

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра теоретичної радіофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри



Вячеслав ХАРДІКОВ

підпис ініціали, прізвище

“ 6 ” грудня 2023 року

Кваліфікаційна робота магістра

**Дифракція електромагнітних хвиль у неоднорідних
феритових середовищах**

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61

спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали



Артем ХАРЧЕНКО

Науковий керівник доц.



Ольга БАГАЦЬКА

2023 рік

АНОТАЦІЯ

Харченко А. О. Дифракція електромагнітних хвиль у неоднорідних феритових середовищах. Кваліфікаційна робота магістра, 2023, 41 стор., 11 рис., 32 посилання.

За допомогою методу скаляризації векторної граничної задачі розв'язано задачу дифракції плоскої монохроматичної хвилі на одновимірному неоднорідному анізотропному феритовому шарі на однорідній ізотропній підкладці. Визначено амплітудні коефіцієнти відбиття і проходження з використанням методу скінченних різниць. На основі отриманих числових результатів проаналізовано вплив на характеристики розсіювання електромагнітного поля електродинамічних параметрів матеріалу анізотропного шару. Продемонстровано ефект перетворення поляризації хвилі, що пройшла та відбитої хвилі, викликаний анізотропією феритового шару, проілюстровано можливість використання впливу геометричної структури тензорів матеріальних параметрів і профілю неоднорідності шару на характеристики розсіяного поля.

ABSTRACT

Kharchenko A. O. Diffraction of Electromagnetic Waves in Inhomogeneous Ferrite Media. Masters qualifying work, 2023, 41 pp., 11 fig., 32 references.

The problem of diffraction of a plane monochromatic wave on a one-dimensionally inhomogeneous anisotropic ferrite layer on a homogeneous isotropic substrate is solved using the vector boundary value problem scaling method. Amplitude coefficients of reflection and transmission were determined using the finite difference method. Based on the obtained numerical results, the influence of the electrodynamic parameters of the material of the anisotropic layer on the characteristics of the scattering of the electromagnetic field was analyzed. The effect of the transformation of the polarization of the transmitted wave and the reflected wave, caused by the anisotropy of the ferrite layer, is demonstrated, and the possibility of using the influence of the geometric structure of the tensors of material parameters and the layer inhomogeneity profile on the characteristics of the scattered field is illustrated.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	5
2. РОЗПОВСЮДЖЕННЯ І ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКИХ МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ У ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ ФЕРИТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ	10
2.1. Загальна постановка задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на анізотропному феритовому шарі	11
2.2. Скаляризація векторної задачі дифракції	14
2.3. Числове розв'язання задачі	20
2.4. Аналіз числових результатів	27
ВИСНОВКИ	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39

ВСТУП

У пропонованій кваліфікаційній роботі магістра наведено теоретичне дослідження поширення і розсіювання електромагнітних хвиль в анізотропних неоднорідних структурах, розташованих у вільному просторі та між провідними поверхнями.

Дослідження дифракції електромагнітних хвиль у шаруватих анізотропних середовищах становить задачу, результати розв'язання якої можуть бути використані як в теоретичному, так і в практичному сенсі, зокрема, для інтерпретації даних дистанційного зондування природних і штучних середовищ. До таких задач можна віднести вивчення дифракції плоскої електромагнітної хвилі на одновимірному неоднорідному анізотропному феритовому шарі у вільному просторі або на ізотропній підкладці, проникній для поля.

При виконанні роботи було обрано за мету розробити та проаналізувати фізико-математичну модель взаємодії електромагнітного поля із неоднорідним анізотропним середовищем. Не зменшуючи загальності розгляду неоднорідність була представлена у вигляді шарувато-однорідного середовища, а в якості анізотропної речовини розглянуто ферит. Передбачалося, що побудована модель повинна враховувати особливості розповсюдження та дифракції електромагнітних хвиль, обумовлені як просторовою неоднорідністю, так і анізотропією середовища. Актуальність поставленої задачі обумовлена теоретичними потребами побудови якісної теорії взаємодії електромагнітних хвиль з неоднорідними анізотропними середовищами, а також наявними і майбутніми практично важливими застосуваннями отриманих результатів в різних галузях сучасної радіофізики.

Кваліфікаційну роботу магістра присвячено розв'язанню задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на однорідному і одновимірному неоднорідному феритовому шарі з довільним характером анізотропії, що

міститься у вільному просторі і на ізотропній, проникній для поля підкладці. При розв'язанні задачі були поєднані як аналітичні, так і числові методи: різницевий метод, а саме метод скінченних різниць, і метод моментів.

Отримані в роботі результати ілюструють значний вплив неоднорідності і анізотропності середовища на характеристики розсіяних хвиль і, як наслідок, демонструють нагальну необхідність більш точного і детального врахування особливостей зазначених середовищ.

Запропонована у кваліфікаційній роботі модель може бути корисною для важливих практичних застосувань, зокрема при інтерпретації результатів радіохвильового контролю природних анізотропних середовищ, а також штучних композитних матеріалів, розробці поглинаючих покриттів тощо.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Упродовж декількох останніх десятиліть дослідження розповсюдження електромагнітних хвиль в неоднорідних та анізотропних середовищах не втрачає актуальності, і через це інтерес дослідників до різних аспектів цієї тематики лише зростає. Наявність великої кількості різноманітних теоретичних і практичних застосувань обумовлює нагальні потреби в докладному і всебічному дослідженні й аналізі різних аспектів взаємодії електромагнітного поля з неоднорідними структурами. Через це зазначений аналіз є дослідженням, надзвичайно важливим для різних галузей електродинаміки, зокрема оптики кристалів та волоконної оптики [1], фізики напівпровідників [2], магнітооптичних явищ [3] тощо. Без урахування властивостей неоднорідності та анізотропії як природних, так і штучних середовищ, є абсолютно неможливим, зокрема, дослідження в галузях поширення радіохвиль в іоносфері [4], конструювання поглинаючих покриттів [5,6], розробка широкого класу пристроїв НВЧ [7] та в багатьох інших сферах.

У цій кваліфікаційній роботі здійснюється дослідження дифракції електромагнітних хвиль в плоскошаруватих анізотропних феритових середовищах, зокрема, розв'язується задача дифракції плоскої електромагнітної хвилі на одновимірному неоднорідному анізотропному феритовому шарі, розташованому у вільному просторі. Дослідження таких електродинамічних моделей викликають зацікавленість з огляду на широкий спектр фізико-технічних застосувань, наприклад, створення укриттів для антен [8], напівпрозорих екранів [9], невідбиваючих покриттів [10]. Результатами пропонованого аналізу можна скористатись при дослідженні, зокрема, задач дифракції плоских електромагнітних хвиль на гіротропних плівках та шарах [11], дистанційного зондування земної поверхні [12,13] тощо.

На сучасному етапі розвитку науки і практичних потреб набувають значної актуальності задачі дистанційного зондування земної поверхні, і як

наслідок, проблеми відтворення структури підповерхневих шарів за характеристиками електромагнітного поля, що відбивається від земної поверхні. При розв'язанні цієї задачі виникає необхідність встановлення відповідності між параметрами земних шарів і характеристик поля, що приходить, одержаних в процесі радіолокаційних спостережень. З електродинамічної точки зору кора Землі є складною структурою, що характеризується певними електродинамічними властивостями, и є електрично неоднорідною за глибиною. У зв'язку з цим набуває актуальності проблема розробки адекватних теоретичних моделей, які описують взаємодію електромагнітних хвиль з речовиною. На цьому тлі надзвичайно важливим стає розв'язання задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на діелектричному (ферромагнітному) шарі з неоднорідними вздовж визначеного напрямку властивостями. Як окремий випадок можна розглядати шар з постійними характеристиками.

На сьогодні дослідниками запропоновано велику кількість аналітичних і числових методів, придатних для визначення характеристик розсіювання плоских монохроматичних хвиль для зазначеної структури. Зокрема, у роботі [14] наводиться аналіз анізотропних середовищ за допомогою ефективного варіаційного формулювання в поєднанні з методом скінченних елементів, у [15,16] за допомогою методу скінченних елементів отримано матриці розсіювання. Числові методи, до яких відносяться варіаційні методи і метод скінченних елементів, з одного боку є строгими, з іншого - застосовними до середовищ з загальними електродинамічними властивостями, зокрема, середовищ з довільною анізотропією і довільною одновимірною неоднорідністю. При цьому необхідно мати на увазі суттєве зростання похибки при збільшенні електричної товщини анізотропного неоднорідного шару.

Аналітичні методи завжди мають перевагу над числовими, зокрема, завдяки вищій точності отриманих результатів. Результатом застосування аналітичних методів є функції, які надають точний розв'язок задачі, точність

розв'язку може бути легко проконтрольована. Для задачі, що розглядається, отримані функції можуть отримати комп'ютерну реалізацію, для них можна чітко визначити область застосування, вони можуть бути використані до шарів значної електричної товщини. Труднощі, що виникають при отриманні аналітичного розв'язку, викликані неоднорідністю речовини за товщиною і анізотропією одного або обох її електродинамічних матеріальних параметрів. Для того, щоб урахувати неоднорідність за товщиною у речовини, можна розбити шар на певну кількість відносно тонких шарів, які можна вважати однорідними. Тепер коефіцієнти розсіювання неоднорідного шару можуть бути визначені як коефіцієнти розсіювання багатошарової пластини. Для цього можна скористатися декількома методами, зокрема, використати метод матриці переходу і формулою Гамільтона-Келі. Так, наприклад, в роботах [17-20] моделі анізотропних середовищ досліджуються за допомогою цього методу. Однак існують певні об'єктивні причини, через які застосування методу матриці переходу є проблематичним для задач із анізотропією загального типу. Через це автори змушені були обмежуватись окремим випадком моделі одновісного магнітодіелектрика, яка, тим не менше, є ключовою для багатьох практично важливих застосунків. Модель одновісного магнітодіелектрика є актуальною для багатьох анізотропних матеріалів як природного, так і штучного походження, тому, не зважаючи на деякі обмеження, ця модель широко використовується при побудові моделі і розв'язанні задач для цілої низки різноманітних практично важливих застосувань, а використання методу матриці переходу дозволяє отримати строге аналітичне рішення задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на анізотропній пластині.

