

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Конспект лекцій
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальностями 015.33 «Професійна освіта.
Енергетика, електротехніка та електромеханіка»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

У 2 частинах

Частина 1

Електронний ресурс

Харків – 2025

Рецензенти :

Р. М. Тріщ – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мехатроніки та електротехніки Національного аерокосмічного університету імені М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет»;

К. Ю. Бровко – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехніки та електроенергетики ННІ «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 9 від 23 квітня 2025 року)*

Теоретичні основи електротехніки : конспект лекцій для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальностями 015.33 «Професійна освіта. Енергетика, електротехніка та електромеханіка», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». У 2 ч. Ч. 1 [Електронний ресурс] / укладачі А. І. Тарасенко, Г. М. Мосієнко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – (PDF 122 с.)

Конспект лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» містить матеріали за розділами: загальні положення та основні закони теорії електричних кіл, аналіз лінійних електричних кіл постійного струму, кола гармонічного струму, резонанс в електричних колах, трифазні електричні кола.

Теоретичний матеріал доповнено прикладами практичного застосування методів аналізу лінійних електричних кіл.

Конспект лекцій призначено для організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня електроенергетичного та електротехнічного профілю.

УДК 621.3.01(075.8)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2025

© Тарасенко А. І., Мосієнко Г. М. уклад., 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТА ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	10
ЛЕКЦІЯ 1.	10
1.1. Основні поняття та визначення теорії електричних кіл.	10
1.2. Елементи електричних схем заміщення.	14
ЛЕКЦІЯ 2.	20
1.3. Топологічні поняття схеми електричного кола.	21
1.4. Класифікація електричних кіл.	23
1.5. Основні закони теорії електричних кіл.	24
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	30
ЛЕКЦІЯ 3.	30
2.1. Метод еквівалентних перетворень.	30
2.2. Метод рівнянь Кірхгофа.	38
ЛЕКЦІЯ 4.	40
2.3. Метод контурних струмів.	40
2.4. Метод вузлових напруг.	48
ЛЕКЦІЯ 5.	54
2.5. Принцип взаємності.	54
2.6. Принцип накладання (суперпозиції).	55
2.7. Двополюсники. Теореми про активний двополюсник.	57
РОЗДІЛ 3. КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ	64
ЛЕКЦІЯ 6.	64
3.1. Гармонічне коливання та його параметри.	64
3.2. Діюче, середнє та середнє за модулем значення струмів і напруг.	65
3.3. Метод комплексних амплітуд.	67
3.3.1. Загальні положення.	67
3.3.2. Комплексне перетворення.	68
3.3.3. Комплексна схема заміщення. Закон Ома в комплексній формі.	69
3.3.4. Закони Кірхгофа в комплексній формі.	76
3.3.5. Застосування методу комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл гармонічного струму.	76
ЛЕКЦІЯ 7.	78
3.4. Потужність у колах гармонічного струму.	78
3.5. Баланс потужностей у колі гармонічного струму.	81
РОЗДІЛ 4. РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.	84
ЛЕКЦІЯ 8.	84
4.1. Резонанс у послідовному контурі (резонанс напруг).	84
4.2. Частотні та резонансні характеристики послідовного контуру.	86

4.3. Комплексна провідність кола. Еквівалентні перетворення послідовного та паралельного з'єднання елементів. Трикутник провідностей.	90
ЛЕКЦІЯ 9.	93
4.4. Резонанс в паралельному контурі (резонанс струмів).	93
4.5. Частотні та резонансні характеристики паралельного контуру.	98
4.6. Умова передачі максимальної потужності від джерела до навантаження.	99
РОЗДІЛ 5. ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА.	102
ЛЕКЦІЯ 10.	102
5.1. Основні поняття й визначення.	102
5.2. Схема з'єднання «зірка-зірка».	104
5.3. Аналіз схеми з'єднання «зірка-зірка»	106
ЛЕКЦІЯ 11.	108
5.4. Схема з'єднання «трикутник-трикутник».	108
5.5. Аварійні режими трифазного кола, навантаження якого з'єднане зіркою.	110
5.5.1. Коротке замикання однієї з фаз симетричного навантаження.	110
5.5.2. Обрив однієї з фаз симетричного трифазного навантаження.	112
5.5. 3. Обрив нейтрального проводу у випадку несиметричного трифазного навантаження.	113
ЛЕКЦІЯ 12.	114
5.6. Симетричні системи ЕРС, напруг, струмів.	114
5.7. Розкладання несиметричної системи ЕРС, напруг або струмів на симетричні складові.	115
5.8. Потужність у трифазних колах.	116
5.9. Обертове магнітне поле.	118
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.	121

ВСТУП

- **Роль і місце електротехніки в сучасних умовах.**

Електротехніка - наука про практичне застосування електричних і магнітних явищ для виробництва, передачі розподілу та перетворення електричної енергії. На використанні електричної енергії базуються найновіші досягнення науки і техніки в галузях енергетики, електромеханіки, радіотехніки, автоматизації і керування виробничими процесами тощо.

Головна перевага електричної енергії перед іншими видами в тому, що вона універсальна і має цінні властивості. Вона легко перетворюється на механічну, теплову, світлову, хімічну та інші види енергії, її зручно передавати на великі відстані, легко розподіляти за різною потужністю і характеристиками споживання. Сучасне промислове виробництво, складні технологічні процеси базуються на застосуванні електроприводу, автоматизованих систем управління і контролю на основі електричних та електромеханічних пристроїв.

- **Значення курсу ТОЕ і його місце в системі електротехнічної освіти.**

Теоретичні основи електротехніки є однією з основних дисциплін і вивчається студентами усіх електромеханічних та енергетичних фахів. Ця дисципліна базується на курсах фізики, математики і містить інженерні методи розрахунку, аналізу та синтезу електричних і магнітних кіл, які застосовуються до широкого класу сучасних електротехнічних пристроїв.

Курс ТОЕ має виключно важливе значення для формування наукового світогляду сучасного фахівця електротехнічного профілю. Він закладає фундамент, на якому базуються всі радіотехнічні, електротехнічні і енергетичні дисципліни. Предметом курсу ТОЕ є вивчення якісних та кількісних сторін електромагнітних явищ з метою глибокого розуміння фізики процесів і їх практичного використання.

Більшість електромагнітних пристроїв використовує для своєї дії електричний струм, з яким безпосередньо пов'язано змінне у просторі і у часі електромагнітне поле. З математичної точки зору електромагнітні процеси описуються системою рівнянь у частинних похідних (рівняння Максвелла). Однак у більшості випадків точний аналіз електромагнітних явищ на основі цих рівнянь становить дуже важку задачу. Тому виникає потреба у більш простих методах аналізу, які дозволяли би з достатньою для інженерних розрахунків точністю вирішувати практичні задачі.

В курсі ТОЕ вивчаються два методи опису електромагнітних явищ: теорія електромагнітного поля та теорія електричних і магнітних кіл.

Теорія поля має справу з векторними величинами і описує електромагнітні явища у часі і у просторі.

Теорія електричних і магнітних кіл базується на наближеній заміні реального електротехнічного пристрою ідеалізованою моделлю, для аналізу якої вводяться такі інтегральні величини, як струм, напруга, електрорушійна сила, струморушійна сила, зміну яких розглядають тільки у часі. Таким чином

теорія електричних і магнітних кіл відкидає з розгляду простір, що значно спрощує аналіз, але віддаляє його від строгої фізичної основи.

Визначення границь використання теорії електричних кіл здійснюється за допомогою теорії поля.

- **Задачі курсу, його структура, підручники і навчальні посібники.**

Базуючись на діалектико-матеріалістичній методології курс ТОЕ має мету розвинути у студентів навички абстрактного мислення, яке дозволяє вирішувати задачі електротехніки у самій загальній постановці.

Курс ТОЕ ставить за мету дати майбутньому інженеру глибокі фізичні уявлення про електромагнітні явища, навчити складати схеми заміщення реальних електротехнічних пристроїв та їх математичні моделі. Успішне засвоєння курсу ТОЕ закладає основу для подальшого опанування студентами спеціальних курсів.

Курс теоретичної електротехніки безперервно розвивається, застарілий матеріал переробляється, з'являються нові розділи, наприклад, топологічні методи, синтез електричних кіл, активні РС-фільтри тощо. Відповідно зростає обсяг інформації, яку повинні засвоїти студенти. Тому у курсі ТОЕ передбачено поділення його за фахами, що дозволяє більш глибоко вивчати необхідні для даного фаху розділи.

За своїм змістом курс ТОЕ поділяється на наступні частини: лінійні електричні кола з зосередженими параметрами, нелінійні електричні та магнітні кола, кола з розподіленими параметрами і теорія електромагнітного поля.

В основі перших трьох частин курсу лежать чотири основних закони: закон Ома, перший та другий закони Кірхгофа, закон Джоуля-Ленца та засновані на них 6-7 методів розрахунку електричних кіл. За об'ємом значну частину курсу (близько 20%) займають визначення та позначення фізичних величин, які використовуються для опису електромагнітних явищ і їх математичних моделей. Цей матеріал треба вчити напам'ять, тому що він є мовою електротехніки, без якої спілкуватися з питань електротехніки неможливо.

Стрижнем усього курсу ТОЕ є математика, з використанням якої викладаються усі розділи курсу. Особливу увагу треба приділити вільному володінню такими розділами математики як матрична алгебра, розв'язання систем лінійних рівнянь у дійсній та комплексній формі, розв'язання диференціальних рівнянь, перетворення Фур'є та Лапласа, функції комплексної змінної.

Курс ТОЕ має багаторічну історію, що знайшло своє відображення у декількох десятках підручників як для середніх, так і вищих навчальних закладів.

Найбільш наближено до тексту лекцій матеріал курсу подається у таких підручниках:

1. Теоретичні основи електротехніки : підручник : у 3 т. / В. С. Бойко, Ю. Ф. Видолоб та ін.; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. Київ : ІВЦ

«Видавництво «Політехніка»», 2004. - Т.1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. 272 с.

2. Теоретичні основи електротехніки : підручник : у 3-х Т.2. / В. С. Бойко, Ю. Ф. Видолоб та ін.//За заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. Київ : НТТУ «КПІ», 2008. = 224с.

3. Шегедин О. І., Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки: навч. посіб. / О. І. Шегедин, В. С. Маляр, — Львів: Магнолія Плюс, 2007. — Ч. 1. — 172 с.

4. Костін М. О. Теоретичні основи електротехніки: підруч. / М. О. Костін, О. Г. Шейкіна. — Дніпропетровськ: Вид. Дніпропетр. нац. ун-ту залізнич. транспорту. 2006. — Т. 1. — 336 с.: — Т. 2. — 276 с.

• Коротка історична довідка.

Електротехніка – це дійсно інтернаціональна галузь науки і техніки, в розвиток якої внесли свій вклад вчені та інженери різних країн світу. Історію розвитку електротехніки умовно можна поділити на три етапи:

1-й етап закінчується в середині 19-го століття;

2-й етап охоплює другу половину 19-го століття і початок 20-го століття;

3-й етап охоплює період від початку 20-го століття до наших днів.

Перший етап характеризується накопиченням знань з електромагнітних явищ, розробкою засобів кількісного і якісного розрахунку цих явищ та засобів їх вимірювання.

У 1799 р. італійський фізик Вольт винайшов гальванічний елемент – перше джерело напруги, а через три роки у 1802 р. професор В.В.Петров сконструював потужний гальванічний елемент за допомогою якого вперше в історії людства одержав штучним шляхом електричну дугу. Це було перше електричне явище, яке знайшло в подальшому застосування на практиці для освітлення, плавки і зварки металів.

За винаходом електричної дуги постала низка визначних винаходів, пов'язаних з електричним струмом та електромагнітним полем. Вченими Араго, Ампером, Омом, Ерстедом, Фарадеєм досліджені властивості електричного струму, встановлений зв'язок між електричною, магнітною, тепловою та хімічною дією електричного струму, відкрито явище термоелектрики, встановлена дія магнітного поля на світлові промені, закони механічної взаємодії електричних струмів і магнітів і, нарешті, у 1831 р. Е.Х.Ленцем було відкрито явище електромагнітної індукції, яке відіграло значну роль у розвитку теорії електромагнетизму.

У 1845 р. німецьким фізиком Г.Кірхгофом були сформульовані основні закони розгалужених електричних кіл, які мали велике значення для розвитку теоретичної та практичної електротехніки.

Другий етап розвитку електротехніки пов'язаний з початком широкого практичного використання електрики. На протязі довгого часу основним джерелом електроенергії були гальванічні батареї. Такі батареї, наприклад, були використані академіком Якобі для роботи електродвигуна. Перший

двигун, розроблений ним ще у 1838 р., був встановлений на човні, який міг рухатися по воді з великою швидкістю.

Машинні генератори постійного струму були розроблені значно пізніше. Поява таких генераторів відкрила широкий шлях практичному використанню електроенергії.

Першим таким напрямком було електричне освітлення. Рівномірність згорання стержнів у свічі забезпечувалася використанням змінного струму, який мав багато переваг перед постійним струмом за рахунок простоти передачі та розподілу електричної енергії за допомогою трансформатора.

Змінний струм набув широкого поширення завдяки роботам видатного вченого М.О.Доліво-Добровольського, який розробив і ввів у повсякденний обіг трифазні системи живлення, трифазні трансформатори, двигуни та інше.

Видатною подією в розвитку теорії електромагнітних явищ стала двотомна праця Дж.К.Максвелла "A Treatise on Electricity and Magnetism", що побачила світ у 1873 р. В цій роботі він виклав строгу і цілостну теорію електромагнітного поля, яка доповнювала і розвивала ідеї Фарадея. Наведені в роботі знамениті рівняння Максвелла і в наші дні залишаються основою для аналізу і розуміння широкого класу питань, пов'язаних з електромагнітними процесами.

Експериментальне підтвердження теорії Максвелла було здійснено Г.Герцем у 1887-1889 рр. в його дослідах по генерації електромагнітних хвиль.

Значний вклад в теоретичну і практичну електротехніку вніс геніальний англійський вчений самоучка Олівер Хевісайд (1850-1925). Незважаючи на те, що він вперше ввів операційний метод розрахунку електричних кіл, одиничну $1(t)$ та дельта $\delta(t)$ -функції, векторний аналіз та багато іншого, його фундаментальна трьохтомна праця "Електромагнітна теорія", яка вийшла в світ на протязі 1893-1912 років, залишилась не прочитаною. Не маючи вищої університетської освіти, він напрацював свою наукову мову, свій стиль постановки і вирішення наукових проблем, свій математичний апарат, що було неприйнятно для більшості його сучасників. Одержані Хевісайдом наукові результати дуже часто використовуються іншими вченими без усяких посилань на їх автора, а частина його результатів взагалі приписується іншим.

Формування курсу "Теоретичні основи електротехніки" відноситься до кінця 19-го століття і початку 20-го століття, коли проф. В.Ф. Миткевич почав читати курс "Теорія електричних і магнітних явищ". Роком пізніше професор К.А.Круг почав читати курс "Теорія змінних струмів", який згодом (1916 р.) став основою для першого підручника "Основи електротехніки".

Третій етап розвитку електротехніки починається приблизно у 20-х роках 20-го століття і пов'язаний з бурхливим розвитком електроенергетики, побудовою потужних теплових та гідроелектростанцій і широким використанням електроенергії у всіх галузях народного господарства. Виробничі установки переводяться на електропривод, у великих містах розвивається електротранспорт, з'являються нові галузі, такі як електрометалургія, електрохімія, зв'язок, розробляються електричні прилади

для вимірювання як електричних, так і неелектричних величин. Електроенергія починає широко використовуватися у повсякденному побуті. Разом з тим на базі електротехніки розвиваються нові напрямки досліджень, які з часом сформувались як самостійні галузі технічних наук: радіотехніка і електроніка, електродинаміка, електроенергетика, електричні машини і апарати, електропривод і автоматичні системи управління, електронно-обчислювальна техніка, електричні вимірювання та інші.

Широкий розвиток одержала загальна теорія лінійних та нелінійних електричних кіл і теорія електромагнітного поля. Були розроблені нові методи розрахунку електромагнітних полів, питання взаємодії заряджених часток з електромагнітним полем, проведені дослідження електромагнітних процесів у різних середовищах.

Розглядаючи в найбільш широкій постановці фізичні процеси як в електричних колах, так і в електромагнітних полях конкретних електротехнічних пристроїв, теоретичні основи електротехніки залишаються базовою дисципліною для формування світогляду спеціалістів електротехнічного напрямку і фундаментом для оволодіння ними всіх без винятку спеціальних і технологічних дисциплін електротехнічного профілю.

- **Нові напрямки розвитку курсу ТОЕ.**

Сучасний етап науково-технічного прогресу характеризується революційними змінами в передачі, обробці та використанні інформації на базі сучасної електронно-обчислювальної техніки. Під їх впливом відбуваються значні перетворення у цілому ряді наукових напрямків, у тому числі і теоретичній електротехніці.

Домінуючі цифрові методи обробки інформації, які реалізуються цифровими процесорами, привели до впровадження методів дискретної математики в теоретичні основи електротехніки. Розвиваються топологічні методи аналізу електричних кіл, методи координат стану, впроваджується апарат матричної алгебри, розробляються нові методи розрахунку нелінійних електричних кіл змінного струму.

В цих умовах від фахівців електромеханічного профілю вимагається широта уявлень, глибоке розуміння основних закономірностей процесів, притаманних електромагнітним пристроям, в основі вивчення яких лежить курс “Теоретичні основи електротехніки”.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТА ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Лекція 1

План лекції:

- 1.1. Основні поняття та визначення теорії електричних кіл.
- 1.2. Елементи електричних схем заміщення.

1.1. Основні поняття та визначення теорії електричних кіл.

