Відношення та відображення. Дії з ними

Курінний Григорій Чарльзович, Невмржицька Олена Миколаївна

Жовтень, 2014

Зміст

1 Декартовий степінь множини, відношення, відображення, функція.

1.1 Декартовий добуток. Декартовий квадрат.

Вважаємо зрозумілим, що таке впорядкована пара і невпорядкована. Коли маємо 21 — десятковий запис числа двадцять один, і 12 — десятковий запис числа дванадцять, то порядок запису цифр в записах суттєвий, тому кажемо, що в даному випадку пара цифр 12 пара цифр 21 впорядковані, тобто порядок запису елементів (в даному разі цифр) суттєвий. Коли ж ми маємо яблуко і грушу, або маємо ту ж грушу і те ж яблуко, то порядок їх перерахування несуттєвий. В цьому розі кажемо про невпорядковану пару {яблуко, груша}.

Якщо A, B — дві множини, і $a \in A, b \in B$, то (a, b) — впорядкована пара, $(a, b) \neq (b, a)$ при $a \neq b$. А для невпорядкованої пари $\{a, b\}$ завжди виконується рівність $\{a, b\} = \{b, a\}$. Подібним чином розглядаємо впорядковані послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n$.

Впорядковані послідовності називають також кортежами та векторами.

Для будь-яких множин A, B можна розглядати множину всіх впорядкованих пар $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Ця множина називається декартовим або прямим добутком множин A і B і позначається $A \times B$.

Для $A = \{1, 2\}, B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\},$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Декартовий добуток порожньої множини на будь-яку множину буде порожньою множиною. Це твердження доводиться методом від протилежного. Дійсно, нехай $A = \emptyset$, B — деяка множина, і $C = A \times B$. Якщо C не порожня множина, то в ній існує якийсь елемент — припустимо $c \in C$. За визначенням прямого добутку для деяких $a \in A, \quad b \in B$ буде $c = (a, b)$. Оскільки ми вказали елемент $a \in A$, то A — не порожня множина, що суперечить припущенню.

Декартовий добуток множини на себе називають декартовим квадратом множини.

Можна розглядати декартовий добуток порожньої множини множників, декартовий добуток одного множника, декартовий добуток дтрьої множників і т.п. Подібним чином, можна розглядати нульовий степінь множини, перший стапінь множини, третій степінь множини і т. п. Ці конструкції розглядаються в наступних лекціях.

1.2 Відповідності та відношення

Підмножини декартового добутку двох множин називають відповідностями,

підмножини декартового квадрату називають бінарними відношеннями.

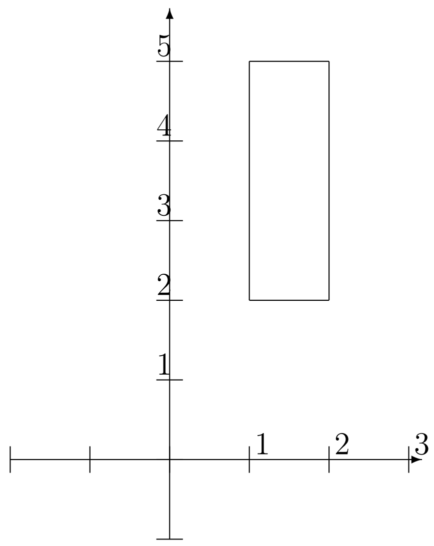

Рис. 1: Прямим добутком відрізка $[1,2]$ на відрізок $[2,5]$ є прямокутник

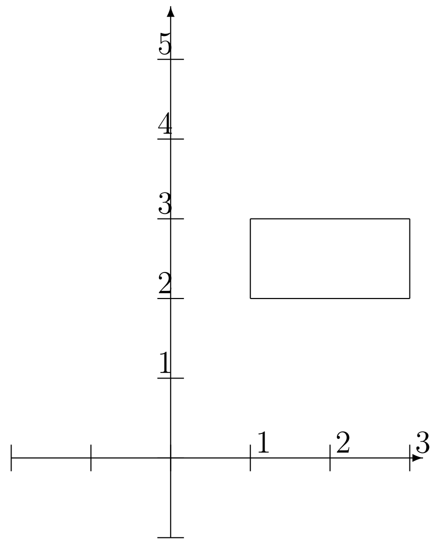

Рис. 2: Прямим добутком відрізка $[1,3]$ на відрізок $[2,3]$ є прямокутник.

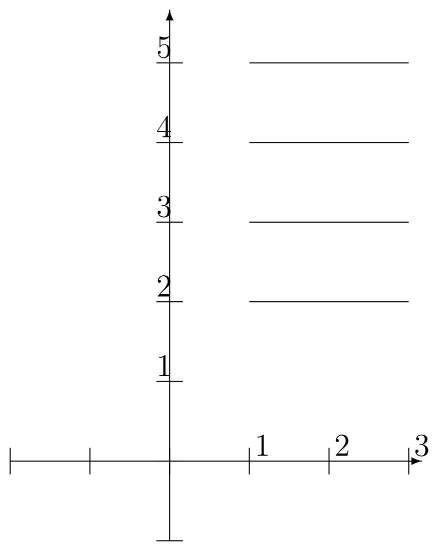

Рис. 3: Прямим добутком відрізка $[1,3]$ на чотириелеметну множину $\{2,3,4,5\}$ є чотири відрізки

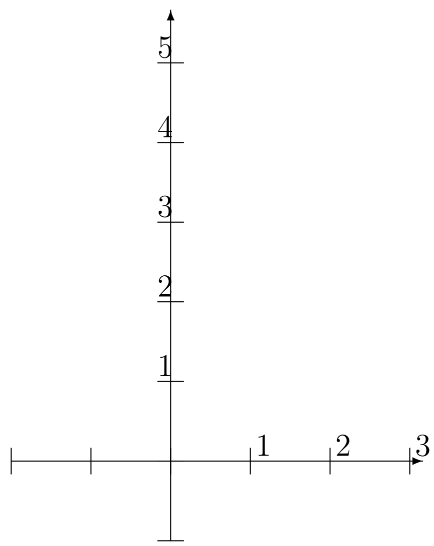

Рис. 4: Прямим добутком двоелеметної множини $\{1,3\}$ на двоелеметну множину $\{2,5\}$ є чотири точки.