Для розв'язання такого типу задач теоретично також можна використовувати інший аналітичний підхід, а саме імпедансний метод, який дозволяє за допомогою рекурентних формул за відомим імпедансом "затіненого" боку визначити імпеданс "освітленого" боку пластини, а також отримати вирази для коефіцієнтів відбиття і проходження для обох

поляризацій [21]. Проте цей підхід досі не було реалізовано на практиці, хоча принципово є можливість застосувати такий підхід для вивчення розсіювання плоских електромагнітних хвиль на анізотропному шарі. В значній мірі це пояснюється складним і громіздким виглядом відповідних формулювань при застосуванні координатного представлення.

Пропонована кваліфікаційна робота магістра містить розв'язання задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на одновимірному неоднорідному анізотропному феритовому шарі, розташованому у вільному просторі. Розв'язання проводиться із застосуванням чисельно-аналітичного методу скаляризації електромагнітного поля. В літературі зазначений підхід було реалізовано для гіротропних [22, 23], одновісних [24, 25], а також біанізотропних шаруватих середовищ [26]. У цій роботі запропоновано чисельно-аналітичне розв'язання задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на одновісному анізотропному шарі з довільною орієнтацією оптичної осі. В процесі розв'язання отримано скаляризовані представлення для амплітуд електромагнітного поля, сформульовано задачу для визначення скалярних потенціалів у вигляді системи двох диференціальних рівнянь, для розв'язання якої використовувався метод скінченних різниць.

При розв'язанні задачі застосовано метод скаляризації, який належить до чисельно-аналітичних методів. До його переваг можна віднести можливість виразити через два скалярні потенціали шукані амплітуди векторів електромагнітного поля. Зазначені скалярні потенціали можна отримати із розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь. Такий підхід надає зручний інструмент дослідження взаємодії електромагнітних хвиль з неоднорідним анізотропним середовищем.

Проведений огляд стану проблеми обґрунтовує актуальність досліджуваної тематики, що обумовлено існуванням широкого кола наукових галузей і практично важливих застосувань, де виникає необхідність строгого аналізу розповсюдження електромагнітних хвиль в електродинамічних структурах, які характеризуються різними типами просторової неоднорідності

електродинамічних властивостей (зокрема, шаруваті середовища), а також анізотропією. Результати дослідження зазначених середовищ можуть бути використані при побудові і практичному застосуванні ефективних алгоритмів електродинамічного аналізу регулярних та нерегулярних ліній передачі, при проектуванні і вдосконаленні пристроїв антенної техніки та НВЧ. Все вищезазначене дозволяє зробити висновок про актуальність і значущість розробки, аналізу і практичного застосування фізико-математичних моделей взаємодії електромагнітного поля з просторово неоднорідними анізотропними матеріальними середовищами.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНА ЧАСТИНА

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ І ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКИХ МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ У ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ ФЕРИТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглянемо задачу в такій постановці: дослідимо розсіювання плоских монохроматичних хвиль у плоскошаруватому довільно анізотропному феритовому середовищі, що характеризується анізотропним нелокальним імпедансом. Вважатимемо що зазначене середовище обмежується імпедансною поверхнею.

Існує дуже обмежений перелік структур, для яких отримано аналітичний розв'язок задачі розсіювання плоскої монохроматичної хвилі. Серед структур, які представляють для нас інтерес, можна виділити такі: довільно анізотропний однорідний феритовий шар, а також шар, діелектрична і магнітна проникності якого безперервно змінюються за заданим законом уздовж осі стратифікації. Для більш загальних випадків отримати аналітичний розв'язок значно складніше або на сучасному етапі практично неможливо, отже такі задачі можуть бути розв'язані тільки в числовий спосіб. Це обумовлює доцільність розробки ефективних числових алгоритмів визначення характеристик розсіювання плоскої монохроматичної хвилі. У кваліфікаційній роботі пропонується числовий алгоритм, заснований на використанні методу скінченних різниць.

2.1. Загальна постановка задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на анізотропному феритовому шарі

Сформулюємо постановку задачі. Розглянемо анізотропний шар товщиною b , не обмежений за двома вимірами. Оберемо декартову систему координат в такий спосіб: площина xOy збігається з площиною, яка обмежує шар згори, вісь Oz спрямовано вертикально вгору. Досліджувану структуру і обрану систему координат зображено на рисунку 2.1. Отже для координат довільної точки всередині шару є справедливими нерівності $-b < z < 0$, $-\infty < x, y < +\infty$. Вище пластини при $z > 0$ розташовано вільний півпростір, а нижче при $z < -b$ – однорідна анізотропна підкладка. Для характеристики шаруватого характеру середовища, що розглядається, будемо вважати справедливими такі умови (окремо або їх комбінацію):

- а) при $z = -b$, ($b > 0$) шар обмежено однорідною провідною або проникною для поля поверхнею;
- б) залежність від вертикальної координати z діелектричної і магнітної проникностей середовища шару $\hat{\epsilon}$ і $\hat{\mu}$ описуються безперервними функціями;
- в) середовище шару є кусково-однорідним, тобто існують поверхні $z = const$, на яких властивості анізотропного середовища змінюються стрибкоподібно.

Тензори матеріальних параметрів середовища $\hat{\epsilon}$ та $\hat{\mu}$ у зображеній на рисунку 2.1 системі координат мають по дев'ять компонент, кожна з яких у загальному випадку є комплекснозначною функцією, безперервною за вертикальною координатою z ($-b < z < 0$)

$$\epsilon_{pq} \equiv \epsilon(z), \quad \mu_{pq} \equiv \mu(z), \quad (p, q = x, y, z), \quad (2.1)$$

за винятком z_j ($j = 1, 2, \dots, N$), що відповідають поверхням розділу неоднорідного середовища на шари.

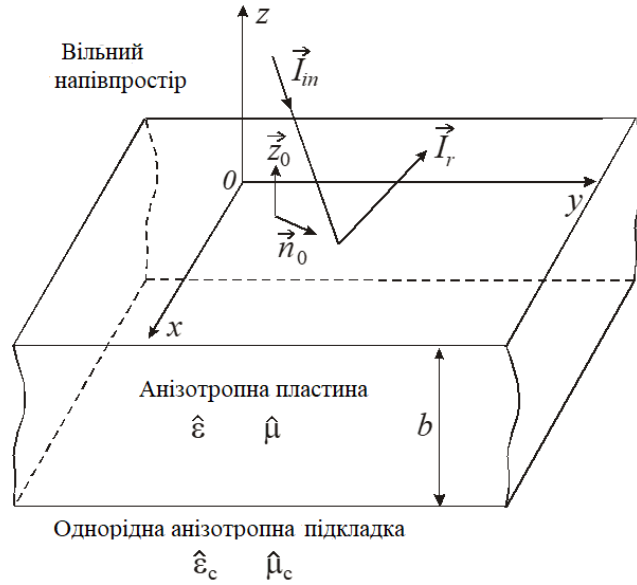


Рис. 2.1. Геометрія досліджуваної структури

Поверхні $z=0$ і $z=-b$ є границями досліджуваного шаруватого середовища з імпедансними поверхнями, для характеристики яких вводяться діади імпедансу $\tilde{L}^{(a)}$ та $\tilde{L}^{(u)}$. У системі координат x, y діади імпедансу можуть бути записані так:

$$\tilde{L}^{(a,u)} = \begin{bmatrix} L_{xx}^{(a,u)} & L_{xy}^{(a,u)} \\ L_{yx}^{(a,u)} & L_{yy}^{(a,u)} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Будемо вважати, що в загальному випадку компоненти діади імпедансу можуть бути комплексними. Далі при розв'язанні задачі тензори другого рангу ми будемо позначати як діади.

Будемо розглядати монохроматичні хвилі, залежність від часу оберемо у вигляді $\exp(-i\omega t)$. У цьому випадку роторні рівняння Максвелла для комплексних амплітуд $\vec{E}(\vec{R}), \vec{H}(\vec{R})$ матимуть вигляд:

$$\nabla \times \vec{E} - ik_0 \hat{\mu}(z) \vec{H} = -(4\pi/c) \vec{M}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} + ik_0 \hat{\varepsilon}(z) \vec{E} = (4\pi/c) \vec{J}. \quad (2.4)$$

Останні співвідношення виконуються у довільній точці простору за винятком границь розділу. У рівняннях Максвелла (2.3)-(2.4) використано такі позначення: $\vec{R} = (x, y, z)$; c – швидкість світла у вакуумі; k_0 – хвильове число у вакуумі ($k_0 = \omega/c$); $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{R})$ і $\vec{M} \equiv \vec{M}(\vec{R})$ – об'ємні густини сторонніх електричного та магнітного струмів в середовищі відповідно, діелектрична та магнітна проникності $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ мають вигляд діадних функцій вертикальної координати z .

На границях розділу неоднорідного плоскошаруватого середовища можуть бути сформульовані граничні умови для векторів електромагнітного поля, а саме, умови безперервності тангенціальних компонент векторів напруженості електричного й магнітного поля:

$$\begin{aligned} \{\vec{z}_0 \times \vec{E}_\perp\} &= 0, \quad \{\vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp\} = 0, \\ (z = z_j, \quad j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В цих співвідношеннях використані такі позначення: \vec{z}_0 – орт осі z ; $\vec{E}_\perp \equiv \vec{E}_\perp(\vec{R})$, $\vec{H}_\perp \equiv \vec{H}_\perp(\vec{R})$ – нормальні до осі Oz (отже і до \vec{z}_0) компоненти векторів $\vec{E}(\vec{R})$, $\vec{H}(\vec{R})$. Під фігурними дужками мається на увазі оператор $\{f(z)\} \equiv f(z+0) - f(z-0)$ для довільної функції координати z .

На границях неоднорідного шару при $z = 0$ і $z = -b$ є справедливими граничні умови Леонтовича-Щукіна:

$$\vec{E} + \tilde{L}^{(a)} \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0 \quad (z = -0), \quad (2.6)$$

$$\vec{E} - \tilde{L}^{(u)} \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0 \quad (z = -b + 0), \quad (2.7)$$

Задаймо сторонні джерела у вигляді просторової гармоніки, хвильовий вектор якої має вигляд $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, 0)$:

$$\vec{J}(\vec{R}) \equiv \vec{J}(\vec{\kappa}, z) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}),$$
(2.8)

$$\vec{M}(\vec{R}) \equiv \vec{M}(\vec{\kappa}, z) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}).$$

В цих формулах для векторних амплітуд джерел використані позначення $\vec{J}(\vec{\kappa}, z)$, $\vec{M}(\vec{\kappa}, z)$, а $\kappa_{x,y}$ є довільними комплексними сталими. З огляду на співвідношення (2.3) – (2.8) електромагнітне поле аналогічно можна представити у вигляді просторової гармоніки:

$$\vec{E}(\vec{R}) \equiv \vec{E}(\vec{\kappa}, z) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}),$$
(2.9)

$$\vec{H}(\vec{R}) \equiv \vec{H}(\vec{\kappa}, z) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}),$$

тут $\vec{E}(\vec{\kappa}, z)$, $\vec{H}(\vec{\kappa}, z)$ – векторні амплітуди поля.