В загальному випадку точне розв'язання задач, які описують електромагнітні процеси у реальних пристроях, можливо лише на основі рівнянь Максвелла, які вивчаються у теорії поля. Теорія поля розглядає електромагнітні величини у кожній точці простору, досліджує їх зміну як у просторі, так і у часі, має справу з реальними фізичними процесами у реальних електромагнітних пристроях. Однак строге розглядання електромагнітних процесів в більшості випадків являє собою дуже складну задачу, яку неможливо розв'язати через математичні труднощі.

Для практичного використання цілком достатнім виявляється інший підхід, в основі якого лежить заміна реального електромагнітного пристрою деякою моделлю, яка носить назву електричного кола.

Теорія кіл розглядає процеси тільки у часі (простір відкидається) і тому має справу не з реальними електромагнітними пристроями, а з їх адекватними моделями, які описуються за допомогою схем заміщення, для побудови яких використовуються ідеалізовані схемні елементи (у природі таких немає).

Для побудови моделі введемо низку понять, термінів та позначень, на основі яких буде базуватися спрощена теорія – теорія електричних і магнітних кіл.

Електричне коло – це сукупність пристроїв, призначених для проходження електричного струму, електромагнітні процеси в яких можна описати за допомогою таких інтегральних понять як струм, напруга, електрорушійна сила та струморушійна сила.

Схема – це графічне зображення електричного кола, що відображає послідовність з'єднання реальних елементів електричного кола і його властивості.

Схеми можна класифікувати за різними ознаками. У найпростішому випадку схеми поділяються на структурні, монтажні, принципові та схеми заміщення.

Структурна схема – це графічне зображення за допомогою умовних блоків реального електричного кола, яке відображає найголовніші функціональні частини кола і взаємозв'язок між ними.

Монтажна схема показує порядок розташування і з'єднання окремих елементів електричних кіл і використовується при монтажі електричних кіл.

Принципова схема – це графічне зображення реального електричного кола, на якому за допомогою умовних графічних позначень подано всі елементи кола і з'єднання між ними. Ця схема використовується для регулювання та ремонту апаратури.

Схема заміщення – це графічне зображення ідеалізованих схемних елементів і зв'язків між ними, яке відображає властивості реальних елементів в межах задачі, що розв'язуються. Вона використовується при розрахунках і аналізі електричних кіл.

В курсі ТОЕ при аналізі електричних кіл використовуються, в основному, схеми заміщення, тому подалі в процесі викладання матеріалу ми будемо мати справу тільки з розрахунковими схемами заміщення.

Електричний струм (мається на увазі струм провідності) – це направлений рух зарядів. Чисельне значення струму визначається кількістю заряду, що проходить крізь поперечний переріз провідника за одну секунду.

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Малою буквою $i(t)$ чи скорочено i позначається миттєве значення змінного струму, великою I – постійний струм, чи діюче значення змінного струму. Одиниця виміру струму $[i] = A$ (ампер) та похідні - мА, мкА, кА ...

За **дійсний напрямок струму** прийнято напрямок руху позитивних зарядів.

На схемах дійсний напрямок вказується стрілкою без просвіту безпосередньо на зображенні з'єднувальних провідників (рис. 1.1)

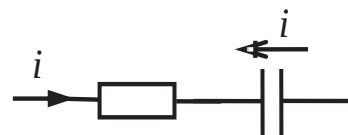


Рис. 1.1

При розрахунку або вимірюванні струмів у складних колах в багатьох випадках не можливо заздалегідь вказати дійсні напрямки струмів. Тому перед розрахунком чи вимірюванням напрямки струмів на схемі вказують довільним чином.

Довільно вибрані напрямки струмів умовно називають **додатними напрямками**. На схемах додатні напрямки вказуються стрілкою з просвітом, яка ставиться над елементами чи над з'єднувальними провідниками (рис. 1.1, 1.2).

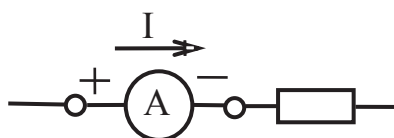


Рис. 1.2

Для вимірювання постійного струму розривають провідник, в якому необхідно визначити струм, і в розрив вітки з урахуванням додатного напрямку підключають амперметр. Плюс амперметра підключають до затискача, який відповідає початку стрілки, мінус – кінцю стрілки (рис. 1.2) і записують показання амперметра з тим знаком, який він дає. Якщо у результаті виміру чи розрахунку струм матиме знак “-”, то це значить, що дійсний напрямок струму протилежний додатному напрямку.

Прикладом того, як теорія поля використовується для обґрунтування величин теорії електричних кіл, є електрична напруга.

Електрична напруга є фізичною величиною, що характеризує електричне поле вздовж заданого шляху і дорівнює лінійному інтегралові напруженості електричного поля вздовж цього шляху.

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{E} d\vec{\ell}.$$

Дуже часто означення напруги дають за допомогою іншої фізичної величини, притаманної полю - електричного потенціалу.

Електричний потенціал φ_a довільної точки a електричного поля чисельно дорівнює роботі сил електричного поля щодо перенесення одиничного позитивного заряду з цієї точки простору у нескінченність (потенціал нескінченності умовно прийнятий за нуль).

Різниця потенціалів точок a і b називається електричною напругою між цими точками.

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Теорія електричних кіл є наближеною теорією, яка не оперує з простором, і тому використовувати диференціальну величину (потенціал точки простору) в теорії електричних кіл не логічно. В теорії кіл напруга розглядається між двома точками електричного кола, не пов'язаного з простором. Малою буквою $u(t)$ чи u позначається миттєве значення змінної напруги, великою U – постійна напруга чи діюче значення змінної напруги.

Одиниця виміру напруги $[u] = \text{В}$ (вольт) та похідні – мВ, мкВ, кВ ...

Напруга є скалярною величиною, якій приписується певний напрямок.

За **дійсний напрямок напруги** прийнято напрямок, в якому би рухались позитивні заряди від однієї точки електричного кола до іншої, тобто напрямок від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом.

В частинах електричного кола, які не містять джерел енергії, рух носіїв заряду здійснюється за рахунок енергії електричного поля і напрямки напруги і струму співпадають.

В середині джерел енергії носії заряду рухаються під впливом енергії сил неелектричної природи у напрямку, протилежному дії сил електричної природи. Таким чином, напрямок струму у джерелі енергії протилежний напрямку напруги.

Довільно вибрані напрямки напруги умовно називають **додатними напрямками**.

Додатні напрямки можуть задаватись порядком індексів, наприклад U_{12} чи U_{ab} , який означає, що напруга направлена від точки 1 до 2 чи від a до b .

$$\text{Тому } U_{12} = -U_{21} \text{ чи } U_{ab} = -U_{ba}.$$

На схемах додатні напрямки напруги можуть вказуватись стрілками без просвіту. Якщо на схемі вказані додатні напрямки струму в елементах, то вважається, що додатні напрямки напруги і струму в них співпадають.

При вимірюваннях “+” вольтметру підключається до точки, яка стоїть в індексі напруги попереду, а “-” до другої точки. Якщо у результаті вимірювань чи розрахунків напруга матиме знак “-”, то це значить, що дійсний напрямок напруги протилежний додатному.

У потенційному електричному полі заряди різних знаків намагаються зблизитись під впливом кулонівських сил притягання. Внаслідок цього відбувається взаємна компенсація зарядів. Всі електричні процеси зникають.

Тому для дії електротехнічних пристроїв необхідні процеси, які б всупереч кулонівським силам роз’єднували заряди різних знаків. Без цих сторонніх сил (сил неелектричної природи) електромагнітні явища не могли би існувати, як не існувало би річок, якщо би рух води відбувався лише за рахунок сил тяжіння.

Під **електрорушійною силою** (ЕРС) джерела енергії будемо розуміти напругу, яка виникає внаслідок роботи не кулонівських (сторонніх) сил з роз’єднання зарядів різних знаків.

ЕРС чисельно визначається як робота сторонніх сил з переміщення одиничного позитивного заряду усередині ненавантаженого джерела енергії від його “-” до “+”.

Незалежно від природи сторонніх сил ЕРС джерела енергії чисельно дорівнює напрузі між затискачами джерела за відсутності в ньому струму.

Малою буквою e чи $e(t)$ позначається миттєве значення змінної ЕРС, великою E – постійна ЕРС чи діюче значення змінної ЕРС.

Одиниця виміру ЕРС $[e] = \text{В}$ (вольт).

Сторонні сили здатні не тільки роз’єднувати заряди різних знаків і створювати напругу, але й безпосередньо утворювати електричний струм. Наприклад, якщо взяти за один кінець металевий стрижень, підняти його на достатню висоту над твердою поверхнею, а потім відпустити, то електрони (основні носії зарядів у металах) разом зі стрижнем дістануть кінетичної енергії, за рахунок якої при ударі о поверхню вони почнуть рухатись в напрямку поверхні, створюючи таким чином електричний струм.

Під **струморушійною силою** (СРС) джерела енергії будемо розуміти струм, який виникає внаслідок роботи сторонніх сил зі створення направленого руху зарядів.

Незалежно від природи сторонніх сил СРС джерела енергії чисельно дорівнює струму через джерело при закорочених затискачах.

Малою буквою j чи $j(t)$ позначається миттєве значення змінної СРС, великою J – постійна СРС чи діюче значення змінної СРС.

Одиниця виміру СРС $[j] = \text{А}$ (ампер).

При переміщенні електричного заряду dq від однієї точки електричного кола до другої, напруга між якими дорівнює u , сили електричного поля виконують елементарну роботу

$$dw = udq = uidt.$$

Енергія, яку одержало (витратило) електричне коло до моменту часу t , визначається інтегралом

$$w(t) = \int_{-\infty}^t u i dt.$$

Якщо $w(t) > 0$, то вважають, що електричне коло споживає енергію, якщо $w(t) < 0$, то електричне коло віддає енергію джерелу.

Похідна енергії за часом є **миттєвою потужністю**

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u \cdot i.$$

Якщо у дану мить напрямки струму і напруги співпадають, то $p(t) > 0$ і коло споживає чи накопичує енергію. Якщо напрямки струму і напруги – протилежні, то $p(t) < 0$ і коло віддає електричну енергію.

Таким чином

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt.$$

Одиниця виміру потужності $[p] = \text{Вт (ватт)}$ та похідні - мВт, кВт ...

Одиниця виміру енергії $[w] = \text{Дж (джоуль)}$ та похідні - мДж, кДж ...

1.2. Елементи електричних схем заміщення.

Реальні електромагнітні пристрої складаються із джерел енергії, в яких неелектромагнітна енергія перетворюється в електромагнітну (активні елементи), і приймачів енергії, в яких електромагнітна енергія може накопичуватися у вигляді енергії електричного чи магнітного поля, або перетворюватися на інші види енергії: механічну, теплову, хімічну тощо (пасивні елементи).

В електричних колах, які, як відомо, є адекватною моделлю реального електромагнітного пристрою, означені вище ефекти, явища, якості відображуються у вигляді **п'яти ідеалізованих схемних елементів**: двох активних елементів і трьох пасивних.

Пасивні елементи поділяються на лінійні і нелінійні. Елемент називається **лінійним**, якщо параметр, який його характеризує, не залежить від величини струму, що протікає через нього, напруги на його затискачах чи їх напрямків. В протилежному випадку елемент називається **нелінійним**.

Приклади нелінійних елементів: електрична лампа, котушка індуктивності з феромагнітним осереддям, конденсатор з сегнетоелектриком, напівпровідниковий елемент тощо.

Якщо параметри елементів R , L , C змінюються під впливом зовнішніх факторів, то такі елементи називають змінними резисторами, конденсаторами зі змінною ємністю, варикапами. Це лінійні елементи.

Залежність напруги на елементі від струму, що протікає через нього, чи навпаки називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ) елемента.

Для лінійних елементів вольт-амперні характеристики лінійні, для нелінійних – нелінійні. Обмежимося поки що розглядом лінійних пасивних елементів.

- **Резистивним елементом** чи просто **опором** називають елемент електричного кола, який відбиває незворотній процес поглинання чи розсіювання електромагнітної енергії.

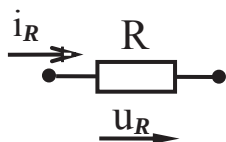


Рис. 1.3. Графічне зображення резистивного елемента

На схемах резистивний елемент позначається як показано на рис. 1.3.

Параметр, яким характеризується резистивний елемент, є його опір R . Таким чином, одним і тим же терміном “опір” будемо називати як сам ідеалізований схемний елемент, так і його параметр. Для лінійних елементів

ном Ома

$$R = \frac{u}{i}.$$

Ом та похідні – кОм, МОм ...

праву з величиною, оберненою опору, яка позначається буквою G

$$G = \frac{1}{R}.$$

Одиниця виміру провідності $[G] = \frac{1}{\text{Ом}} = \text{См}$ (сименс).

На схемах провідність зображується як і опір і має ті самі властивості. Зв'язок між струмом та напругою в опорі і провідності має вигляд

$$u = Ri; \quad i = \frac{u}{R} \quad \text{та} \quad i = Gu, \quad u = \frac{i}{G}.$$

- **Ємнісним елементом** чи просто **ємністю** називається елемент електричного кола, який відбиває процес накопичення енергії тільки електричного поля.

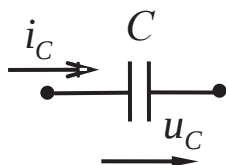


Рис. 1.4. Графічне зображення ємнісного елемента (ємності)

На схемах ємнісний елемент позначається як показано на рис. 1.4.

Параметр, яким характеризується ємнісний елемент, є його ємність C .

Знову ж таки, одним і тим же терміном “ємність” будемо називати як сам ідеалізований схемний елемент, так і його параметр.

Для лінійних елементів величина ємності визначається як відношення заряду до напруги на цьому елементі.

$$C = \frac{q}{u_C}.$$

Одиниця виміру ємності $[C] = \Phi$ (фарада) та похідні – мкФ, нФ, пФ ...
Зміна заряду на ємності супроводжується струмом

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} \Big|_{C=\text{const}} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Таким чином зв'язок між струмом і напругою в ємності має вигляд:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt.$$

У колах постійного струму ємність еквівалентна розриву кола.

Робота ємності у колі змінного струму полягає в тому, що один проміжок часу вона накопичує енергію електричного поля, в інший – віддає. Втрат енергії в ємності немає.

• **Індуктивним елементом** чи просто **індуктивністю** називається елемент електричного кола, який відбиває процес накопичення енергії тільки магнітного поля.

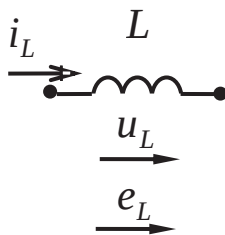


Рис. 1.5. Графічне зображення індуктивного елемента

На схемах індуктивний елемент позначається як показано на рис. 1.5.

Параметр, яким характеризується індуктивний елемент, є його індуктивність L . Термін “індуктивність” буде визначати як ідеалізований елемент електричного кола, так і його параметр.

Для лінійних елементів індуктивність визначається як відношення потокозчеплення самоіндукції елемента до струму в цьому елементі

$$L = \frac{\psi}{i}.$$

Одиниця виміру індуктивності $[L] = \text{Гн}$ (генрі) та похідні – мГн, мкГн ...

З курсу фізики відомо, що потокозчепленням котушки ψ називається сума магнітних потоків крізь поверхні, які оточують витки котушки. Якщо магнітні потоки Φ усіх витків однакові, то потокозчеплення

$$\Psi = n\Phi,$$

де n - число витків.

Згідно закону електромагнітної індукції (закону Ленца) зміна у часі потокозчеплення самоіндукції викликає появу ЕРС самоіндукції e_L

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} \Big|_{L=\text{const}} = -L \frac{di}{dt} = -u_L.$$

Величину $L \frac{di}{dt} = u_L$ називають напругою на індуктивності. З даного означення витікає, що напруга на індуктивності та ЕРС самоіндукції мають протилежний напрямок

$$u_L = -e_L.$$

Таким чином зв'язок між струмом і напругою в індуктивності має вигляд

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

У колах постійного струму індуктивність еквівалентна короткому замкненню. Робота індуктивності у колі змінного струму полягає у тому, що один проміжок часу, коли струм зростає, індуктивність накопичує енергію магнітного поля, в інший, коли струм зменшується, - віддає енергію. Втрат енергії в індуктивності немає.

Якщо частина магнітного потоку одного індуктивного елемента пересікає витки другого індуктивного елемента (рис. 1.6.), то ці два елементи крім параметрів L_1 та L_2 характеризуються параметром M , який має назву взаємодуковності. Параметр M визначається як відношення потокозчеплення витків першого елемента, яке обумовлено магнітним потоком другого елемента, до струму другого елемента.

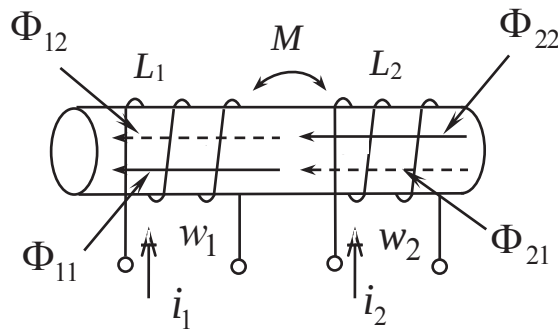


Рис. 1.6

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}.$$

Для лінійних елементів $M_{12} = M_{21} = M$.

Одиниця виміру взаємодуковності, як і просто індуктивності, є генрі.

При зміні струмів i_1 та i_2 в першому та другому індуктивних елементах наводяться електрорушійні сили взаємодуковності

$$e_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt}, \quad e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt}.$$

Для лінійних елементів

$$e_{12} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad e_{21} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Слід відзначити, що взаємна індуктивність M характеризує не самостійний елемент електричного кола, а лише магнітний зв'язок між індуктивними елементами.

