . Кроме того, из (7) при

$X \geq X(n)$ следует неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left[\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| \leq \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(x+t) - P_n(x+t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq 2\delta_1,$$

то есть $\log u_{X,L,n}(x) \leq \log 2\delta_1$. Следовательно, к плюрисубгармонической функции $\log u_{X,L,n}$ и области T_{D_2} можно применить лемму 6 с какой-то, не зависящей от X , константой $M = \sup_{z \in T_{D_2}} \log u_{X,L,n}(z)$. Если выбрать $\alpha < 1$

так, что $\alpha D_2 \supset \overline{D_1}$, то по этой лемме при всех достаточно больших X и при некотором $\delta_1 = \delta_1(n)$ выполняется неравенство $u_{X,L,n}(z) \leq c_1(D_2)$ в T_{D_1} .

Таким образом, в T_{D_1} имеем

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |P_n(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$u_{X,L,n}(z) + \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2c_1(D_2).$$

Отсюда и из (8) следует, что функция $v_{X,n}(z)$ при $X \geq X(n)$ ограничена константой $c(D_2) + c_1(D_2)$ в T_{D_1} .

Далее, применим лемму 6 к плюрисубгармонической функции $\log v_{X,n}(z)$, пользуясь тем, что $\log v_{X,n}(x) \leq \log 2\delta$ при X достаточно больших и всех $x \in \mathbb{R}^m$. Выбирая в этой лемме $\alpha < 1$ так, что $K \subset \alpha D_1$,

$$M = \log(c(D_1) + 2c_1(D_2)), \quad N = \log \varepsilon,$$

получаем, что при достаточно малом $\delta > 0$ и при всех $X \geq X(n)$ в точках $z \in T_K$ выполняется неравенство $v_{X,n}(z) \leq \varepsilon$, где ε - выбранное наперед произвольно малое положительное число.

Следовательно, $d_{p,K}^W(f, P_n) \leq \varepsilon$, что означает, что $f(z)$ есть $d_{p,K}^W$ -почти периодическая функция внутри T_D .

Пусть теперь $d = d_{p,K}^B$ - метрика Безикевича. Как и раньше, функция $P_n(z)$ ограничена в T_{D_2} . Далее, так как $d_{p,D_2}^B(f, 0) = c(D_2) < \infty$, то при X достаточно больших и $x + iy \in T_{D_2}$ таких, что $|x| \leq \frac{X}{2}$, имеем

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| \leq \frac{X}{2}} |f(x+iy+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$2^{\frac{m}{p}} \left(\frac{1}{(2X)^m} \int_{\|t\| \leq X} |f(iy+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{m}{p}+1} c(D_2).$$

Теперь по лемме 1, примененной к функции $f(x+iy+t)$, имеем при $\|x\| \leq \frac{X}{2}$, $y \in D_2$

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(z+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{2m}{p}+2} c(D_2).$$

Итак, функции $u_{X,L,n}(z)$ ограничены при достаточно больших X равномерно по n на множестве $\{z \in \mathbb{C}^m : |x| < \frac{X}{2}, y \in D_2\}$.

Далее, из (7) следует, что при $|x| \leq 1$ и достаточно больших X

$$u_{X,L,n}(x) = \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(x+t) - P_n(x+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$2^{\frac{m}{p}} \left(\frac{1}{(2X)^m} \int_{\|t\| \leq X} |\sigma_{L,n}(t) - P_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{m}{p}} \delta_1.$$

Применяя лемму 7 к функции $\log u_{X,L,n}(z)$ с константами

$$M = \sup_{|x| \leq \frac{X}{2}, y \in D_2} \log u_{X,L,n}(z), \quad N = \log c_2(D_2),$$

и тем же α , что и раньше, получим, что при некотором $\delta_1 = \delta_1(n)$ выполняется неравенство $u_{X,L,n}(iy) \leq c_1(D_2)$ для $y \in D_1$.

Теперь по неравенству Минковского получаем для тех же y

$$u_{X,L,n}(iy) + \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |\sigma_{L,n}(iy+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2c_1(D_2)$$

и для $|x| \leq \frac{X}{2}$

$$\left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |P_n(x+iy+t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$2^{\frac{m}{p}} \left(\frac{1}{(2X)^m} \int_{\|t\| \leq X} |P_n(iy + t)|^p dt \right) \leq 2^{\frac{m}{p}+1} c_2(D_2).$$

Применяем лемму 7 к функции $\log v_{X,n}(z)$, области D'' , α такому, что $K \subset \alpha D$ с $M = \sup_{|x| \leq \frac{X}{2}, y \in D''} \log v_{X,n}(z)$, $N = \log \varepsilon$, получим, что при достаточно малом

$\delta > 0$ и при всех больших X в точках $y \in K$ выполняется неравенство $v_{X,n}(iy) \leq \varepsilon$. Отсюда следует, что $d_{p,K}^B(f, P_n) \leq \varepsilon$. Ввиду произвольности ε функция f есть $d_{p,K}^B$ -почти периодическая. Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $f(z)$ голоморфна в T_D и удовлетворяет оценке $|f(z)| \leq se^{B|z|}$. Если $f(z)$ ограничена в метрике d на плоскостях $T_{\{y_j\}}$, $j = 1, \dots, N$ и $|y_j - y_k| B < \frac{\pi}{2}$ для всех j, k , то $f(z)$ - ограничена в метрике d на $T_{\text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}}$.

Доказательство предложения 1.

Зафиксируем y' , $y'' \in \text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}$. Положим

$$\chi^{(1)}(x, w) = \log |f(x + w(y'' - y') + iy')|,$$

$$\chi_X^{(3)}(x, w) = \log \left| \frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |f(x + t + w(y'' - y') + iy')|^p dt \right|^{\frac{1}{p}},$$

$$\chi^{(2)}(x, w) = \chi_1^{(3)}(x, w), \quad \chi_X^{(4)}(w) = \chi_X^{(3)}(0, w), \quad w = u + iv \in S_{0,1}.$$

Из условия следует оценка

$$\chi_X^{(3)}(x, w) \leq e^{B|x| + B\frac{X}{2} + B|y'' - y'| |u|} + \log c. \quad (9)$$

Поэтому при фиксированном x и X функции $\chi^{(2)}(x, w)$ и $\chi_X^{(3)}(x, w)$ в полосе $S_{0,1}$ оцениваются сверху величиной $e^{B'|u|}$ с $B' < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, подобную оценку допускает и функция $\chi^{(1)}(x, w)$. Далее, в случае $d = d_K^C$ функция $\chi^{(1)}(x, w)$ равномерно по x ограничена на прямых $v = 0$ и $v = 1$; в случае $d = d_{p,K}^S$ то же верно для функции $\chi^{(2)}(x, w)$, а в случае $d = d_{p,K}^W$ это верно при всех достаточно больших X для функции $\chi_X^{(4)}(w)$. Поэтому, пользуясь леммой 3, получаем, соответственно, что функции $\sup_{u \in \mathbb{R}} \chi^{(j)}(x, w)$, $j = 1, 2, 3$ выпуклые по переменной $v \in [0, 1]$, и то же верно для функций $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \chi^{(j)}(x, w)$, то есть их значения в точках $v \in [0, 1]$ не превосходят значений на концах сегмента (для функции $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \chi_X^{(3)}(x, w)$ это верно при всех X достаточно больших).

Далее, в случае $d = d_{p,K}^B$ из условия следует, что функция $\chi_X^{(4)}(w)$ в точках $w = 0$ и $w = i$ при всех достаточно больших X не превосходят некоторой константы M . Следовательно, для любого R и X достаточно больших при $|u| \leq \frac{R}{2}$

имеем $\chi_X^{(4)}(w) \leq \log \left| \left(\frac{X+R|y'-y''|}{X} \right)^m \frac{1}{X+R|y'-y''|} \int_{\|t\| \leq \frac{X+R|y'-y''|}{2}} |f(t+iy')|^p dt \right|^{\frac{1}{p}} \leq$
 $M + m \log \left(1 + \frac{R|y'-y''|}{X} \right)$ и такая же оценка справедлива на множестве $\{u+i: |u| \leq \frac{R}{2}\}$.

Пользуясь неравенством (9) и применяя к функции $\chi_X^{(4)}(w)$ лемму 4 с $c = e^{\frac{BX}{2}}$, имеем для любого $v \in [0, 1]$ и X достаточно больших

$$\chi_X^{(4)}(iv) \leq M + m \log \left(1 + \frac{R|y'-y''|}{X} \right) + \frac{16}{\pi} e^{\frac{BX}{2}} e^{(B|y'-y''|-\frac{\pi}{2})R}. \quad (10)$$

По условию $B \text{diam}\{y_1, \dots, y_N\} < \frac{\pi}{2}$, поэтому для некоторого $\gamma > 0$, не зависящего от y', y'' , имеем

$$\frac{\pi}{2} - B|y' - y''| < \frac{\gamma B}{2}.$$

Полагая $R = \frac{X}{\gamma}$, получаем из (10), что при всех достаточно больших X выполняется неравенство $\chi_X^{(4)}(iv) \leq M'$, где константа M' зависит только от B и $\text{diam}\{y_1, \dots, y_N\}$.

Положим теперь

$$\phi^{(1)}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x+iy)|,$$

$$\phi^{(2)}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(\int_{\|t\| < \frac{1}{2}} |f(x+t+iy)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\phi_X^{(3)}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |f(x+t+iy)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\phi_X^{(4)}(y) = \left(\frac{1}{X^m} \int_{\|t\| < \frac{X}{2}} |f(t+iy)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из вышесказанного следует, что при условии $|y' - y''|B < \frac{\pi}{2}$ значения $\phi^{(1)}(y)$, $\phi^{(2)}(y)$ на отрезке $[y', y'']$ не превосходят их значений на концах отрезка; для $\phi_X^{(3)}(y)$ это верно при достаточно больших X . Аналогичная оценка при больших X верна и для функции $\phi_X^{(4)}(y)$, однако, в этом случае возникает зависящий от $\text{diam}\{y_1, \dots, y_N\}$ множитель.

Из вышесказанного уже вытекает справедливость предложения при $N = 2$. Предположим теперь, что равномерные оценки для функций $\phi^{(j)}(y)$ верны для всех $y \in \text{conv}\{y_1, \dots, y_{N-1}\}$ и при всех $X > X_0$, где X_0 не зависит от y .

Пусть $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_N y_N$, $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$, тогда имеем

$$y = (\lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1})y' + \lambda_N y_N,$$

где $y' = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1}} y_1 + \dots + \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1}} y_{N-1}$ - точка из $\text{conv}\{y_1, \dots, y_{N-1}\}$.

По предположению индукции оценка функций $\phi^{(j)}$ в точке y' не зависит от $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$, поэтому не зависит от $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и оценка этих функций в точке y . Отсюда следует утверждение для данного N . Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2.

Зафиксируем $D' \subset\subset D$ и пусть $\{P_n\}$, $P_n \subset\subset D$, есть покрытие D' открытыми выпуклыми многогранниками такими, что $\text{diam } P_n \cdot B(D') < \frac{\pi}{2}$, $P_n \subset D$. В силу предложения 1 $f(z)$ ограничена в метрике d на каждом T_{P_n} . Отсюда следует, что $f(z)$ ограничена в метрике d в некоторой окрестности $\overline{D'}$, и теорема 2 вытекает из теоремы 1.

Доказательство теоремы 3, кроме предложения 1, опирается также на следующее предложение.

Предложение 2. Пусть $f(z)$ голоморфна в T_D , $0 \in \overline{D}$, $y_1, \dots, y_N \in D$, пусть $f(x)$ - d -почти периодическая на $T_{\{0\}}$ и ограничена в метрике d на множестве $T_{\text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}}$. Тогда для любого $\alpha < 1$ функция $f(z)$ является d -почти периодической на множестве $T_{\text{conv}\{0, \alpha y_1, \dots, \alpha y_N\}}$.

Доказательство этого предложения по существу повторяет доказательство теоремы 1. Единственное отличие состоит в том, что лемма 6 (или, для случая метрики Безикевича, лемма 7) применяется к функции $u_{X,L,n}(z)$ и множеству $T_{\text{conv}\{0, y_1, \dots, y_N\}}$ с параметром $\sqrt{\alpha}$, а затем к функции $v_{X,n}(z)$ и множеству $T_{\text{conv}\{0, \sqrt{\alpha} y_1, \dots, \sqrt{\alpha} y_N\}}$ с тем же параметром $\sqrt{\alpha}$.

Доказательство теоремы 3.

Так как d -почти периодичность влечет ограниченность в метрике d , то из условия теоремы 3 и предложения 1 следует, что $f(z)$ ограничена в метрике d на $T_{\text{conv}\{0, y_1, \dots, y_N\}}$. Применяя предложение 2 к функции $f(z - iy_j)$, $j = 1, \dots, N$, получаем, что $f(z)$ есть d -почти периодическая функция на множествах вида

$$T_{\text{conv}\{\alpha(y_1 - y_j) + y_j, \alpha(y_2 - y_j) + y_j, \dots, \alpha(y_N - y_j) + y_j\}}$$

для каждого $j = 1, \dots, N$, причем на каждом таком множестве $f(z)$ можно аппроксимировать в метрике d суммами Бохнера-Фейера. Так как эти суммы зависят только от $f(z)$, то $f(z)$ можно аппроксимировать на объединении таких множеств, а это объединение при α близких к 1 равно $T_{\text{conv}\{y_1, \dots, y_N\}}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bauermeister Hanns. Besicovitch-Fastperiodizitat holomorpher Dirichlet-funktionen mit Funktionalgleichung. // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. II. - 1975. - 13. - P. 217-219.