2.2. Скаляризація векторної задачі дифракції

Введемо до розгляду праву трійку векторів, що утворюють базис:

$$\vec{a}_z = \vec{z}_0, \quad \vec{a}_l = \vec{n}, \quad \vec{a}_t = \vec{z}_0 \times \vec{n},$$
(2.10)

$\vec{n} = \vec{\kappa}/\kappa$ – одиничний вектор хвильової нормалі, розташований у площині $z = 0$; $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$; гілку квадратного кореня будемо обирати так, щоб виконувалась умова $0 \leq \arg \sqrt{(\cdot)} \leq \pi$. Умови ортогональності для векторів, що утворюють базис (2.10), можуть бути сформульовані в такий спосіб:

$$\vec{a}_\sigma \cdot \vec{a}_\tau = 0, \quad (\sigma \neq \tau) \quad (2.11)$$

У цій умові застосовані позначення $\sigma, \tau = z, l, t$.

Здійснимо скалярне множення на одиничні вектори \vec{a}_z, \vec{a}_l роторних рівнянь Максвелла (2.3), (2.4) і виконаємо певні перетворення з використанням формул векторної алгебри. Це дозволить отримати величини $E_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{k}, z)$, $H_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{k}, z)$, що виражаються через скалярні потенціали (та їх перші похідні за координатою z):

$$e(\vec{k}, z) = \vec{a}_t \cdot \vec{E}(\vec{k}, z), \quad h(\vec{k}, z) = \vec{a}_t \cdot \vec{H}(\vec{k}, z). \quad (2.12)$$

За умови, що вектор \vec{k} є дійсним і відмінним від нуля, можна сформулювати фізичний зміст скалярних потенціалів (2.12) – це проекції векторних амплітуд просторових гармонік на напрям в площині $z=0$, перпендикулярний до напрямку поширення хвилі, тобто вектору хвильової нормалі \vec{n} .

Представимо векторні амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів $\vec{E}(\vec{k}, z)$, $\vec{H}(\vec{k}, z)$ у базисі (2.10) $\vec{a}_z, \vec{a}_l, \vec{a}_t$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{k}, z) = & \vec{V}_\varepsilon(\vec{n}, z)e(\vec{k}, z) - \vec{W}_\varepsilon(\vec{k})h(\vec{k}, z) + \\ & + (4\pi i/k_0 c)\hat{\alpha}_\varepsilon(\vec{n}, z) \cdot \vec{J}(\vec{k}, z), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{k}, z) = & \vec{V}_\mu(\vec{n}, z)h(\vec{k}, z) - \vec{W}_\mu(\vec{k})e(\vec{k}, z) + \\ & + (4\pi i/k_0 c)\hat{\alpha}_\mu(\vec{n}, z) \cdot \vec{M}(\vec{k}, z). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Після перетворень отримаємо формули для векторних амплітуд поля, що виражаються через скалярні потенціали $e(\vec{k}, z)$ і $h(\vec{k}, z)$. Тут застосовані позначення $\vec{V}_\eta(\vec{n}, z)$ і $\hat{\alpha}_\eta(\vec{n}, z)$ для векторних і діадних функцій відповідно

$(\eta = \varepsilon, \mu)$, а $\vec{W}_\eta(\vec{k})$ позначає векторний диференціальний оператор за вертикальною координатою z :

$$\vec{V}_\eta(\vec{n}, z) = \vec{z}_0 \times \vec{n} + \frac{1}{a_\eta(\vec{n}, z)} [b_\eta(\vec{n}, z)\vec{n} + c_\eta(\vec{n}, z)\vec{z}_0], \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\vec{n}, z)\hat{a}_\varepsilon(\vec{n}, z) &\equiv a_t \times \varepsilon(z) \times a_t = \\ &= (\varepsilon_{lz}\vec{n} - \varepsilon_{ll}\vec{z}_0)\vec{z}_0 + (\varepsilon_{zl}\vec{z}_0 - \varepsilon_{zz}\vec{n})\vec{n}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\vec{W}_\varepsilon(\vec{k}) = \frac{1}{a_\eta(\vec{n}, z)k_0} \times [(\varepsilon_{zz}\vec{n} - \varepsilon_{zl}\vec{z}_0)i\partial_z + (\varepsilon_{zl}\vec{z}_0 - \varepsilon_{zz}\vec{n})k] \quad (2.17)$$

$$a_\varepsilon \rightarrow a_\mu, \quad \hat{a}_\varepsilon \rightarrow \hat{a}_\mu, \quad \hat{W}_\varepsilon \rightarrow \hat{W}_\mu, \quad (\varepsilon \rightarrow \mu) \quad (2.18)$$

Компонентам діад $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$, введеним у (2.10), відповідають скалярні функції $\varepsilon_{\sigma,\tau} \equiv \varepsilon_{\sigma,\tau}(\vec{n}, z)$, $\mu_{\sigma,\tau} \equiv \mu_{\sigma,\tau}(\vec{n}, z)$, $(\sigma, \tau = z, l, t)$, присутні у співвідношеннях (2.15) – (2.18):

$$\varepsilon_{\sigma,\tau}(\vec{n}, z) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\varepsilon}(z) \cdot \vec{a}_\tau, \quad \mu_{\sigma,\tau}(\vec{n}, z) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\mu}(z) \cdot \vec{a}_\tau. \quad (2.19)$$

При цьому скалярні функції $a_\eta(\vec{n}, z)$, $b_\eta(\vec{n}, z)$, $c_\eta(\vec{n}, z)$, $(\eta = \varepsilon, \mu)$ можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon &= \varepsilon_{zz}\varepsilon_{ll} - \varepsilon_{zl}\varepsilon_{lz}, \quad b_\varepsilon = \varepsilon_{zt}\varepsilon_{lz} - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{lt}, \\ c_\varepsilon &= \varepsilon_{lt}\varepsilon_{zl} - \varepsilon_{ll}\varepsilon_{zt}, \\ a_\varepsilon &\rightarrow a_\mu, \quad b_\varepsilon \rightarrow b_\mu, \quad c_\varepsilon \rightarrow c_\mu, \quad (\varepsilon \rightarrow \mu) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Варто мати на увазі, що компоненти ε_{zz} , μ_{zz} є функціями лише координати z і не залежать від вектора \vec{n} : $\varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_{zz}(z)$, $\mu_{zz} \equiv \mu_{zz}(z)$.

Домножимо тепер скалярно роторні рівняння Максвелла (2.3)-(2.4) на \vec{a}_l , урахуємо в отриманих співвідношеннях прямі вирази $E_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{k}, z)$ та $H_{z,l} = \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{k}, z)$ і отримуємо наступне:

$$D_{ss}(\vec{k})h(\vec{k}, z) + D_{sp}(\vec{k})e(\vec{k}, z) = \frac{4\pi}{c}q_s(\vec{k}, z), \quad (2.21)$$

$$D_{pp}(\vec{k})e(\vec{k}, z) + D_{ps}(\vec{k})h(\vec{k}, z) = \frac{4\pi}{c}q_p(\vec{k}, z).$$

Як результат маємо систему звичайних диференціальних рівнянь, сформульовану на інтервалі $-b < z < 0$ відносно скалярних потенціалів; введені величини $q_v(\vec{k}, z)$ характеризують сторонні джерела; $D_{v\xi}(\vec{k})$ – скалярні оператори, які діють за координатою z і залежать від хвильового вектора \vec{k} ; індекси $v, \xi = s, p$. Зазначені величини явно можуть бути записані в такий спосіб:

$$\begin{aligned} q_s(\vec{k}, z) = ik_0 \left[-\vec{z}_0 \times \vec{n} + \frac{1}{a_\mu(\vec{n}, z)} (e_\mu \vec{z}_0 + d_\mu \vec{n}) \right] \cdot \vec{M}(\vec{k}, z) + \\ + \left[(\partial_z \varepsilon_{lz} + ik\varepsilon_{ll}) \vec{z}_0 - (\partial_z \varepsilon_{zz} + ik\varepsilon_{zl}) \vec{n} \right] \cdot \frac{\vec{J}(\vec{k}, z)}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)}, \quad (2.22) \\ q_s \rightarrow q_p \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu, \quad \vec{J} \rightarrow \vec{M}, \quad \vec{M} \rightarrow -\vec{J}); \end{aligned}$$

$$D_{ss}(\vec{\kappa}) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varepsilon_{zz}}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z} + i\kappa \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\varepsilon_{lz}}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} + \frac{\varepsilon_{zl}}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z} \right] +$$

$$+ k_0^2 \frac{|\hat{\mu}(z)|}{a_\mu(\vec{n}, z)} - \kappa^2 \frac{\varepsilon_{ll}}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)}; \quad (2.23)$$

$$ik_0^{-1} D_{sp}(\vec{\kappa}) = i\kappa \left[\frac{c_\varepsilon(\vec{n}, z)}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} + \frac{e_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} \right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \frac{b_\varepsilon(\vec{n}, z)}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} - \frac{e_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (2.24)$$

$$D_{ss} \rightarrow D_{pp}, \quad D_{sp} \rightarrow D_{ps}, \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu) \quad (2.25)$$

Скалярні функції $e_\eta(\vec{n}, z)$, $d_\eta(\vec{n}, z)$ ($\eta = \varepsilon, \mu$) можна задати так:

$$d_\varepsilon = \varepsilon_{zz}\varepsilon_{il} - \varepsilon_{zl}\varepsilon_{iz}, \quad e_\varepsilon = \varepsilon_{ll}\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{lz}\varepsilon_{il},$$

$$d_\varepsilon \rightarrow d_\mu, \quad e_\varepsilon \rightarrow e_\mu, \quad (\varepsilon \rightarrow \mu) \quad (2.26)$$

Тут $|\hat{\mu}(z)|$, $|\hat{\varepsilon}(z)|$ – це визначники, які що виражаються через компоненти діад $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ у базисі (2.10) $\vec{a}_z, \vec{a}_l, \vec{a}_l$.