Реальні пасивні елементи, які можна побачити очима, потримати в руках, називаються відповідно резистор, конденсатор та котушка індуктивності. Кожний з них в тій чи іншій мірі має властивості усіх трьох ідеалізованих схемних елементів: опору, ємності, індуктивності і можуть бути представлені на схемах сукупністю цих елементів.

Наприклад, схема заміщення котушки індуктивності подана на рис. 1.7.

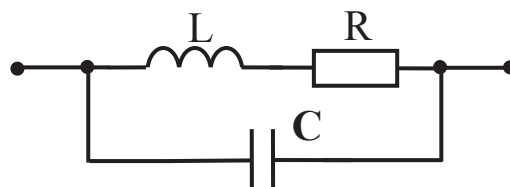


Рис. 1.7. Схема заміщення котушки індуктивності

На практиці конденсатори та резистори виготовляють таким чином, що на робочих частотах вони близькі до ідеальних, у той час як котушки індуктивності за рахунок проводу, яким вони намотані, обов'язково мають внутрішній опір R . Міжвиткова ємність C починає впливати на високих частотах.

В теорії електричних кіл користуються двома ідеалізованими джерелами електричної енергії: джерелом електрорушійної сили та джерелом струморушійної сили, чи як прийнято у літературі – ідеальним джерелом струму.

Дамо визначення ідеалізованих джерел електричної енергії.

- **Джерело ЕРС** – це елемент з двома виводами, напруга на яких дорівнює E чи $e(t)$ і не залежить від струму, що протікає через нього, причому внутрішній опір елемента $R_g = 0$.

На схемах джерело ЕРС зображується як показано на рис. 1.8.

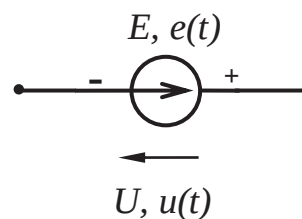


Рис. 1.8

В середині джерела ЕРС під впливом сторонніх сил позитивні заряди переміщуються від “-” до “+”, що відповідає напрямку ЕРС. Таким чином в середині джерела напруга і ЕРС направлені протилежно.

Вольт-амперна характеристика джерела ЕРС показана на рис. 1.9.

Джерело ЕРС – є ідеалізованим схемним елементом нескінченної потужності. В природі таких джерел немає.

З визначення джерела ЕРС виходить, що режим короткого замкнення для нього не має сенсу і не розглядається (рис. 1.10.).

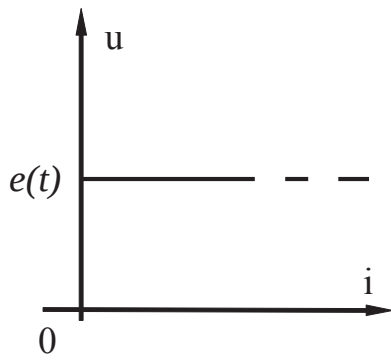


Рис. 1.9. ВАХ джерела ЕРС

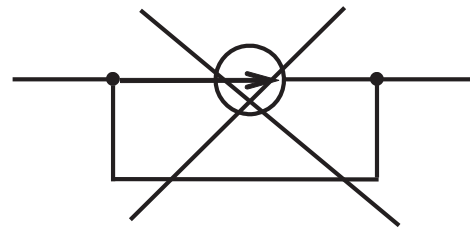


Рис. 1.10

- **Джерело СРС** (ідеальне джерело струму) – це елемент з двома виводами, струм через який дорівнює J чи $j(t)$ і не залежить від напруги на його виводах, причому внутрішній опір елемента $R_g = \infty$.

На схемах джерело СРС зображується як показано на рис. 1.11.

Дві стрілки вказують напрямок струму всередині джерела, який створюється сторонніми силами.

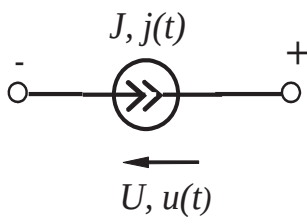


Рис. 1.11

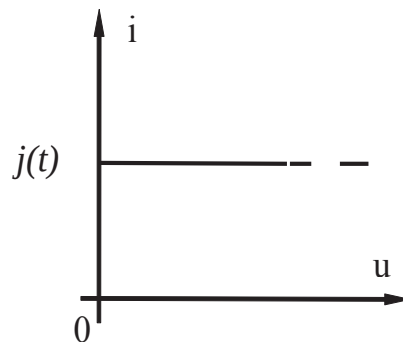


Рис. 1.12. ВАХ джерела СРС

З визначення джерела СРС виходить, що неробочий режим джерела не має сенсу і не розглядається.

Вольт-амперна характеристика джерела СРС показана на рис. 1.12.

Як і джерело ЕРС джерело СРС є ідеалізованим схемним елементом нескінченної потужності, яких в природі також немає.

Таким чином ми визначили п'ять ідеалізованих схемних елементів – три пасивних R , L , C і два активних – джерело ЕРС та джерело СРС. Жоден з п'яти елементів не можна одержати ніякою комбінацією решти чотирьох елементів.

Нічим не можна замінити ні джерело ЕРС, ні джерело СРС, ні інші ідеалізовані елементи.

Реальне джерело електричної енергії має кінцевий внутрішній опір, кінцеву потужність і може бути представлено двома рівноцінними схемами заміщення – джерелом напруги (рис. 1.13) та джерелом струму (рис. 1.14).

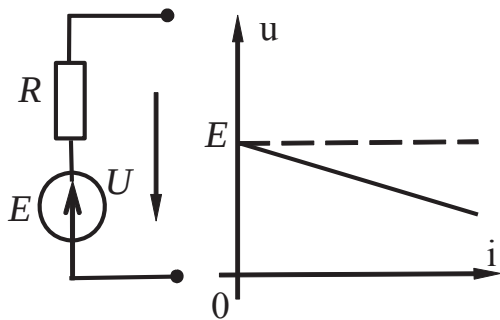


Рис. 1.13. Джерело напруги та його ВАХ

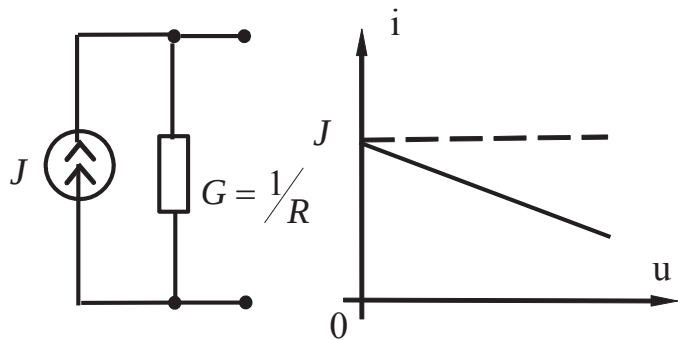


Рис. 1.14. Джерело струму та його ВАХ

Послідовне з'єднання джерела ЕРС та опору будемо називати джерелом напруги, а паралельне з'єднання джерела СРС та провідності (опору) – джерелом струму. Такі визначення схем заміщення реальних джерел електричної енергії не протерічать термінології, яка використовується у практичній діяльності.

Внаслідок кінцевої потужності реальних джерел енергії їх ВАХ є падаючими прямими, що пересікають координатні осі у двох характерних точках, які відповідають двом режимам – неробочому режиму та короткому замкненню.

Оскільки джерело напруги та джерело струму є схемами заміщення одного й того ж реального джерела енергії, то від схеми джерела напруги легко перейти до схеми джерела струму і навпаки.

Перетворення електричного кола, при якому напруга і струм на зовнішніх затискачах кола залишаються незмінними, називається еквівалентним.

Наприклад, для джерела постійного струму перехід від джерела напруги до джерела струму здійснюється за виразами:

$$J = \frac{E}{R}; \quad G = \frac{1}{R},$$

а зворотний перехід

$$E = \frac{J}{G} = JR, \quad R = \frac{1}{G}.$$

Лекція 2

План лекції:

- 1.3. Топологічні поняття схеми електричного кола.
- 1.4. Класифікація електричних кіл.
- 1.5. Основні закони теорії електричних кіл.

1.3. Топологічні поняття схеми електричного кола.

Схема електричного кола визначає склад пасивних і активних ідеалізованих схемних елементів, моделюючих реальне коло в границях даної задачі, параметри цих елементів і засоби їх з'єднання між собою.

При зображенні схем вважається, що з'єднувальні провідники елементів та місця їх сполучення не володіють опором, індуктивністю і ємністю.

Засіб зображення схемних елементів і їх взаємне положення на схемі не впливає на характер фізичних процесів у колі.

Зовнішні виводи елементів та окремих частин кола називають полюсами. В залежності від числа полюсів елементи та частини кіл поділяються на двополюсники та багатополіусники (триполіусники, чотириполіусники ...). Шляхом з'єднання двополюсників та багатополіусників утворюється електричне коло.

В залежності від характеру з'єднання ідеалізованих двополюсників розрізняють нерозгалужені та розгалужені електричні кола. У нерозгалуженому колі усі елементи з'єднані послідовно і крізь них протікає один і той самий струм.

З'єднання ідеалізованих двополюсників, при якому напруга на всіх елементах однакова, називається паралельним.

Розгалужене електричне коло складається із послідовно та паралельно з'єднаних елементів і має не менше трьох відмінних струмів. Таке з'єднання елементів називають змішаним.

З'єднання елементів, яке зображено на рис. 1.15,а називається з'єднанням трикутником, а на рис. 1.15,б - з'єднанням зіркою.

Але треба розуміти, що в більшості випадків елементи з'єднані більш складним засобом: ні послідовно, ні паралельно, ні трикутником, а ні зіркою.

Характер з'єднання ідеалізованих схемних елементів визначає топологічні (структурні) властивості кола, для опису яких використовуються такі поняття як вітка, вузол, контур.

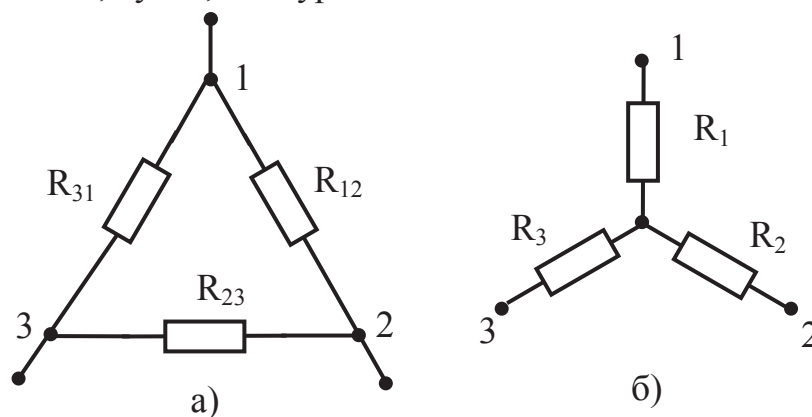


Рис. 1.15. З'єднання елементів трикутником і зіркою

Вітка – це частина електричного кола, яка складається із одного чи декількох послідовно з'єднаних елементів, струм вдовж якої у будь-яку мить часу має одне й теж значення (рис. 1.16).

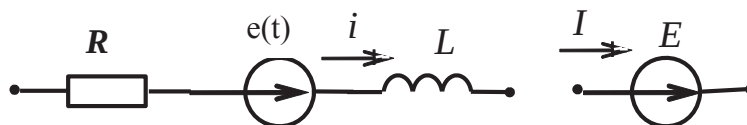


Рис. 1.16. Вітки електричного кола

Вузол електричного кола – це місце з'єднання трьох і більше віток. На схемах вузол позначається жирною крапкою (рис. 1.17,а), якщо до нього підходить тільки три вітки, або декількома крапками в разі під'єднання до вузла багатьох віток (рис. 1.17,б)

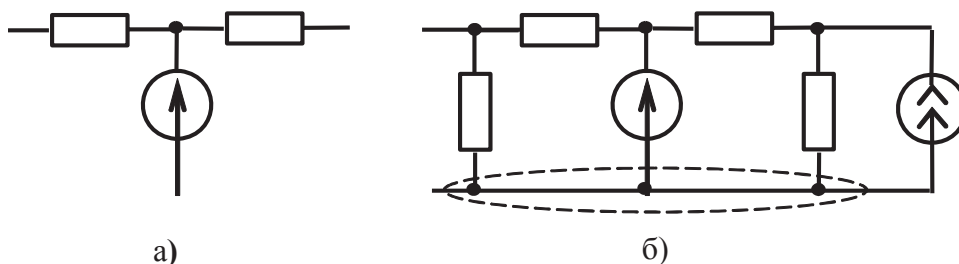


Рис. 1.17

Вітки між собою відділяються вузлами, а вузли між собою відділяються вітками.

Вітки, які приєднані до однієї пари вузлів, називаються паралельними (рис. 1.18).

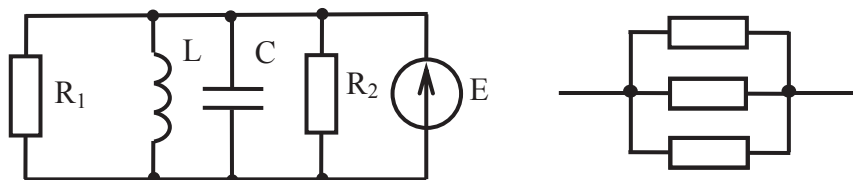


Рис. 1.18. Паралельні вітки

Контур електричного кола – це будь-яке замкнене окреслення, що проходить через низку віток та вузлів.

Контури поділяються на прості і складні. Прості контури не містять в собі інших контурів.

На рис. 1.19 наведено приклад схеми розгалуженого електричного кола. Дане коло містить 5 вузлів, 9 віток і 5 простих контурів. Чи буде лінія з'єднання 1–1' віткою? Ні, не буде, тому що між цими точками схеми нема елементів, а точки 1 і 1' - це один вузол.

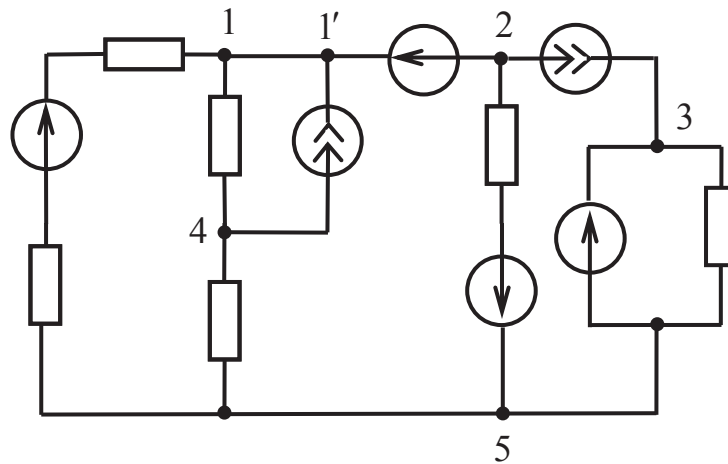


Рис. 1.19. Схема розгалуженого електричного кола

1.4. Класифікація електричних кіл.

Класифікувати електричні кола можна за різними ознаками: прості і складні, пасивні і активні, з постійними і змінними параметрами і так далі. Однак найбільш фундаментальний характер має класифікація в залежності від виду диференціального рівняння кола.

Електричне коло, яке складається лише з лінійних елементів і описується лінійними диференціальними рівняннями, називається **лінійним**.

Якщо коло містить принаймні один нелінійний елемент, воно описується нелінійними диференціальними рівняннями і називається **нелінійним**.

Розрізняють кола із зосередженими параметрами, та кола з розподіленими параметрами.

У колах з зосередженими параметрами процеси накопичення та перетворення електромагнітної енергії відбуваються лише у пасивних елементах, які не мають просторової протяжності (геометричні розміри елементів і кіл не враховуються). Струм у всіх точках нерозгалужених ділянок такого кола можна вважати однаковим для даної вітки у будь-який момент часу, а параметри пасивних елементів R , L , C – інтегральними величинами. Процеси у таких колах описуються звичайними диференціальними рівняннями.

Якщо довжина хвилі електромагнітних коливань сумірна з розмірами пристрою, що досліджується, то локалізувати у просторі ділянки, на яких мають місце процеси накопичення та перетворення електромагнітної енергії, неможливо. Струм у будь-яких точках вітки залежить не тільки від часу, але й від простору (місця цих точок вздовж вітки), а самі кола характеризуються питомими параметрами на одиницю довжини. Такі кола називають колами з розподіленими параметрами, а процеси в них описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

В залежності від частоти одне й теж коло може розглядатися як коло з зосередженими чи розподіленими параметрами. Суворої границі тут немає.

Надалі у першій частині курсу будемо розглядати лише лінійні електричні кола з зосередженими параметрами.

1.5. Основні закони теорії електричних кіл.

• Закон Ома.

Закон Ома (1826 р.) пов'язує між собою струм і напругу у лінійному опорі: струм в опорі є пропорційним прикладеній напрузі (рис. 1.20).

Для постійного струму $I = \frac{U}{R} = GU$.

Для змінного $i(t) = \frac{u(t)}{R} = Gu(t)$.

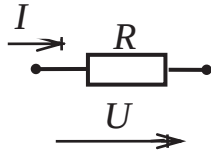


Рис. 1.20

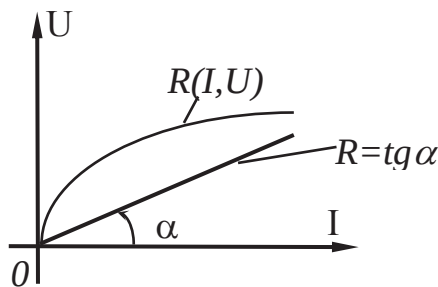


Рис. 1.21

Для лінійних елементів $R = \frac{U}{I} = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_U}{m_I}$ і ВАХ резистивного елемента

є пряма лінія (рис. 1.21). m_U та m_I - масштаби за осями напруги і струму.