Якщо $A = \{\triangle, \Box, \star, \nabla\}$ а $B = \{1,2,3,4,5\}$, то

$$C = \{(\triangle, 2), (\Box, 5), (\star, 1), (\nabla, 3) \tag{1}$$

— відповідність між A та B, яка задана переліком своїх елементів, а

$$D = \{(\triangle, \triangle), (\Box, \Box), (\star, \star), (\nabla, \nabla)\} \tag{2}$$

є відношенням на множині A.

Нагадаємо, що предикат і його область істинності можна не розрізняти, побідно до того, як інколи можна не розрізняти функцію та її графік. Це нагадування викликано тим, що відношення ми уже згадували, коли говорили про $n-$місні предикати.

На рис. 1, 1,1,1 задані 4 відношення на множині дійсних чисел. Їх, відповідно, можна задати іншим чином, наприклад

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{y-2} \cdot \sqrt{5-y} = \sqrt{(x-1)(2-x)(y-2)(5-y)},$$

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{y-2} \cdot \sqrt{-y} = \sqrt{(x-1)(3-x)(y-2)(3-y)},$$

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{3-x} + (y-2) \cdot (y-3) \cdot (y-4) \cdot (y-5) = \sqrt{(x-1)(3-x)},$$

$$\begin{multline} ((x-1)^2 + (y-2)^2) \cdot ((x-1)^2 + (y-5)^2) \cdot \\ \cdot ((x-3)^2 + (y-2)^2) \cdot ((x-3)^2 + (y-5)^2) = 0. \tag{3} \end{multline}$$

2 Відображення та функції

2.1 Всюди визначені та часткові відображення

Нехай A, B — дві множини і $f \subseteq A \times B$ — відповідність. Якщо для кожного елемента $a \in A$ існує і до того ж єдиний елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in f$, тоді відповідність f називають відображенням із множини A в множину B і пишуть $f : A \to B$.

Елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in f$ позначають $f(a)$, називають образом елемента a і пишуть $b = f(a)$ та $a \overset{f}{\mapsto} b$. Множину $B_1 = \{b \in B | (a, b) \in f$ для деякого $a \in A\}$ називають областю значень відображення f або образом множини A при відображенні f і позначають $B_1 = f(A)$.

Відповідність C між множинами $A = \{\triangle, \Box, \star, \nabla\}$ та $B = \{1,2,3,4,5\}$, яка задана переліком (1) є відображенням. Відповідно, можна писати

$$C : A \to B, \quad \triangle \mapsto 2, \Box \mapsto 5, \star \mapsto 1, \nabla \mapsto 3.$$

Також можна писати
$$C(\triangle) = 2, \quad \square \overset{C}{\mapsto} 5.$$
Образом елемента $\star \in A$ є 1. Образом всієї множини A є множина $\{1, 2, 3, 5\}$.

Інколи виникає потреба розглядати випадки $f \subseteq A \times B$, коли для кожного елемента $a \in A$ існує не більше одного елемента $b \in B$такого, що $(a, b) \in f$, тоді відповідність f називають частковим відображенням із множини A в множину B, або не всюди визначеним відображенням із множини A в множину B. В такому випадку множину $\{a \in A | (a, b) \in f b \in B\}$ називають областю визначення відображеня f.

У відповідності до сказаного, $\operatorname{tg} x$ є відображенням із множини $\{x \in R | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ для деякого $k \in \mathbb{Z}\}$ у множину R. В той же час $\operatorname{tg} x$ є частковим відображенням із множини R у множину R.

Відображення з різними областями визначення обов'язково різні.

Коли виникає потреба підкреслити що для кожного елемента $a \in A$ існує елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in f$, тоді відображення f називають всюди визначеним.

Функція $\sin x$ всюди визначена на множині дійсних чисел, а функція $\sqrt{x}$ є частковою функцією на множині дійсних чисел, але є всюди визначеною на множині невід'ємних дійсних чисел. Функції $\sqrt{x}$ та $\sqrt{|x|}$ є різними функціями.

> Два відобрження збігаються (це одне і те ж відображення, це рівні відображення) в тому і тільки тому випадку, коли ці два відображення задані на одній і тій же множині, мають одну і ту ж область визначення і значення відображень на будь-якому елементі із області визначення збігаються.

2.2 Способи задання відображення

Мовна практика дозволяє не розрізняти відображення та спосіб його задання — алгоритмом, аналітично (формулою), графічно, таблично, чи в інший спосіб. Проте варто пам'ятати, що різні формули, різні таблиці, різні алгоритми можуть задавати одне і те ж відображення.

Для числових функцій поширеним є аналітичне задання — задання у вигляді формул, які використовують певний набір відомих функцій. Так аналітично заданими функціями будуть

$f_1(x) = 5x^3 - 7x + 9$ — многочлен, ціла функція;

$f_2(x) = \dfrac{7x^4 - 3x^3 + 11}{x - 2}$ — раціональна функція;

$f_3 = \sin 2x - 5 \cos x$ — тригонометрична функція.