Підстановка виразів (2.13)-(2.14) до граничних умов (2.5) при $z = z_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) надає такі результати:

$$\{e(\vec{\kappa}, z)\} = 0, \quad \{h(\vec{\kappa}, z)\} = 0, \quad (2.27)$$

$$\left\{ \frac{1}{a_\mu(\vec{n}, z)} \times [(\mu_{zz}\partial_z - i\vec{\kappa}\mu_{lz})e(\vec{\kappa}, z) - ik_0 b_\mu(\vec{n}, z)h(\vec{\kappa}, z)] \right\} = 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} \times [(\varepsilon_{zz}\partial_z - i\vec{\kappa}\varepsilon_{lz})h(\vec{\kappa}, z) - ik_0 b_\varepsilon(\vec{n}, z)e(\vec{\kappa}, z)] \right\} = 0. \quad (2.28)$$

Останні співвідношення представляють собою граничні умови для скалярних потенціалів, сформульовані на довільній поверхні границі розділу за відсутності на ній поверхневих джерел, j визначає номер цієї поверхні.

Наступним кроком підставляємо амплітуди електромагнітного поля у вигляді (2.13)-(2.14) до імпедансних граничних умов (2.6), (2.7) і отримуємо чотири рівняння, що зв'язують скалярні потенціали з їхніми похідними. Перші два з цих рівнянь, сформульовані на нижній границі анізотропного шару $z = -b + 0$, запишуться так:

$$\left[ik_0 a_{pp}^{(u)}(\vec{k}) + b_{pp}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z \right] e(\vec{k}, z) + ik_0 a_{ps}^{(u)}(\vec{k}) h(\vec{k}, z) = 0, \quad (2.29)$$

$$\left[ik_0 a_{sp}^{(u)}(\vec{k}) + b_{sp}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z \right] e(\vec{k}, z) + \left[ik_0 a_{ss}^{(u)}(\vec{k}) + b_{ss}^{(u)}(\vec{k}) \partial_z \right] h(\vec{k}, z) = 0,$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} a_{pp}^{(u)}(\vec{k}) &= 1 + \frac{\kappa \mu_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tt}^{(u)}(\vec{k}), \\ b_{pp}^{(u)}(\vec{k}) &= \frac{\mu_{zz}(z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tt}^{(u)}(\vec{k}), \\ a_{ps}^{(u)}(\vec{k}) &= L_{tl}^{(u)}(\vec{k}) + \frac{b_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tt}^{(u)}(\vec{k}), \\ a_{sp}^{(u)}(\vec{k}) &= \frac{b_\varepsilon(\vec{n}, z)}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)} + \frac{\kappa \mu_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tt}^{(u)}(\vec{k}), \\ b_{sp}^{(u)}(\vec{k}) &= \frac{\mu_{zz}(z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tl}^{(u)}(\vec{k}), \\ a_{ss}^{(u)}(\vec{k}) &= \frac{\kappa \varepsilon_{lz}(\vec{k}, z)}{k_0 a_\varepsilon(\vec{n}, z)} - \frac{b_\mu(\vec{n}, z)}{a_\mu(\vec{n}, z)} L_{tl}^{(u)}(\vec{k}) + L_{ll}^{(u)}(\vec{k}), \\ b_{ss}^{(u)}(\vec{k}) &= \frac{\varepsilon_{zz}(z)}{a_\varepsilon(\vec{n}, z)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тут

$$L_{\sigma\tau}^{(u)}(\vec{k}) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{L}^{(u)} \cdot \vec{a}_\tau \quad (\sigma, \tau = z, l, t).$$

На верхній границі анізотропного шару ($z = -0$) можна сформулювати аналогічні граничні умови. Для цього необхідно у виразах (2.30) замінити на протилежний знак у $b_{pp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{ps}^{(u)}(\vec{k})$, $b_{sp}^{(u)}(\vec{k})$ і $b_{ss}^{(u)}(\vec{k})$, верхній індекс u на a , а у виразах для $a_{pp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{sp}^{(u)}(\vec{k})$, $a_{ss}^{(u)}(\vec{k})$ – знак у κ на протилежний.

2.3 Числове розв'язання задачі

Здійснимо числове розв'язання задачі розсіювання плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі на шарувато-неоднорідній феритовій пластині, Будемо моделювати пластину набором кусково-однорідних за товщиною шарів, кожен з цих однорідних шарів утворено анізотропним магнітодіелектриком, який є в загальному випадку гіротропним або, в окремому випадку, одновісним, оптичні вісі якого мають довільну орієнтацією.

Вважатимемо, що у будь-якій точці простору електромагнітні властивості гіротропного магнітодіелектрика описуються діадами матеріальних параметрів:

$$\hat{\epsilon}(z) = \epsilon_\perp(z) \hat{I} + (\epsilon_\parallel(z) - \epsilon_\perp(z)) \vec{a}\vec{a} - i f(z) \vec{a} \times \hat{I}, \quad (2.31)$$

$$\hat{\mu}(z) = \mu_\perp(z) \hat{I} + (\mu_\parallel(z) - \mu_\perp(z)) \vec{b}\vec{b} - i g(z) \vec{b} \times \hat{I}. \quad (2.32)$$

Введені вектори \vec{a} , \vec{b} є дійсними одиничними вектори, що визначають напрямки оптичних осей магнітодіелектрика, у декартовій системі координат вони задаються такими компонентами:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}(z) = (\cos \theta_a \sin \varphi_a, \cos \theta_a \cos \varphi_a, \sin \theta_a), \quad (2.33)$$

$$\vec{b} \equiv \vec{b}(z) = (\cos \theta_b \sin \varphi_b, \cos \theta_b \cos \varphi_b, \sin \theta_b). \quad (2.34)$$

Діади вигляду (2.31), (2.32) характеризують матеріальні параметри $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ феритів або плазми в зовнішньому магнітному полі, яке спрямовано вздовж векторів \vec{a} для діелектричної та \vec{b} для магнітної проникностей. Величини $\varepsilon_{\perp}(z)$, $\varepsilon_{\parallel}(z)$, $f(z)$ та $\mu_{\perp}(z)$, $\mu_{\parallel}(z)$, $g(z)$ є двічі диференційовними функціями змінної z всередині анізотропного шару $-b < z < 0$. Кути $\theta_{a,b}$ і $\varphi_{a,b}$, зображені на рисунку 2.2, характеризують напрямки оптичних осей і задовольняють нерівностям $-\pi/2 \leq \theta_{a,b} \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi_{a,b} \leq 2\pi$. У загальному випадку, коли гіротропний магнітодіелектрик є неоднорідним не лише за вертикальною координатою z , параметри $\theta_{a,b}$, $\varphi_{a,b}$, ε_{\perp} , ε_{\parallel} , f і μ_{\perp} , μ_{\parallel} , g є функціями усіх трьох просторових координат x, y, z ; у той час для однорідного магнітодіелектрика ці величини є сталими.

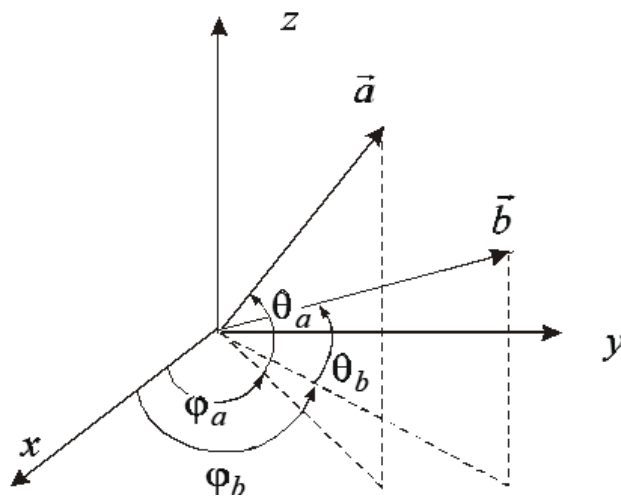


Рис 2.2. Оптичні вісі гіротропного шару.

Ми розглядаємо анізотропну пластину товщиною b , розташовану нижче площини xOy . Припустимо, що вище цієї пластини, тобто при $z > 0$, міститься вільний півпростір, а нижче пластини, при $-\infty < z < -b$ – однорідний анізотропний магнітодіелектрик з діелектричною та магнітною проникностями ε_c, μ_c , які в загальному випадку є комплексними.

Модель, що використовується в пропонованій роботі, передбачає, що анізотропна пластина є неоднорідною вздовж вертикальної осі Oz , тобто за товщиною, відповідно її матеріальні параметри однорідного магнітодіелектрика залежать від вертикальної координати z і не змінюються уздовж горизонтальних осей Ox та yO . Вважатимемо, що в загальному випадку матеріальні параметри пластини є кусково-безперервними функціями змінної z .

Розглянемо плоску монохроматичну хвилю, що падає на анізотропний шар з верхнього (вільного) півпростору $z > 0$, одиничний вектор \vec{l}_{in} задає напрямок її падіння, який характеризується кутами ковзання θ і азимутним φ (див. структуру, зображену на рис. 2.1):

$$\begin{aligned} \vec{l}_{in} &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

За межами шару скалярні потенціали $e(\vec{k}, z)$ й $h(\vec{k}, z)$ можна записати так.

При $0 < z < +\infty$ (у вільному півпросторі):

$$e(\vec{k}, z) = \left(e^{-i\gamma_0 z} + R_{pp} e^{i\gamma_0 z} \right) A_p + R_{sp} A_s e^{i\gamma_0 z}, \quad (2.36)$$

$$h(\vec{k}, z) = \left(e^{-i\gamma_0 z} + R_{ss} e^{i\gamma_0 z} \right) A_s + R_{sp} A_p e^{i\gamma_0 z};$$

при $-\infty < z < -b$ (у підкладці):

$$e(\vec{k}, z) = [T_{ps}A_s + T_{pp}A_p] e^{-ik_0 n_c(z+b)}, \quad (2.37)$$

$$e(\vec{k}, z) = [T_{ss}A_s + T_{sp}A_p] e^{-ik_0 n_c(z+b)}.$$

Тут $\gamma_0 = k_0 \sin \theta$; $n_c = \sqrt{\varepsilon_c \mu_c - \cos^2 \theta}$, ($0 \leq \arg n_c \leq \pi$), величини A_p і A_s (які у загальному випадку є комплексними) описують складові електромагнітної хвилі, що поляризовані перпендикулярно і паралельно відносно площини падіння (p- та s-поляризації відповідно). У (2.36), (2.37) використано величини $R_{v\xi}$ і $T_{v\xi}$ ($v, \xi = p, s$) – це комплексні коефіцієнти відбиття та проходження анізотропної пластини, які є функціями частоти падаючої хвилі, а також геометричних параметрів задачі, зокрема, кутів. Якщо індекси є однаковими, то відповідні коефіцієнти описують перетворення падаючої хвилі довільної поляризації на хвилю тієї самої поляризації (перпендикулярної при $v = p$ і паралельної при $v = s$), а якщо коефіцієнти мають різні індекси ($v \neq \xi$), то йдеться про перетворення на хвилю ортогональної поляризації. У використаних нами позначеннях для $R_{v\xi}$ та $T_{v\xi}$ перший індекс відповідає поляризації відбитої хвилі, або хвилі, що пройшла, а другий індекс – падаючій хвилі.