Для нелінійних резистивних елементів їх опір є функціями струму чи напруги $R(i, u)$ і ВАХ має нелінійний характер.

• Перший закон Кірхгофа.

Слід відзначити, що сам Кірхгоф називав свої відкриття – правилами. Такі назви збереглись у курсі фізики.

Алгебрична сума струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулеві.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Перший закон Кірхгофа стверджує, що електричний заряд не може накопичуватись у вузлі: кількість заряду в одиницю часу, яка підходить до вузла, повинна дорівнювати кількості зарядів, які відходять від вузла.

Струми, які направлені до вузла, будемо вважати додатними, від вузла – від'ємними. Наприклад, для вузла, наведеного на рис. 1.22, перший закон Кірхгофа має вигляд

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

Перший закон Кірхгофа є справедливим також для так званого складного (узагальненого) вузла, під

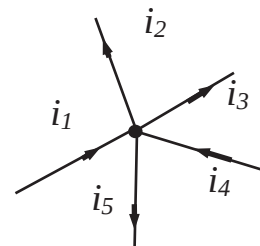


Рис. 1.22

яким розуміють частину електричного кола, яка окреслена замкненою поверхнею. Так для рис. 1.23

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

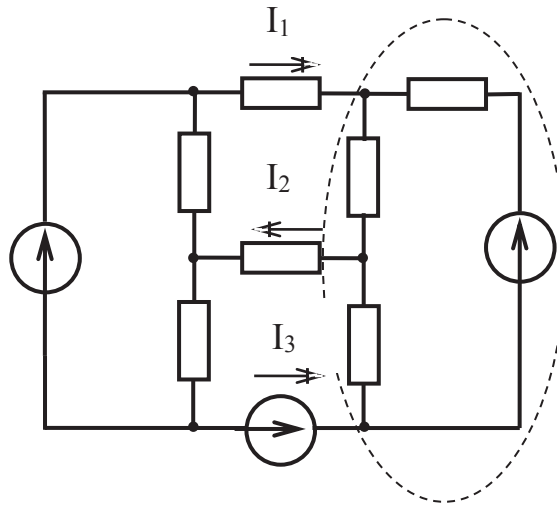


Рис. 1.23

- **Другий закон Кірхгофа.**

Дамо декілька формулювань другого закону Кірхгофа для зручності використання у кожному конкретному випадку.

Перше формулювання.

Алгебрична сума напруг на всіх елементах замкненого контуру дорівнює нулеві.

$$\sum_k u_k = 0.$$

Напрямок обходу контуру береться довільно. Якщо додатний напрямок напруги співпадає з напрямком обходу, напруга береться із знаком “+”, якщо ні – із знаком “-”.

Друге формулювання.

Алгебрична сума ЕРС у замкненому контурі дорівнює алгебричній сумі напруг на решті елементів контуру.

$$\sum_k e_k = \sum_n u_n.$$

Для фізично розімкненого контуру (незамкненого) другий закон Кірхгофа можна сформулювати так: алгебрична сума ЕРС вздовж замкненого шляху обходу дорівнює алгебричній сумі напруг на решті елементів цього шляху, включаючи напруги між розімкненими точками електричного кола.

$$\sum_k e_k = \sum_n u_n + u_{12} + u_{34} + \dots$$

Ділянки кола 1-2, 3-4... - розімкнені або вважаються розімкненими (між точками схеми 1-2 та 3-4 можуть бути декілька елементів чи декілька віток електричного кола).

Наведемо приклади запису другого закону Кірхгофа.

Для схеми (рис. 1.24) другий закон Кірхгофа для зовнішнього контуру в першому формулюванні має вигляд

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{45} + U_{56} + U_{61} = 0.$$

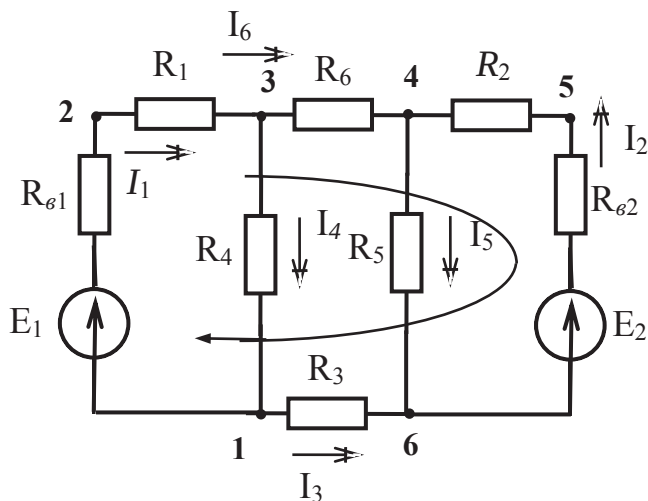


Рис. 1.24

Для цього ж контуру, за другим формулюванням закону можна записати

$$E_1 - E_2 = R_{61} I_1 + R_1 I_1 + R_6 I_6 - R_2 I_2 - R_{62} I_2 - R_3 I_3.$$

Запишемо другий закон Кірхгофа для фізично-розімкненого контуру (рис. 1.25), який є частиною складного електричного кола. Для цього виберемо замкнений шлях обходу *abcdea* та вкажемо напрямки його обходу.

Далі вкажемо додатні напрямки струмів у тих вітках, де вони не визначені. Затискачі 1-2 та 3-4 - розімкнені, тому струм на ділянках *ab* та *cd* дорівнює нулеві і тут не треба вказувати додатні напрямки. Вітка *bc* містить джерело СРС J_6 і, згідно з визначенням СРС, струм у цій вітці дорівнює J_6 і має напрямки (згідно зі стрілками) від точки “*b*” до точки “*c*”.

Для того, щоб урахувати напругу на джерелі СРС J_6 , позначимо його виводи точками 5 і 6. Тоді другий закон Кірхгофа матиме вигляд

$$E_8 - E_7 - E_6 - E_4 - E_3 + E_2 = U_{12} + R_7 J_6 + U_{56} + R_6 J_6 + U_{34} - R_3 I_3 + R_1 I_1.$$

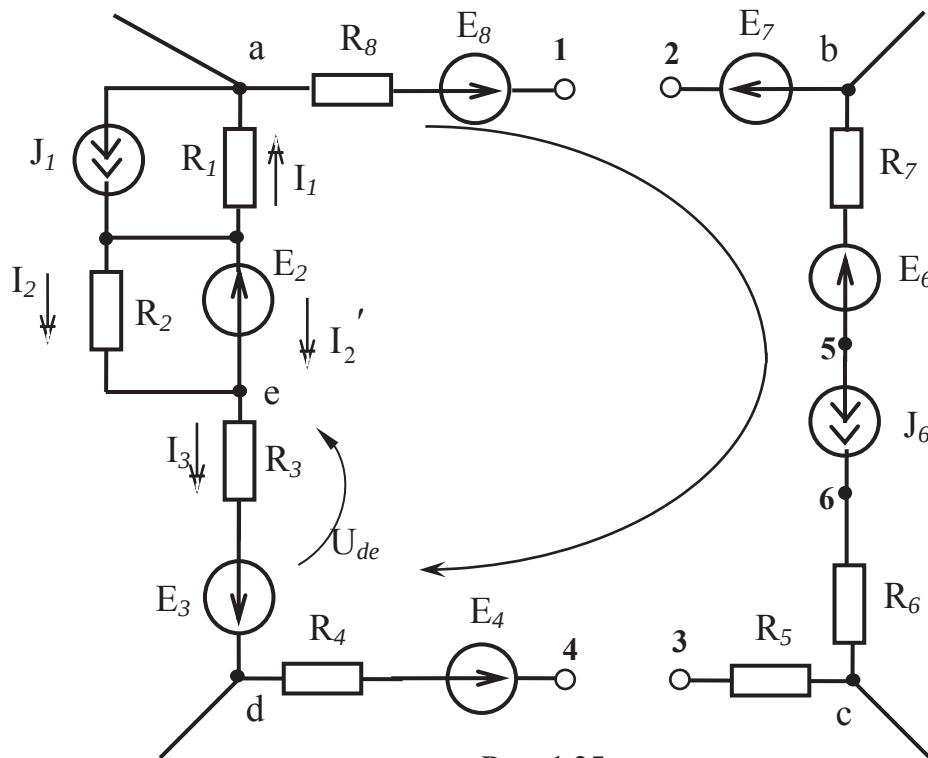


Рис. 1.25

Другий закон можна записати навіть для вітки чи її частини, замкнув її відповідною напругою.

Наприклад, для ділянки de , обходячи її за струмом I_3 , можна записати

$$E_3 = R_3 I_3 + U_{de}.$$

Звідси легко одержати вираз для струму I_3

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{de}}{R_3},$$

який часто називають законом Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.

• Закон Джоуля-Ленца (1844 р.).

Розглянемо потужність і енергію для кожного ідеалізованого елемента електричного кола.

В резистивному елементі (опорі) (рис. 1.26) миттєва потужність

$$p_R(t) = u_R i_R = R i_R^2 = \frac{u_R^2}{R}.$$

В елементі R напрямки струму і напруги завжди збігаються, тому потужність, яка розсіюється в опорі, завжди додатна, тобто електромагнітна енергія завжди надходить від джерела енергії до опору, де відбувається необоротний процес її поглинання.

Енергія, яка виділяється в опорі за час від 0 до t , визначається законом Джоуля-Ленца:

$$W_R = \int_0^t p_R(t) dt = \int_0^t R i_R^2 dt.$$

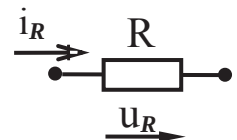


Рис. 1.26

Для постійного струму

$$W_R = RI^2t.$$

В ємнісному елементі (ємності) (рис. 1.27) миттєва потужність

$$p_C(t) = u_C i_C = u_C C \frac{du_C}{dt}.$$

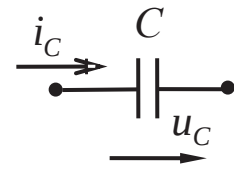


Рис. 1.27

Якщо напруга на ємності зростає (ємність заряджається, тобто $\frac{du_C}{dt} > 0$), потужність в ємності $p_C > 0$ і ємність накопичує енергію електричного поля. Якщо напруга на ємності зменшується (ємність розряджається, $\frac{du_C}{dt} < 0$), потужність $p_C < 0$ і ємність віддає електричну енергію.

В ємності (ідеальному елементі) втрати енергії відсутні.

Енергія електричного поля, яку запасає ємність при умові $u_C(0) = 0$,

$$W_C = \int_0^t p_C(t) dt = \int_0^t C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{C u_C^2(t)}{2}.$$

В індуктивному елементі (індуктивності) (рис. 1.28) миттєва потужність

$$p_L(t) = u_L i_L = L \frac{di_L}{dt} i_L.$$

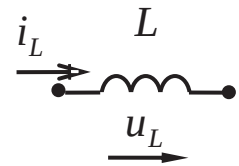


Рис. 1.28

В разі зростання струму $\left(\frac{di_L}{dt} > 0\right)$, потужність $p_L > 0$ і індуктивність накопичує енергію магнітного поля. При зменшенні струму $\left(\frac{di_L}{dt} < 0\right)$, $p_L < 0$ - індуктивність віддає енергію в електричне коло.

В індуктивності (ідеальному елементі) втрати енергії при її роботі відсутні.

Енергія магнітного поля, яку запасає індуктивність при умові $i_L(0) = 0$,

$$W_L = \int_0^t p_L(t) dt = \int_0^t L i_L \frac{di_L}{dt} dt = \frac{L i_L^2(t)}{2}.$$

Миттєва потужність джерела ЕРС (рис. 1.29)

$$p_e(t) = \pm e(t)i(t)$$

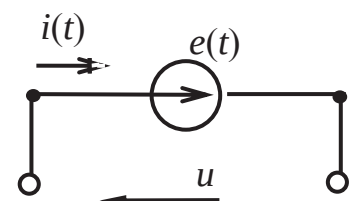


Рис.1.29

Знак “+” береться в разі збігу напрямків струму та ЕРС, знак “-” – якщо вони мають протилежні напрямки.

Для постійного струму $p_E = \pm EI$.

Миттєва потужність джерела СРС (рис. 1.30)

$$p_j(t) = \pm u_j(t) j(t).$$

Знак “+” береться в тому разі, коли напруга на зовнішніх затискачах джерела СРС направлена протилежно напрямку СРС, знак “-” – якщо вони співпадають.

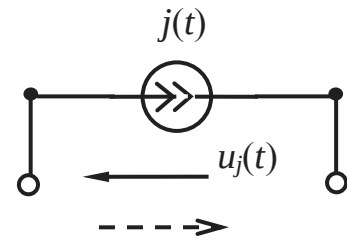


Рис. 1.30

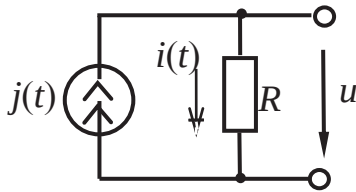


Рис. 1.31

У джерелі струму (рис. 1.31) напругу можна визначити як $Ri(t)$ і тому потужність джерела СРС

$$p_j(t) = \pm Ri(t) j(t).$$

Для постійного струму $p_J = \pm RIJ$.

• Баланс потужностей.

Миттєва потужність будь-якого елемента з додатним знаком характеризує швидкість споживання енергії цим елементом, а миттєва потужність з від’ємним знаком – швидкість віддачі енергії цим елементом.

Умову балансу миттєвих потужностей можна сформулювати таким чином:

сума миттєвих потужностей, які віддаються у коло всіма джерелами енергії, дорівнює сумі миттєвих потужностей, які споживаються усіма приймачами енергії

$$\sum p_{дж} = \sum p_{пр}.$$

Для постійного струму баланс потужностей у електричному колі має вигляд:

$$\sum P_{дж} = \sum P_{пр};$$

$$\sum_k E_k I_k + \sum_n U_n J_n = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + \dots$$

Це рівняння використовується для перевірки правильності розрахунку струмів у будь-якому електричному колі постійного струму.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Лекція 3

План лекції:

2.1. Метод еквівалентних перетворень.

2.2. Метод рівнянь Кірхгофа.

2.1. Метод еквівалентних перетворень.

Цей метод за рахунок зменшення кількості віток, вузлів та контурів дозволяє спростити схему електричного кола, струми і напруги в якій треба розрахувати.

Перетворення називаються **еквівалентними**, якщо режим (струми і напруги) у тій частині кола, в якій не проводились перетворення, не змінюється.

При розрахунку електричних кіл з одним джерелом енергії метод еквівалентних перетворень дозволяє обійтися без розв'язання системи рівнянь. Але слід розуміти, що чим більше ми спрощуємо схему для її розрахунку, тим більше прийдеться потім її розгортати назад.

- **Послідовне з'єднання елементів.**

Послідовне з'єднання опорів (рис. 2.1) можна замінити одним еквівалентним резистивним елементом, опір якого дорівнює сумі опорів послідовно з'єднаних елементів.



Рис. 2.1

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_k.$$

При послідовному з'єднанні резистивних елементів їх опори складаються.

При послідовному з'єднанні індуктивних елементів (рис. 2.2) складаються їх індуктивності.



Рис. 2.2

$$L_e = L_1 + L_2 + \dots + L_k.$$

При послідовному з'єднанні ємнісних елементів (рис. 2.3) величина, обернена еквівалентній ємності, дорівнює сумі обернених ємностей послідовно з'єднаних елементів.

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_k}.$$



Рис. 2.3

Послідовне з'єднання джерел ЕРС (рис. 2.4) можна замінити одним еквівалентним джерелом, ЕРС якого дорівнює алгебричній сумі послідовно з'єднаних ЕРС.

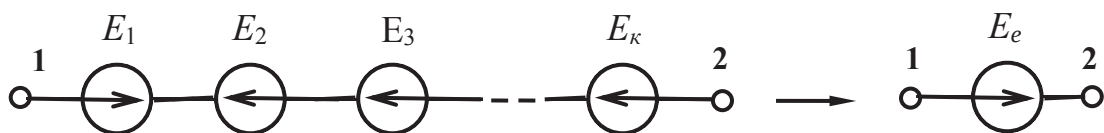


Рис. 2.4

$$E_e = E_1 - E_2 - E_3 + \dots - E_k.$$

Розглянемо, чи можна послідовно з'єднувати джерела СРС (рис.2.5).

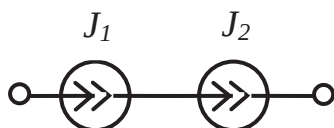


Рис. 2.5

Припустимо, що $J_1 = 1\text{A}$, а $J_2 = 3\text{A}$. Згідно з визначенням першого джерела СРС струм у вітці повинен дорівнювати 1 А, а другого – 3 А. Але в одній вітці протікає лише один струм, тому послідовне з'єднання СРС з різним значенням струму в рамках спрощеної моделі, яку ми побудували, не має сенсу

і не розглядається. Виняток складає послідовне з'єднання джерел СРС однакового напрямку з однаковим значенням J .

- **Паралельне з'єднання елементів.**

Паралельно з'єднаними називаються елементи, які підключені до однієї пари вузлів.

При паралельному з'єднанні резистивних елементів (рис. 2.6) величина, обернена еквівалентному опору, дорівнює сумі обернених опорів паралельно з'єднаних елементів.

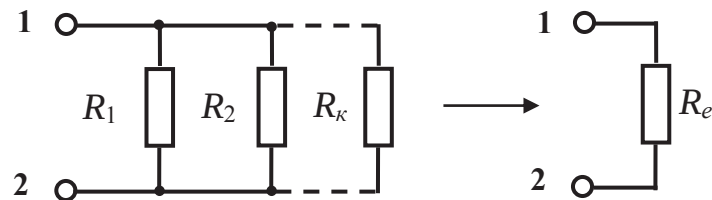


Рис. 2.6

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} \quad \text{чи} \quad G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_k .$$

При паралельному з'єднанні опорів складаються їх провідності. Окремий випадок: паралельне з'єднання двох опорів (рис. 2.7).