2. Besicovitch A.S. Almost Periodic Functions. – Great Britain. The University Press, Cambridge, 1932. – 180 p.
3. Bohr Н. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III Teil: Dirichletentwicklung analytischer Funktionen. // Acta math. – 1926. – 47. – P. 237-281.
4. Bohr Н. Contribution to the theory of analytic almost-periodic functions. – Kobenhaven, 1943. – 37 p.
5. Левитан Б. М. Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
6. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: “Наука”, 1971. – 430 с.
7. Ронкин Л. И. CR-функции и голоморфные почти периодические функции с целым конечным базисом. // МАГ. – 1997. – Т.4. – С. 472-490.
8. Ронкин Л. И. О некотором классе голоморфных почти периодических функций. // СМЖ. – 1992. – 33. – С. 135-141.
9. Ронкин Л. И. Почти периодические обобщенные функции в трубчатых областях. // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1997. – 247. – С. 210-236.
10. Ронкин Л. И. Теорема Йессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях. // СМЖ – 1987. – 28. – С. 199-204.
11. Ронкин Л. И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. – К.: “Наук. думка”, 1977. – 167 с.
12. Титчмарш Е. Теория функций: Пер. с англ. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
13. Удодова О.И. Голоморфные почти периодические функции в различных метриках. // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. – 2001. – В. 51, 542. – С. 96-105.
14. Фаворов С., Удодова О. Аналітичні майже періодичні функції у метриці Безіковича. // Вісник Львівського університету, серія механіко-математична. – 2000. – 58. – С. 41-47.

Исследование плоского напряженно-деформированного состояния растущего биологического материала при ограничении роста

Б. Я. Кантор¹, Н. Н. Кизилова²

¹Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины

²Харьковский национальный университет, Украина

В работе представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния пластины из растущего биологического материала при условии полного или частичного ограничения роста по периметру. Материал полагался вязкоупругой сплошной средой, а в качестве ограничения рассматривалась гибкая нерастяжимая полимерная нить. Для случая полного ограничения решение задачи получено в виде разложения по системе ортогональных полиномов. Численные расчеты проведены с помощью метода конечных элементов. Получены распределения напряжений и исследованы деформации пластины на разных стадиях роста. Показано, что распределение напряжений и направления главных осей тензора напряжений существенно меняются вблизи области ограничения. Предложены методики экспериментального определения влияния поля напряжений на рост биологических материалов.

2000 *Mathematics Subject Classification* 76A10.

1. Введение

Рост биологических тканей неразрывно связан с протекающими в них механическими процессами – движением по специальным проводящим системам жидкости, которая доставляет необходимые для роста компоненты, межклеточным теплообменом, фильтрацией жидкости во внеклеточном пространстве, изменением объемов инфинитиземальных элементов среды (объемный рост) или адсорбцией вещества на распределенной системе поверхностей (поверхностный рост) [1]. Механические факторы играют определяющую роль в локальной регуляции скорости и направления роста, а, в конечном счете, структуры и механических свойств биологических материалов. Даже процессы, связанные с генетическими факторами роста, опосредуются полем механических напряжений [2]. В качестве основных физических параметров растущих тканей выступают реологические свойства клеточных мембран и

внеклеточных структур (например, клеточных стенок у растений), гидравлическое сопротивление клеточных и тканевых проводящих путей [3]. Возникающие в ходе нормального роста поля напряжений выполняют регуляторную функцию, способствуя ориентации волокон в растущих тканях в определенных направлениях [1,3-6]. В результате такой регуляции в ткани образуется каркас из упругих или вязкоупругих элементов, расположенных вдоль главных направлений тензора напряжений, что способствует формированию биоматериалов с оптимальными свойствами – высокой прочностью по отношению к физиологической нагрузке при максимально облегченном весе конструкции. В растительных тканях это достигается образованием в делящейся растительной клетке новой клеточной стенки параллельно или перпендикулярно линиям главных напряжений в каждой точке среды [3-6].

В настоящей работе представлены результаты исследования влияния поля напряжений на рост листовой пластинки. Постановка задачи роста для континуальной модели при условии ограничения роста является новой и в литературе до настоящего времени не рассматривалась.

2. Модель растущего континуума

В механике растущие материалы рассматриваются как двухфазные вязкоупругие сплошные среды, состоящие из деформируемого пористого каркаса (совокупность клеточных стенок) и заполняющей его поры вязкой жидкости (внутриклеточная и внеклеточная жидкости). Жидкость, транспортируемая по элементам проводящей системы, обеспечивает непрерывный приток дополнительного вещества, которое откладывается на каркасе (поверхностях твердой фазы) в ходе биохимических реакций. В квазиодномерном приближении поведение такой среды описывается на основе законов сохранения массы и импульса для среды с источниками массы, причем в силу больших характерных времен ростовых деформаций уравнения движения рассматриваются в квазистатической постановке [1,7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\vartheta \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{F} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{e} = \hat{A} + \hat{B} \hat{\sigma} + \frac{d}{dt} (\hat{C} \hat{\sigma}) \quad (3)$$

где $\theta = -\operatorname{div}(\rho_f(\vec{v}_f - \vec{v}))$, $\hat{e}, \hat{\sigma}$ – тензоры скоростей деформаций и напряжений, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – тензорные реологические коэффициенты, $\hat{A}$ – собственные скорости роста материала при отсутствии напряжений, ρ_f, ρ – плотности жидкой фазы и среды в целом, $\vec{v}_f, \vec{v}$ – скорости жидкой и твердой фазы, причем

последняя принимается за скорость растущей среды в целом, $\vec{F}$ – внешние объемные силы. При этом растущий материал соответствует реологии термо-вязкоупругого тела, для которого из (3) следует обобщенный закон Гука в виде:

$$\hat{\sigma} = L^{-1} [\hat{e} - \hat{A}], \quad L = \hat{B} + \frac{d\hat{C}}{dt} + \hat{C} \frac{d}{dt} \quad (4)$$

В зависимости от условий задачи источники массы в (1) могут задаваться из физических соображений и особенностей роста ткани, а могут вычисляться на основе эмпирических данных о кинематике роста ткани. В последнем случае уравнение (1) позволяет вычислять массопroduкцию (однородную или неоднородную) и является основным уравнением для анализа кинематики роста биоматериала. При этом задача (2)-(3) может быть решена отдельно в случае задания соответствующих граничных условий:

$$\vec{\sigma}_n|_{\Gamma_1} = \vec{\sigma}^*, \quad \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}^*, \quad (5)$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – поверхность растущего тела, на части поверхности Γ_1 заданы условия в напряжениях, а на остальной части Γ_2 – в скоростях перемещений. Задача (2)-(3),(5) соответствует стандартной постановке задач вязкоупругости в переменных $\hat{\sigma}, \hat{e}$ со смешанными граничными условиями. При $L^{-1} [\hat{A}] = -3K\alpha T \cdot \hat{I}$, где K – модуль всестороннего сжатия, α – коэффициент теплового расширения материала, T – температура, $\hat{I}$ – единичный тензор, задача (1)-(5) является задачей термоупругости при заданном распределении температуры. Модель (2)-(3), (5) использовалась для исследования одномерного роста цилиндрических тел (корни растений) [8], тонких плоских слоев (клеточные монослои) [9] и двумерных континуумов (листья растений) [7].

Принципиальная трудность при решении конкретных задач роста на основе модели (2)-(3),(5) состоит в отсутствии достоверных данных о значениях реологических параметров $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. В ряде случаев, когда реализуется ненапряженный рост ($\vec{\sigma} = 0$), $\hat{A}$ – единственный значимый набор реологических коэффициентов – может быть определен на основе анализа данных о кинематике роста, исходя из соотношений (3) при $\vec{\sigma} = 0$. Для корней и листьев растений разных типов при этом получены выражения для $A_{jj}(t)$, $j = 1, 2$ [10]. Аналогично термоупругим деформациям, при росте в отсутствие напряжений $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$, поэтому только компоненты A_{ii} отличны от нуля [1,7,10]. Если мгновенными упругими деформациями можно пренебречь, то единственным набором неизвестных реологических параметров являются компоненты B_{ij} , для определения которых требуются детальные данные о ходе напряженного роста ткани ($\vec{\sigma} \neq 0$). В ряде случаев при росте многослойных тканей локальные несоответствия скоростей роста слоев приводят к появлению поля напряжений, которое можно выявить путем выполнения надрезов на растущих поверхностях [11-12]. При нормальном росте листьев напряжения

в листовой пластинке отсутствуют [14]. При повреждениях пластинки растущий лист деформируется и становится асимметричным, что связано с частичным ограничением роста со стороны поврежденной части. При нормальном росте локальное несоответствие скоростей ростовых деформаций элементов проводящей системы и основной ткани может приводить к появлению поля напряжений, участвующих в ориентации клеточных стенок основной ткани в соответствии с направлением проводящего элемента [15]. С целью создания теоретической базы для определения реологических параметров B_{ij} были проведены эксперименты с ограничением роста листовой пластинки по части периметра. Обработка результатов исследования кинематики роста позволяет определить поле скоростей перемещений точек растущей среды и поле перемещений, но не позволяет определить поле напряжений и исследовать его влияние на рост среды. С целью определения поля напряжений в данной работе решается задача (2)-(3),(5) в применении к прямоугольной области, заполненной сплошной растущей средой.

3. Напряженное состояние прямоугольной растущей пластины с ограничением по периметру.

Рассмотрим плоскую задачу (2),(3),(5) для случая $\vec{F} = 0$, $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = \Gamma$ в пренебрежении мгновенными упругими деформациями для прямоугольной области $S = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$, заполненной растущей средой. В декартовой системе координат уравнения (2)-(3) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = A_x + B_{11}\sigma_{xx} + B_{12}\sigma_{yy}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = A_y + B_{21}\sigma_{xx} + B_{22}\sigma_{yy} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2B_{33}\sigma_{xy}$$

где (v_x, v_y) – скорость перемещения точек растущего тела. Зависимости (7) соответствуют эмпирическим данным о стимулирующем действии растяжения на рост [1]. Введем функцию Эри Φ ; при этом (6) удовлетворяются тождественно, а из условия совместности деформаций получим уравнение:

$$B_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + B_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + (B_{12} + B_{21} + 2B_{33}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = - \left(\frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Для однородного изотропного растущего материала в частном случае $B_{ii} = B$, $B_{ik} = 0$, что соответствует стимуляции роста в направлении оси

и только соответствующими напряжениями σ_{ii} , получим из (8) бигармоническое уравнение для определения квазитермоупругих напряжений в растущей среде с неоднородным распределением собственных скоростей роста:

$$\Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Уравнение (9) исследовалось ранее в применении к задачам плоского напряженного состояния термоупругого ортотропного тела [16,17]. Вводя безразмерные переменные $x^\circ = x/a$, $y^\circ = y/b$, $\Phi^\circ = \Phi/(\sigma^*ab)$, $A_{ik}^\circ = A_{ik}/A^*$, $B_{ik}^\circ = B_{ik}/B^*$ и характерные значения A^* , B^* , σ^* , получим из (8):

$$G[\Phi^\circ] = f(x, y) \quad (10)$$

$$G = \lambda^4 B_{22}^\circ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + B_{11}^\circ \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \lambda^2 B^\circ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad f(x, y) = \mu \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 A_{yy}^\circ}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xx}^\circ}{\partial y^2} \right]$$

где $B^\circ = B_{12}^\circ + B_{21}^\circ + 2B_{33}^\circ$, $\mu = \lambda A^*/(\sigma^* B^*)$, $\lambda = b/a$. При указанных выше предположениях из (5) получим:

$$v_x^\circ|_{x^\circ=\pm 1, y^\circ=\pm 1} = 0, \quad v_y^\circ|_{x^\circ=\pm 1, y^\circ=\pm 1} = 0 \quad (11)$$

где (v_x°, v_y°) – безразмерная скорость. Решение задачи (10) будем искать в виде разложения по системе специальных ортогональных полиномов $H_n(x)$ [17] в виде (здесь и далее значки у безразмерных переменных опущены):

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^N H_n(x) g_n(y) \quad (12)$$

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n N_n}{2^n n! (1-x^2)^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+4} \right]$$

$$N_n = \frac{1}{16\Gamma(n+5)} \left[\frac{n!}{2} (2n+9) \Gamma(n+9) \right]^{1/2}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $g_n(y)$ – неизвестные функции. Для определения последних, используя вариационный метод Канторовича [18], из условия

$$\int_{-1}^1 [G[\Phi] - f(x, y)] H_m(x) dx = 0, \quad m = \overline{0, N}$$

с учетом (12) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M_{ik} g_k(y) = q_i(y) \quad (13)$$

$$M_{ik} = \delta_{ik} B_{11} D^4 + 2B E_{ik} D^2 + B_{22} K_{ik}, \quad E_{ik} = \int_{-1}^1 H_i^{II}(x) H_k(x) dx,$$

$$K_{ik} = \int_{-1}^1 H_i^{IV}(x) H_k(x) dx, \quad q_i(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) H_i(x) dx$$

где $D^m = d^m/dy^m$, δ_{ik} – символ Кронекера.