Для показу на екрані для великого загалу людей використовують графічне задання функцій — графіки, ті чи інші гістограми (див. рис. 5,2.2)

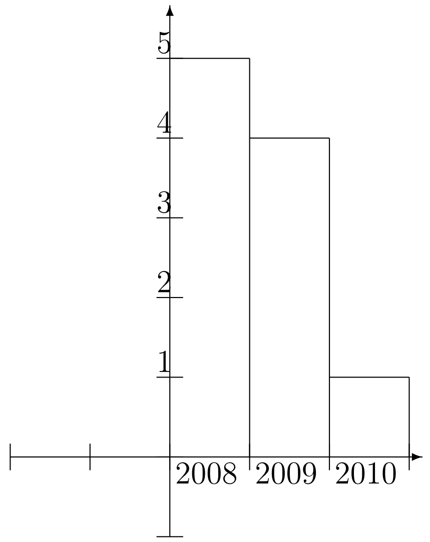

Рис. 5: Приклад стовпчикової гістограми

Рис. 6: Приклад кругової гістограми.

Для задання відображення із скінченної множини A в скінченну множину B часто використовують табличне задання, задання двома рядками. У верхньому рядку виписують всі елементи (для всюди визначеної функції) або частину елементів (для часткової фукнції) множини A. нижньому рядку виписують образи відповідних образи відповідних елементів. Табличка береться в круглі дужки. Так відображення (1) можна задати таблицею

$$C = \begin{pmatrix} \triangle & \square & \star & \nabla \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для відображення

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 9 & 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

можна написати $f(5) = 9, f(9) = 6$. У верхньому рядку такого табличного задання функції (задання двома рядками) обов'язково всі елементи різні. У нижньому рядку елементи можуть бути однакові.

2.3 Типи відображень

Якщо $f(A) = B$, то відображення $f : A \to B$ називають сюр'єктивним. Для сюр'єктивних відображень вживають також назву "відображення на" та "накладання".

Відображення $\sin x$ із множини дійсних чисел у відрізок $[-1, 1]$ є сюр'єктивним, тому що для будь-якого числа $-1 \le y \le 1$ існує число x, а саме $x = \arcsin y$, образом якого під дією відображення синус буде y.

Відображення $\sin x$ із множини дійсних чисел у множину дійсних чисел не є сюр'єктивним, тому що число 8 не є образом жодного числа.

Відображення C в прикладі (1) не є сюр'єктивним, тому що 4 не є образом жодного елемента із A.

> Якщо $\forall a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, то відображення $f : A \to B$ називають ін'єктивним. Для ін'єктивних відображень вживають також назву "відображення в" та "вкладання"

Відображення C в прикладі (1) є ін'єктивним, тому що жоден із елементів множини B не має двох прообразів із A.

Відображення $y = x^2$ із множини дійсних чисел у множину дійсних чисел не є ні сюр'єктивним ні ін'єктивним. Не сюр'єктивним воно є тому, що число -1 не має прообразу, а не ін'єктивним тому, що число 1 має два прообрази 1 та -1.

> Якщо відображення і ін'ктивне і сюр'єктивне, то його називають бієктивним або взаємно однозначним. Взаємно однозначне відображення із скінченної множини в себе називають підстановками.

Нехай маємо відображення $f : A \to B$ і $f(a) = b$ для деяких елементів $a \in A, b \in B$. Нагадаємо, що тоді b є образом елемента a, а елемент a є прообразом елемента b.

> Повний прообраз елемента b це множина всіх його прообразів:
>
> $$f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}.$$
>
> Повний прообраз підмножини $C \subset B$ — це
>
> $$f^{-1}(C) = \bigcup_{x \in C} f^{-1}(x).$$

Таким чином, коли розглядається функція $\sin x$ на множині дійсних чисел, то повний прообраз елемента $\frac{1}{2}$ це множина чисел, які множна записати у вигляді

$$\frac{\pi}{6} + (-1)^n n\pi$$

для деякого цілого числа n. А повний прообраз числа 2 порожній.

Для відображення $x \mapsto x^2$ повний прообраз нуля складається лише із нуля, повний прообраз числа 4 двоелементний — складається із чисел 2 та -2, а повний прообраз кожного від'ємного числа порожній.

Запропонована термінологія дозволяє сказати, що відображення $f : A \to B$ є

- ін'ктивним, коли різні елементи із A мають різні образи;

- сюр'єктивним, коли кожен елемент із B має прообраз.
- взаємно однозначним, коли кожен елемент із B має єдиний прообраз.

Якщо B — підмножина множини A, то відображення $f : B \to A$ $f(x) = x$ є канонічним ін'єктивним відображенням із підмножини в множину.

Отже при канонічному вкладанні цілих чисел в дійсні числа образом числа 5 буде 5, образом числа -7 буде -7, прообраз числа π порожній.

Канонічне вкладання f множини $\{2, 3, 5, 7\}$ у множину $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відображення із множини в числову множину називають функцією.

Якщо B — підмножина множини A, то відображення $f : A \to \{0, 1\}$ $f(x) = 1$, якщо $x \in B$ і $f(x) = 0$, якщо $x \notin B$ називають характеристичною функцією підмножини.