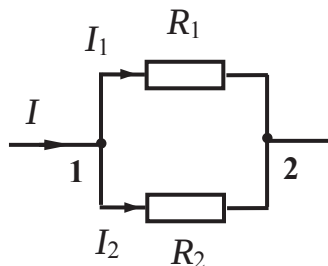


Рис. 2.7

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

При розрахунках дуже часто зустрічається така задача.

Певний струм I підходить до двох паралельно з'єднаних опорів R_1 та R_2 . Визначити струми I_1 та I_2 в опорах R_1 та R_2 .

Напруга між вузлами

$$U_{12} = IR_e = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Струм у першому опорі

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Таким чином струм в одному з опорів дорівнює струму I , помноженому на опір протилежної вітки і поділеній на суму опорів віток. Це твердження називають правилом розкиду або “чужого опору”. Згідно йому струм в опорі R_2

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

При паралельному з’єднанні індуктивних елементів (рис. 2.8) величина, обернена еквівалентній індуктивності, дорівнює сумі обернених індуктивностей паралельно з’єднаних елементів.

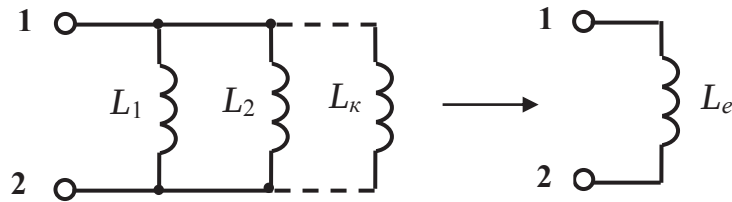


Рис. 2.8

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_k}.$$

При паралельному з’єднанні ємнісних елементів (рис. 2.9) їх ємності складаються.

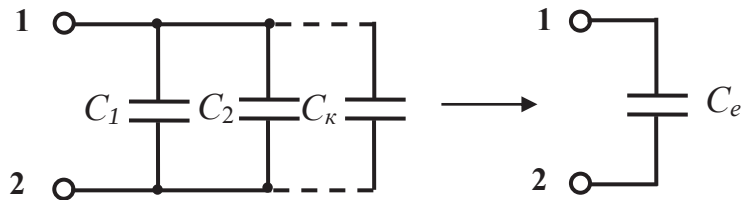


Рис. 2.9

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_k.$$

Розглянемо, чи можна з’єднувати паралельно джерела ЕРС (рис. 2.10).

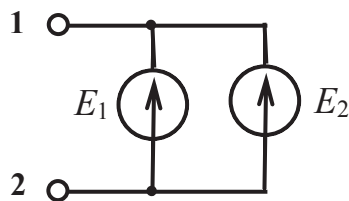


Рис. 2.10

Припустимо, що $E_1=1$ В, а $E_2=5$ В. Згідно з визначенням першого джерела ЕРС напруга U_{12} повинна дорівнювати 1 В, а другого - 5 В. Але між двома вузлами діє лише одна напруга, тому паралельне з’єднання джерел ЕРС з

різними значеннями ЕРС в рамках побудованої моделі не має сенсу і не розглядається.

Виняток складає паралельне з'єднання джерел ЕРС одного напрямку з однаковим значенням E .

Паралельне з'єднання джерел СРС (рис. 2.11) можна замінити одним еквівалентним джерелом, СРС якого дорівнює алгебричній сумі паралельно з'єднаних СРС. Напрямок еквівалентного джерела СРС береться довільним. Джерела, напрямки яких збігається з J_e , враховуються із знаком «+», якщо не збігається – із знаком «-».

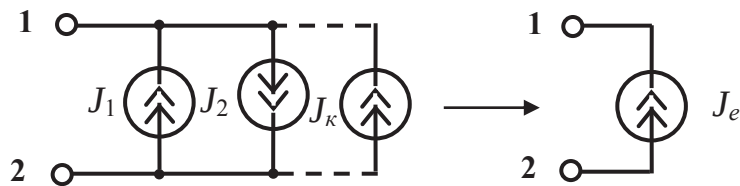


Рис. 2.11

$$J_e = J_1 - J_2 + \dots + J_k.$$

- **Взаємне еквівалентне перетворення трикутника та зірки опорів.**

На рис. 2.12 зображено з'єднання опорів зіркою, а на рис. 2.13 – трикутником.

До цього всі твердження про еквівалентні перетворення подавались у кінцевому вигляді без доказу. На прикладі перетворення трикутника опорів в зірку покажемо, як проводиться доказ таких тверджень.

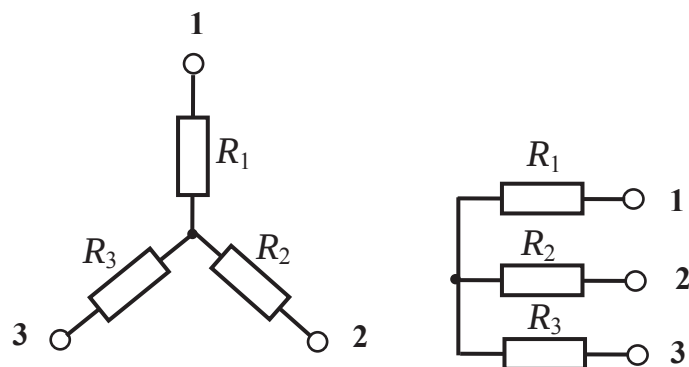


Рис. 2.12. З'єднання резистивних елементів зіркою (Λ)

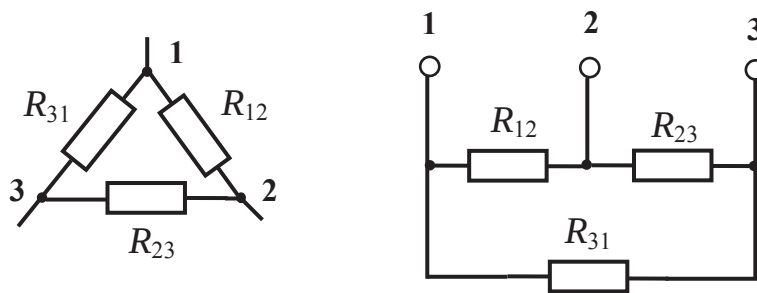


Рис. 2.13. З'єднання резистивних елементів трикутником (Δ)

На рис. 2.14 зображено схему з'єднання трьох опорів R_{12} , R_{23} , R_{31} – трикутником і пунктиром – опорів R_1 , R_2 , R_3 – зіркою. Перетворення буде еквівалентним тоді, коли при незмінних напругах U_{12} , U_{23} , U_{31} вхідні струми I_1 , I_2 , I_3 також залишаться незмінними.

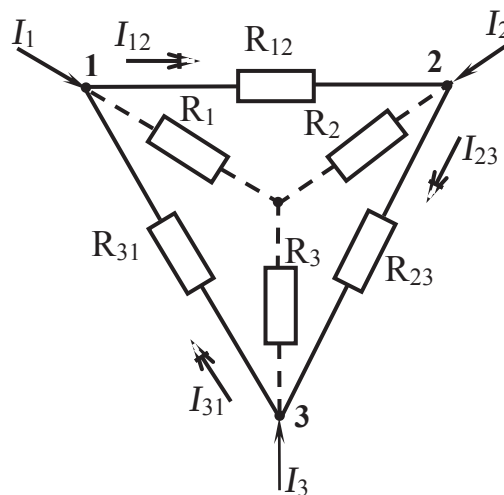


Рис. 2.14

Запишемо другий закон Кірхгофа для контуру 1-2-3:

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0. \quad (2.1)$$

Згідно першого закону Кірхгофа для вузлів 1 і 2 маємо:

$$I_1 + I_{31} - I_{12} = 0 \quad \text{чи інакше} \quad I_{31} = I_{12} - I_1, \quad (2.2)$$

$$I_2 + I_{12} - I_{23} = 0 \quad \text{чи інакше} \quad I_{23} = I_{12} + I_2. \quad (2.3)$$

Підставляючи струми I_{31} і I_{23} з (2.2) і (2.3) в рівняння (2.1) одержимо

$$I_{12} = \frac{R_{31}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напруга

$$U_{12} = I_{12} R_{12} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2. \quad (2.4)$$

Знайдемо цю же напругу U_{12} для з'єднання зіркою з другого закону Кірхгофа:

$$U_{12} + R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \quad \text{чи} \quad U_{12} = R_1 I_1 - R_2 I_2. \quad (2.5)$$

Порівнюючи вирази (2.4) і (2.5) для напруги U_{12} трикутника і зірки опорів, маємо

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

аналогічно

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.6)$$

Якщо розв'язати рівняння (2.6) відносно опорів трикутника, одержимо формули для перетворення з'єднання опорів зіркою з'єднанням у трикутник:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \\ R_{31} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) записані через провідності віток мають вигляд:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

- **Перенос джерел ЕРС і СРС.**

При розрахунках електричних кіл зустрічаються випадки, коли ділянка електричного кола містить вітку, яка складається тільки із джерела ЕРС (рис. 2.15,а).

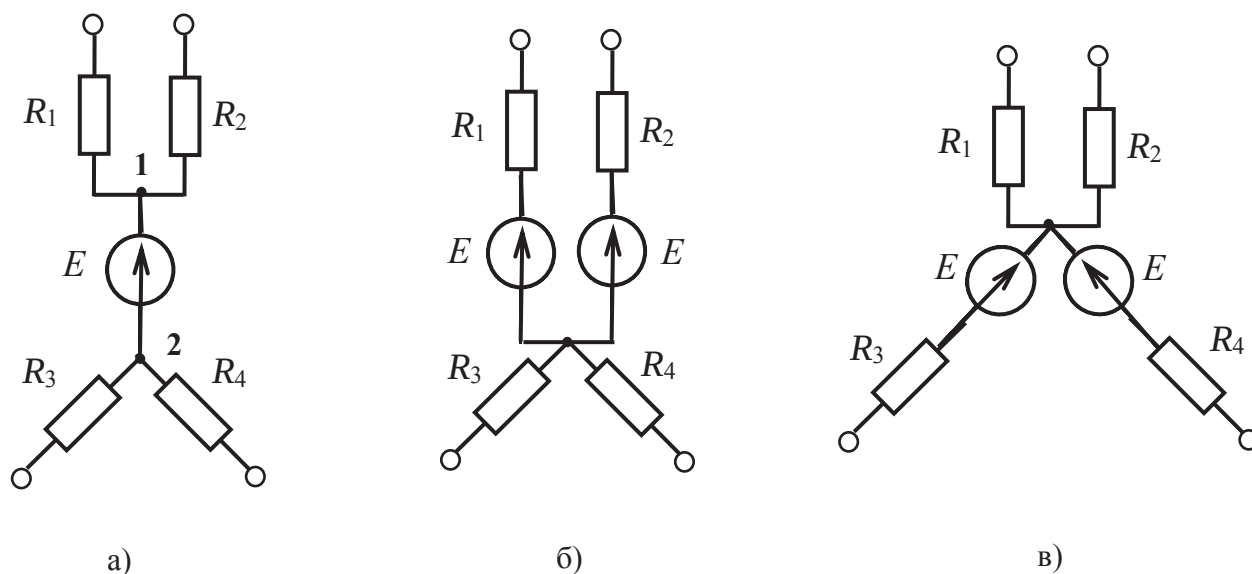


Рис. 2.15. Перенос джерела ЕРС

Легко показати, що перенос джерела ЕРС E за вузол (рис. 2.15, б чи в) не змінює системи рівнянь, складеної за законами Кірхгофа для даної ділянки електричного кола. Тому струми у зовнішніх виводах та напруги між ними для усіх трьох схем будуть однакові, що відповідає умові еквівалентності перетворень у електричних колах. При таких перетвореннях кількість вузлів зменшується на одиницю, а одержані джерела напруги, наприклад E , R_1 та E , R_2 , можна замінити еквівалентними джерелами струму.

В іншому випадку, коли джерело СРС J підключено до вузлів 1 і 3 (рис. 2.16, а), то його можна замінити двома джерелами СРС J , підключеними паралельно віткам з опорами R_1 та R_2 (рис. 2.16, б).

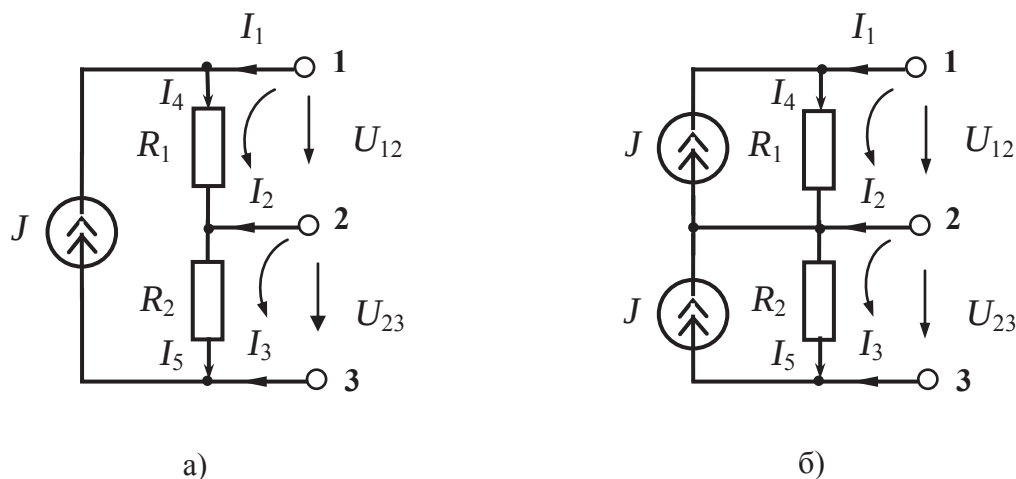


Рис. 2.16. Перенос джерела СРС

Як і в попередньому випадку еквівалентність даного перетворення ґрунтується на тому, що обидві схеми описуються однією системою рівнянь, складеної за законами Кірхгофа:

$$\begin{aligned}
I_1 + J - I_4 &= 0; \\
I_2 + I_4 - I_5 &= 0; \\
I_3 - J + I_5 &= 0; \\
R_1 I_4 - U_{12} &= 0; \\
R_2 I_5 - U_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

При такому перетворенні одержані джерела струму J , R_1 та J , R_2 можна замінити еквівалентними джерелами напруги.

2.2. Метод рівнянь Кірхгофа.

Розрахунок електричних кіл шляхом розв'язання системи рівнянь, складених за законами Кірхгофа, являє собою найбільш загальний метод аналізу електричних кіл.

Постановка задачі.

Електричне коло містить y вузлів та ν віток з невідомими струмами. Задані параметри всіх активних і пасивних елементів кола. Необхідно визначити струми у всіх вітках.

Методику розрахунку методом рівнянь Кірхгофа та його алгоритм розберемо на прикладі конкретної схеми (рис. 2.17), яка має три вузли ($y = 3$) і чотири вітки ($\nu = 4$) з невідомими струмами. Струми у вітках, в яких знаходяться джерела СРС J_1 та J_4 , згідно з визначенням джерел СРС відомі і дорівнюють відповідно J_1 та J_4 .

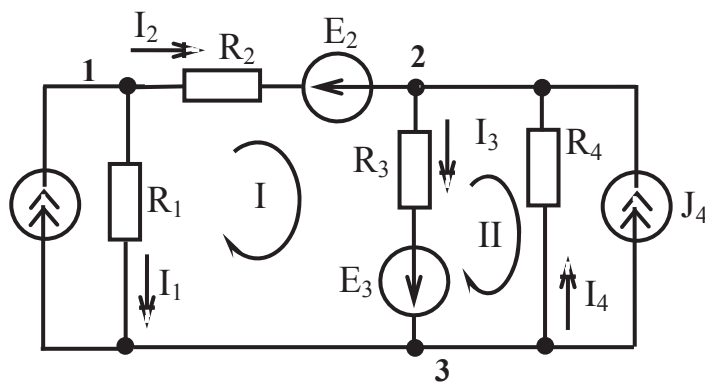


Рис. 2.17. Метод рівнянь Кірхгофа

Укажемо додатні напрямки струмів у вітках з невідомими струмами. Для визначення чотирьох струмів $I_1 - I_4$ треба скласти чотири рівняння за першим та другим законом Кірхгофа. Якщо число вузлів – y , то за першим законом Кірхгофа можна скласти лише $(y - 1)$ незалежне рівняння, тобто $3 - 1 = 2$, тому

що рівняння, складене для останнього вузла, можна одержати шляхом додавання рівнянь, складених для попередніх $(y - 1)$ вузлів.

Складемо рівняння за I законом Кірхгофа для першого і другого вузлів:

$$J_1 - I_1 - I_2 = 0;$$

$$I_2 - I_3 + I_4 + J_4 = 0.$$

Недостатні $v - (y - 1)$ рівняння, у даному випадку $4 - (3 - 1) = 2$, складаються за другим законом Кірхгофа. Слід відзначити, що саме таке і не на одне більше число незалежних рівнянь можна скласти за другим законом Кірхгофа. Для запису другого закону Кірхгофа треба вибрати незалежні контури, для яких рівняння, що записані за другим законом Кірхгофа, будуть незалежними.

Правила вибору незалежних контурів:

1. Число контурів повинно бути $v - (y - 1)$.
2. Кожний наступний контур повинен відрізнятися від попереднього принаймні однією новою віткою.
3. Вітки з джерелами СРС не повинні входити до вибраних контурів.
4. Бажано вибрати прості (внутрішні) контури.

Згідно з правилами вибираємо у нашому випадку два контури, довільно вказуємо напрямки їх обходу і записуємо для них другий закон Кірхгофа:

$$E_3 - E_2 = R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_2;$$

$$-E_3 = -R_3 I_3 - R_4 I_4.$$

Розв'язуючи систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими, одержимо струми $I_1 - I_4$.