Из (13) можно получить i неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $4(N+1)$ для функций $g_k(y)$, решение которых в общем виде громоздко и существенно упрощается при использовании условия квазиортогональности функций $H_i'(x)$ и $H_i^{II}(x)$ [17]:

$$\int_{-1}^1 H_i'(x) H_k'(x) dx \approx 0, \quad \int_{-1}^1 H_i^{II}(x) H_k^{II}(x) dx \approx 0 \quad (14)$$

Количественная оценка погрешности принятого условия проведена в [17]. Интегрируя по частям выражения для E_{ik} и K_{ik} и используя условия $H_i(\pm 1) = 0$, $H_i'(\pm 1) = 0$ (13), имеем

$$E_{ik} = - \int_{-1}^1 H_i'(x) H_k'(x) dx \approx 0, \quad K_{ik} = \int_{-1}^1 H_i^{II}(x) H_k^{II}(x) dx \approx 0$$

При этом матрица M_{ik} в (12) становится диагональной и вместо (12) получим:

$$M_{ii} g_i(y) = q_i(y), \quad M_{ii} = B_{11} D^4 - 2B E_{ii} D^2 + B_{22} K_{ii} \quad (15)$$

Набор функций $g_i(y)$ является решением дифференциальных уравнений 4-го порядка, а их характеристическое уравнение $B_{11} \lambda^4 - 2B E_{ii} \lambda^2 + B_{22} K_{ii} = 0$ имеет корни

$$\lambda_i = \pm \frac{B E_{ii}}{B_{11}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{B_{11} B_{22} K_{ii}}{B^2 E_{ii}^2}} \right]$$

где $K_{ii} > E_{ii}^2$ [17], а величина $B_{11} B_{22} / B^2$ зависит от значений компонент B_{ik} . Например, при отсутствии сдвиговых деформаций ($B_{33} = 0$) для изотропной среды при $B_{11} = B_{22}$, $B_{12} = \nu B_{11}$, $B_{21} = \nu B_{22}$ получим, что $\lambda_i = \pm \alpha_i \pm i \beta_i$ – комплексные числа при $\nu < 0.682$, что охватывает весь диапазон значений ν для несжимаемых однородных изотропных растущих материалов [3,6,14]. Фундаментальная система (15) имеет вид:

$$\psi_{1i} = e^{\alpha_i y} \cos \beta_i y, \quad \psi_{2i} = e^{-\alpha_i y} \cos \beta_i y, \quad \psi_{3i} = e^{\alpha_i y} \sin \beta_i y, \quad \psi_{4i} = e^{-\alpha_i y} \sin \beta_i y$$

Общее решение (15) можно записать виде:

$$g_i(y) = \sum_{l=1}^4 C_{li} \psi_{li} + \tilde{g}_i(y), \quad \tilde{g}_i(y) = \sum_{l=1}^4 \psi_{li} \int \frac{\Delta_{li}}{\Delta_i} dy \quad (16)$$

где $\Delta_i = 16\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)$ – определитель Вронского функций $\{\psi_{li}\}_{l=1}^4$, $i = \overline{0, N}$, а Δ_{li} – детерминант, который получается заменой в Δ_i элементов l -й строки на строку $(0, 0, 0, q_i(y))$. Для определения неизвестных коэффициентов C_{li} в (16) используем вместо (11) краевые условия в виде:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{y=\pm 1} = 0 \quad (17)$$

Условия (17) являются естественными краевыми условиями в соответствующей вариационной задаче [18], а их выполнение обеспечивает выполнение условий (11) [17]. Используя (7), выразим левые части (17) через функцию Φ и тогда вместо (17) получим:

$$B_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -A_{11}, \quad B_{11} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2B_{33} + B_{12}) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial A_{11}}{\partial y} \quad (18)$$

Подставляя (12) в (18), умножая на $H_n(x)$, интегрируя по $x \in [-1, 1]$, получим с учетом (14) систему уравнений для определения $C_{1-4,i}$:

$$\begin{aligned} & [B_{11}((\alpha_i^2 - \beta_i^2)\cos\beta_i - 2\alpha_i\beta_i\sin\beta_i) + B_{12}A_{ii}\cos\beta_i]e^{\alpha_i}C_{1i} + [B_{11}((\alpha_i^2 - \beta_i^2)\cos\beta_i + \\ & + 2\alpha_i\beta_i\sin\beta_i) + B_{12}A_{ii}\cos\beta_i]e^{-\alpha_i}C_{2i} + [B_{11}((\alpha_i^2 - \beta_i^2)\sin\beta_i + 2\alpha_i\beta_i\cos\beta_i) + \\ & + B_{12}A_{ii}\sin\beta_i]e^{\alpha_i}C_{3i} - [B_{11}((\alpha_i^2 + \beta_i^2)\sin\beta_i + 2\alpha_i\beta_i\cos\beta_i) - B_{12}A_{ii}\sin\beta_i]e^{-\alpha_i}C_{4i} \\ & = -B_{11}\tilde{g}_i''(1) - B_{12}A_{ii}\tilde{g}_i(1) - \int_{-1}^1 A_{11}(x, 1)H_i(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [B_{11}((\alpha_i^2 - \beta_i^2)\cos\beta_i + 2\alpha_i\beta_i\sin\beta_i) + B_{12}A_{ii}\cos\beta_i]e^{-\alpha_i}C_{1i} + [B_{11}((\alpha_i^2 - \beta_i^2)\cos\beta_i - \\ & - 2\alpha_i\beta_i\sin\beta_i) + B_{12}A_{ii}\cos\beta_i]e^{\alpha_i}C_{2i} + [B_{11}((-\alpha_i^2 + \beta_i^2)\sin\beta_i + 2\alpha_i\beta_i\cos\beta_i) - \\ & - B_{12}A_{ii}\sin\beta_i]e^{-\alpha_i}C_{3i} + [B_{11}((\alpha_i^2 + \beta_i^2)\sin\beta_i - 2\alpha_i\beta_i\cos\beta_i) - B_{12}A_{ii}\sin\beta_i]e^{\alpha_i}C_{4i} \\ & = -B_{11}\tilde{g}_i''(-1) - B_{12}A_{ii}\tilde{g}_i(-1) - \int_{-1}^1 A_{11}(x, -1)H_i(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [B_{11}((\alpha_i^2 - 3\beta_i^2)\alpha_i\cos\beta_i - (3\alpha_i^2 + \beta_i^2)\beta_i\sin\beta_i + B_{12}(\alpha_i\cos\beta_i - \beta_i\sin\beta_i))]e^{\alpha_i}C_{1i} \\ & + [B_{11}((-\alpha_i^2 + 3\beta_i^2)\alpha_i\cos\beta_i - (3\alpha_i^2 + \beta_i^2)\beta_i\sin\beta_i - B_{12}(\alpha_i\cos\beta_i + \beta_i\sin\beta_i))]e^{-\alpha_i}C_{2i} \\ & + [B_{11}((3\alpha_i^2 - \beta_i^2)\beta_i\cos\beta_i + (\alpha_i^2 - 3\beta_i^2)\alpha_i\sin\beta_i + B_{12}(\alpha_i\sin\beta_i + \beta_i\cos\beta_i))]e^{\alpha_i}C_{3i} \\ & + [B_{11}((3\alpha_i^2 - \beta_i^2)\beta_i\cos\beta_i + (3\beta_i^2 - \alpha_i^2)\beta_i\sin\beta_i + B_{12}(\beta_i\cos\beta_i - \alpha_i\sin\beta_i))]e^{-\alpha_i}C_{4i} \\ & = -B_{11}\tilde{g}_i'''(1) + B_{12}\tilde{g}_i'(1) - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial y} A_{11}(x, 1)H_i(x)dx \end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
& [B_{11}((\alpha_i^2 - 3\beta_i^2)\alpha_i \cos \beta_i + (3\alpha_i^2 + \beta_i^2)\beta_i \sin \beta_i + B_{12}(\alpha_i \cos \beta_i + \beta_i \sin \beta_i))]e^{-\alpha_i} C_{1i} + \\
& [B_{11}((-\alpha_i^2 + 3\beta_i^2)\alpha_i \cos \beta_i + (3\alpha_i^2 + \beta_i^2)\beta_i \sin \beta_i - B_{12}(\alpha_i \cos \beta_i - \beta_i \sin \beta_i))]e^{\alpha_i} C_{2i} + \\
& [B_{11}((3\alpha_i^2 - \beta_i^2)\beta_i \cos \beta_i - (\alpha_i^2 - 3\beta_i^2)\alpha_i \sin \beta_i + B_4(-\alpha_i \sin \beta_i + \beta_i \cos \beta_i))]e^{-\alpha_i} C_{3i} + \\
& [B_{11}((3\alpha_i^2 - \beta_i^2)\beta_i \cos \beta_i - (3\beta_i^2 - \alpha_i^2)\beta_i \sin \beta_i + B_{12}(\beta_i \cos \beta_i + \alpha_i \sin \beta_i))]e^{\alpha_i} C_{4i} = \\
& -B_{11}\tilde{g}_i'''(-1) + B_{12}\tilde{g}_i'(-1) - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial y} A_{11}(x, -1) H_i(x) dx
\end{aligned}$$

где $B_4 = 2B_{33} + B_{12}$. Затем, зная $C_{1-4,i}$, определим напряжения по формулам:

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=0}^N H_n(x) g_n''(y), \quad \sigma_{yy} = \sum_{n=0}^N H_n''(x) g_n(y), \quad \sigma_{xy} = - \sum_{n=0}^N H_n'(x) g_n'(y) \quad (20)$$

Результаты исследования кинематики роста листьев позволили выделить два основных типа однородного роста [15]:

- 1) $A_{11} = A_{22} = A = \text{const}$, $v_x = Ax$, $v_y = Ay$;
- 2) $A_{11} = \text{const}$, $A_{22} = \text{const}$, $A_{11} \neq A_{22}$, $v_x = A_{11}x$, $v_y = A_{22}y$.

Для указанных типов роста $f(x, y) = 0$ в (10) и $\tilde{g}_i = 0$ в (19), а ненулевыми оказываются правые части только первых двух уравнений (19). Для круглого щитовидного листа по результатам исследования кинематики роста получено неоднородное распределение источников $A_{ii} = A_0(1 - r^2)$, где r — радиальная координата [13]. Регуляция распределения A_{ik} по поверхности листа в ходе роста может протекать, например, за счет диффузионного и конвективного (по проводящей системе) переноса химических факторов регуляции. В случае однородного роста реализуется однородное напряженное состояние и решение (6)-(7) при условии ограничения по периметру имеет вид

$$\sigma_{xx} = \frac{-A_{11}B_{22} + A_{22}B_{12}}{\Delta}, \quad \sigma_{yy} = \frac{-A_{22}B_{11} + A_{11}B_{21}}{\Delta}, \quad \Delta = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \quad (21)$$

Неоднородное распределение собственных скоростей роста $A_{ii}(t, x, y)$, связанное с особенностями строения транспортной системы листа или вариациями его толщины и размера клеток, будет приводить к неоднородному распределению сжимающих напряжений и изменению соотношения роста в продольном и поперечном направлениях в зависимости от соотношения реологических параметров B_{11}/B_{12} и B_{22}/B_{21} . При этом распределение напряжений может быть найдено путем численных расчетов по (19)-(20).

4. Численное решение задачи для прямоугольной пластины при ограничении роста по периметру.

Поле напряжений в растущей пластине определялось по формулам (20) после определения постоянных $C_{1-4,i}$ из системы (19) для случая неоднородного роста при $A_{11} = A_0(1 - x^2)$, $A_{22} = A_0(1 - y^2)$. Аналогичные расчеты для случая однородного роста при наличии решения (21) позволяют оценить погрешность изложенного выше метода расчетов. При вычислениях использовались следующие значения параметров модели: $B_{11,22} = 10^1 - 10^2$ (Пас) $^{-1}$ [1], $A_{11,22} = 0.1 - 0.5$ сут $^{-1}$ [14,15], $\nu = 0.2 - 0.4$. Собственные скорости роста A_{ii} полагались постоянными или монотонно убывающими функциями времени. В последнем случае зависимости $A_{ii}(t)$ получались путем аппроксимации экспериментальных ростовых кривых.