Зауважимо, що присутність так званих "перехресних" коефіцієнтів відбиття R_{sp}, R_{ps} і проходження T_{sp}, T_{ps} свідчить про деполаризацію падаючої хвилі і є характерною властивістю, притаманною анізотропним речовинам [27].

Аналіз виразів (2.37), (2.38) дозволяє зробити висновок, що для паралельної (s) поляризації ($A_s = 1, A_p = 0$) можна отримати

$$R_{ss} = h(\vec{\kappa}, 0) - 1, \quad R_{ps} = e(\vec{\kappa}, 0), \quad T_{ss} = h(\vec{\kappa}, -b), \quad T_{ps} = e(\vec{\kappa}, -b), \quad (2.38)$$

в той час, як для перпендикулярної (р) поляризації ($A_s = 0, A_p = 1$) маємо

$$R_{pp} = e(\vec{\kappa}, 0) - 1, \quad R_{sp} = h(\vec{\kappa}, 0), \quad T_{pp} = e(\vec{\kappa}, -b), \quad T_{sp} = h(\vec{\kappa}, -b). \quad (2.39)$$

Запишемо тепер імпедансі граничні умови для скалярних потенціалів (2.29) в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= ik_0 \left(\lambda_{sp}^{(a)} e + \lambda_{ss}^{(a)} h \right) + f_s, \\ \frac{\partial e}{\partial z} &= ik_0 \left(\lambda_{pp}^{(a)} e + \lambda_{ps}^{(a)} h \right) + f_p, \quad (z = -0); \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= ik_0 \left(\lambda_{sp}^{(u)} e + \lambda_{ss}^{(u)} h \right), \\ \frac{\partial e}{\partial z} &= ik_0 \left(\lambda_{pp}^{(u)} e + \lambda_{ps}^{(u)} h \right), \quad (z = -b + 0). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Тут величини $\lambda_{v\xi}^{(a,u)}$, f_v ($v, \xi = p, s$) залежать від кутів θ та φ і можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} \lambda_{pp}^{(a)} &= \frac{1}{\mu_{zz}(0)} \left[a_\mu(0) \sin \theta - \mu_{lz}(0) \cos \theta \right], \\ \lambda_{ps}^{(a)} &= \frac{b_\mu(0)}{\mu_{zz}(0)}, \\ \lambda_{sp}^{(a)} &= -\frac{b_\varepsilon(0)}{\varepsilon_{zz}(0)}, \\ \lambda_{ss}^{(a)} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}(0)} \left[a_\varepsilon(0) \sin \theta - \varepsilon_{lz}(0) \cos \theta \right]; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{pp}^{(u)} &= -\frac{1}{\mu_{zz}(-b)} \left[a_{\mu}(-b) \frac{n_c}{\mu_c} + \mu_{lz}(-b) \cos \theta \right], \\
\lambda_{ps}^{(u)} &= \frac{b_{\mu}(-b)}{\mu_{zz}(-b)}, \\
\lambda_{sp}^{(u)} &= -\frac{b_{\varepsilon}(-b)}{\varepsilon_{zz}(-b)}, \\
\lambda_{ss}^{(u)} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}(-b)} \left[a_{\varepsilon}(-b) \frac{n_c}{\mu_c} + \varepsilon_{lz}(-b) \cos \theta \right];
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
f_s &= -2ik_0 a_{\varepsilon}(0) \sin \theta A_s / \varepsilon_{zz}(0), \\
f_p &= -2ik_0 a_{\mu}(0) \sin \theta A_p / \mu_{zz}(0).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Побудуємо наближене розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.21), доповненої граничними умовами (2.40), (2.41) з використанням методу скінченних різниць. Візьмемо до уваги відсутність сторонніх джерел всередині анізотропного шару, отже в рівняннях (2.21) $q_p = q_s \equiv 0$. Скористаємось рівномірною сіткою на відрізку, розбиваючи відрізок $-b < z < 0$ на N однакових відрізків, крок сітки при цьому визначається як $\Delta b = b/N$. При цьому вводиться до розгляду множина вузлів сітки z_0, z_1, \dots, z_N , які задаються як $z_j = j\Delta b - b$, ($j = 0, 1, \dots, N$). Матимемо на увазі, що до цієї множини входять також і граничні вузли, що відповідають границям відрізка $z_0 = -b$ і $z_N = 0$.

Скористаємось апроксимацією центральною різницею для диференціальних операторів у рівняннях системи (2.21), в граничній умові (2.40) застосуємо апроксимацію лівою різницею, а в (2.41) – правою різницею. Тоді у вузлах сітки для s-поляризації матимемо СЛАР – систему $2N + 2$ лінійних алгебраїчних рівнянь, сформульованої відносно комплексних величин $x_k \equiv h(\vec{k}, z_k)$, $y_k \equiv e(\vec{k}, z_k)$, ($k = 0, 1, \dots, N$):

$$\begin{cases} x_N \left(1 - ik_0 b \lambda_{ss}^{(a)}\right) - x_{N-1} - ik_0 b \lambda_{sp}^{(a)} y_N = f_{ss}, \\ -ik_0 b \lambda_{ps}^{(a)} x_N + y_N \left(1 - ik_0 b \lambda_{pp}^{(a)}\right) - y_{N-1} = 0; \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} A_j x_{j+1} + B_j x_j + C_j x_{j-1} + D_j y_{j+1} + F_j y_j + G_j y_{j-1} = 0, \\ P_j x_{j+1} + Q_j x_j + R_j x_{j-1} - K_j y_{j+1} - L_j y_j - M_j y_{j-1} = 0, \\ (j = 1, 2, \dots, N-1); \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 \left(1 + ik_0 b \lambda_{ss}^{(u)}\right) - ik_0 b \lambda_{sp}^{(u)} y_0 = f_{ss}, \\ y_1 - y_0 \left(1 + ik_0 b \lambda_{pp}^{(u)}\right) - ik_0 b \lambda_{ps}^{(u)} y_0 = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Перші два рівняння, наведені в (2.45), є різницевою апроксимацією граничних умов, представлених співвідношенням (2.40), при $z = 0$, де $A_s = 1$ і $A_p = 0$. Далі йдуть $2(N-1)$ рівняння (2.46), які є апроксимаціями диференціальних рівнянь (2.21), а останні два рівняння (2.47) апроксимують граничні умови (2.41) при $z = -b$; $f_{ss} = \Delta b f_s$.

У системі рівнянь (2.46) при невідомих введено такі коефіцієнти:

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{\varepsilon_{zz}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} + \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_{zz}(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} - \frac{\varepsilon_{zz}(z_{j-1})}{a_\varepsilon(z_{j-1})} \right] + \\ &+ \frac{ik_0 b \cos \theta}{2} \left[\frac{\varepsilon_{zl}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} + \frac{\varepsilon_{lz}(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} \right], \\ B_j &= -2 \frac{\varepsilon_{zz}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} + (k_0 b)^2 \left[\frac{|\hat{\mu}(z_j)|}{a_\mu(z_j)} - \cos^2 \theta \frac{\varepsilon_{ll}(z_j)}{a_\mu(z_j)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_j &= \frac{\varepsilon_{zz}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} - \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_{zz}(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} - \frac{\varepsilon_{zz}(z_{j-1})}{a_\varepsilon(z_{j-1})} \right] - \\
&\quad - \frac{ik_0 b \cos\theta}{2} \left[\frac{\varepsilon_{zl}(z_j)}{a_\varepsilon(z_j)} - \frac{\varepsilon_{lz}(z_{j-1})}{a_\varepsilon(z_{j-1})} \right], \\
D_j &= \frac{ik_0 b}{2} \left[\frac{d_\mu(z_j)}{a_\mu(z_j)} + \frac{b_\varepsilon(z_{j+1})}{a_\varepsilon(z_{j+1})} \right], \\
F_j &= -(k_0 b)^2 \cos\theta \left[\frac{c_\varepsilon(z_j)}{a_\mu(z_j)} - \frac{e_\mu(z_j)}{a_\mu(z_j)} \right], \\
A_j &\rightarrow K_j, \quad B_j \rightarrow L_j, \quad C_j \rightarrow M_j, \quad D_j \rightarrow P_j, \\
F_j &\rightarrow Q_j, \quad G_j \rightarrow R_j, \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Наведена система рівнянь є справедливою для s -поляризації падаючої хвилі. Для отримання аналогічної системи рівнянь для p -поляризації можна здійснити таку заміну в правих частинах перших двох рівняннях системи (2.45): $f_{ss} \rightarrow 0$, $0 \rightarrow f_{pp} = \Delta b f_p$, при цьому $A_p = 1$ і $A_s = 0$. Візьмемо до уваги, що для однорідного магнітодіелектрика у формулах (2.31), (2.32) і далі $f(z) = g(z) \equiv 0$.

2.4. Аналіз числових результатів

Задачу дифракції плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі на однорідному або неоднорідному за товщиною магнітодіелектричному шарі можна віднести до фундаментальних задач, а її розв'язання має суттєве значення для широкого переліку наукових і науково-технічних застосувань [7], [28]. Як приклад можна навести використання рішення цієї задачі при

дослідженні розсіювання гіротропними плівками радіоімпульсів і хвильових пакетів [29, 30], використанні шаруватих анізотропних і, зокрема, гіротропних включень при проектуванні й розрахунку характеристик пристроїв НВЧ [31], розробці методів та засобів радіохвильового контролю композитних матеріалів [32].

Далі в роботі будуть наведені результати числових експериментів, які ілюструють вплив вигляду тензорів діелектричної та магнітної проникностей і неоднорідності шару на розсіювання плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, що похило падає на анізотропний феритовий шар, який в загальному вигляді є неоднорідним.