• **Алгоритм розрахунку електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа.**

1. Визначаємо число вузлів y , число віток з невідомими струмами v та вказуємо додатні напрямки струмів у цих вітках.
2. Для $(y - 1)$ вузла складаємо рівняння за першим законом Кірхгофа.
3. Вибираємо $v - (y - 1)$ незалежний контур і складаємо для кожного з них рівняння за другим законом Кірхгофа. Напрямки обходу контурів – довільні.
4. Розв'язуючи систему рівнянь, визначаємо струми у вітках.
5. Складаємо рівняння балансу потужностей у колі і перевіряємо вірність розрахунків.

Метод рівнянь Кірхгофа можна використовувати для розрахунку як лінійних, так і нелінійних електричних кіл. Для випадку лінійних кіл коефіцієнти системи рівнянь є сталими величинами, для нелінійних – функціями струмів чи напруг.

Лекція 4

План лекції:

2.3. Метод контурних струмів.

2.4. Метод вузлових напруг.

2.3. Метод контурних струмів.

Цей метод дозволяє скоротити порядок системи до числа рівнянь, складених лише за другим законом Кірхгофа.

Постановка задачі: задана схема електричного кола і параметри елементів, причому джерела енергії задані у вигляді джерел напруги. Якщо схема має джерела струму, то їх потрібно замінити еквівалентними джерелами напруги. Необхідно визначити струми у всіх вітках.

Методику розрахунку та його алгоритм розглянемо на прикладі конкретної схеми (рис. 2.18).

Вибираємо незалежні контури так, як це робиться у методі рівнянь Кірхгофа, і вказуємо напрямки їх обходу.

Введемо у розгляд розрахункові (насправді таких струмів не має) так звані контурні струми. Будемо вважати, що у кожному контурі протікає свій контурний струм, напрямком якого збігається з напрямком обходу контуру.

За числом вибраних контурів запишемо у загальному вигляді контурні рівняння, вид яких треба просто запам'ятати:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K};$$

$$R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K}.$$

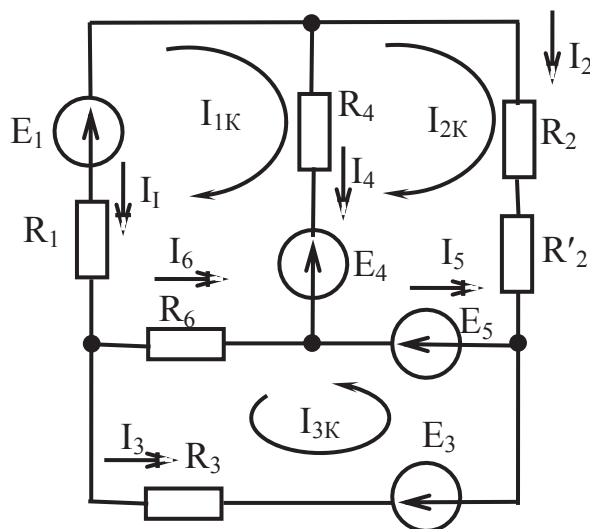


Рис. 2.18. Метод контурних струмів

В цих рівняннях I_{1K}, I_{2K}, I_{3K} – контурні струми.

R_{11} – власний опір першого контуру; дорівнює сумі опорів, які належать першому контуру. Для даної схеми

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_6.$$

R_{22} – власний опір другого контуру

$$R_{22} = R_2 + R'_2 + R_4.$$

R_{33} – власний опір третього контуру

$$R_{33} = R_3 + R_6.$$

$R_{12} = R_{21}$ – спільні опори між першим і другим контуром. Вони дорівнюють сумі опорів суміжної вітки першого і другого контуру, яка береться з додатним знаком, якщо напрямки контурних струмів у цій вітці збігаються, та з від'ємним, якщо вони протилежні.

Для даної схеми

$$R_{12} = R_{21} = -R_4.$$

Аналогічно

$$R_{13} = R_{31} = +R_6,$$

$$R_{23} = R_{32} = 0.$$

Якщо контури не мають суміжних віток, то взаємний опір між ними дорівнює нулеві.

E_{1K} – контурна ЕРС першого контуру. Вона дорівнює алгебричній сумі ЕРС, які входять до першого контуру. Електрорушійна сила береться з додатним знаком, якщо її напрямок збігається з напрямком контурного струму, й з від'ємним, якщо вони протилежні.

Для даної схеми

$$E_{1K} = E_1 - E_4.$$

Аналогічно

$$E_{2K} = E_4 + E_5,$$

$$E_{3K} = -E_3 + E_5.$$

Таким чином визначені всі коефіцієнти, які входять до системи контурних рівнянь.

Розв'язуючи систему відносно контурних струмів, визначаємо I_{1K}, I_{2K}, I_{3K} .

Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх через контурні струми, враховуючи збіг напрямків струмів у вітках і контурних струмів в них.

У вітці зі струмом I_1 тече лише перший контурний струм I_{1K} , напрямок якого не збігається зі струмом I_1 , тому $I_1 = -I_{1K}$.

Аналогічно

$$I_2 = I_{2K}, \quad I_3 = I_{3K}.$$

У вітці зі струмом I_4 протікають два контурних струми I_{1K} та I_{2K} . Напрямок першого збігається з напрямком струму I_4 , а другого - не збігається. Тому струм I_4 визначається як різниця контурних струмів

$$I_4 = I_{1K} - I_{2K}.$$

Аналогічно

$$I_5 = -I_{2K} - I_{3K},$$

$$I_6 = -I_{1K} - I_{3K}.$$

Таким чином знайдено струми у всіх вітках даної схеми. Контурні рівняння можна записати у матричній формі

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1K} \\ I_{2K} \\ I_{3K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \\ E_{3K} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ - матриця опорів кола,

$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{1K} \\ I_{2K} \\ I_{3K} \end{pmatrix}$ - матриця контурних струмів,

$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \\ E_{3K} \end{pmatrix}$ - матриця контурних ЕРС.

Тоді у скороченому вигляді контурні рівняння у матричній формі матимуть вигляд

$$\mathbf{RI} = \mathbf{E}.$$

Розв'язок даного матричного рівняння має вигляд

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E},$$

де $\mathbf{R}^{-1}$ - матриця, що є оберненою матриці опорів кола.

Матричний запис полегшує аналітичні дослідження електричних кіл за рахунок скорочення записів. Але він не приводить до скорочення розрахунків.

- **Алгоритм розрахунку електричних кіл методом контурних струмів.**

Постановка задачі: задана схема електричного кола і параметри його елементів. Всі джерела енергії задані у вигляді джерел напруги. Якщо у схемі кола є джерела струму, то їх треба перетворити на еквівалентні джерела напруги. Треба визначити струми у всіх вітках.

1. Вибираємо необхідну кількість $\nu - 1$ незалежних контурів та вказуємо довільно напрямки контурних струмів.
2. За кількістю контурних струмів записуємо у загальному вигляді контурні рівняння.
3. За схемою кола визначаємо власні і спільні опори та контурні ЕРС.
4. Розв'язуючи систему контурних рівнянь визначаємо контурні струми.
5. Довільно вказуємо додатні напрямки струмів в вітках та визначаємо їх через контурні струми.
6. Складаємо рівняння балансу потужностей кола і перевіряємо вірність розрахунків.

Якщо початкова схема містила джерела струму, то треба повернутися до неї і визначати струми, яких бракує.

Приклад. Визначити струми у вітках електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.19. У цій схемі задано:

$$R_1 = 1\text{Ом}, R_2 = 2\text{Ом}, R_3 = 5\text{Ом}, E_1 = 2\text{В}, E_2 = 4\text{В}, E_3 = 6\text{В}.$$

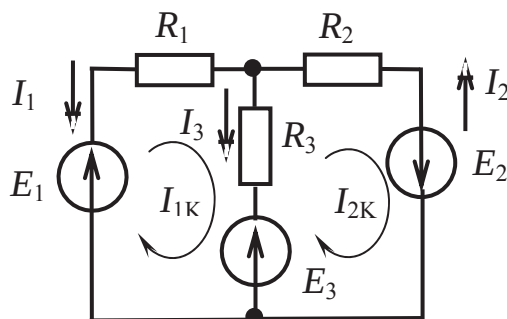


Рис. 2.19

Розв'язок.

1. Вибираємо два внутрішніх контури і вказуємо напрямки контурних струмів.
2. Записуємо контурні рівняння у загальному вигляді:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} = E_{2K}.$$

3. Визначаємо коефіцієнти системи:

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 = 7 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -5 \text{ Ом};$$

$$E_{1K} = E_1 - E_3 = 2 - 6 = -4 \text{ В};$$

$$E_{2K} = E_3 + E_2 = 6 + 4 = 10 \text{ В}.$$

4. Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6I_{1K} - 5I_{2K} = -4; \\ -5I_{1K} + 7I_{2K} = 10 \end{cases}$$

і визначаємо контурні струми:

$$I_{1K} = \frac{22}{17} = 1,294 \text{ А}; \quad I_{2K} = \frac{40}{17} = 2,353 \text{ А}.$$

5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх за контурними струмами:

$$I_1 = -I_{1K} = -1,294 \text{ А};$$

$$I_2 = -I_{2K} = -2,353 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{1K} - I_{2K} = -1,059 \text{ А}.$$

6. Складаємо рівняння балансу потужностей кола:

$$-E_1 I_1 - E_2 I_2 - E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 ;$$

$$P_E = 18,35 \text{ Вт}; \quad P_R = 18,35 \text{ Вт}.$$

Рівняння балансу потужностей виконується, що свідчить про вірність розрахунків.

Якщо електричне коло має вітки з джерелами СРС (без паралельних віток з опорами), які не можна замінити еквівалентними джерелами напруги, то таке коло також можна розрахувати методом контурних струмів. Для цього контури вибираються таким чином, щоб вітка із джерелом СРС входила лише в один контур. Тоді контурний струм у цьому контурі вважається відомим і таким, що дорівнює значенню СРС J . У такому разі кількість невідомих контурних струмів скорочується на число заданих струмів.

Приклад. Визначити струми у вітках електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.20. У цій схемі задано:

$$R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 1 \text{ Ом}, R_3 = 4 \text{ Ом}, R_4 = 5 \text{ Ом}, R_5 = 4 \text{ Ом},$$

$$E_1 = 4 \text{ В}, E_4 = 2 \text{ В}, E_6 = 8 \text{ В}, J_5 = 1 \text{ А}.$$

Розв'язок.

1. Вибираємо контури і вказуємо напрямки контурних струмів (див. рис. 2.20).
2. Записуємо контурні рівняння:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K};$$

$$R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K}.$$

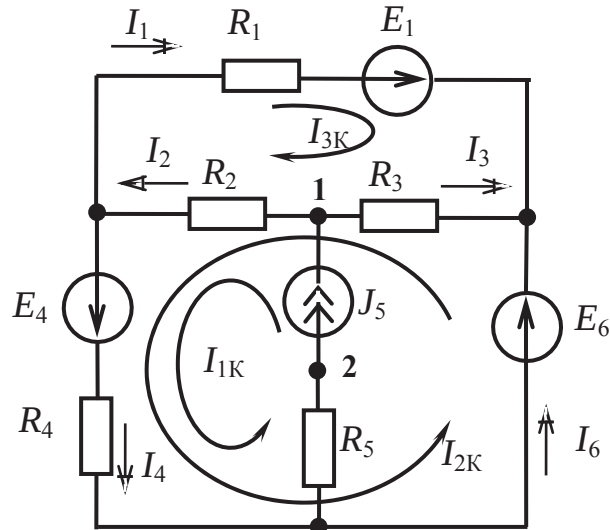


Рис. 2.20

Вважаємо, що перший контурний струм $I_{1K} = J_5 = 1A$. Залишаються лише два невідомих контурних струми, для визначення яких достатньо двох рівнянь.

У першому рівнянні власний опір R_{11} буде невизначеним, тому що опір п'ятої вітки нескінченно великий (внутрішній опір джерела СРС $R_J = \infty$). Вилучаємо перше рівняння і переписуємо систему у вигляді:

$$R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K} - R_{21}J_5;$$

$$R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K} - R_{31}J_5.$$

3. Визначаємо коефіцієнти системи

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_1 + R_2 + R_3 = 8 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = R_2 + R_3 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{21} = R_2 + R_4 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{31} = R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$E_{2K} = E_4 + E_6 = 10 \text{ В};$$

$$E_{3K} = E_1 = 4 \text{ В}.$$

Система приймає вигляд:

$$10 I_{2K} + 5 I_{3K} = 4;$$

$$5 I_{2K} + 8 I_{3K} = 3.$$

4. Розв'язуючи систему визначаємо контурні струми:

$$I_{2K} = \frac{34}{110} \text{ А};$$

$$I_{3K} = \frac{2}{11} \text{ А}.$$

5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх за контурними струмами:

$$I_1 = I_{3K} = \frac{2}{11} \text{ А};$$

$$I_2 = I_{1K} + I_{2K} + I_{3K} = 1 + \frac{34}{110} + \frac{2}{11} = \frac{164}{110} \text{ А};$$

$$I_3 = -I_{3K} - I_{2K} = -\frac{34}{110} - \frac{2}{11} = -\frac{54}{110} \text{ А};$$

$$I_4 = I_{1K} + I_{2K} = 1 + \frac{34}{110} = \frac{144}{110} \text{ А};$$

$$I_6 = I_{2K} = \frac{34}{110} \text{ А}.$$

6. Для перевірки розв'язку записуємо рівняння балансу потужностей у колі

$$E_1 I_1 + E_4 I_4 + E_6 I_6 + U_{12} J_5 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 J_5^2.$$

Напругу U_{12} визначаємо з другого закону Кірхгофа для першого контуру

$$E_4 = R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 J_5 - U_{12},$$

звідки

$$U_{12} = \frac{1104}{110} \text{ В}.$$

Підставляючи у рівняння балансу потужностей чисельні значення, одержимо:

$$P_{дж} = 4 \cdot \frac{2}{11} + 2 \cdot \frac{144}{110} + 8 \cdot \frac{34}{110} + \frac{1104}{110} \cdot 1 = \frac{1744}{110} \text{ Вт};$$

$$P_{пр.} = 3 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{164}{110}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{54}{110}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{144}{110}\right)^2 + 4 \cdot 1 = \frac{1744}{110} \text{ Вт}.$$

Тобто баланс виконується.

Обґрунтування методу контурних струмів дамо на прикладі кола, схема якого подана на рис. 2.21. Вибираємо $\nu - (y - 1)$ контур, довільно вказуємо напрямки контурних струмів (напрямки обходу контурів) і записуємо для

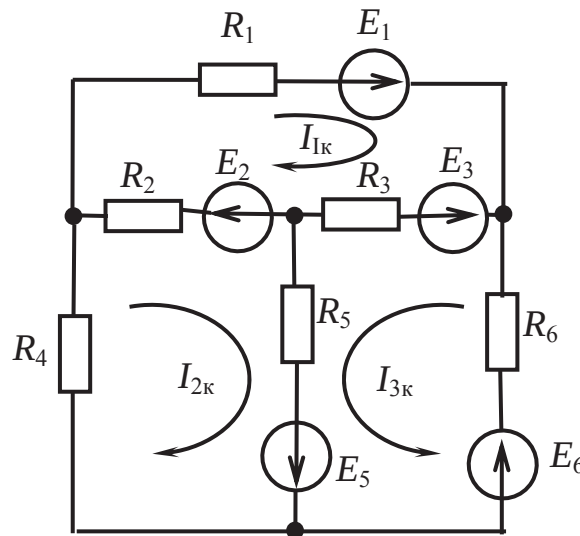


Рис. 2.21

вибраних контурів другий закон Кірхгофа, виражаючи струми у вітках через контурні струми:

$$R_1 I_{1K} + R_3 (I_{1K} + I_{3K}) + R_2 (I_{1K} - I_{2K}) = E_1 - E_3 + E_2;$$

$$R_4 I_{2K} + R_2 (I_{2K} - I_{1K}) + R_5 (I_{2K} + I_{3K}) = E_5 - E_2;$$

$$R_6 I_{3K} + R_3 (I_{3K} + I_{1K}) + R_5 (I_{3K} + I_{2K}) = E_5 + E_6 - E_3.$$

Об'єднуючи доданки з однаковими контурними струмами, одержуємо

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_{1K} - R_2 I_{2K} + R_3 I_{3K} = E_1 - E_3 + E_2;$$

$$-R_2 I_{1K} + (R_4 + R_2 + R_5) I_{2K} + R_5 I_{3K} = E_5 - E_2;$$

$$R_3 I_{1K} + R_5 I_{2K} + (R_3 + R_5 + R_6) I_{3K} = E_5 + E_6 - E_3.$$

Введемо позначення:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3,$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_2,$$

$$E_{1K} = E_1 + E_2 - E_3,$$

$$R_{22} = R_2 + R_4 + R_5,$$

$$R_{13} = R_{31} = R_3,$$

$$E_{2K} = E_5 - E_2,$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_6,$$

$$R_{23} = R_{32} = R_5,$$

$$E_{3K} = E_5 + E_6 - E_3.$$

Таким чином система рівнянь набуває стандартного вигляду рівнянь методу контурних струмів, розв'язання якої розглянуто раніше.

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K};$$

$$R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K}.$$

2.4. Метод вузлових напруг.

Цей метод дозволяє скоротити порядок системи до числа рівнянь, складених лише за першим законом Кірхгофа.

Постановка задачі: задана схема електричного кола і параметри елементів, причому джерела енергії задані у вигляді джерел струму. Якщо схема має джерела напруги, то їх потрібно замінити еквівалентними джерелами струму. Необхідно визначити струми у всіх вітках.

Методику розрахунку та його алгоритм розглянемо на прикладі конкретної схеми (рис. 2.22).