Отже синус, косинус, показникова функція, степенева функція — все це функції. Характеристична функція підмножини $\{-1, 1\}$ множини дійсних чисел має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x = -1, \\ 1, & \text{коли } x = 1, \\ 0, & \text{коли } x \notin \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Особливою підмножиною декартового квадрата непорожньої множини A є підмножина, що складається із таких пар, де перший елемент пари збігається із другим. Цю підножину називають діагоналлю множини і позначають Δ_A. Якщо цю підмножину називають відношенням, то це відношення рівності $=$. Ця ж підмножина може розглядатися як відображення, тоді це відображення називають тотожним і позначають id_A.

$$\Delta_A = \{(a, a) | a \in A\}, \qquad \forall x \in A(\mathrm{id}(x) = x).$$

2.4 $n-$й декартовий степінь множини, $n-$місні функції, $n-$місні відношення

$n-$ий декартовий степінь множини A $n \geq 1$ складається із послідовностей довжини $n \in \mathbb{N}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, елементи яких лежать в A. Такі послідовності в деяких контекстах (мовних оточеннях) називають словами в алфавіті A. Будь-який додатний декартовий степінь порожньої множини є порожньою множиною. Нульовий степінь будь-якої можини (в тому числі і порожньої) — одноелементний, елементом цього степеня є порожня множина. Перший степінь будь-якої множини збігається з цією множиною.

Згідно означення

$$(3,2,3,7,11) \in \mathbb{N}^5, \quad (-3,5,-7) \in \mathbb{Z}^3, (01110111000) \in \{01\}^{11}, \quad \sqrt{3} \in \mathbb{R} = R^1.$$

$n-$й декартовий степінь множини A ($n \geq 0$) позначається A^n.

Якщо множина A числова, то відображення із A^n в A називається $n-$місною функцією, функцією від n змінних. Отже

$$y = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 - 3x_2 + 7x_4 + 11$$

це чотиримісна функція, функція від 4 змінних.

Якщо $n = 0$, то $A^n = \{\emptyset\}$ і відображення $f : A^n \to A$ може бути задане єдиним своїм значенням $f(\emptyset) \in A$. Тому кажуть, що функція від порожньої множини змінних це виділене число. Звідси випливає, що n-місних функцій $n = 0$ на порожній множині не існує, а n-місна функція $n \geq 1$ на порожній множині єдина — це порожня множина. Якщо відображення $f : A^n \to A$ обчислюється від послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то елемнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають аргументами функції f.

В загальному випадку відображення із A^n в A називається $n-$місною операцією або $n-$арною операцією. Бінарні операції звичайно називають додаванням, множенням, комозицією та суперпозицією. Інші назви використовують у випадках, коли операція введена в конкретній ситуації кимось давно і, відповідно, давно введена кимось своя назва.

2.5 Відображення і послідовності

Кожне відображення f із множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ у множину A можна задати послідовністю — підряд записаними значеннями відображення

$$(f(1).f(2), \ldots, f(n)) = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad f(i) = a_i \in A, \quad 1 \leq i \leq n.$$

В зворотному напрямку — кожну послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів із множини A можна розглядати як послідовно записані значення певного відображення $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$. Таким чином, виникає природна взаємно однозначна відповідність між відображеннями $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ і послідовностями довжини n лементів із A. Звідси випливає, що коли міркування ведуться з точністю до канонічної взаємно однозначної відповідності, то послідовністю називають функцію $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.

Подібним чином, нескінченні послідовності $a_1, a_2, \ldots$ елементів із множини A це відображення із $\mathbb{N}$ в A

3 Композиція відображень та відношень.

3.1 Складна функція.

Нехай маємо три множини A, B, C і два відображення $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тоді можна побудувати відображення $h : A \to C$ наступним чином. Беремо довільний елемент $a \in A$ Шукаємо елемент $b \in B$, для якого $f(a) = b$. Далі шукаємо елмент $c \in C$ такий, що $g(b) = c$. Далі за визначням, кажемо, що $h(a) = c$ (див рис. 7). Щоб підкреслити, що функція h одержана за допомогою композиції двох функцій, кажуть, що h — складна функція

Звернемо увагу на некомутативність композиції — першою діє та функція, те відображення, яке в добутку стоїть справа. Це зумовлене домовленістю про запис аргумента справа від функції.

Всі відображення із заданої множини A задану множину B творюють множину, яка позначається B^A.

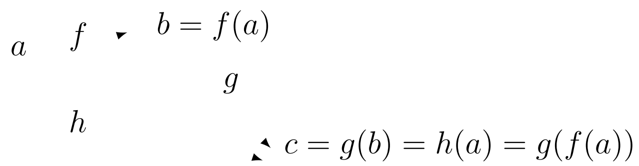

Рис. 7: Дія композиції $h = g \cdot f$ на елемент a.

Подібним чином визначається суперпозиція функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n$ і функцій $g_i(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, $\quad i = 1, 2, \ldots n$. Суперпозицією буде нова функція $h(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, значення якої обчислюються за правилом

$$h(y_1, y_2, \ldots, y_k) = f(g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k), g_2(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots g_n(y_1, y_2, \ldots, y_k))$$

.

3.2 Композиція відношень.

Для бінарних відношень P, Q на множині A визначена композиція $R = P \cdot Q$:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow \exists c((a, c) \in P \land (c, b) \in Q). \tag{5}$$

Також визначене обернене видношення P^{-1}:

$$(a, b) \in P^{-1} \Leftrightarrow ((b, a) \in P) \land (c, b) \in Q.$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Нехай задана множина $\{a, b, c\}$ і на ній два відношення $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$ та $R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,b),(c,c)\}$. Позначимо $P = R_1^2 = R_1 \cdot R_1, \quad Q = R_1 \cdot R_2, \quad S = R_1^{-1}$. Знайдемо відношення P, Q, S.