Нами використовується модель взаємодії плоскої монохроматичної хвилі з анізотропним феритовим шаром, яку сформульовано в термінах коефіцієнтів відбиття і проходження, введених як відношення амплітуд відповідних хвиль. Розглянемо одновимірною-неоднорідний одновісний гіротропний шар, оптична вісь якого орієнтована довільно, на який падає з плоска монохроматична хвиля. Матеріальні параметри гіротропного шару задаються тензорами вигляду (2.31)-(2.32). Вважатимемо, що компоненти тензорів матеріальних параметрів $\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}, \mu_{\perp}, \mu_{\parallel}$, а також «позадіагональні» компоненти f, g являють собою безперервні функції вертикальної координати z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp, \parallel}(z) &= \varepsilon_{\perp, \parallel}^{(0)} F(z), & \mu_{\perp, \parallel}(z) &= \mu_{\perp, \parallel}^{(0)} F(z); \\ f(z) &= f^{(0)} F(z), & g(z) &= g^{(0)} F(z). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Тут для описання "профілю" неоднорідності гіротропного шару введено функцію $F(z)$, а величини з верхнім індексом $^{(0)}$ відповідають значенням діелектричної та магнітної проникностей на верхній границі шару, тобто при $z = +0$.

Далі в роботі наведемо декілька ілюстративних залежностей, як демонструють взаємодію з феритовим шаром хвиль різної поляризації. Рисунки 2.3-2.6 демонструють коефіцієнти відбиття і проходження плоских монохроматичних хвиль S - і P -поляризацій відповідно, що падають під азимутним кутом $\varphi = 45^\circ$ (рис. 2.2) на анізотропний феритовий шар, який розташовано у вільному просторі, для якого $\varepsilon_c = \mu_c = 1$. Для цього випадку матеріальні параметри феритового шару задамо так:

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} = 15.0 + i0.4, \quad \varepsilon_{\parallel}^{(0)} = 21.0 + i0.4, \quad f^{(0)} = 0,$$

$$\mu_{\perp}^{(0)} = 0.6746, \quad \mu_{\parallel}^{(0)} = 1.0, \quad g^{(0)} = 0.28.$$

Будемо вважати, що електрична товщина шару b дорівнює одиниці: $k_0 b = 1.0$.

На цих рисунках наведено результати для однорідного шару – крива 1, випадків, коли матеріальні параметри шару зростають до границі $z = b$ лінійно – крива 2 і квадратично – крива 3. Всюди суцільна лінія відповідає основній поляризації, а пунктирна – ортогональної поляризації.

Як видно з рисунків, кожному профілю неоднорідності відповідає своє значення мінімуму коефіцієнта відбиття. Зростання абсолютних значень коефіцієнтів розсіювання кросполяризованої складової викликано зростанням позадіагональної компоненти тензора магнітної проникності.

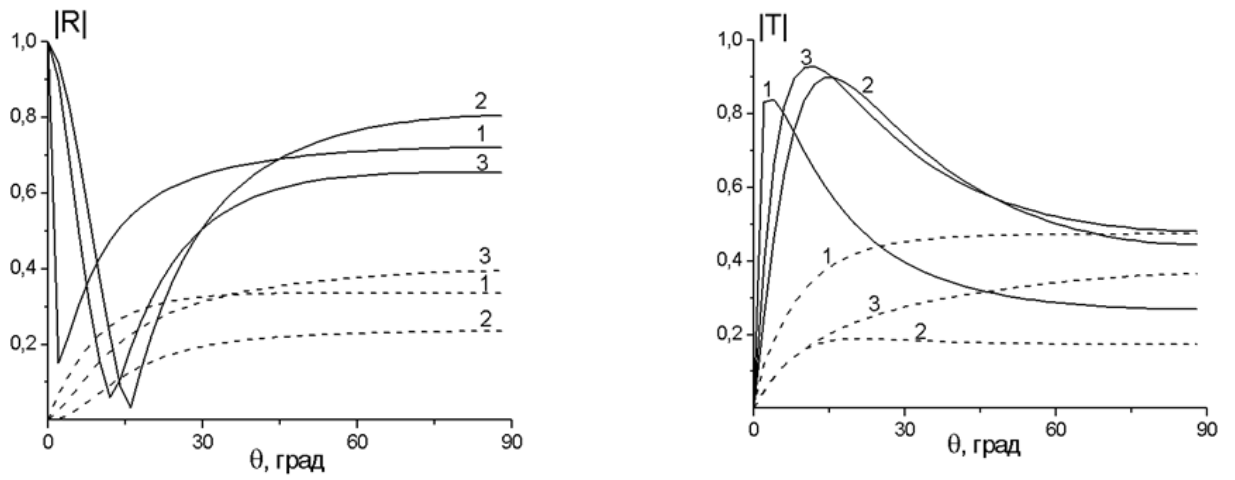


Рис. 2.3 Залежності модулів коефіцієнтів відбиття й проходження s-поляризованої плоскої хвилі від кута θ для неоднорідного гіротропного шару

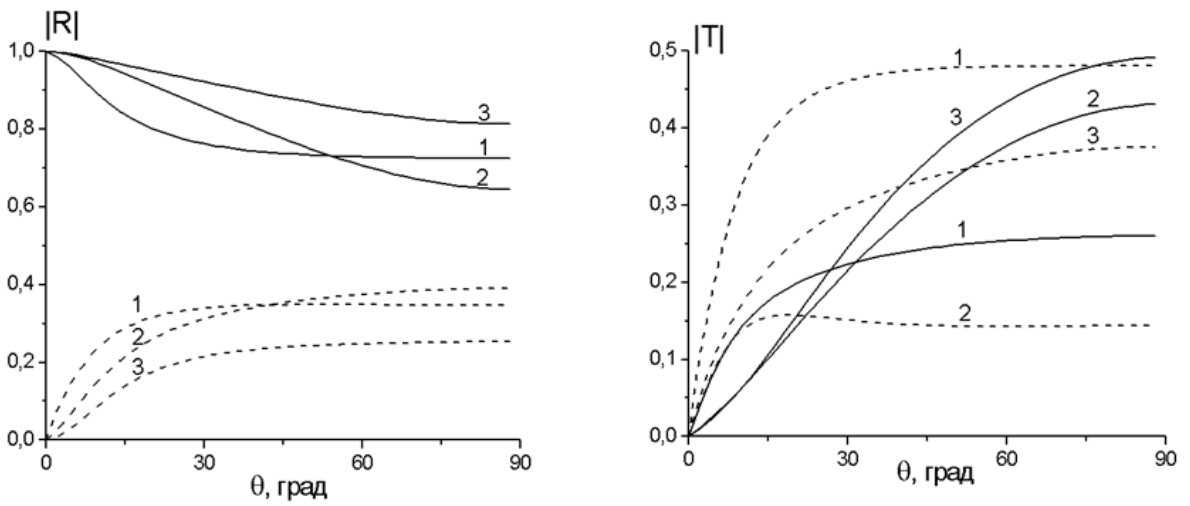


Рис 2.4. Залежності модулів коефіцієнтів відбиття й проходження p-поляризованої плоскої хвилі від кута θ для неоднорідного гіротропного шару.

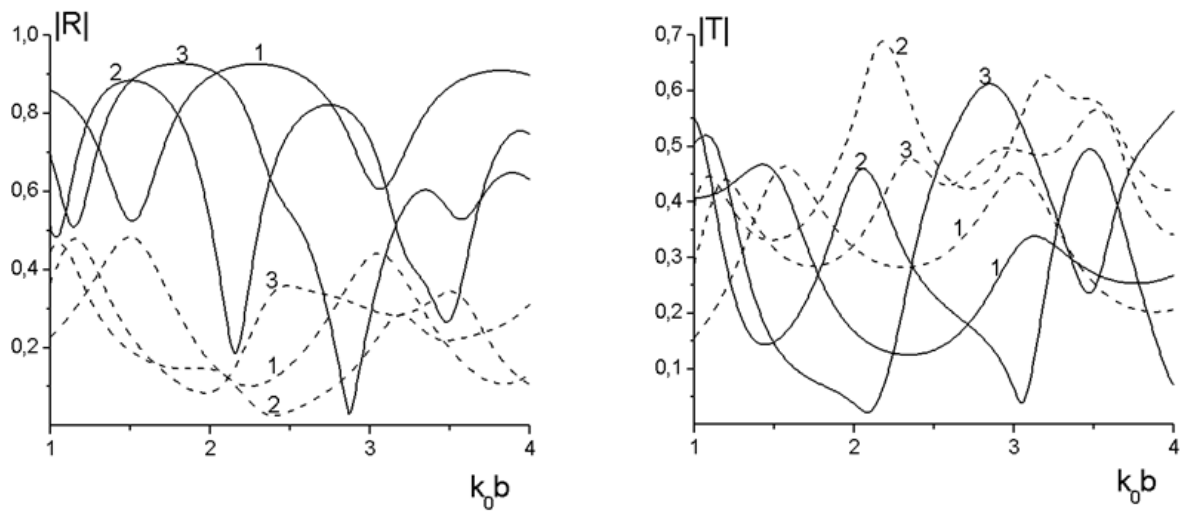


Рис. 2.5 Залежності від частоти модулів коефіцієнтів відбиття й проходження s-поляризованої плоскої хвилі для неоднорідного гіротропного шару.

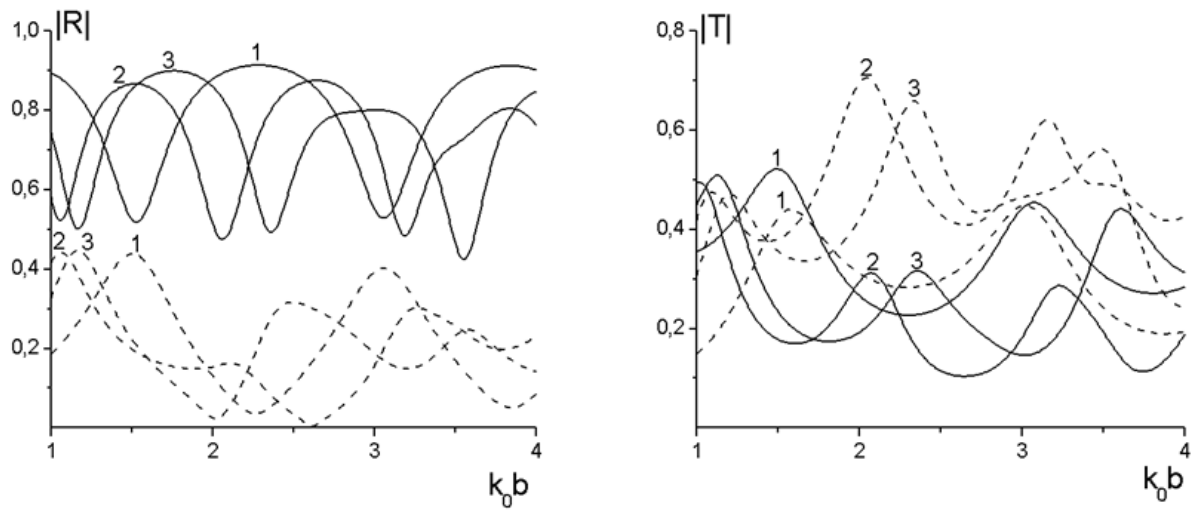


Рис 2.6. Залежності від частоти модулів коефіцієнтів відбиття й проходження p-поляризованої плоскої хвилі для неоднорідного гіротропного шару.