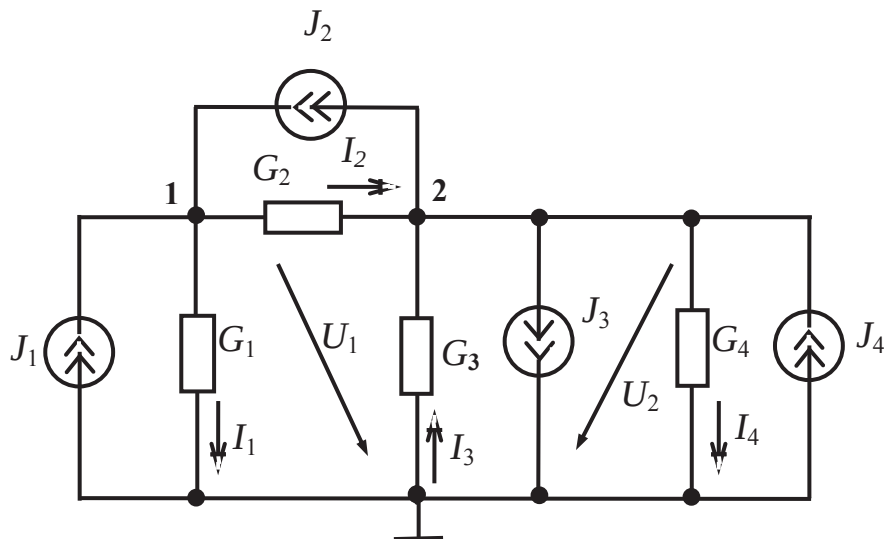


Рис. 2.22. Метод вузлових напруг

Вибираємо базовий вузол (позначається знаком « $\perp$ ») і нумеруємо решту вузлів. За базовий зручно прийняти вузол, де збігаються більш усього віток. Напругу між першим вузлом і базовим позначимо як U_1 і назвемо вузловою напругою першого вузла. Аналогічно напругу між другим вузлом і базовим позначимо U_2 – вузлова напруга другого вузла. Вузлові напруги вважаються направленими від відповідного вузла до базового (додатні напрямки).

За числом пронумерованих вузлів (у даному випадку 2) запишемо у загальному вигляді вузлові рівняння, вид яких треба запам'ятати.

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1B};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2B}.$$

В цих рівняннях U_1 і U_2 – вузлові напруги, G_{11} – власна провідність першого вузла. Вона дорівнює сумі провідностей віток, які підходять до першого вузла:

$$G_{11} = G_1 + G_2.$$

G_{22} – власна провідність другого вузла. Вона дорівнює сумі провідностей віток, які підходять до другого вузла:

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_4.$$

G_{12} , G_{21} – спільні провідності між першим і другим вузлом. Вони дорівнюють сумі провідностей віток, які включені між першим і другим вузлом. Спільні провідності завжди беруться із від’ємним знаком.

$$G_{12} = G_{21} = -G_2.$$

Якщо у електричному колі нема віток, що з’єднують відповідні вузли, то спільна провідність цих вузлів дорівнює нулеві.

J_{1B} – вузлова СРС першого вузла. Дорівнює алгебричній сумі СРС, які підходять до першого вузла. Струморушійна сила береться з додатним знаком, якщо вона направлена до відповідного вузла, і з від’ємним - якщо від вузла.

Для даного кола

$$J_{1B} = J_1 + J_2, \quad J_{2B} = -J_2 - J_3 + J_4.$$

Таким чином визначені всі коефіцієнти, які входять до системи вузлових рівнянь.

Розв’язуючи систему відносно вузлових напруг, визначаємо U_1 і U_2 .

Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх за законом Ома через вузлові напруги. Якщо додатні напрямки вузлової напруги і струму в опорі збігаються, струм береться зі знаком “+”, якщо не збігаються - зі знаком “-”.

$$I_1 = G_1 U_1, \quad I_3 = -G_3 U_2, \quad I_4 = G_4 U_2.$$

Для визначення струму I_2 спочатку знайдемо напругу U_{12} на провідності G_2 . Додатний напрямок напруги U_{12} - від першого вузла до другого.

$$U_{12} = U_1 - U_2.$$

Тоді струм

$$I_2 = G_2 U_{12} = G_2 (U_1 - U_2).$$

Таким чином знайдено струми у всіх вітках даної схеми.

Вузлові рівняння можна записати у матричній формі.

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1B} \\ J_{2B} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ - матриця провідностей кола;

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ - матриця вузлових напруг;

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{1B} \\ J_{2B} \end{pmatrix} - \text{матриця вузлових СРС.}$$

Тоді в матричній формі вузлові рівняння матимуть вигляд:

$$\mathbf{GU} = \mathbf{J}.$$

Розв'язання даного матричного рівняння має вигляд

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{J},$$

де $\mathbf{G}^{-1}$ – матриця, що є оберненою матриці провідностей кола.

- **Алгоритм розрахунку електричних кіл методом вузлових напруг.**

Постановка задачі: задана схема електричного кола і параметри його елементів. Всі джерела енергії задані у вигляді джерел струму. Якщо у схемі є джерела напруги, то їх треба перетворити на еквівалентні джерела струму. Треба визначити струми у всіх вітках.

1. Вибираємо базовий вузол і нумеруємо решту вузлів.
2. За кількістю пронумерованих вузлів записуємо у загальному вигляді вузлові рівняння.
3. За схемою кола визначаємо власні і взаємні провідності та вузлові СРС.
4. Розв'язуючи систему рівнянь, визначаємо вузлові напруги.
5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках та визначаємо їх за законом Ома через вузлові напруги.
6. Складаємо рівняння балансу потужностей кола і перевіряємо вірність розрахунків.

Якщо початкова схема містила джерела напруги, то треба повернутися до неї і визначити струми, яких бракує.

Примітка.

Метод вузлових напруг має переваги (за порядком систем рівнянь) над методом контурних струмів у випадку, коли виконується співвідношення

$$y - 1 < v - (y - 1).$$

У протилежному випадку переваги має метод контурних струмів.

Приклад. Визначити струми у вітках електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.23. У цій схемі задано:

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0,1 \text{ См}, J_1 = 2 \text{ А}, J_3 = 6 \text{ А}.$$

Розв'язок.

1. Вибираємо базовий вузол і нумеруємо решту вузлів.
2. Записуємо вузлові рівняння за кількістю пронумерованих вузлів:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1B};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2B}.$$

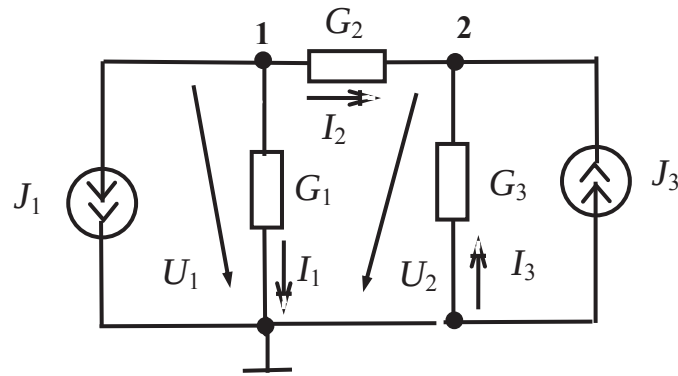


Рис. 2.23

3. Визначаємо коефіцієнти системи:

$$G_{11} = G_1 + G_2 = 0,2 \text{ См}; \quad G_{22} = G_2 + G_3 = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_2 = -0,1 \text{ См};$$

$$J_{1B} = -J_1 = -2 \text{ А}, \quad J_{2B} = J_3 = 6 \text{ А}.$$

4. Розв'язуємо систему рівнянь:

$$0,2U_1 - 0,1U_2 = -2;$$

$$-0,1U_1 + 0,2U_2 = 6,$$

і визначаємо вузлові напруги

$$U_1 = \frac{20}{3} \text{ В}, \quad U_2 = \frac{100}{3} \text{ В}.$$

5. Вказуємо додатні напрямки струмів і визначаємо їх за законом Ома.

Напрямок вузлової напруги U_1 збігається з додатним напрямком струму I_1 , тому добуток $G_1 U_1$ буде мати додатний знак

$$I_1 = G_1 U_1 = 0,1 \cdot \frac{20}{3} = \frac{2}{3} \text{ А}.$$

Напрямок струму I_3 протилежний напрямку вузлової напруги U_2 , тому добуток буде мати від'ємний знак:

$$I_3 = -G_3 U_2 = -0,1 \cdot \frac{100}{3} = -\frac{10}{3} \text{ А}.$$

Напруга між вузлами 1 і 2 $U_{12} = U_1 - U_2$ має напрямок, який збігається з напрямком струму I_2 , тому

$$I_2 = G_2 U_{12} = G_2 (U_1 - U_2) = 0,1 \cdot \left(\frac{20}{3} - \frac{100}{3} \right) = -\frac{8}{3} \text{ А}.$$

6. Складаємо рівняння балансу потужностей у колі

$$-I_1 R_1 J_1 - I_3 R_3 J_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2.$$

Підставляючи числові значення одержуємо :

$$P_{дж.} = -\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 2 - \left(-\frac{10}{3} \cdot 10 \cdot 6 \right) = \frac{560}{3} \text{ Вт},$$

$$P_{пр.} = 10 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 10 \cdot \left(-\frac{8}{3} \right)^2 + 10 \cdot \left(-\frac{10}{3} \right)^2 = \frac{560}{3} \text{ Вт}.$$

Баланс потужностей виконується, тобто розрахунок струмів у колі виконано вірно.

Якщо електричне коло має вітку з джерелом ЕРС без послідовно з'єднаного опору, яке не можна замінити еквівалентним джерелом струму, то таке коло також можна розрахувати методом вузлових напруг. Для цього один з вузлів, між якими знаходиться джерело ЕРС, приймається за базовий. Тоді вузлова напруга другого вузла буде відома і дорівнювати значенню ЕРС з відповідним знаком. У такому разі кількість невідомих вузлових напруг скорочується на одиницю.

Приклад. Визначити струми у вітках електричного кола, схема якого зображена на рис. 2.24. Параметри елементів задані :

$$E_2 = 5 \text{ В}, \quad J_1 = 1 \text{ А}, \quad J_3 = 2 \text{ А},$$

$$G_1 = 0,1 \text{ См}, \quad G_2 = 0,2 \text{ См}, \quad G_3 = 0,4 \text{ См}.$$

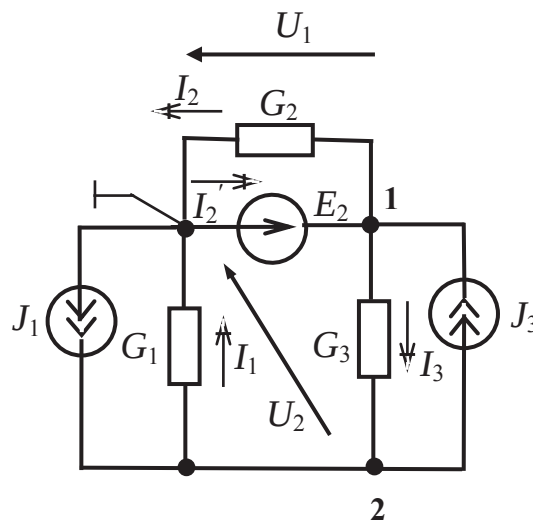


Рис. 2.24

Розв'язок.

1. За базовий вибираємо вузол, до якого підключено джерело ЕРС E_2 , а інші вузли нумеруємо.

2. Записуємо вузлові рівняння:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1B};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2B}.$$

Вітка з ЕРС E_2 має нескінчену провідність, G_{11} - не визначена і тому перше рівняння має невизначений коефіцієнт. Але перше рівняння і не потрібно, тому що вузлова напруга першого вузла відома:

$$U_1 = E_1 = 5 \text{ В.}$$

3. Визначаємо коефіцієнти другого рівняння:

$$G_{21} = -G_3 = -0,4 \text{ См}; \quad G_{22} = G_1 + G_3 = 0,5 \text{ См};$$

$$J_{2В} = J_1 - J_3 = 1 - 2 = -1 \text{ А.}$$

4. Після підстановки значень маємо

$$-0,4 \cdot 5 + 0,5 \cdot U_2 = -1, \quad \text{звідки} \quad U_2 = 2 \text{ В.}$$

5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх за вузловими напругами:

$$I_1 = G_1 \cdot U_1 = 0,1 \cdot 2 = 0,2 \text{ А};$$

$$I_3 = G_3(U_1 - U_2) = 0,4(5 - 2) = 1,2 \text{ А};$$

$$I_2 = G_2 U_1 = 0,2 \cdot 5 = 1 \text{ А.}$$

Обґрунтування методу вузлових напруг дамо на прикладі кола, схема якого подана на рис. 2.25.

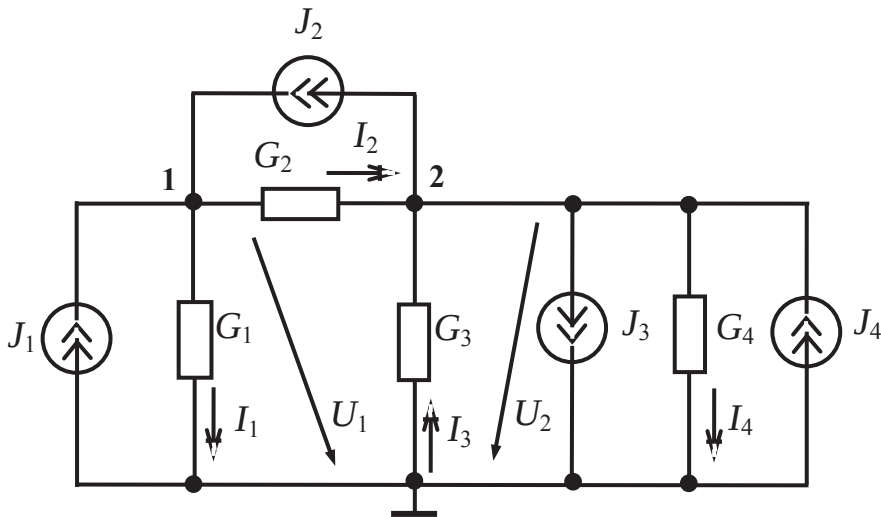


Рис. 2.25. Обґрунтування методу вузлових напруг

Вибираємо базовий вузол і для решти вузлів 1 і 2 записуємо І закон Кірхгофа у вигляді

$$(1) \quad I_1 + I_2 = J_1 + J_2;$$

$$(2) \quad -I_2 - I_3 + I_4 = J_4 - J_2 - J_3.$$

Виражаємо струми у вітках через вузлові напруги:

$$I_1 = G_1 U_1; \quad I_2 = G_2 (U_1 - U_2); \quad I_3 = -G_3 U_2; \quad I_4 = G_4 U_2.$$

Тоді рівняння за І законом Кірхгофа набувають вигляду:

$$G_1 U_1 + G_2 U_1 - G_2 U_2 = J_1 + J_2;$$

$$-G_2 U_1 + G_2 U_2 + G_3 U_2 + G_4 U_2 = J_4 - J_2 - J_3.$$

Після групування доданків з однаковими вузловими напругами одержимо:

$$(G_1 + G_2)U_1 - G_2U_2 = J_1 + J_2;$$

$$-G_2U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 = J_4 - J_2 - J_3.$$

Введемо позначення:

$$G_{11} = G_1 + G_2; \quad G_{12} = G_{21} = -G_2; \quad G_{22} = G_2 + G_3 + G_4;$$

$$J_{1B} = J_1 + J_2; \quad J_{2B} = J_4 - J_2 - J_3.$$

Перепишемо систему:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1B};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2B}.$$

Таким чином система рівнянь набуває стандартного вигляду рівнянь методу вузлових напруг, розв'язання якої розглянуто раніше.

Лекція 5

План лекції:

2.5. Принцип взаємності.

2.6. Принцип накладання (суперпозиції).

2.7. Двополюсники. Теореми про активний двополюсник.

2.5. Принцип взаємності.

Цей принцип виконується тільки для лінійних електричних кіл з одним джерелом енергії і полягає ось у чому.

Якщо ЕРС, яка діє у першій умовній вітці, викликає у другій вітці струм I , то ця же ЕРС, якщо її перенести у другу умовну вітку, викличе у першій умовній вітці такий же струм I .

Щоб довести цей принцип, звернемося до схеми електричного кола на рис. 2.26.

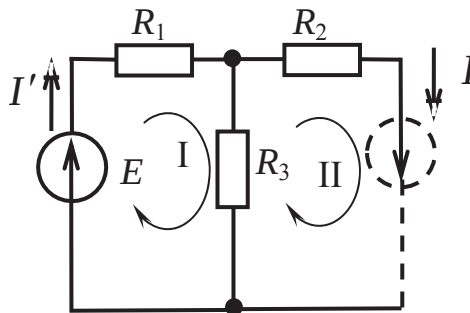


Рис. 2.26. Принцип взаємності

Визначимо струм I у другій вітці, потім перенесемо джерело ЕРС у другу вітку і направимо його за струмом. Визначимо струм I' у першій умовній вітці і, якщо вони збігаються, то наше твердження вірне.

Задачу будемо розв'язувати методом контурних струмів. Розв'язок матричного рівняння другого порядку має вигляд :

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix},$$

де Δ - визначник матриці опорів кола .

Контурний струм I_{2K} співпадає зі струмом I у другій вітці

$$I = I_{2K} = -R_{21} \frac{E}{\Delta} + R_{11} \frac{0}{\Delta} = -R_{21} \frac{E}{\Delta} .$$

Якщо перенести ЕРС у другу умовну вітку, то струм у першій вітці можна визначити так само

$$I = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} .$$

Тоді

$$I' = I_{1K} = -R_{22} \cdot \frac{0}{\Delta} - R_{12} \cdot \frac{E}{\Delta} = -R_{12} \frac{E}{\Delta} .$$

Оскільки $R_{12} = R_{21}$, то $I' = I$, що і треба було довести.