Расчеты для случая однородного роста показали, что среднее по области отклонение напряжений от значений, заданных (21), не превышает 0.22% и монотонно убывает с уменьшением значений $A_{11,22}$. Максимальные отклонения имеют место в окрестности угловых точек и при $B_{11,22} = 10$ (Пас) $^{-1}$, $A_{11,22} = 0.5$ сут $^{-1}$ не превышают 1.8%. При исследовании неоднородного роста распределения напряжений при вариации реологических параметров в пределах указанных диапазонов значений качественно не изменялись. Распределение сжимающих напряжений $\sigma_{xx}(x)$ при фиксированных значениях y для $B_{11} = B_{22} = 10^2$ (Пас) $^{-1}$, $A_{11} = A_{22} = 0.15$ сут $^{-1}$, $\nu = 0.3$ приведено на рис.1. Для центральной области пластинки напряжения превышают критические значения $\sigma^* = 0.03 - 0.05$ (Пас) $^{-1}$, составляющие порог чувствительности растительных клеток к механическим напряжениям [1]. Сжимающие напряжения при ограничении роста по периметру приведут к торможению ростовых процессов за счет поля напряжений (3) и к постепенному уменьшению ростовых деформаций при монотонном убывании собственных скоростей роста $A_{ii}(t)$.

Интересным для практики приложением является определение поля напряжений при заданных механических параметрах и геометрии образца и сопоставление возникающих напряжений с предельными для растительных материалов значениями, которые способны вызвать реакцию на механические факторы на клеточном уровне [2-4,6]. Кроме этого, самостоятельный интерес представляет исследование влияния геометрии (например, углов пластинки) на поле напряжений. Известно, например, что в области зубцов листовой пластинки ростовые процессы имеют свои особенности, которые для ряда случаев приводят к монотонному увеличению угла при вершине зубца за счет перестройки ростовых процессов [5,6,14]. Пространственная координация роста за счет поля напряжений известна для разных биоматериалов [1] и для растительных тканей может быть исследована на основе модели (2)-(3),(5).

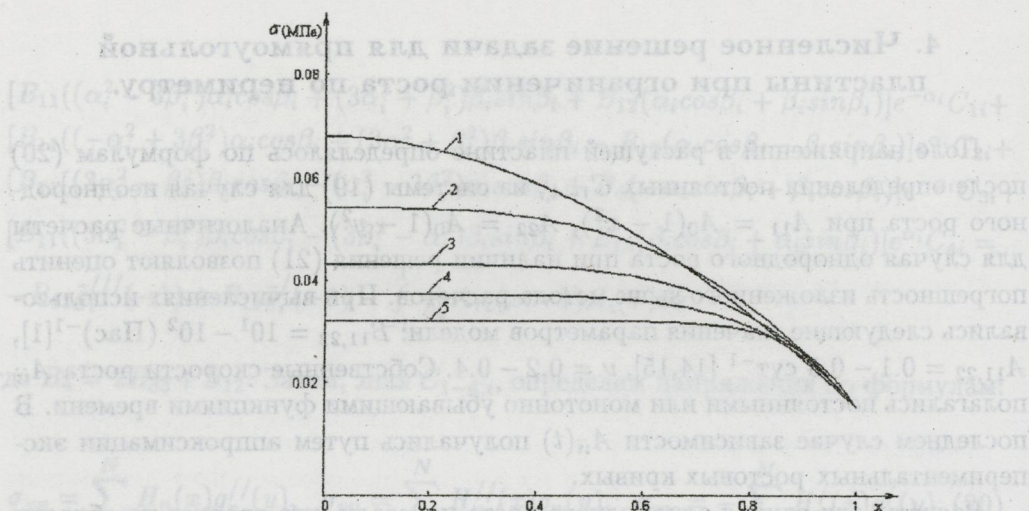


Рис. 1: Распределение $\sigma = |\sigma_{xx}(x)|$ при $y = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$ (кривые 1–5 соответственно).

5. Напряженно-деформированное состояние растущей пластины при частичном ограничении роста.

Аналитическое решение задачи (2), (3), (5) возможно лишь для случаев простой геометрии области, поэтому при условии частичного ограничения роста вдоль из сторон области задача решалась численно на основе метода конечных элементов. В качестве начальной (недеформированной) области выбран четырехугольник ABCD (рис.2а), для которого ограничение роста на части периметра моделировалось линейным элементом (стрингером) с диаметром d и модулем упругости E , расположенным вдоль стороны АВ. Стрингер считался жестко скрепленным со стороной АВ, а условия контакта области и стрингера имели вид $e_{xx} = e'_{xx}$, $e_{yy} = e'_{yy}$, где величины со штрихом относятся к стрингеру. При проведении экспериментов по ограничению роста роль стрингера выполняет тонкий слой полимерного материала, нанесенный на край контура листовой пластинки на начальных стадиях роста. После высыхания полимер образует тонкую ($d \sim 0.2 - 0.8 \text{ мм}^2$) нерастяжимую нить [15].

Для построения дискретной модели двумерной области использовано семейство четырехугольных конечных элементов (рис.2а); толщина всех элементов принята постоянной. Был построен шаговый итеративный процесс решения системы (2)–(3) с использованием хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов проекционно-сеточных методов [18]. При численном моделировании ограниченного роста четырехугольника ABCD принимались те же значения параметров модели, что и в случае частичного ограничения. Кроме этого, для линейного элемента AD принималось $d = 0.5 - 1.5 \text{ мм}^2$. Результаты расчетов представлены на рис.2 б-е. Ростовые деформации модели соответствуют

результатам экспериментальных исследований [15] (рис.2б). Напряжения на большей части пластинки на всех стадиях роста практически отсутствуют, за исключением некоторой окрестности элемента AD шириной h (рис.2в). Интенсивность напряжений σ и значения компонент σ_{xx}, σ_{yy} монотонно убывают от максимальных значений на границе AD до нуля (рис.2 в-д соответственно). Величина h сильно зависит от значений E, d и является монотонно возрастающей функцией этих параметров. При $E \geq 10^{10}$ Па, $d \geq 1.5 \text{ мм}^2$ и высоких скоростях роста $A_{ii} \geq 0.25 \text{ сут}^{-1}$ напряжения в угловых точках возрастают и ухудшается сходимость вычислительного процесса. Это означает, что в материале могут возникать деформации в плоскости пластины (xOy), соответствующие потере устойчивости формы. При этом плоская форма теряет устойчивость и для этих значений параметров соответствующая задача должна рассматриваться в трехмерной постановке. При $E \leq 10^7$ Па становятся заметны ростовые деформации элемента AD, который при этих условиях лишь частично ограничивает рост и не является нерастяжимой нитью. Напряжения σ_{xx} и σ_{yy} (рис.2 г-д) могут быть выявлены в экспериментах с ограниченным ростом путем выполнения надрезов растущего материала в соответствующих направлениях [12,13]. Наличие ограничения роста вызывает изменение главных направлений тензора σ_{ik} в окрестности ограниченного участка AD по отношению к свободному элементу AB (рис.2е). Следовательно, экспериментальное исследование полей направлений клеточных стенок в окрестности ограниченного элемента и сопоставление его с результатами приведенных численных расчетов может уточнить данные о влиянии механических напряжений на рост биологических растительных материалов.

При наличии данных о механических свойствах конкретного материала численные расчеты по представленной модели для случаев как полного, так и частичного ограничения могут быть выполнены на основе метода конечных элементов и для более сложных исходных форм образца.

3. Tomos AD, Malone M, Pechard J. The biophysics of differential growth. // Environ. Exp. Bot. - 1988. - V.29, N1 - P. 7-23.

4. Hajnóczky Z. Differential growth resulting in the specification of different types of cellular architecture in root meristems. // Environ. Exp. Bot. - 1988. - V.29, N1 - P. 85-98.

5. Peters WS, Hagemann M, Dettmer J. What does the extracellular matrix function in? // Comp Biochem Physiol. - 2000. - V.125, B2 - P. 45-54.

6. Lynch TM, Listlhaac PM. Mechanical signals in plant development: a new method for single cell studies. // Dev. Biol. - 1997. - V.181, N2 - P. 15-26.

7. Казаров В.Н., Казидова Н.Н. Влияние механических напряжений на рост тканей. // Проблемы машиностроения - 2002. - Т.5, 2. - С. 90-102.

Рис. 2. Результаты численных расчетов поля напряжений и деформаций в растущем элементе AD. Показаны в тексте.

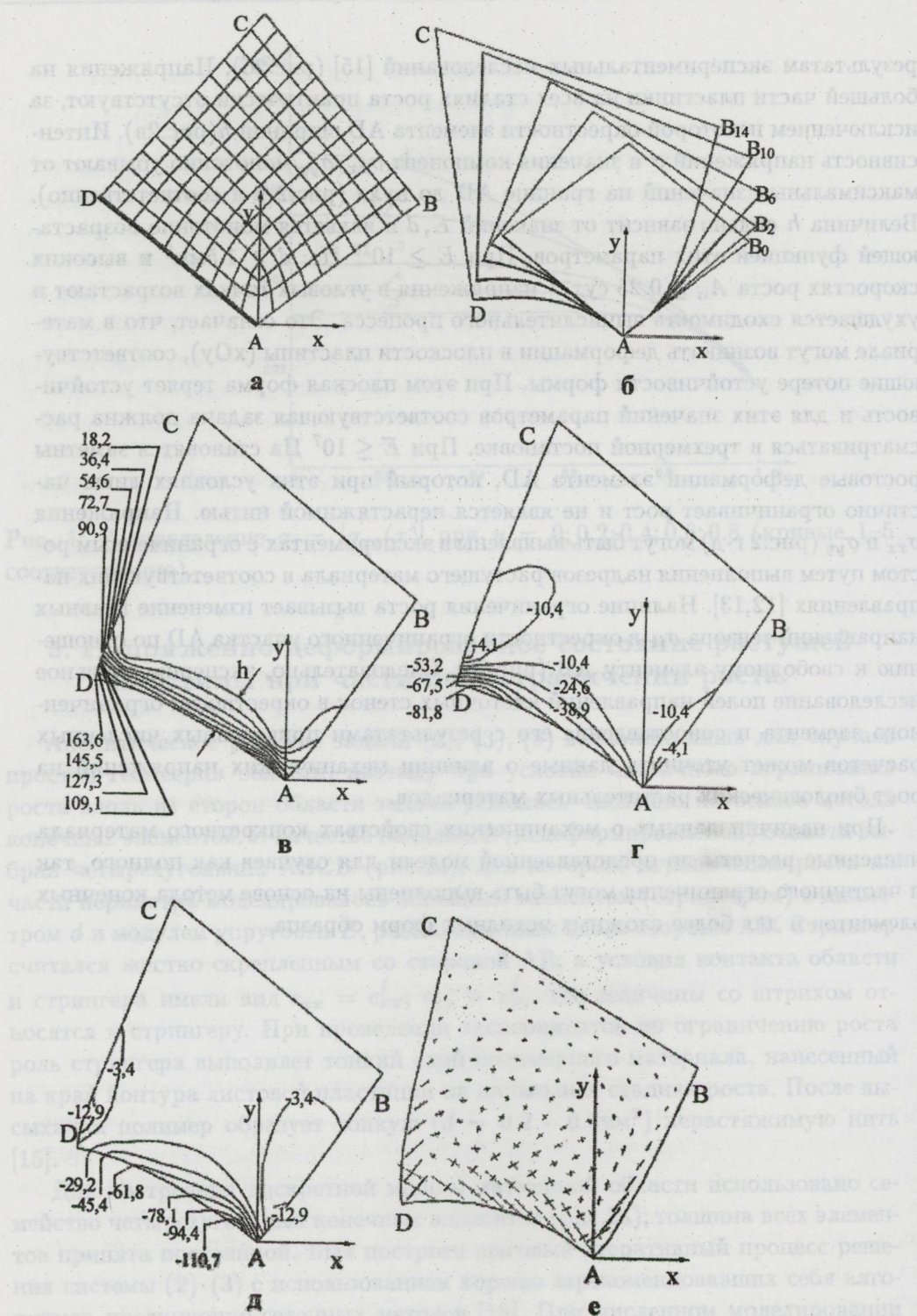


Рис. 2: Результаты численных расчетов поля напряжений и деформаций для растущего четырехугольника ABCD. Пояснения в тексте.

6. Заключение.

Механические факторы, в том числе поле напряжений, играют важную роль в координации ростовых деформаций неоднородных растущих материалов, а влияние напряжений при этом может отслеживаться по направлениям новых клеточных стенок. Предложенная в работе модель растущего материала и методика численных расчетов поля напряжений позволяет определять поле напряжений при заданных механических свойствах материала и скоростях роста. На основе представленной модели следует отработать методику экспериментального исследования роли механических напряжений в координации ростовых процессов в растительных тканях. Наличие частичного ограничения по периметру, как следует из расчетов, приводит к изменению напряженного состояния в окрестности области ограничения и к изменению главных направлений тензора σ_{ik} , в то время как вдали от области ограничения реализуется ненапряженный рост. Таким образом, проведение экспериментов по ограничению роста и исследование поля направлений клеточных стенок вблизи области ограничения позволит сопоставить поля направлений с расчетными. Расчет поля главных направлений тензора σ_{ik} по приведенной в данной работе методике позволит сформулировать также требования к условиям проведения экспериментов по росту в условиях частичного ограничения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Регирер С.А., Штейн А.А. Механические аспекты процессов роста, развития и перестройки биологических тканей. // Итоги науки и техн. Компл. и спец. разделы механики. Т.1. – М.:ВИНИТИ. – 1985. – С. 3-142.
2. Erdos T, Butler-Browne GS, Rappaport L. Mechanogenetic regulation of transcription. // Biochimie. – 1991. – V.73,N9. – P. 1219-1231.
3. Tomos AD, Malone M, Pritchard J. The biophysics of differential growth. // Environ.Exp.Bot. – 1989. – V.29,N1. – P. 7-23.
4. Hejnowicz Z. Differential growth resulting in the specification of different types of cellular architecture in root meristems. // Environ.Exp.Bot. – 1989. – V.29,N1. – P. 85-93.
5. Peters WS, Hagemann W, Deri Tomos A. What makes plants different? Principles of extracellular matrix function in 'soft' plant tissues. // Comp.Biochem.Physiol. Ser.A. – 2000. – V.125,N2. – P. 151-167.
6. Lynch TM, Lintilhac PM. Mechanical signals in plant development: a new method for single cell studies. // Dev.Biol. – 1997. – V.181,N2. – P. 246-256.
7. Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н. Биомеханика развивающейся растительной ткани. // Пробл.машиностроения. – 2002. – Т.5, 2. – С. 96-103.