Рисунки 2.7, 2.8 містять залежності модулів коефіцієнтів розсіювання хвиль обох поляризацій від кута нахилу оптичної осі магнітогіротропного шару. Як матеріал шару обрано ферит марки М-18, компоненти тензорів діелектричної та магнітної проникностей якого мають такі значення: $\varepsilon_{\perp}^{(0)} = 8.0 + i0.003$, $\varepsilon_{\parallel}^{(0)} = 8.0 + i0.003$, $f^{(0)} = 0$, $\mu_{\perp}^{(0)} = 0.69 + i0.003$, $\mu_{\parallel}^{(0)} = 1.01 + i0.0019$. Позадіагональні компоненти тензора магнітної проникності дорівнюють $g^{(0)} = 0.28$ (крива 1) і $g^{(0)} = 0.49$ (крива 2).

Розглядається випадок, коли хвиля s-поляризації (рис. 2.7) і р-поляризації (рис. 2.8) нормально падає на шар, кути $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$. Вважаємо, що на верхній границі шару ($z = 0$) $\theta_b = -\pi/2$, на нижній ($z = -b$) $\theta_b = \pi/2$, і напрямок магнітної оптичної осі безперервно змінюється від точки до точки вздовж товщини шару.

Наведені залежності демонструють, що зміна кута нахилу оптичної осі помітніше впливає на поведінку коефіцієнту відбиття основної поляризації, ніж на коефіцієнт відбиття ортогональної поляризації.

Представлені на рисунках 2.7, 2.8 результати свідчать про те, що змінюючи кут нахилу оптичної осі статичним зовнішнім полем, можна керувати коефіцієнтом відбиття гіротропного шару.

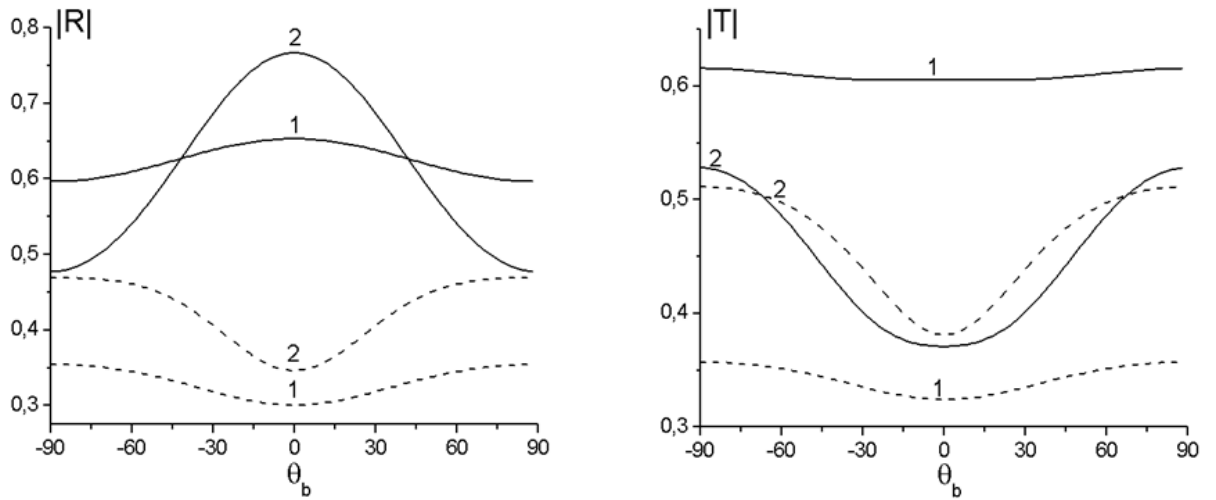


Рис 2.7. Залежність модулів коефіцієнтів розсіювання для гіротропного шару з оптичною віссю змінного нахилу (s-поляризація хвилі, що падає).

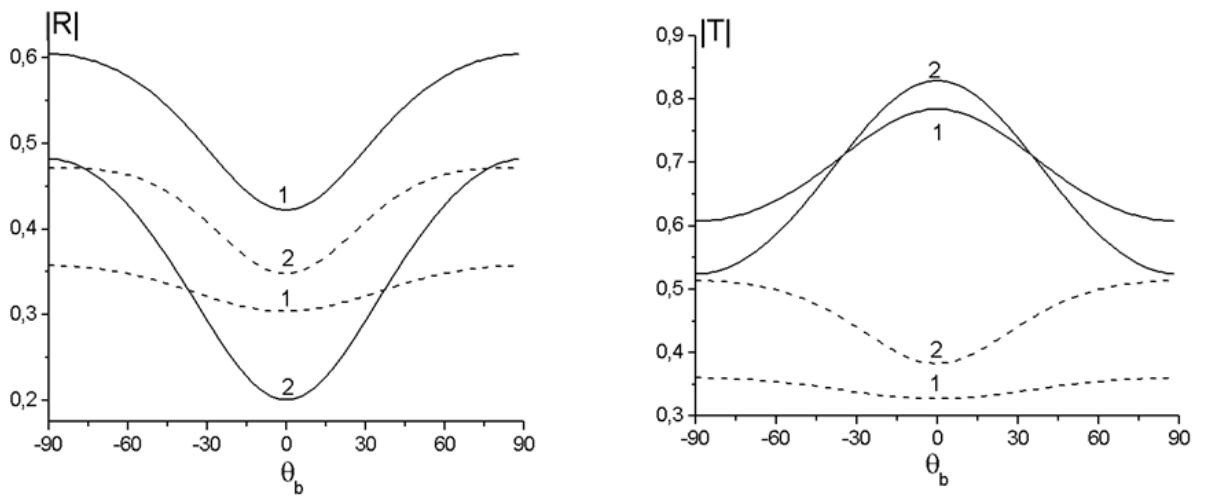


Рис 2.8. Залежність модулів коефіцієнтів розсіювання для гіротропного шару з оптичною віссю змінного нахилу (p-поляризація хвилі, що падає).

Рисунки 2.9-2.11 демонструють вплив позадіагональних компонентів тензора магнітної проникності і профілю феритового шару на перетворення поляризації плоскої лінійно-поляризованої хвилі. Як і раніше, матеріал досліджуваного магнітогіротропного шару – це ферит М-18, значення його діелектричної та магнітної проникностей наведені раніше. Для цього випадку наведено залежності коефіцієнтів відбиття і проходження хвилі обох поляризацій від кута φ . Досліджено залежності модулів коефіцієнтів розсіювання від φ хвиль s- (рис. 2.9) і р-поляризації (рис. 2.9) для двох видів профілю магнітогіротропного шару, який задається видом функції $F(z)$: функція профілю має стале значення, рівне 1 (крива 1); функція профілю змінюється квадратично (крива 2). Як і раніше, вважаємо, що хвиля падає на шар нормально.

Рисунок 2.11 містить залежності модулів коефіцієнтів розсіювання хвиль р-поляризації від кута φ для трьох значень позадіагональних елементів тензора магнітної проникності феритового шару, який, як і раніше, виконано з М-18. Тут криві 1, 2, 3 відповідають таким значенням позадіагональних елементів: $g^{(0)} = 0.28$, $g^{(0)} = 0.49$, $g^{(0)} = 0.64$.

Аналіз отриманих чисельних результатів дозволяє зробити висновок, що перетворення поляризації плоскої лінійно поляризованої хвилі обумовлено гіротропними властивостями матеріалу шару, що формально описуються наявністю антисиметричних позадіагональних елементів тензорів матеріальних параметрів, а також складною геометричною структурою цих тензорів.

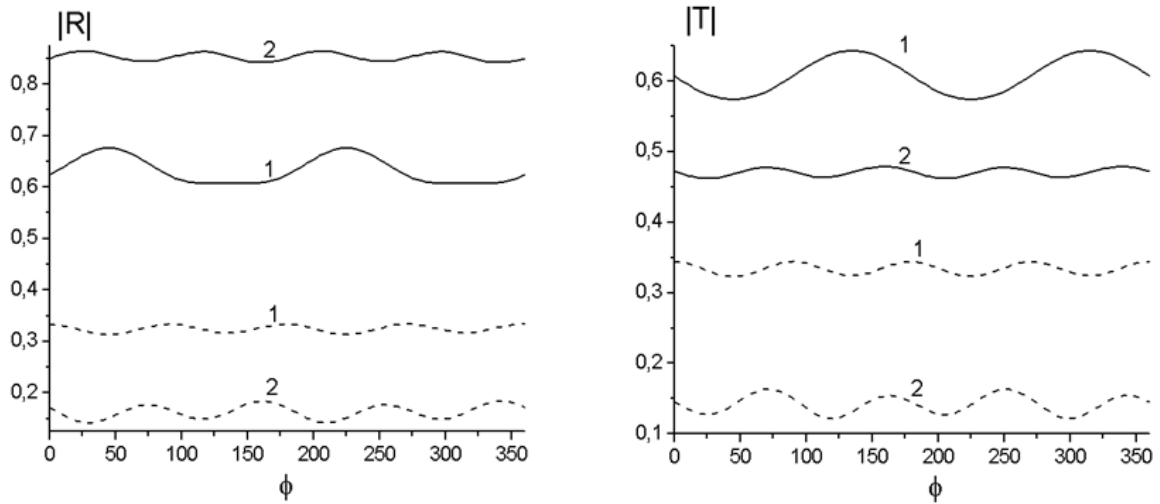


Рис 2.9. Залежність модулів коефіцієнтів розсіювання для гіротропного шару з різними профілями неоднорідності (s-поляризація хвилі, що падає).