Шукаємо відношення P. Беремо перший елемент відношення R_1, тобто $u_1 = (a,a)$. Перебираємо всі пари із R_1 які починаються із a — ними є $(a,a),(a,b)$. Правило (5) забезпечує включення

$$(a,a),(a,b) \in P.$$

Далі беремо другу пару у відношенні R_1, тобто $u_2 = (a,b)$. Ця пара разом із (b,c) забезпечує включення

$$(a,c) \in P.$$

Третя пара $u_3 = (b,c)$ не постачає в P жодного елемента, оскільки в R_1 немає жодної пари, яка починалася б із c. Ми перебрали всі пари із R_1, Отже всі пари відношення P найдені

$$P = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}.$$

Шукаємо відношення Q. Для цього перебираємо пари із R_1, і для кожної пари $(x,y) \in R_1$ шукаємо всі пари $(y,z) \in R_2$, що у відповідності до правила (5) дозволяють записати включення $(x,z) \in Q$. Таким чином, пара $(a,a) \in R_1$ забезпечує $(a,a),(a,b) \in Q$; $(a,b) \in R_1$ забезпечує $(a,b),(a,c) \in Q$; $(b,c) \in R_1$ забезпечує $(b,c) \in Q$; Отже $Q = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c))\}$.

Відношення S одержується із відношення R_1 зміною порядку в парах, що входять до R_1. Отже

$$S = \{(a,a),(b,a),(c,b)\}.$$

Вправа 2. На множині дійсних чисел розглянемо відношення R, яке складається із тих пар (x,y), які задовольняють рівняння

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Отже відношення R — це коло одиничного радіуса з центром у почату координат. Піднесемо це коло до квадрату, тобто знайдемо відношення $Q = R^2$. Якщо $(x,y),(y,z) \in R$ то $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 \le 1$, $y^2 + z^2 = 1$ і $x^2 = z^2$. Таким чином,

$$(x,z) \in R^2 \Rightarrow (|x| = |z| \le 1).$$

Якщщо $|x| = |z| \le 1$, то $1 - x^2 = 1 - z^2 \ge 0$, що дозволяє найти число y, для якого виконуються рівності $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$. Звідси випливає, що

$$(x,z) \in R^2 \Leftarrow (|x| = |z| \le 1).$$

Тепер можна сформулювати відповідь: Квадратом кола $x^2 + y^2 = 1$ є перехрестя $|x| = |z| \le 1$, (див. рис. 8).

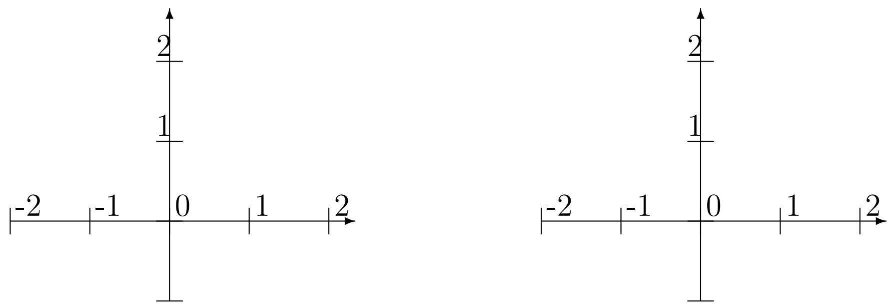

Рис. 8: Квадратом кола $x^2 + y^2 = 1$ є перехрестя $|x| = |y|, |x| \leq 1$.

Вправа 3. Знайдемо добуток $T = R \cdot S$ відношення R, $(x, y) \in R \Leftrightarrow (-2 < x < 2) \wedge (-3 < y < 3)$ (прямокутника) на відношення S, $(x, y) \in S \Leftrightarrow y = |x|$ (ламана). Обидва відношення задані на множині дійсних чисел.

За означенням добутку T $(x, z) \in T$ в тому і тільки тому випадку, коли для деякого y буде $(x, y) \in R, \quad (y, z) \in S$, тобто

$$|x| < 2, \quad |y| < 3, \quad z = |y|.$$

Останній запис дозволяє дати відповідь

$$(x, z) \in T \Leftrightarrow (|x| < 2) \wedge (0 \leq z < 3).$$

Якщо задані два функціональні відношення, то їх добутком буде функціональне відношення, тобто композицією відображень є відображення.

Перевіримо, що композицією сюр'кцій є сюр'єкція, композицією ін'єкцій є ін'єкція, і композицією бієкцій є бієкція.

Нехай A, B, C — три множини і $f : A \to B$ $g : B \to C$. Якщо f, g сюр'єктивні відображення, то для будь-якого $c \in C$ повний прообраз

$$(gf)^{-1}(c) = \bigcup_{b \in g^{-1}(c)} f^{-1}(b)$$

не порожній, оскільки є об'єднанням непорожньо множини непорожнії множин. Якщо ж f, g — ін'єктивні відображення і $x, y \in A, x \neq e$, то

$$f(x) \neq f(y), \qquad g(f(x)) \neq g(f(y)), \qquad (gf)(x) \neq (gf)(y).$$

Звідси випливає ін'єктивність добутку gf. Оскільки бієктивне відображення це і сюр'єктивне і ін'єктивне, то із попереднього випливає, що добуток бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

3.3 Властивості композиції відображень

Зосередимо увагу на композиції відображень із множини A в себе — в цю ж множину A. В такому випадку визначена композиція будь-яких відображень $f, g \in A^A$. А композицію відображень будемо називать більш звичним словом множення, результат множення називається, як звичайно, добутком.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \cdot f"'] & b = f(a) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \cdot g"] & \\
& c = g(b) = g(f(a)) \arrow[r, "h"'] & d = h(c) = ((hg)f)(a) = (h(gf))(a)
\end{tikzcd}
$$

Рис. 9: Об'єднувальний закон (асоціативність) для композиції відображень

Теорема 3.1 *Нехай є чотири множини A, B, C, D і три відображення $f : A \to B$, $g : B \to C$. $h : C \to D$. Тоді*

$$(hg)f = h(gf). \tag{6}$$

Властивість добутку (6) називають об'єднувальним або асоціативним законом. Отже належить довести асоціативність множення відображень.