8. Штейн А.А. Деформирование стержня из растущего биологического материала, подвергнутого продольному сжатию. // Прикл.матем.и механика. – 1995. – Т.59, 1. – С. 149-157.
9. Штейн А.А., Логвенков С.А. Пространственная самоорганизация тонкого слоя биологического материала, растущего на подложке. // Докл.РАН. – 1993. – 328,N4. – С. 443-446.
10. Kizilova N.N. Identification of rheological parameters in models of growing continuums. // EUROMECH Colloquium "Identification and Updating Methods of Mechanical Structures". Book of Abstracts. – Prague. - 2002. – P. 22.
11. Савельев С.В. Формообразование мозга позвоночных. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 144 с.
12. Мартынов Л.А. Рост, упругие и неупругие деформации в процессах морфогенеза. // Биофизика. – 1979. – Т. 24,6. – С. 1074-1077.
13. Buis R., Barthou H., Briere Ch., Gefflaut J. Leaf Dissymmetry and Vein Growth Field: The Case of the Tropaeolum Leaf Veins. // Acta Biotheoretica. – 1995. – V.43, N1/2. – P. 81-94.
14. Кизилова Н.Н. Транспортная система и рост листа. // Современные проблемы биомеханики. Вып.10. Механика роста и морфогенеза. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – С. 379-405.
15. Kizilova N.N., Kravchenko E.P. Dynamics of bidimensional growing continuum. //8-th Intern.Conf."Stability, control and rigid bodies dynamics". – Donetsk. – 2002. – P. 114-115.
16. Ван Цзи-Де Прикладная теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.
17. Колчин Г.Б., Плятт Ш.Н., Шейнкер Н.Я. некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей. – Кипшинев:Птиинца, 1980. – 104 с.
18. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

Повторная регуляризация оператора задачи дифракции осесимметричных ТМ волн на сфере с отверстием.

В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет, Украина

Выделены и обращены статическая и главная динамическая части оператора задачи дифракции осесимметричных волн на сфере с круговым отверстием. Для этого используется обращение интегрального оператора типа Абея и решение вспомогательной задачи Коши. Получена система линейных алгебраических уравнений II рода с компактным в пространстве ℓ^2 оператором. Система эффективно разрешима численно и аналитически в ℓ^2 .

2000 Mathematics Subject Classification: 65N12, 35A25, 78A45.

1. Введение. Работа [1] открыла новые направления в исследовании задач дифракции, например, асимптотическое суммирование соответствующих рядов Фурье, в частности, для отыскания коротковолновой асимптотики рассеяния волн. Эти методы предполагали знание явных выражений для коэффициентов рядов Фурье. Усложнение поверхностей, на которых рассматривались задачи дифракции, вызвало появление новых методов их исследования. Работа [2] явилась одной из первых, положивших начало созданию численно-аналитических методов решения большого круга задач математической физики [3], к которым сводятся задачи дифракции. Метод [2] позволяет свести поиск, в частности коэффициентов рядов Фурье дифрагированных полей, к решению матричных уравнений II рода с компактным в ℓ^2 оператором. Уменьшение эффективных размеров матричных операторов представляет интерес при решении прямых и обратных задач дифракции [1]–[4], [7]. С этой целью в данной работе выполнена повторная регуляризация – выделение и обращение не только статической, но и главной динамической части оператора задачи дифракции осесимметричных ТМ волн на сфере с круговым отверстием, экранированной диэлектрическим слоем. Отметим, что, например, в антенной технике сфера с круговым отверстием является моделью сферического зеркала, снабженного обтекателем. В СВЧ технике сфера с отверстием является моделью резонатора, окруженного защитным диэлектрическим корпусом. Применяемый здесь подход использует методы регуляризации, развиваемые в

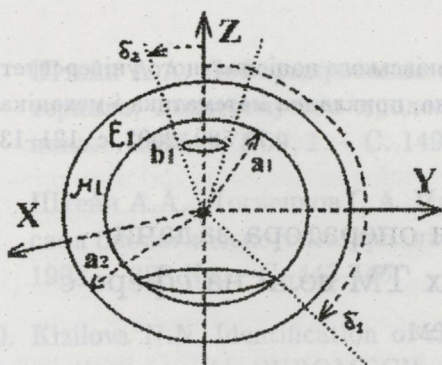


Рис. 1: Виток радиального электрического тока внутри сферы с отверстием, экранированной диэлектрическим слоем.

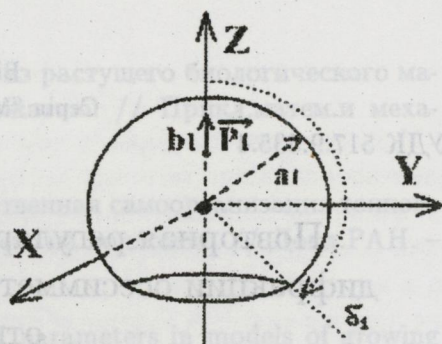


Рис. 2: Вертикальный электрический диполь на оси сферы с круговым отверстием.

[4, 7, 15], и базируется на обращении интегрального оператора типа Абеля специального вида [12, 7] и дополнительно использует решения вспомогательной задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка [13].

В итоге, для поиска коэффициентов соответствующих рядов Фурье, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений II рода с компактным в пространстве ℓ^2 оператором, обладающая улучшенными свойствами по сравнению с [4, 15, 7].

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно тонкую идеально проводящую (металлическую) полую сферу радиуса a_1 (Рис.1). Пусть сфера имеет круговое отверстие. Поместим в центр сферы начало декартовой и сферической систем координат; ось OZ направим перпендикулярно плоскости среза отверстия в сфере; пусть отверстие измеряется полярным углом δ_1 ($0 \leq \delta_1 \leq \pi$), на отверстии угол $\theta \in (\delta_1, \pi]$. Пусть сферы с отверстием извне касается диэлектрический слой $a_1 \leq r \leq a_2$ с параметрами $\epsilon_1 \neq 1, \mu_1 \neq 1$ и $\sigma = 0$ (ϵ_1, μ_1 - диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ - проводимость среды). Пусть электромагнитное поле $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}$ создает виток радиального электрического тока (круговая нить тока). Пусть плоскость витка тока параллельна плоскости OXY и геометрический центр витка находится на оси OZ . Расстояние от витка до $(0, 0, 0)$, измеряемое по радиусу, полагаем равным b_1 , $0 \leq b_1 < a_1$. При этом виток размещен внутри металлической сферы и не касается ее; угол раскрытия витка обозначаем δ_2 , ($\delta_2 \in [0, \pi]$).

Отметим, что данный виток тока излучает осесимметричные ТМ волны. Требуется найти электромагнитное поле витка в присутствии сферических структур. Полные электромагнитные поля $\vec{E}, \vec{H}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = ik\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = -ik\vec{E}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

а также: 1) граничным условиям: а) тангенциальная составляющая электрического поля на металле обращается в нуль, б) на отверстии в сфере радиуса a_1 все поле непрерывно; 2) материальным уравнениям, условию конечности энергии и условию излучения:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2)$$

$$\int_V \left(\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2 \right) dV < \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0, \quad (4)$$

где, например в вакууме $k = \frac{\omega}{c}$, ω -круговая частота, c -скорость света, $\vec{D}$, $\vec{B}$ -векторы электрической и магнитной индукции, ρ -плотность зарядов. Здесь в (3)-интеграл Лебега по любой ограниченной области V в R^3 , а в (4) функция u обозначает любую компоненту векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$. В такой постановке краевая задача (1)-(4) имеет единственное решение [8].

3. Система функциональных уравнений по присоединенным функциям Лежандра. Для построения решения задачи воспользуемся сначала тем фактом, что поле рассматриваемого кольцевого тока создает ТМ волны, а сферические поверхности вместе с полем источника обладают осевой симметрией. Значит полные электромагнитные поля не изменятся при повороте вокруг оси OZ на любой угол φ . Поэтому в сферической системе координат лишь три компоненты полных полей E_r, E_θ, H_φ отличны от нуля.

Граничные условия для компонент полей запишем так:

$$E_\theta^{(0)} + E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(2)} + E_\theta^{(3)} = 0, \quad r = a_1, \quad 0 \leq \theta < \delta_1, \quad (5)$$

$$H_\varphi^{(0)} + H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)} + H_\varphi^{(3)}, \quad r = a_1, \quad \delta_1 < \theta \leq \pi, \quad (6)$$

$$\varepsilon_1 (E_r^{(2)} + E_r^{(3)}) = \varepsilon_0 E_r^{(4)}, \quad r = a_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (7)$$

$$E_\theta^{(2)} + E_\theta^{(3)} = E_\theta^{(4)}, \quad r = a_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (8)$$

где верхние индексы 0,1,2,3 обозначают поля: 0 - источников, 1 - отраженные от сферы $r = a_1$ в область $0 \leq r < a_1$, 2 - отраженные от сферы $r = a_1$ в область $a_1 < r < a_2$, 3 - отраженные от сферы $r = a_2$ в область $a_1 < r < a_2$, 4 - отраженные от сферы $r = a_2$ в область $r > a_2$.

Отыскание 3-х ненулевых компонент полей удобно свести к отысканию одной вспомогательной скалярной функции - электрического потенциала Дебая U (при этом заметим, что магнитный потенциал Дебая V равен нулю) [9]:

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \theta}, \quad E_r = \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + k^2 (rU), \quad H_\varphi = -\frac{k}{ir} \frac{\partial (rU)}{\partial \theta},$$

где H_φ в диэлектрической среде приобретает, например, вид: $H_\varphi = -\frac{k_1^2}{ik_0\mu_1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rU)}{\partial\theta}$, при этом $k = k_0$ в вакууме, а в диэлектрическом слое, в частности, $k = k_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$.

Потенциалы Дебая источников - витка тока представим рядами Фурье-Бесселя-Лежандра:

$$U^{(0)} = \frac{i}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}(n) P_n(\cos\theta) \begin{cases} \psi_n(kb_1)\xi_n(kr), & r > b_1, \\ \xi_n(kb_1)\psi_n(kr), & r < b_1, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\tilde{F}(n) = F(n)(2n+1)P_n(\cos\delta_2) \frac{1}{k^2 b_1^2}; \quad (10)$$

здесь в (10) $F(n) = 1$, если плоскость кольца расположена выше плоскости ОХУ, $F(n) = (-1)^n$, если плоскость кольца - ниже плоскости ОХУ; $\psi_n(kr)$, $\xi_n(kr)$ -сферические функции в обозначениях Дебая, $P_n(\cos\theta)$ -полиномы Лежандра первого рода нулевого порядка степени n .