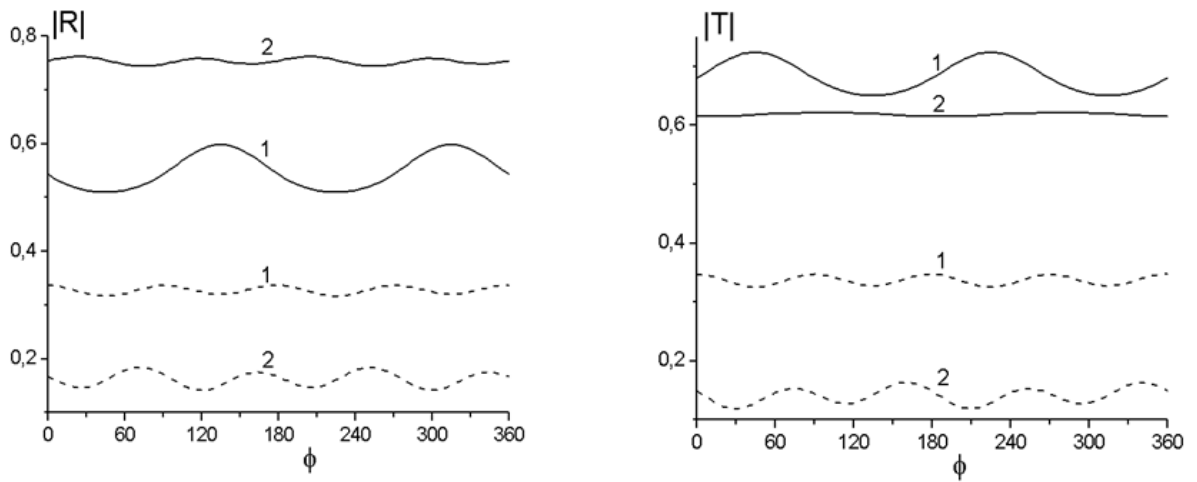


Рис 2.10. Залежність модулів коефіцієнтів розсіювання для гіротропного шару з різними профілями неоднорідності (p-поляризація хвилі, що падає).

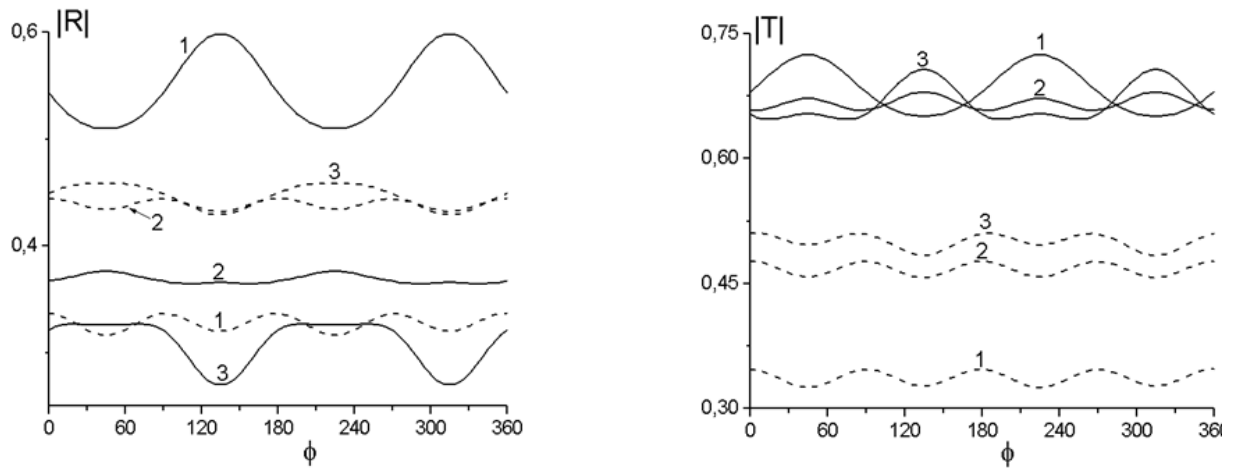


Рис 2.11. Залежність модулів коефіцієнтів розсіювання
для гіротропного шару з різними значеннями
позадіагональних елементів тензора магнітної проникності
(р-поляризація).

ВИСНОВКИ

Зацікавленість дослідників до розв'язання задачі розсіювання електромагнітного поля анізотропними, зокрема, шаруватими середовищами, розташованими як у вільному просторі, так і обмеженими провідними або непровідними границями, пов'язана з існуванням значного переліку практично важливих застосувань. Отже аналіз і правильна інтерпретація закономірностей цієї взаємодії видається корисними не лише з точки зору побудови фізичної і математичної моделей таких об'єктів, а й їх використанні для отримання максимально коректного і повного розуміння результатів дослідження фізичних явищ.

При виконанні кваліфікаційної роботи магістра були отримані такі результати:

1. Метод перетворення векторної задачі дифракції плоскої монохроматичної хвилі на еквівалентну скалярну граничну задачу для скалярних потенціалів було застосовано до неоднорідного анізотропного феритового шару.
2. Розв'язано задачу дифракції плоскої монохроматичної хвилі на одновимірному неоднорідному анізотропному феритовому шарі, розташованому на однорідній ізотропній підкладці.
3. Визначено амплітудні коефіцієнти відбиття і проходження плоскої монохроматичної хвилі з використанням методу скінченних різниць.
4. На основі отриманих числових результатів проаналізовано вплив на характеристики розсіювання електромагнітного поля електродинамічних параметрів матеріалу анізотропного шару, а саме вигляду тензорів діелектричної та магнітної проникностей, а також профілю неоднорідності.
5. Продемонстровано ефект перетворення поляризації хвилі, що пройшла та відбитої хвилі, викликаний анізотропією феритового шару.

6. Виявлено можливість використання впливу геометричної структури тензорів діелектричної та магнітної проникностей і профілю неоднорідності шару на характеристики розсіяного поля.

Отримані результати можуть бути корисними для теоретичного розуміння впливу анізотропних неоднорідних середовищ на характеристики розсіювання електромагнітних хвиль, а також при розробці нових НВЧ пристроїв, проектуванні фільтрів, резонаторів, поглиначів з використанням ефектів, зумовлених анізотропією.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Yariv, A., & Yeh, P. Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation, Wiley, 1984.
2. Aspnes, D. E. Electric-Field Effects on Optical Properties of Semiconductors, in Handbook on Semiconductors, Vol. 2, Elsevier, 1994.
3. Krowne, C. M. Gyrotropic Planar Waveguide Modes, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1983.
4. Swanson, D. G. Plasma Waves, 2nd Ed., Institute of Physics, 2003.
5. Knott, E. F., Shaeffer, J. F., Tuley, M. T. – Radar Cross Section, 2nd Ed., SciTech Publishing, 2004.
6. Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comp. Phys. – Oct. 1994. – Vol. 114. – P. 185–200.
7. Kong, J. A. Electromagnetic Wave Theory, EMW Publishing, 2000.
8. Tretyakov S. A. and Sochava A.A. Proposed composite material for non-reflecting shields and antenna radomes// Electronic Letters. – 1993. – Vol. 29, N 12. – P. 1048 – 1049.
9. Balanis, C. A. Antenna Theory: Analysis and Design, Wiley, 3rd Ed., 2005.
10. Norgren M., He S. On the possibility of reflection less coating of a homogeneous bianisotropic layer on a perfect conductor// Electromagnetics. – 1997. – Vol. 17, № 4. – P. 295 – 307.
11. Ulaby, F. T., Moore, R. K., Fung, A. K. Microwave Remote Sensing: Active and Passive, Vol. 1, Artech House, 1981.
12. Agranovich, V. M., & Ginzburg, V. L. Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons, Springer, 1984.
13. Slater Ph. N. Radiometric consideration in remote sensing // Proceeding of the IEEE. – 1985. – Vol. 73, N 6. – P. 997 – 1011.
14. Jeng S. K., Wu R. B., Chen C. H. Waves obliquely incident upon a stratified anisotropic slab: A variational reaction approach // Radio Sci. – July/Aug. 1986. – Vol. 21, N 4. – P. 681–688.

15. Titchener J. B., Willis J. R. The reflection of electromagnetic waves from stratified anisotropic media // IEEE Trans. Antennas Propagat. – Jan. 1991. – Vol. 39, N 1 – P. 35–39.
16. Norgern N., He S. General scheme for electromagnetic reflection and transmission for composite structures of complex materials // IEEE Proc. – Microwave Antennas Propagat. – Feb. 1995. – Vol. 142, N 1 – P. 52–56.
17. Shilov, G. E. Linear Algebra, Dover Publications, 1977.
18. Tsalamengas J. L., Uzunoglu N. K. Radiation from a dipole in the proximity of a general anisotropic grounded layer // IEEE Trans. Antennas Propagat. – Feb. 1994. – Vol. 33, N 2 – P. 165–172.
19. Tsalamengas J. L. Interaction of electromagnetic waves with general bianisotropic slabs // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Oct. 1989. – Vol. 40, N 10 – P. 1870–1878.
20. Lakhtakia A., Weiglhofer W. On light propagation in helicoidal bianisotropic structures // Proc. Roy. Soc. Lond. A – 1995. – Vol. 448, – P. 419–437.
21. Brekhovskikh, L. M. (1980). Waves in Layered Media. 2nd ed., Academic Press.
22. Mrozovski M., Mazur J. General analysis of a parallel-plate waveguide inhomogeneously filled with gyromagnetic media // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1986. – Vol. MTT-34, – P. 388–395.
23. Weiglhofer W. Reduction of dynamic Green's functions to scalar Hertz potentials for gyrotropic media // Radio Sci. – 1987. – Vol. 22, N 6. – P. 209–215.
24. Zhuck N. P. Electromagnetic theory of arbitrarily layered media. Part 1. Scalarization of field quantities // Int. J. Electronics. – 1993. – Vol. 75, № 1. – P. 141 – 148.
25. Weiglhofer, W. Scalarization of Maxwell's Equations in General Inhomogeneous Bianisotropic Media, Proc. IEE Part H, 1987.
26. Liu, Q. H. (1998). Wave propagation in stratified media: Green's function and the discrete wavenumber method. In Geophysics, 63(4), 1231–1236.

27. Born, M., & Wolf, E. Principles of Optics, 7th Ed., Cambridge Univ. Press, 1999.
28. Chew, W. C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media, IEEE Press, 1995.
29. Mackay, T. G., & Lakhtakia, A. Recent Advances in Electromagnetic Anisotropic Layer Scattering Models, IEEE Trans. Antennas Propagat., 2001.
30. Weiglhofer, W. S., & Lakhtakia, A. (Eds.) (2003). Introduction to Complex Mediums for Electromagnetics and Optics. SPIE Press.
31. Collin, R. E. (1991). Field Theory of Guided Waves, 2nd Ed., IEEE Press.
32. Mackay, T. G., & Lakhtakia, A. (2005). Electromagnetic Anisotropy and Bianisotropy: A Field Guide. World Scientific Publishing.