Доведення. Два відобреження збігаються тоді і тільки тоді, коли вони образи кожного елемента збігаються. Отже ми повинні взяти довільний елемент $a \in A$ і довести, що $((hg)f)(a) = (h(gf))(a)$.

Позначаємо $f(a) = b \in B$, $g(b) = c \in C$, $h(c) = d \in D$.

Тоді за визначенням дії добутку відображень на елемент маємо (див. рис. 9)

$$(g \cdot f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c, \quad (h \cdot (g \cdot f))(a) = h(c) = d;$$
$$((h \cdot g) \cdot f)(a) = (h \cdot g)(f(a)) = (h \cdot g)(b) = h(g(b)) = h(c) = d.$$

Отже

$$((hg)f)(a) = (h(gf))(a) = d.$$

Теорема доведена.

■

Між дійсними числами з точки зору множення є два особливі числа — 0 та 1, які мають визначальні властивості

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$$

і

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Між відображеннями також є подібні особливі з точки зору множення відображення. Зосередимося на найбільш важливому випадку, коли множина A не порожня, і розглядаються всюди визначені відображення $f : A \to A$.

Відображення z_l називається лівим нулем, якщо для будь-якого відображення f виконуєтсья рівність

$$z_l \cdot f = z_l. \tag{7}$$

Лівими нулями є відображення, що переводять усі елементи множини в один і той же. Так, коли $A = \{a, b, c, d\}$, то лівими нулями будуть відображення

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Відображення z_r називається правим нулем, якщо для будь-якого відображення f виконуєтсья рівність

$$f \cdot z_r = z_r. \tag{8}$$

Якщо множина має більше одного елемента, то серед відображень немає правого нуля. Дійсно, в такому випадку серед відображень було б два ліві нулі, — позначимо їх $a, b, a \neq b$. Якби існував правий нуль c, то виконувались би рвності

$$a = ac = c = bc = b,$$

що суперечить припущенню $a \neq b$.

Відображення el називається лівою одиницею, якщо для будь-якого відображення f виконуєтсья рівність

$$el \cdot f = f. \tag{9}$$

Відображення zl називається правою одиницею, якщо для будь-якого відображення f виконуєтсья рівність

$$f \cdot el = f. \tag{10}$$

Одиниця, це відображення, яке є в один і той же час і лівою і правою одиницею — двостороння одниця.

Нуль, це відображення, яке є в один і той же час і лівим і правим нулем — двостороннім нулем.

Ліва, права і двостороння одиниця одна — це відображення id_A.

3.4 Вправа — знайти композицію двох функцій

Маємо дві функції

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 7x - 3, & \text{якщо } x < 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -2x + \frac{17}{3}, & \text{якщо } x \geq \frac{1}{3}, \\ 3x + 3, & \text{якщо } x < \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Знайдемо композицію $h = f \cdot g$. За визначенням,

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -5g(x) + 2, & \text{якщо } g(x) \geq 1, \\ 7g(x) - 3, & \text{якщо } g(x) < 1, \end{cases} \tag{11}$$

Бачимо, що для знаходження функції $h(x)$ потрібно розв'язати нерівність $g(x) \geq 1$. Щоб розв'язати цю нерівність, будуємо графік функції $g(x)$, в площині графіка будуємо пряму $y = 1$ і виписуємо ті значення x, при яких графік функції знаходиться вище цієї прямої $y = 1$.

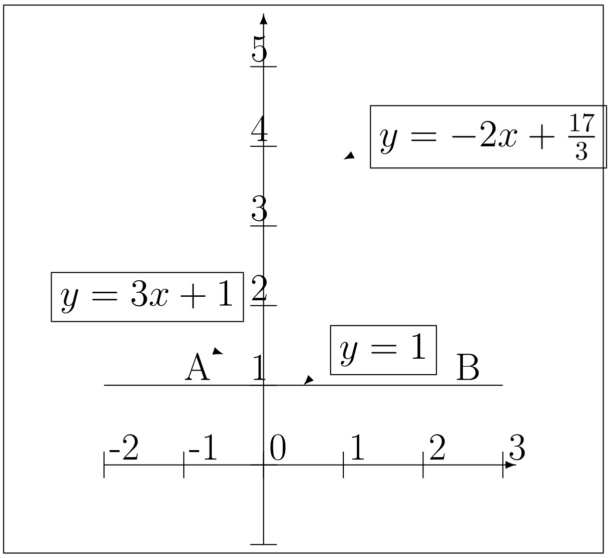

Рис. 10: Графік функції $g(x)$ та $y = 1$. Кружечком позначена точка, що неналежить графікові

Графік функції $g(x)$ показує, що для розв'язання нерівності потрібно знайти точку $A = A(x_1, 1)$ та точку $B = B(x_2, 1)$ — точки перетинів графіка функції $g(x)$ та $y = 1$. І потім потрібно записати відповідь

$$g(x) \geq 1 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2, \tag{12}$$

Шукаємо точку А:

$$3x_1 + 3 = 1, \qquad x_1 = -\frac{2}{3}.$$

Далі шукаємо точку В

$$-2x_2 + \frac{17}{3} = 1, \qquad x_2 = \frac{7}{3}.$$

За допомогою співвідношення (12) переписуємо формулу (11)

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -5g(x) + 2, & \text{якщо } -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 7g(x) - 3, & \text{якщо } x < -\frac{2}{3}, \\ 7g(x) - 3, & \text{якщо } x > \frac{7}{3} \end{cases} \tag{13}$$