Потенциалы Дебая вторичных полей представим рядами Фурье вида (9):

$$U^{(1)} = \frac{i}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \psi_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq r < a_1, \quad (11)$$

$$U^{(2)} = \frac{i}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \xi_n(k_1 r) P_n(\cos\theta), \quad a_1 < r < a_2, \quad (12)$$

$$U^{(3)} = \frac{i}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(3)} \psi_n(k_1 r) P_n(\cos\theta), \quad a_1 < r < a_2. \quad (13)$$

$$U^{(4)} = \frac{i}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(4)} \xi_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad r > a_2. \quad (14)$$

В рядах (11)-(14) коэффициенты $A_n^{(l)} (n \geq 1, l = \overline{1,4})$ подлежат определению. Будем их искать в гильбертовом пространстве числовых последовательностей $\tilde{\ell}^2$ с некоторым весом, определяемым условием (3). Так, для коэффициентов $A_n^{(2)}, n \geq 1$ находим

$$\tilde{\ell}^2 = \left\{ \left\{ A_n^{(2)} \right\}_{n=1}^{\infty} \in C : \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(2)}|^2 |\psi_n(k_1 a_2)|^2 n^2 < \infty \right\}. \quad (15)$$

Из граничных условий для полей (5)-(8), используя ортогональность на $[0, \pi]$ функций $P_n^1(\cos\theta)$ с весом $\sin\theta$, находим связь между коэффициентами рассеянных полей:

$$\tilde{F}_1(n)\xi'(ka_1) + A_n^{(1)}\psi'_n(ka_1) = A_n^{(2)}\xi'_n(k_1 a_1) + A_n^{(3)}\psi'_n(k_1 a_1), \quad (16)$$

$$\tilde{F}_1(n) = \psi_n(kb_1)\tilde{F}(n), \quad (17)$$

$$\varepsilon_1 A_n^{(2)} \xi_n(k_1 a_2) + \varepsilon_1 A_n^{(3)} \psi_n(k_1 a_2) = \varepsilon_0 A_n^{(4)} \xi_n(k a_2), \quad (\varepsilon_0 = 1), \quad (18)$$

$$A_n^{(2)} \xi'_n(k_1 a_2) + A_n^{(3)} \psi'_n(k_1 a_2) = A_n^{(4)} \xi'_n(k a_2). \quad (19)$$

Здесь у функций, например, $\xi'_n(k a_1)$, $\psi'_n(k a_1)$ в (16)-(19) штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Из граничных условий (5)-(8) получаем вспомогательную систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(2)} \xi'_n(k_1 a_1) + A_n^{(3)} \psi'_n(k_1 a_1)\} P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \delta_1, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \{\tilde{F}_1(n) \xi_n(k a_1) + A_n^{(1)} \psi_n(k a_1)\} P_n^1(\cos \theta) = \\ & = z_1^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(2)} \xi_n(k_1 a_1) + A_n^{(3)} \psi_n(k_1 a_1)\} P_n^1(\cos \theta), \quad \delta_1 < \theta \leq \pi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $z_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$, а $P_n^1(\cos \theta)$ - присоединенные функции Лежандра первого рода первого порядка степени n . Исключим из системы (20), (21) коэффициенты $A_n^{(1)}$, $A_n^{(3)}$. Для этого из системы уравнений (16)-(19) выразим коэффициенты $A_n^{(1)}$, $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$ через $A_n^{(2)}$, при этом воспользуемся, например, правилом Крамера. Определитель получаемой системы таков:

$$D = \begin{vmatrix} \psi'_n(k a_1) & -\psi'_n(k_1 a_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \psi_n(k_1 a_2) & -\xi_n(k a_2) \\ 0 & \psi'_n(k_1 a_2) & -\xi'_n(k a_2) \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В определителе D первый столбец - коэффициенты системы при $A_n^{(1)}$, второй столбец - при $A_n^{(3)}$, третий столбец - при $A_n^{(4)}$. В результате получаем искомую парную систему функциональных уравнений I рода:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \xi'_n(k_1 a_1) \left[1 - \frac{\psi'_n(k_1 a_1) L_1}{\xi'_n(k_1 a_1) L_2} \right] P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \delta_1, \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{1}{D} [L_1 L_4 + L_2 L_4] P_n^1(\cos \theta) = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_1(n)}{\psi'_n(k a_1)} P_n^1(\cos \theta), \quad \delta_1 < \theta \leq \pi, \quad (24)$$

где определитель D введен в (22), $\tilde{F}_1(n)$ - в (17), а

$$\begin{aligned} L_1 &= \varepsilon_1 \psi_n(k_1 a_2) \xi'_n(k a_2) - \psi'_n(k_1 a_2) \xi_n(k a_2), \\ L_2 &= \varepsilon_1 \xi_n(k_1 a_2) \xi'_n(k a_2) - \xi'_n(k_1 a_2) \xi_n(k a_2), \\ L_3 &= -z_1^{(1)} \xi_n(k_1 a_1) \psi'_n(k a_1) + \xi'_n(k_1 a_1) \psi_n(k a_1), \\ L_4 &= z_1^{(1)} \psi_n(k_1 a_1) \psi'_n(k a_1) - \psi'_n(k_1 a_1) \psi_n(k a_1). \end{aligned} \quad (25)$$

4. Предельные варианты. Система уравнений (23),(24) является многопараметрической. Покажем, в частности, выполнение в (23),(24) некоторых предельных переходов по параметрам. Так, устремляя параметры среды - диэлектрического слоя $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_0$, $\mu_1 \rightarrow \mu_0$ (т.е диэлектрический слой превращается в вакуум), получаем следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \xi'_n(ka_1) P_n^1(\cos \theta) &= 0, & 0 \leq \theta < \delta_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \frac{1}{\psi'_n(ka_1)} P_n^1(\cos \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_1(n)}{\psi'_n(ka_1)} P_n^1(\cos \theta), & \delta_1 < \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что если в потенциале источника $U^{(0)}$ (9) выполнить предельный переход $\delta_2 \rightarrow 0$, а также в уравнениях (26) выполнить тот же предельный переход, то получим систему функциональных уравнений, соответствующих задаче о вертикальном диполе (см. Рис.2) [4].

Предельным вариантом постановки исходной задачи (см. Рис.1) и соответствующей системы (23),(24) является тот случай, когда исчезает металлическая сфера. При этом виток тока будет находиться в вакууме и окружен только диэлектрическим слоем. Этот вариант получаем из (23),(24), устремив $\delta_1 \rightarrow 0$. Для тестирования этого варианта решаем независимо задачу дифракции поля витка тока, размещенного в вакууме внутри диэлектрического слоя. Из граничных условий, типа (5)-(8), получаем систему 4-х линейных уравнений относительно 4-х неизвестных - коэффициентов $A_n^{(l)}$, ($l = \overline{1,4}$) потенциалов Дебая (11)-(14). Отметим, что определитель этой системы будет содержать в качестве блока определитель D (22). Решая эту систему, получаем коэффициенты $A_n^{(l)}$ ($l = \overline{1,4}$). Например, коэффициенты $A_n^{(2)}$ таковы:

$$A_n^{(2)} = i \cdot \frac{\tilde{F}_1(n) L_2}{L_1 L_4 + L_2 L_3}, \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

где $L_1 - L_4$ даны в (25), а $\tilde{F}_1(n)$ - в (17). Эти коэффициенты совпадают с коэффициентами $A_n^{(2)}$ полученными из системы (23),(24) при выполнении предела $\delta_1 \rightarrow 0$.

5. Первая и вторая регуляризация. Системы функциональных уравнений (23),(24) имеют сложное ядро, содержащее сферические функции и их производные. Асимптотическое поведение коэффициентов при $A_n^{(2)} (n \rightarrow \infty)$ различно, отличается на порядок. В связи с этим применение прямых численных методов для решения системы (23),(24) неэффективно, общего метода решения таких систем до сих пор нет. Вместе с тем, методом [4], разработанным на основе идей [2], [3], эти системы можно регуляризовать. Следуя [2]-[4] получим системы линейных алгебраических уравнений II рода, причем на первом этапе введем вспомогательный параметр малости $\varepsilon_n^{(g)}$ такой, что $\varepsilon_n^{(0)} = O(n^{-2})$, при $n \rightarrow \infty$. Для этого проинтегрируем почленно по θ уравнение (23), учтя, что коэффициенты $A_n^{(2)}$ принадлежат пространству $\tilde{\ell}_2$ (15).

Константу интегрирования обозначим C_0 , найдем ее ниже. Здесь использовано равенство $\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = -P'_n(\cos \theta)$ [9]. Затем обозначим в (23), (24)

$$y_n = A_n^{(2)} \frac{1}{D} [L_1 L_4 + L_2 L_3] \omega_n, \quad \omega_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}. \quad (27)$$

Теперь подставим в новые (23), (24) интегральные представления Мелера-Дирихле для функций Лежандра [10]

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi,$$

$$P'_n(\cos \theta) = -\omega_n \frac{2}{\sin \theta} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\varphi \sin \varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi.$$

Используя принадлежность y_n , $n \geq 1$ пространству ℓ^2 , поменяем в новых уравнениях (23), (24) порядок интегрирования и суммирования. Получим интегральные уравнения I рода со слабой особенностью

$$\int_0^\theta \frac{1}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[y_n \psi'_n(ka_1) \xi'_n(ka_1) \frac{2n+1}{n(n+1)} [1 - V_n] \right] \cdot \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - C_0 \cos \frac{\varphi}{2} \right\} d\varphi = 0, \quad 0 \leq \theta < \delta_1, \quad (28)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[y_n - \frac{n(n+1)}{2n+1} \tilde{F}_n \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \sin \varphi \right\} d\varphi = 0, \quad \delta_1 < \theta < \pi. \quad (29)$$

В (28)-(29)

$$\tilde{F}_n = \tilde{F}(n) (-i) [\psi'_n(ka_1)]^{-1},$$

$$V_n = 1 - \frac{D}{\varphi'_n(ka_1)} \cdot \frac{1}{L_1 L_4 + L_2 L_3} \left[1 - \frac{\psi'_n(k_1 a_1) L_1}{\xi'_n(k_1 a_1) L_2} \right]. \quad (30)$$

Так как полученные интегральные уравнения (28), (29) являются интегральными уравнениями типа Абеля, с правыми частями тождественно равными нулю, а отыскиваемые решения - функции в фигурных скобках (см. (28), (29)) принадлежат $\tilde{H}^2(0, \pi)$, то решения интегральных уравнений являются единственными и тривиальными на соответствующих частях $(0, \pi)$ [4, 7, 11, 12, 15]. Приравняв нулю функции в фигурных скобках (28), (29), получим новые функциональные уравнения по элементарным функциям. Полученные функциональные уравнения I рода "почти сшиваются" в точке $\theta = \delta_1$ на частях $[\theta, \delta_1)$, $(\delta_1, \pi]$ сегмента $[0, \pi]$: коэффициенты при неизвестных y_n асимптотически при $n \rightarrow \infty$ совпадает с точностью до константы. Матричный оператор

этой системы ограничен, имеет обратный в ℓ^2 . Такие уравнения допускают численные решения, например, методом коллокации, однако оно неэффективно, так как для его реализации требуются системы линейных уравнений высоких порядков. Отметим, что этим выполнена первая регуляризация оператора задачи дифракции (1)-(4).

С помощью введения параметра малости

$$\varepsilon_n^{(g)} = 1 + ika_1 \frac{2n+1}{n(n+1)} (1 - V_n) \xi'_n(k_1 a) \psi'_n(ka_1), \quad \varepsilon_n^{(g)} = O(n^{-2}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(g)} = 0 \quad (31)$$

закончим подготовку ко второй регуляризации систем функциональных уравнений (23), (24). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \varepsilon_m^{(g)} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi - ika_1 C_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < \delta_1, \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2m+1} \tilde{F}_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, \quad \delta_1 < \varphi < \pi. \quad (33)$$

Рассматривая левую часть системы (32), (33), как ряд Фурье с неизвестными коэффициентами $y_n, n \geq 1$ из ℓ^2 , а правые части - по теореме Рисса-Фишера [14] как заданные функции из $L^2(0, \pi)$ и, применяя метод обращения [7, 4, 15] систем типа (32), (33), последовательно получаем сначала значение константы $ika_1 C_0$:

$$-ika_1 C_0 = + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \tilde{\varepsilon}_m^{(g)} \alpha_{0,m} \frac{1}{\alpha_{0,0}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2m+1} \tilde{F}_m \frac{\alpha_{0,m}}{\alpha_{0,0}}.$$

Подставим эту константу в систему функциональных уравнений (32), (33) и получаем по [4, 7, 15] итоговую систему уравнений:

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \varepsilon_m^{(g)} \tilde{\Gamma}_{n,m}^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2m+1} \tilde{F}_m [\tilde{\Gamma}_{n,m}^{(1)} - \delta_{n,m}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (34)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \left(\alpha_{n,m} + \frac{\alpha_{0,m} \alpha_{0,n}}{\alpha_{0,0}} \right), \quad \delta_{n,n} = 1; \quad \delta_{n,m} = 0, \quad n \neq m;$$

$$\alpha_{n,m} = \frac{\sin(n-m)\delta_1}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)\delta_1}{n+m+1}, \quad n \neq m,$$

$$\alpha_{n,n} = \delta_1 + \frac{\sin(2n+1)\delta_1}{2n+1}, \quad n = m = 0, 1, 2, \dots$$

Этим получили бесконечную систему (34) линейных алгебраических уравнений II рода. Матричный оператор этой системы $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ является

вполне непрерывным, так как $\varepsilon_m^{(g)}$ (31) достаточно быстро стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$, а $\tilde{\Gamma}_{n,m}^{(1)}$ равномерно ограничены для всех $n, m \geq 1$ и при фиксированном $m = m_0$ есть $O(n^{-1})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{m_0,n} = 0$; аналогично при $n = n_0$, $\alpha_{n_0,m} = O(m^{-1})$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m,n_0} = 0$. Так как правый столбец системы принадлежит также ℓ^2 , а соответствующая однородная система уравнений имеет единственное (тривиальное) решение, то для системы II рода справедлива альтернатива Фредгольма [11],[14].

Решение системы (34) может быть найдено численно, например, методом усечения, с любой точностью для всех параметров задачи. Для предельных значений углов δ_1 среза металлической сферы (δ_1 близко к 0 или π) решение системы может быть найдено аналитически, например, методом последовательных приближений.