Функція $g(x)$ має різні задання на $(-\infty, \frac{1}{3})$ та на $[\frac{1}{3}, \infty)$. Тому перед записом відповіді потрібно розбити відрізок $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ на 2 частини точкою $x = \frac{1}{3}$:

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -5g(x) + 2, & \text{якщо } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}, \\ -5g(x) + 2, & \text{якщо } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 7g(x) - 3, & \text{якщо } x < -\frac{2}{3}, \\ 7g(x) - 3, & \text{якщо } x > \frac{7}{3} \end{cases} \tag{14}$$

Тепер у формулу (14) можна підставити аналітичні задання функції $g(x)$ і одержати відповідь:

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -5(3x + 3) + 2, & \text{якщо } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}, \\ -5(-2x + \frac{17}{3}) + 2, & \text{якщо } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 7(3x + 3) - 3, & \text{якщо } x < -\frac{2}{3}, \\ 7(-2x + \frac{17}{3}) - 3, & \text{якщо } x > \frac{7}{3} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -15x - 13, & \text{якщо } -\frac{2}{3} \le x < \frac{1}{3}, \\ 10x - \frac{79}{3}, & \text{якщо } \frac{1}{3} \le x \le \frac{7}{3}, \\ 21x + 18, & \text{якщо } x < -\frac{2}{3}, \\ -14x + \frac{110}{3}, & \text{якщо } x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

В проведених міркуваннях та обчисленнях може міститися помилка — чи логічна, чи арифметична. Щоб суттєво зменшити ймовірність цього, можна провести додаткові обчислення в окремих точках — у нас пряма розбита на 4 частини, от в кожній із цих частин можна взяти по числу, і провести прямі обчислення в цих точках.

Нехай

$$a = -2, a < -\frac{2}{3}, \qquad b = 0, -\frac{2}{3} \le b < \frac{1}{3}, \qquad c = 2, \frac{1}{3} \le c \le \frac{7}{3}, \qquad d = 3, d > \frac{7}{3}.$$

$g(a) = -3, f(-3) = -24, -24 = 21\cdot(-2)+18, \quad g(b) = 3, f(3) = -13, -13 = -15\cdot 0-13;$
$g(c) = \dfrac{5}{3}, f(\dfrac{5}{3}) = -\dfrac{19}{3}, -\dfrac{19}{3} = 10\cdot 2-\dfrac{79}{3}, \quad g(d) = -\dfrac{1}{3}, f(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{16}{3}, -\dfrac{16}{3} = -14\cdot 3+\dfrac{110}{3}.$
Вибіркова перевірка закінчна. Вправа виконана.

3.5 Обернені відображення

Розглядаємо випадок, коли множини A, B не порожні, і розглядаються всюди визначені відображення $f : A \to B$.

> Відображення $g : B \to A$ називається лівим оберненим до f, коли $g \cdot f = \mathrm{id}_A$.

Приклад. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і

$$f : A \to B \qquad f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тоді функції $g_1, g_2, g_3 : B \to A$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & a & b & a & d \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & b & b & c & d \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & d & b & d & d \end{pmatrix},$$

будуть лівими оберненими до функції f.

Ліва обернена ставить у відповідність кожному образу його прообраз (у ін'єктивного відображення прообраз єдиний), а елементи, які не є образами, переводить куди завгодного.

> Відображення $g : B \to A$ називається правим оберненим до f, коли $f \cdot g = \mathrm{id}_B$.

Приклад. Нехай $B = \{a, b, c, d\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і

$$f : A \to B \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ d & a & a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Тоді функції $g_1, g_2, g_3 : B \to A$

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

будуть правими оберненими до функції f.

Права обернена функція ставить у відповідність кожному образу один (довільно вибраний) прообраз (у сюр'єктивного відображення кожен елемент є образом).

Відображення $g : B \to A$ називається оберненим до f, коли $g \cdot f = \mathrm{id}_A$ і $f \cdot g = \mathrm{id}_B$

Приклад. Нехай $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і

$$f : A \to B \qquad f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді функціz $g : B \to A$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & f & b & e & d \end{pmatrix}$$

є оберненою до функції f.

Відображення називається оборотним, коли воно має обернене.

Теорема 3.2 *Відображення $f : A \to B$ має праве обернене тоді і тільки тоді, коли воно сюр'єктивне.*

Відображення $f : A \to B$ має ліве обернене тоді і тільки тоді, коли воно ін'єктивне.

Відображення $f : A \to B$ має обернене тоді і тільки тоді, коли воно бієктивне.

Доведення. Припустимо, що $f \cdot g = \mathrm{id}_A$. Тоді $x = f(g(x))$. Отже відображення f сюр'єктивне. Якщо ж відображення f сюр'єктивне, то для кожного $y \in B$ повний прооообраз $f^{-1}(y)$ не порожній, можна вибрати один елемент в цьому прообразі і $g(y) \in f^{-1}(y)$ — довільно вибраний елемент. Тоді $fg(y) = y$ для будь-якого $y \in B$.

Припустимо, що $g \cdot f = \mathrm{id}_A$. Тоді

$$x \neq y \Rightarrow gf(x) \neq gf(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

Рис. 11: Функції x^2 і $\sqrt{x}$ взаємно обернені

□

Рис. 12: Функції x^3 і $\sqrt[3]{x}$ взаємно обернені

□

Рис. 13: Функції $\sin x$ і $\arcsin x$ взаємно обернені

Рис. 14: Функції $\cos x$ і $\arccos x$ взаємно обернені

Рис. 15: Функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{arctg} x$ взаємно обернені

Рис. 16: Функції 2^x і $\log_2 x$ взаємно обернені

і відображення f ін'єктивне.