6. Вспомогательная задача Коши. Далее, для подготовки к третьей регуляризации оператора задачи (1)-(4), рассмотрим вспомогательную систему функциональных уравнений, решение которой y_n , $n \geq 0$, $\tilde{C}_0$ найдем явно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(1 - \frac{D^{(e)}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) \varphi + \tilde{C}_0 \cos \frac{1}{2} \varphi, \quad [0, \delta_1), \quad (35)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{N\bar{H}}_n \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) \varphi, \quad (\delta_1, \pi). \quad (36)$$

Здесь полагаем, что $D^{(e)}$, $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{N\bar{H}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ известны и

$$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{M_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\widetilde{N\bar{H}}_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_2, \quad D^{(e)} \neq 0, m + \frac{1}{2}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (37)$$

Для решения (35),(36) введем функцию

$$R(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi, \quad \varphi \in [0, \delta_1). \quad (38)$$

Для поиска $R(\varphi)$ (38) на первом этапе из (35) приходим к задаче Коши:

$$-R''(\varphi) - D^{(e)}R(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} M_m \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) \varphi + \tilde{C}_0 \cos \frac{1}{2} \varphi, \quad [0, \delta_1), \quad (39)$$

$$R(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad R'(0) = 0. \quad (40)$$

Решаем задачу Коши (39), (40) методом [13], получаем

$$R(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{D^{(e)}})\varphi + \frac{\tilde{C}_0}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} \cos \frac{1}{2}\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, \quad (41)$$

где $C_1, \tilde{C}_0$ — неизвестные константы. Отметим, что функция $R(\varphi)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее ряды являются рядами Фурье. Теперь подставим $R(\varphi)$ (38), (41) в (35) и вместе с (36) приходим к новой системе функциональных уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = C_1 D^{(e)} \cos(\sqrt{D^{(e)}})\varphi + \tilde{C}_0 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} \right] \cos \frac{1}{2}\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} M_m \left[\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} \right] \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, \quad \varphi \in [0, \delta_1], \quad (42)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{N} \widetilde{H}_m \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, \quad \varphi \in (\delta_1, \pi). \quad (43)$$

Эта система допускает полное обращение. Для нахождения в явном виде не только $y_n, n \geq 0$, но и констант $C_1, \tilde{C}_0$ будем использовать кроме (42), (43) еще и равенства (40), (41). Сначала, следуя [4, 7], из (42), (43) получаем:

$$y_n = C_1 T_n + \tilde{C}_0 T_{n,1} + T_{n,2}, \quad (44)$$

где

$$T_n = \frac{1}{\pi} D^{(e)} J_{n,0}, \quad T_{n,1} = \frac{1}{4\pi} D^{(e)} \frac{\alpha_{n,0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}},$$

$$T_{n,2} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{N} \widetilde{H}_m (\pi \delta_{n,m} - \alpha_{n,m}) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} M_m \left[\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} \right] \alpha_{n,m}$$

$$J_{n,0} = \frac{\sin \left[\sqrt{D^{(e)}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \delta_1}{\sqrt{D^{(e)}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)} + \frac{\sin \left[\sqrt{D^{(e)}} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \delta_1}{\sqrt{D^{(e)}} + \left(n + \frac{1}{2}\right)}. \quad (45)$$

Из (38), (40) стандартным путем находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n W_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = C_1 \widetilde{W}_1 + \tilde{C}_0 W_0 \widetilde{W}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m W_m}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}}, \quad (46)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = C_1 + \tilde{C}_0 \widetilde{W}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}}, \quad (47)$$

где

$$W_n = \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tilde{\delta}_1 \right], \quad \widetilde{W}_0 = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - D^{(e)} \right]^{-1}, \quad \widetilde{W}_1 = \cos \left[\sqrt{D^{(e)}} \tilde{\delta}_1 \right]. \quad (48)$$

Решим систему уравнений (44) - (47). Для этого сначала найдем константы $C_1, \tilde{C}_0$, исключив y_n из системы подстановкой y_n (44) в (46), (47). Для вычисления $C_1, \tilde{C}_0$ получаем систему 2-х уравнений, которую решаем по правилу Крамера:

$$C_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad \tilde{C}_0 = \Delta_2 / \Delta, \quad \Delta = t_{1,1} t_{2,2} - t_{1,2} t_{2,1}, \quad (49)$$

$$\Delta_1 = S_{1,1} t_{2,2} - S_{2,1} t_{1,2}, \quad \Delta_2 = t_{1,1} S_{2,1} - t_{2,1} S_{1,1}, \quad (50)$$

где по (45) - (48)

$$\begin{aligned} t_{1,1} &= \widetilde{W}_1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n W_n}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad t_{1,2} = W_0 \widetilde{W}_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n,1} W_n}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad t_{2,1} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}, \\ t_{2,2} &= \widetilde{W}_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n,1}}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad S_{1,1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n,2} W_n}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m W_m}{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - D^{(e)}}, \\ S_{2,1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n,2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m}{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - D^{(e)}}. \end{aligned} \quad (51)$$

В результате получили искомое явное решение вспомогательной системы функциональных уравнений (35), (36) вида (44) с известными коэффициентами $C_1, \tilde{C}_0$ (49). Входящие в (51) ряды являются сходящимися. Суммы некоторых рядов находятся явно.

7. Третья регуляризация. Метод получения явного решения систем функциональных уравнений (35), (36) применим для обращения главной динамической части матричного оператора исходной задачи дифракции, а именно обращения не только статической, но и главной динамической части систем (23), (24). Выделение этой главной части выполним с помощью нового представления параметра малости $\varepsilon_n^{(g)}$ (31):

$$\varepsilon_m^{(g)} = \frac{(ka_1)^2}{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2} + \varepsilon_m^{(g,1)}, \quad \varepsilon_m^{(g,1)} = O(m^{-4}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{(g,1)} = 0. \quad (52)$$

Выполним переход от (32), (33) к (35), (36). Подставим в (32) вместо $\varepsilon_m^{(g)}$ (31) его новое представление (52), а в (35) положим $D^{(e)} = (ka_1)^2$. Отметим, что в (35), (36) следует взять $y_0 = 0$, $M_0 = 0$, $\widetilde{N}H_0 = 0$. Введя в (32), (33) обозначения

$$M_m = y_m \varepsilon_m^{(g,1)}, \quad \widetilde{N}H_m = \frac{m(m+1)}{2m+1} \tilde{F}_m, \quad (53)$$

приходим к системе функциональных уравнений вида (35), (36), с конкретными параметрами, соответствующими исходной задаче дифракции. В результате получим искомую СЛАУ II рода:

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \varepsilon_m^{(g,1)} \frac{L_{m,n}^{(1)}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{M_m L_{m,n}^{(1)}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - D^{(e)}} + \widetilde{N} H_m L_{m,n}^{(2)} \right], \quad (54)$$

где $L_{m,n}^{(1)}, L_{m,n}^{(2)}$ известные убывающие коэффициенты, такие что $L_{m,n}^{(1)} = \underline{O}(m^{-1})$, $L_{m,n}^{(2)} = \underline{O}(m^{-1})$ при $m \rightarrow \infty$. В этой СЛАУ II рода новый параметр малости $\varepsilon_m^{(g,1)} = \underline{O}(m^{-4})$ (см. (52)). Этим выполнена третья регуляризация оператора исходной задачи дифракции (1)-(4) (см. Рис.1).

Уменьшение размерности матричных операторов получаемых СЛАУ особо необходимо не только при исследовании коротковолновой асимптотики задач дифракции. Оно также необходимо, например, при анализе вынужденных и собственных колебаний резонансных систем, когда возрастают требования к точности вычислений. Так, рассматриваемые здесь собственные колебания полый замкнутой сферы описываются функциями $\psi_n(kr)P_n^1(\cos \theta)$, а резонансные частоты (приведенные частоты ka_1) являются корнями трансцендентного уравнения $\psi'_n(x) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Корни этого уравнения достаточно хорошо изучены [16, 10]. В [17] даны приближенные формулы для корней уравнения $\psi'_n(x) = 0$:

$$x_{n,p} = \left(1 + \frac{0.6}{n+2} + 0.35 \frac{p-1}{p}\right) n + \pi(p-0.5). \quad (55)$$

Анализ этой формулы показал ее высокую точность: абсолютная погрешность не превышает 5 процентов, относительная погрешность - не меньше 4 значащих цифр после запятой в значениях корней $x_{n,p}$. Появление отверстия в сфере приводит к изменению ее резонансных частот. В этом случае резонансные частоты соответствуют корням $\widetilde{x_{n,p}}$ определителя бесконечной СЛАУ (54). В качестве нулевого приближения к корням этого определителя (дисперсионного уравнения) необходимо брать $x_{n,p}$ (55), так как определитель при $\delta_1 = \pi$ упрощается, становится диагональным, его значение (с точностью до некоторого множителя) равно произведению функций $\psi'_n(x)$, $n \geq 1$. Решая дисперсионное уравнение, например, методом Ньютона, получаем, в частности $\widetilde{x_{n,p}} = x_{n,p} + \underline{O}(n^3 \delta_1)$, $n \rightarrow \infty$ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – Москва: Сов.радио, 1970. — 570 с.
2. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопапов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн. техн. физ. – 1962. – Т. 32, 4. – С. 381-394.
3. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, 1973. – 288 с.
4. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопапов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием. // Журн. вычисл. матем. и физ. – 1977. – Т. 17, 2. – С. 394-406.
5. Грынъ В.И. Преобразование интегрального уравнения типа Абеля с негладкими данными к интегральному уравнению II рода. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, 1. – С. 85-106.
6. Jaggard D.L., Liu J.C. The Matrix Riccati Equation for scattering from Stratified Chiral Spheres. // IEEE Transactions on AP. – 1999. – Т. 47, 1. – P. 1201-1207.
7. Шестопапов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Харьков: Основа, 1997. – 284 с.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
9. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч.II. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
11. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
12. Самко С.С., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987. – 614 с.
13. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1977. – 369 с.
14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 751 с.

Visnyk Kharkivs'kogo Natsional'nogo Universytetu
Seriya "Matematyka, Prykladna Matematika i Mekhanika"

UDK 271.23.17.19.33.17

№ 582, 2003, p. 135–142

Two integrals

A. F. Grishin, I. V. Poedintseva

Kharkov National University, Ukraine

We give values of two definite integrals. These integrals have been raised in investigations of authors. We did not find them in table books of integrals. The problem book of M.A. Evgrafov and coauthors in the theory of analytic functions has more types of integrals than others. One can view the note as an addition to this book.

2000 *Mathematics Subject Classification* 30E20.

The integrals which we evaluate are the following

$$\int_0^{\infty} \frac{v}{(1+v^2)^2} \left(\pi |\ln v| + \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 v \right) - 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \ln v}{\pi} \right) \ln v \right) dv = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \ln |v| \left(\Re \psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{|v|} \right) dv =$$

$$2\pi \ln \left| \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t \right) \right| - \pi \ln 2\pi - \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

where $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, Γ is the gamma function of Euler.

It gives examples when problems of computing definite integrals are reduced to the asymptotic analysis. First of them is the following. Suppose $\int_0^{\infty} f'(v)g(v)dv$ converges. If one can find a decomposition $g'(v) = g_1(v) + g_2(v)$ such that both integrals $\int_{\varepsilon}^R g_1(v)f(v)dv$ and $\int_{\varepsilon}^R g_2(v)f(v)dv$ have asymptotic expansions up to the vanishing terms, then the integral can be evaluated. The integrals $\int_0^{\infty} g_1(v)f(v)dv$ and $\int_0^{\infty} g_2(v)f(v)dv$ can be divergent. Thus the asymptotic analysis emerges. Notice that methods of expansions for the first and the second integrals can be different. The problem of evaluation of the second integral is reduced to the problem of asymptotic expansion of the integrals $\int_{-R}^R \ln v g(v)dv$, $\int_{-R}^0 g(v)dv$. The integrands

of these integrals are analytic. Sometimes the method of the contour integration gives the answer. Our steps can be repeated to find a precise formula for the integral

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \ln |v| \ln \frac{v^2 + bv + a}{v^2} dv$$

and for other integrals.

In the section 2.6 of book [2] there demonstrate definite integrals with integrands including logarithm. There are no one integral of the form

$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \ln |v| dv$ in this section. We give the methods for calculation of some

integrals of such form and the integrals of the form $\int_{-\infty}^{\infty} f'(v) (\ln |v| + g(v)) dv$.

In addition we say the following. Integration by parts is important method for calculation of definite integrals. Our integrals give the examples when this method allow to get the answer in spite of the straightforward application of the formula of integration by parts is impossible.

In the beginning of calculations to prevent showing up divergent integrals we write

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{-2v}{(1+v^2)^2} \left(\pi |\ln v| + \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 v \right) - 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \ln v}{\pi} \right) \ln v \right) dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{-2v}{(1+v^2)^2} \left(\pi |\ln v| + \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 v \right) - 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \ln v}{\pi} \right) \ln v \right) dv. \end{aligned}$$

Let I_1 stands for the previous integral. We have

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{1+v^2} \left(\pi |\ln v| + \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 v \right) - 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \ln v}{\pi} \right) \ln v \right) \Big|_{\epsilon}^{\infty} \\ &- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{1+v^2} \left(\pi \operatorname{sign} \ln v + \frac{\pi \ln v}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 v} - \frac{4 \ln v}{\pi \left(1 + \frac{4 \ln^2 v}{\pi^2} \right)} - 2 \operatorname{arctg} \frac{2 \ln v}{\pi} \right) \frac{dv}{v} \\ &= \pi \ln 2 - \pi \ln \ln \frac{1}{\epsilon} - 2\pi \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{v} \ln \frac{v^2}{1+v^2} \frac{dv}{\pi^2 + 4 \ln^2 v}. \end{aligned}$$

Changing $v = u^{\frac{1}{2}}$, we obtain

$$I_1 = -\pi \ln 2 - \pi \ln \ln \frac{1}{\epsilon} - \pi \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{1}{u} \ln \frac{u}{1+u \ln^2 u + \pi^2} du + o(1), \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

To calculate the integral we consider the domain

$$D(\epsilon, R) = C(0, R) \setminus [-1, R] \setminus B(-1, \epsilon^2) \setminus B(0, \epsilon^2),$$

where $C(a, r)$ and $B(a, r)$ are an open and a closed discs of radius r centered at a . Let $\mathcal{L}$ be the boundary of $D(\varepsilon, R)$ in the topology of Caratheodory and let orientation of $\mathcal{L}$ be positive. This means that we distinguish the lower and the upper sides of the real part of the boundary and the domain is from the left when moving along $\mathcal{L}$. We write $\mathcal{L} = \cup_{k=1}^8 E_k$, where E_1 is the upper side of $[\varepsilon^2, R]$, E_2 is the circle of radius R centered at 0 with the counterclockwise orientation, E_3 is the lower side of the oriented interval $[R, \varepsilon^2]$, E_4 is the half-circle in the lower half-plane $\Im z \leq 0$ with the beginning ε^2 and the end $-\varepsilon^2$, E_5 is the lower side of the oriented interval $[-\varepsilon^2, -1 + \varepsilon^2]$, E_6 is the counterclockwise oriented circle of radius ε^2 centered at -1 , E_7 is the upper side of the oriented interval $[-1 + \varepsilon^2, -\varepsilon^2]$ and E_8 is the half-circle in the upper half-plane that is from $-\varepsilon^2$ to ε^2 . The theorem of Cauchy gives

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{z} \left(\ln \frac{z}{1+z} \right) \frac{1}{\ln z - i\pi} dz = 0. \quad (3)$$

The branches of $\ln z$, $\ln(1+z)$ we define by the conditions $\arg z = 0$, $\arg(1+z) = 0$ on the upper side of the interval $[\varepsilon^2, R]$. Denote

$$J_k = \int_{E_k} \frac{1}{z} \ln \frac{z}{1+z} \frac{1}{\ln z - i\pi} dz.$$

We have

$$J_1 + J_3 = \int_{\varepsilon^2}^R \frac{1}{v} \ln \frac{v}{1+v} \left(\frac{1}{\ln v - \pi i} - \frac{1}{\ln v + \pi i} \right) dv = 2\pi i \int_{\varepsilon^2}^R \frac{1}{v} \ln \frac{v}{1+v} \frac{dv}{\ln^2 v + \pi^2},$$

$$J_5 + J_7 = 2\pi i \int_{-1+\varepsilon^2}^{-\varepsilon^2} \frac{1}{u} \ln |u| du = -2\pi i \int_{\varepsilon^2}^{1-\varepsilon^2} \frac{dv}{v \ln v} =$$

$$2\pi i \left(2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln 2 \right) + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Evidently, $J_2 = \bar{o}(1)$ as $R \rightarrow +\infty$. The curve E_8 is parameterized by $z = \varepsilon^2 e^{i\varphi}$, where the value φ varies from π to 0.

Consequently,

$$J_8 = - \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon^2 e^{i\varphi}} \left(-2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + i\varphi - \ln(1 + \varepsilon^2 e^{i\varphi}) \right) \frac{i\varepsilon^2 e^{i\varphi}}{-2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + i\varphi - i\pi} d\varphi =$$

$$-i\pi + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Analogously, E_4 is parameterized by $z = \varepsilon^2 e^{i\varphi}$, where the value φ varies from 2π to π . It leads to $J_4 = -i\pi + \bar{o}(1)$ as $\varepsilon \rightarrow +0$. The curve E_6 is parameterized by

$z = -1 + \varepsilon^2 e^{i\varphi}$, where the value φ varies from 2π to 0. This gives

$$J_6 = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-1 + \varepsilon^2 e^{i\varphi}} \left(i\pi + \ln \left(1 - \varepsilon^2 e^{i\varphi} \right) + 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} - i\varphi \right) \frac{i\varepsilon^2 e^{i\varphi}}{\ln(1 - \varepsilon^2 e^{i\varphi})} d\varphi =$$

$$-4\pi i \ln \frac{1}{\varepsilon} + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Now the identity (3) carries to the following

$$\int_{\varepsilon^2}^R \frac{1}{u} \ln \frac{1}{1+u} \frac{1}{\ln^2 u + \pi^2} du + \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln 2 - 1 + \eta_1(\varepsilon) + \eta_2(R) = 0,$$

where $\eta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow +0$, $\eta_2(R) \rightarrow 0$ as $R \rightarrow +\infty$. Passing $R \rightarrow +\infty$, we find

$$\int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{1}{u} \ln \frac{1}{1+u} \frac{1}{\ln^2 u + \pi^2} du = -\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \ln 2 + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

$$I_1 = -\pi + \bar{o}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

This proves (1).

Further we consider the integral

$$I_2 = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \ln |v| \left(\Re \psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{|v|} \right) dv$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\Re \int_{-R}^R \ln v \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{v} \right) dv \right.$$

$$\left. + \Re i\pi \int_{-R}^0 \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{v} \right) dv \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} (I_3 + I_4),$$

where

$$I_3 = \Re \int_{-R}^R \ln v \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{v} \right) dv,$$

$$I_4 = \Re i\pi \int_{-R}^0 \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) + \ln \frac{2}{v} \right) dv.$$

Here $\ln v$ is the continuation of the principal branch of $\ln z$ to the real axis from the lower half-plane $\Im z \leq 0$. Thus $\ln z = \ln |z| - i\pi$ for negative z . We have

$$I_4 = 2\pi \Re \int_{-R}^0 \frac{d}{dv} \ln \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+v) \right) dv + \Re i\pi \int_{-R}^0 \left(\ln \frac{2}{|v|} + i\pi \right) dv$$

$$= 2\pi \left(\ln \left| \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t \right) \right| - \ln \left| \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t-R) \right) \right| \right) - \pi^2 R.$$

Further the asymptotic formula

$$\ln \Gamma(w) = \left(w - \frac{1}{2} \right) \ln w - w + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1), \quad w \rightarrow \infty, \quad |\arg w| \leq \gamma < \pi$$

gives

$$I_4 = 2\pi \ln \left| \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t \right) \right| - \frac{\pi^2}{2}t - \pi \ln 2\pi - \frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2} \ln R - \frac{\pi^2}{2}R + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

The investigation of the value I_3 is a more complicated problem. To resolve it we consider the domain $D(\varepsilon, R) = \{z : -R < \Re z < R, -R < \Im z < 0\} \setminus B(0, \varepsilon)$. Let $\mathcal{L}$ be the boundary of $D(\varepsilon, R)$ with the negative orientation. The function $\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+z) \right)$ is meromorphic in the variable z in the whole plane with the poles $z_k = -t + 2i \left(k + \frac{1}{4} \right), k = 0, 1, \dots$. The domain $D(\varepsilon, R)$ is disjoint from the set of poles. Then the Cauchy theorem gives

$$\int_{\mathcal{L}} \ln z \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+z) \right) + \ln \frac{2}{z} \right) dz = 0. \quad (4)$$

The boundary $\mathcal{L}$ is divided into five parts $\mathcal{L} = \cup_{k=1}^5 E_k$ where $E_1 = [-R, R] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$, E_2 is the half-circle of radius ε centered at 0. It has the beginning $-\varepsilon$ and the end ε and lies in the lower half-plane $\Im z \leq 0$. Other parts are oriented segments: $E_3 = [R, R-iR]$, $E_4 = [R-iR, -R-iR]$, $E_5 = [-R-iR, -R]$. Denote

$$J_k = \int_{E_k} \ln z \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t+z) \right) + \ln \frac{2}{z} \right) dz.$$

Evidently, $J_2 = o(1)$ as $\varepsilon \rightarrow +0$. The segment E_3 is parameterized by $z = R-i\tau$, where τ varies from 0 to R . Consequently,

$$J_3 = -i \int_0^R \ln(R-i\tau) \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t + \frac{i}{2}(R-i\tau) \right) + \ln \frac{2}{R-i\tau} \right) d\tau.$$

In any angle $|\arg w| \leq \gamma < \pi$ the formula

$$\psi(w) = \ln w - \frac{1}{2w} + o\left(\frac{1}{w^2}\right), \quad w \rightarrow \infty$$

is valid, where $\ln$ is the main branch of logarithm. Thus we have

$$J_3 = -i \int_0^R \ln(R-i\tau) \left(\ln \frac{\frac{1}{2} + it + i(R-i\tau)}{R-i\tau} - \frac{1}{\frac{1}{2} + it + i(R-i\tau)} \right) d\tau + o(1),$$

$$R \rightarrow +\infty.$$

Our choice of a branch of logarithm brings the identity

$$\ln \frac{\frac{1}{2} + it + i(R - i\tau)}{R - i\tau} = i\frac{\pi}{2} + \ln \left(1 + \frac{t - \frac{i}{2}}{R - i\tau} \right).$$

It gives

$$J_3 = -i \int_0^R \ln(R - i\tau) \left(\frac{i\pi}{2} + \frac{t - \frac{i}{2}}{R - i\tau} + \frac{i}{R - i\tau} \right) d\tau + o(1) =$$

$$-i \int_0^R \ln(R - i\tau) \left(\frac{i\pi}{2} + \frac{t + \frac{i}{2}}{R - i\tau} \right) d\tau + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Changing $\tau = Rv$ we find

$$J_3 = -iR \int_0^1 (\ln R + \ln(1 - iv)) \left(\frac{i\pi}{2} + \frac{t + \frac{i}{2}}{R(1 - iv)} \right) dv + o(1) = \frac{\pi}{2} R \ln R$$

$$-i \left(t + \frac{i}{2} \right) \int_0^1 \frac{dv}{1 - iv} \ln R + \frac{\pi}{2} R \int_0^1 \ln(1 - iv) dv - i \left(t + \frac{i}{2} \right) \int_0^1 \frac{\ln(1 - iv)}{1 - iv} dv + o(1),$$

$$R \rightarrow +\infty.$$

Using the identities

$$-i \int_0^1 \frac{dv}{1 - iv} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \ln(1 - iv) dv = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} + i \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$-i \int_0^1 \frac{\ln(1 - iv)}{1 - iv} dv = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4} \right)^2,$$

we obtain

$$J_3 = \frac{\pi}{2} R \ln R + \frac{\pi}{2} R \left(-1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} + i \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ + \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4} \right) \ln R + \frac{1}{2} \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4} \right)^2 + o(1), \\ R \rightarrow +\infty.$$

Analogously,

$$\begin{aligned}
 J_5 &= i \int_0^R \ln(-R - i\tau) \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t + \frac{i}{2}(-R - i\tau) \right) + \ln \frac{2}{-R - i\tau} \right) d\tau \\
 &= -\frac{\pi}{2} R \ln R + \frac{i\pi^2}{2} R + \frac{\pi}{2} R \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} + i \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
 &\quad + \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4} \right) \ln R + \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(-\frac{\pi^2}{4} + \frac{i\pi}{2} \ln 2 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4} \right)^2 + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

The next integral is J_4 .

$$\begin{aligned}
 J_4 &= - \int_{-R}^R \ln(\tau - iR) \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t + \frac{i}{2}(\tau - iR) \right) + \ln \frac{2}{\tau - iR} \right) d\tau = \\
 &= - \int_{-R}^R \ln(\tau - iR) \left(\ln \frac{\frac{1}{2} + it + i(\tau - iR)}{\tau - iR} - \frac{1}{\frac{1}{2} + it + i(\tau - iR)} \right) d\tau + o(1) = \\
 &= -i\pi R \ln R + \frac{\pi}{2} R \left(-\pi + i \left(2 - \ln 2 - \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(t + \frac{i}{2} \right) \frac{i\pi}{2} \ln R - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(t + \frac{i}{2} \right) \left(\frac{i\pi}{2} \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} \right) + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

It follows from identity (4) and the evaluations of J_2, J_3, J_4, J_5 that

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \Re \int_{-R}^R \ln v \left(\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}(t + v) \right) + \ln \frac{2}{v} \right) dv = \frac{\pi^2}{4} R - \frac{\pi}{2} \ln R + \frac{\pi^2}{2} t + o(1), \\
 &\quad R \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Then

$$I_3 + I_4 = 2\pi \ln \left| \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t \right) \right| - \pi \ln 2\pi - \frac{\pi}{2} \ln 2 + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

It proves (2).

Acknowledgements

We are grateful to S. Merenkov for the helpful suggestions. The investigations of the authors partially supported by INTAS, Ref. No. INTAS 99 - 00089.

REFERENCES

1. Evgrafov M.A., Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I., Bezhanov K.A. Problems in the theory of analytic functions (Russian). - Moscow: Nauka, - 1969.
2. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series (Russian). - Moscow: - 1981.