Припустимо, що відображення f ін'єктивне. Виберемо в множині A один елемент $a \in A$. Визначимо відображення $g : B \to A$ нступним чином. $g(x) = a$, якщо повний прообраз $f^{-1}(x)$ порожній. І $g(x) = f^{-1}(x)$, якщо повний прообраз складається із одного елемента. Тоді $g(f(x)) = x$ для будь-якого $x \in A$ і відображення g є лівим оберненим для f.

Із сказаного випливає, що відображення f має обернене тоді і тільки тоді, коли воно бієктивне.

■

Бієктивні відображення скінченної множини в себе називають підстановками.

Оберненим до добутку fg оборотних відображень буде добуток $g^{-1}f^{-1}$. Дійсно

$$(fg) \cdot (g^{-1}f^{-1}) = f(g \cdot g^{-1})f^{-1} = f \cdot f^{-1} = id.$$

4 Основні числові функції.

Зупинимося на основних числових функціях:

$$ax, \quad 1/x, \quad a^x, \quad \log_a x, \quad x^a, \quad \sin x, \quad \arcsin x, \quad \cos x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{arctg} x.$$

Лінійна функція (пряма пропорціональність) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ при $a \neq 0$ є бієктивною, оберненою до неї буде функція $g(x) = \frac{1}{a}x$.

Функція $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (обернена пропорціональність) є бієктивню і ця функція сама до себе обернена.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ не ін'єктивна — $f(-1) = f(1) = 1$, і не сюр'єктивна — $f(x) \neq -1$. Тому ця функція не має однсторонніх обернених. Вона матиме обернену функція у випадку, коли ми звузимо область визначення до $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0$ і область значень також до $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0$. Саме це мають на увазі, коли кажуть, що функції x^2 і $\sqrt{x}$ взаємно обернені (див. рис. 11.)

Подібним чином поступають з функцією $x^a, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ — і область визначення і область значень цих функцій складаєься із невід'ємних дійсних чисел. Окремо розглядають функції x^n для непарних натуральних чисел. Ці функції із множини дійсних чисел у множину дійсних чисел є бієктивними і, відповідно, вони мають обернені. Графіки взаємно обернених функцій x^3 і $\sqrt[3]{x}$ зображено на рис. 12.

Функції $\sin x$ та $\cos x$ із множини дійсних чисел у множину дійсних чисел також не ін'ктивні і не сюр'єктивні. Тому для них немає обернених. Однак коли ми звужуємо область значень до відрізка $[-1, 1]$ функції стають сюр'єктивними, отже мають багато правих обернених — правими оберненими до функції

$$f(x) = \sin x, \quad f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

будуть функції

$$g(x) = \arcsin x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad g : [-1, 1] \Rightarrow \mathbb{R},$$

тому що для $x \in [-1, 1]$

$$\sin(\arcsin x + 2k\pi) = x.$$

Щоб права обернена функція стала єдиною, потрібно звузити область визначення. Для синуса область визначення звужують до $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а для косинуса область визначення звужують до $[0, \pi]$.

Отже $\sin(\arcsin x) = x$ тоді і тільки тоді, коли $-1 \leq x \leq 1$. А $\arcsin(\sin x) = x$ тоді і тільки тоді, коли $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Грфіки функцій $\sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ і $\arcsin x$ коли $-1 \leq x \leq 1$, зображено на рис. 13

Рівність $\cos(\arccos x) = x$ тоді і тільки тоді, коли $-1 \leq x \leq 1$. А $\arccos(\cos x) = x$ тоді і тільки тоді, коли $0 \leq x \leq \pi$. Графіки функцій $\cos x$ при $0 \leq x \leq pi$ і $\arccos x$ коли $-1 \leq x \leq 1$, зображено на рис. 14

Функція $\operatorname{tg} x$ має областю визначення дійсні числа, що не дорівнють $\frac{\pi}{2} + k\pi$ для деякого цілого k. Областю значень є всі дійсні числа. Отже ця функція є сюр'єктивною, але не ін'єктивною. Тому вона має багато правих обернених. Правими оберненими до тангенса будуть функції

$$\operatorname{arctg} g_k : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ для деякого } k \in \mathbb{Z}$$

$$g_k(x) = \operatorname{arctg}(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

А лівих обернених не має.

Якщо звузити область визначення до відкритого інтервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то функція стає бієктивною. Обернену до цієї функції називають арктангенсом. Графіки функцій тангнс і арктангенс зображені на рис. 15.

Показникова функція a^x із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ при додатній основі a є ін'єктивною, але не сюр'єктивною. Отже вона має багато лівих обернених, але не має правих обернених.

Лівими оберненими до функції

$$f(x) = a^x, \quad a \neq 1, \quad a > 0, \quad f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

будуть функції $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_k(x) = \begin{cases} \log_a x & \text{якщо } x > 0, \\ k & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases},$$

тому що для $x \in \mathbb{R}$

$$\log_a(a^x) = x.$$

Звузивши область призначеня (множину, куди здійснюється відображення) до додатніх дійсних чисел, ми перетворюємо цю функцію в бієктивну. Обернену до цієї функції називають логарифмом. Графіки функцій 2^x та $\log_2 x$ зображено на рис. 16.

В математиці часто зустрічаються (тому що вони зручні в роботі) показникові функції з основою e. e — це число Непера, яке з точністю до 9 знаків після коми дорівнює 2,718281828. Позникова функція з натуральною основою e називається експонентою і крім позначення e^x має також позначення $\exp(x)$. Логарифм за натуральною основою (тобто основою якого є число Непера) позначають $\ln x$ і називають натуральним логарифмом.

Література

[1] Бойко С.С. "Начальные сведения о понятии функции (отображения)" Харків,ХНУ, 2004.

Покажчик