Принцип взаємності використовується у тих випадках, коли перенос джерела ЕРС в іншу вітку електричного кола значно полегшує розрахунок кола.

2.6. Принцип накладання (суперпозиції).

Принцип накладання дійсний для струмів і напруг лінійних електричних кіл і полягає у наступному.

Струм (напруга) у будь якій вітці електричного кола дорівнює алгебричній сумі струмів (напруг) у цій вітці, викликаних кожним джерелом енергії окремо.

Для обґрунтування цього положення розглянемо двоконтурну схему з трьома джерелами ЕРС (рис. 2.27).

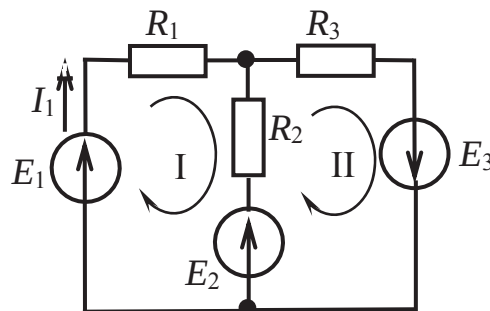


Рис. 2.27. Принцип накладання

Визначимо, наприклад, струм у першій вітці, скориставшись методом контурних струмів.

Розв'язок матричного рівняння другого порядку має вигляд

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \end{pmatrix},$$

де $E_{1K} = E_1 - E_2$, $E_{2K} = E_2 + E_3$.

Струм у першій вітці

$$\begin{aligned} I_1 = I_{1K} &= \frac{1}{\Delta} (E_{1K} R_{22} - E_{2K} R_{12}) = \frac{1}{\Delta} E_1 R_{22} - \frac{1}{\Delta} E_2 R_{22} - \frac{1}{\Delta} E_2 R_{12} - \frac{1}{\Delta} E_3 R_{12} = \\ &= \frac{1}{\Delta} R_{22} E_1 - \frac{1}{\Delta} (R_{22} + R_{12}) E_2 - \frac{1}{\Delta} R_{12} E_3. \end{aligned}$$

Таким чином, струм у першій вітці складається з трьох доданків. Перший доданок зумовлений ЕРС E_1 , другий $-E_2$, третій $-E_3$. Пропустимо, що друга і третя ЕРС відсутні, тобто $E_2=0$ та $E_3=0$. Тоді струм I_1 визначається джерелом E_1 . Якщо відсутні E_1 та E_3 , то струм I_1 визначається лише джерелом E_2 , якщо відсутні E_1 та E_2 , то - тільки E_3 .

Звідки випливає, що струм першої вітки визначається сумою струмів, зумовлених дією кожної ЕРС окремо. Якщо ввести такі позначення

$$I_1' = \frac{1}{\Delta} R_{22} E_1, \quad I_1'' = -\frac{1}{\Delta} (R_{22} + R_{12}) E_2, \quad I_1''' = -\frac{1}{\Delta} R_{12} E_3$$

і назвати ці струми частковими струмами, то принцип накладання можна сформулювати таким чином:

струм у будь-якій вітці електричного кола дорівнює алгебричній сумі часткових струмів, тобто

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

Цілком аналогічно можна довести це твердження і для струмів у інших двох вітках.

При розрахунку часткових струмів від кожного джерела окремо решта джерел вважаються такими, що дорівнюють нулеві. При цьому джерела ЕРС переколючуються, а джерела СРС – відключаються.

Приклад. За методом накладання визначити струми у вітках електричного кола, схема якого зображення на рис. 2.28, а.

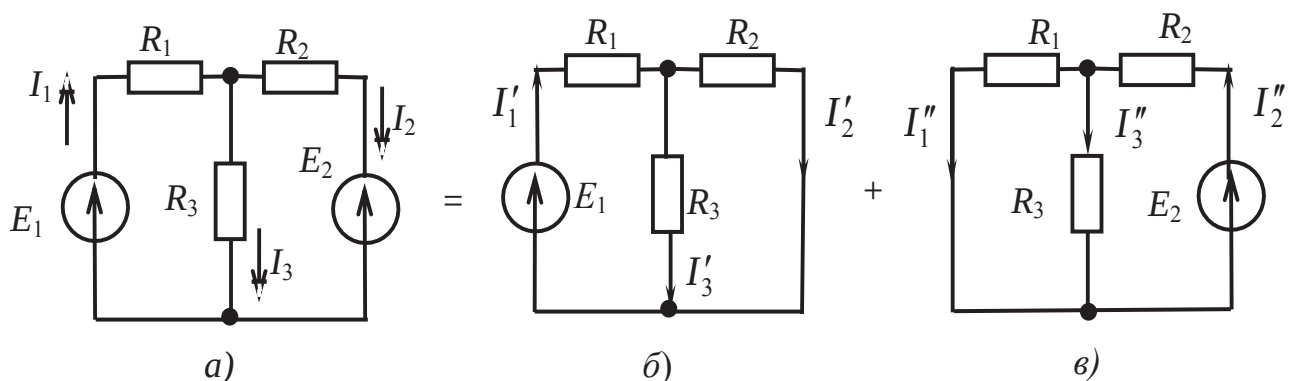


Рис. 2.28

Розв'язок.

Розбиваємо повну схему на дві часткових (за кількістю джерел) (рис. 2.28, б та 2.28, в). У часткових схемах вказуємо дійсні напрямки струмів. Це можна легко зробити, оскільки часткові схеми містять лише по одному джерелу енергії. Визначаємо струми у першій частковій схемі (рис. 2.28, б):

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}}, \quad I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

де $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3},$

та у другій (рис. 2.28, в):

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + R_{13}}, \quad I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3},$$

де $R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}.$

Вказуємо додатні напрямки струмів у початковій схемі і визначаємо їх згідно принципу накладання як алгебричну суму часткових струмів

$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = I_2' - I_2'', \quad I_3 = I_3' + I_3''.$$

Принцип накладання широко використовується для розрахунку електричних кіл негармонічного періодичного струму, в яких діють гармонічні джерела різної частоти. Цей принцип покладено в основу таких спектральних методів аналізу проходження сигналу через лінійні електричні кола, як частотний, часовий та операційний.

2.7. Двополюсники. Теореми про активний двополюсник.

Електричне коло, якщо його розглядати відносно двох затискачів (полюсів), носить назву двополюсника.

Приклади двополюсників: резистор, котушка індуктивності, електрична лампа розжарювання, телевізор, якщо його розглядати по відношенню до джерела живлення, будь-яке електричне коло, із якого виведені два зовнішніх виводи (полюси).

Двополюсники на схемах зображаються у вигляді квадрата чи прямокутника, із якого виходять два виводи (полюси) (рис. 2.29, а).

Двополюсники поділяються на пасивні та активні.

Двополюсник називається пасивним, якщо на його виводах відсутня будь-яка напруга, і активними – якщо напруга є. Пасивний двополюсник позначається на схемах літерою “П” (рис. 2.29, б) і характеризується лише

одним параметром - вхідним опором $R_{\text{вх}}$. Активний двополіусник позначається на схемах літерою "А" (рис. 2.29, в) і характеризується двома параметрами: напругою неробочого режиму U_x та вхідним опором $R_{\text{вх}}$.

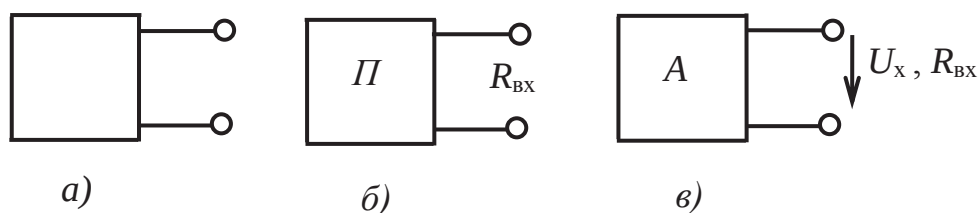


Рис. 2.29

Пасивний двополіусник або зовсім не містить у собі джерел енергії, або містить джерела енергії, які по відношенню до зовнішніх виводів зкомпенсували один одного.

Цілком зрозуміло, що будь-який пасивний двополіусник можна замінити еквівалентним опором (рис. 2.30), який дорівнює вхідному опору двополіусника. Чим же можна замінити активний двополіусник, який характеризується двома параметрами U_x та $R_{\text{вх}}$? Відповідь на це питання більше 100 років тому дали незалежно один від одного два вчених, з іменами яких і пов'язані назви двох теорем, які у наступному були названі теоремами про активний двополіусник.

Теорема Тевенена (теорема про еквівалентне джерело напруги): будь-який активний двополіусник можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі неробочого режиму, а еквівалентний опір – вхідному опору відповідного пасивного двополіусника (рис. 2.31). Відповідний пасивний двополіусник можна одержати з активного шляхом закорочення джерел ЕРС та відключення джерел СРС (тобто якщо покласти всі джерела енергії активного двополіусника такими, що дорівнюють нулеві).

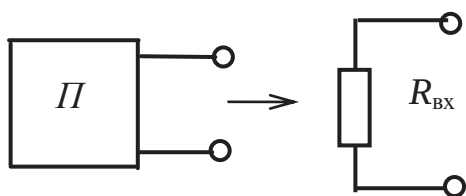


Рис. 2.30

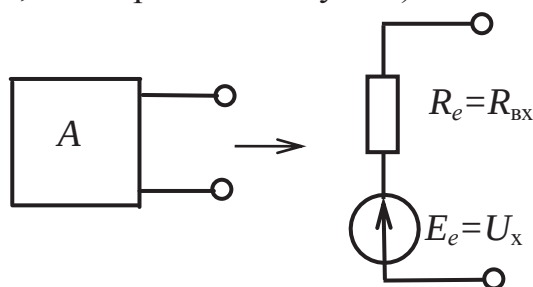


Рис. 2.31

Доказ теореми Тевенена.

Підключимо до полюсів активного двополіусника джерело напруги з ЕРС $E = U_x$ та опором R_n (рис. 2.32, а). Спрямуємо ЕРС назустріч напрузі неробочого режиму. Зрозуміло, що струм I' крізь опір навантаження R_n буде дорівнювати нулеві, тому що ЕРС і напруга U_x взаємно компенсують одна одну.

Для розрахунку струму I' скористаємося принципом накладання. Для цього розіб'ємо схему на дві часткові схеми як показано на рис. 2.32, б.

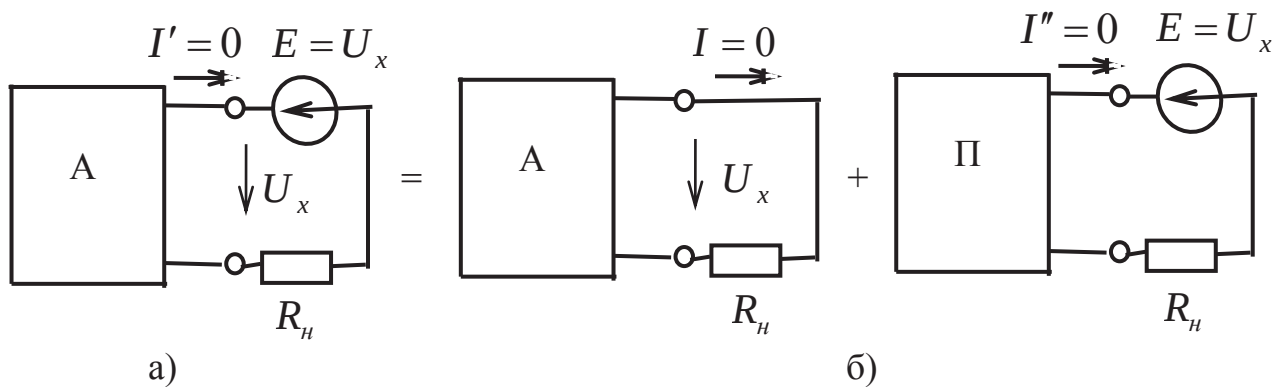


Рис. 2.32. До доказу теореми Тевена

Згідно принципу накладання

$$I' = I - I'' = 0, \quad \text{звідки} \quad I = I'' = \frac{U_x}{R_{\text{вх}} + R_n}.$$

Цьому рівнянню відповідає схема (рис. 2.33, а), яка буде еквівалентна схемі рис. 2.33, б, що і підтверджує справедливість теореми Тевенена.

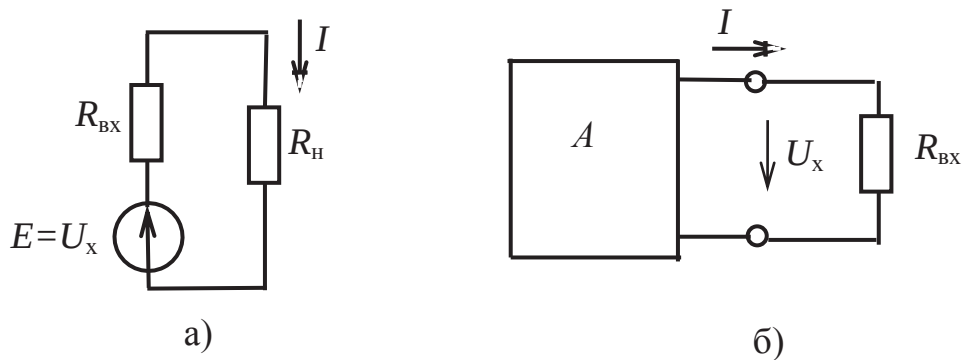


Рис. 2.33

Приклад. Визначити параметри еквівалентного джерела напруги для активного двополюсника, схема якого зображена на рис. 2.34.

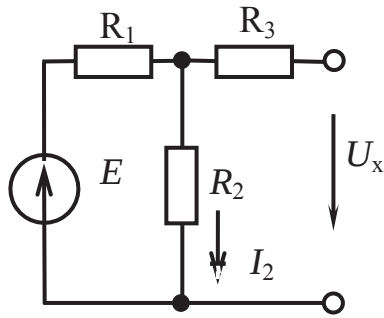


Рис. 2.34

По схемі активного двополюсника розрахуємо напругу U_x , яка і буде дорівнювати E_e :

$$U_x = U_{R2} = R_2 I_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = E_e.$$

Для розрахунку R_e зобразимо схему відповідного пасивного двополюсника (рис. 2.35) і визначимо вхідний опір $R_{вх}$.

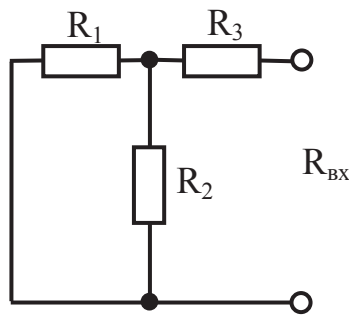


Рис. 2.35

$$R_{вх} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_e.$$

Теорема Нортон (теорема про еквівалентне джерело струму): будь-який активний двополюсник можна замінити еквівалентним джерелом струму, СРС якого дорівнює струму короткого замкнення двополюсника, а еквівалентний опір – вхідному опору відповідного пасивного двополюсника (рис. 2.36).

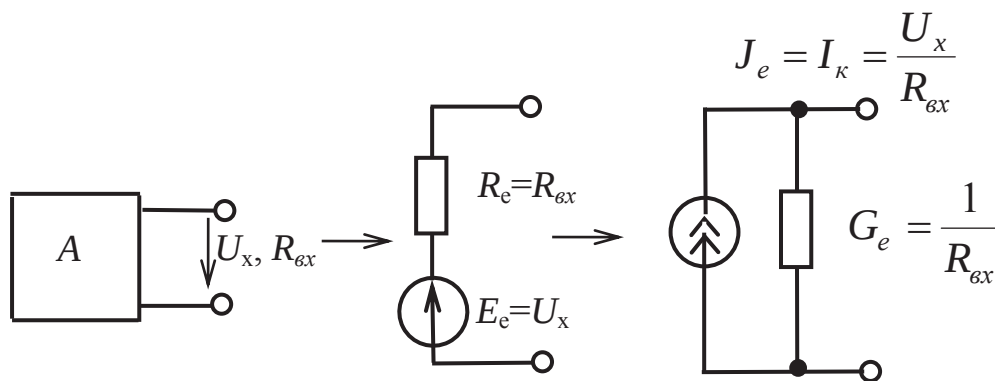


Рис. 2.36

Для доказу цієї теореми можна скористатися теоремою Тевенена, а потім замінити джерело напруги еквівалентним джерелом струму.

Теореми про активний двополюсник (Тевенена та Нортон) використовуються у тому випадку, коли треба визначити струм чи напругу в одній вітці складного електричного кола. Для цього опір R , в якому треба визначити струм, вимикають із схеми електричного кола і схему, яка залишилася, відносно розімкнених затискачів розглядають як активний двополюсник. Далі, якщо задача розв'язується згідно теоремі Тевенена, по схемі активного двополюсника визначаються параметри еквівалентного джерела напруги $E_e = U_x$ та $R_e = R_{6x}$. Після чого в еквівалентну схему активного двополюсника повертається опір R (рис. 2.37) і струм в ньому знаходиться за формулою

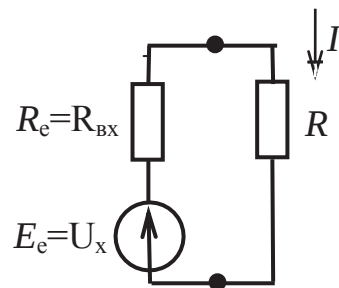


Рис. 2.37

$$I = \frac{U_x}{R_{6x} + R}.$$

Якщо задача розв'язується за теоремою Нортон, то по схемі активного двополюсника визначаються параметри еквівалентного джерела струму $J_e = I_k$ та $R_e = R_{6x}$. Після чого в еквівалентну схему активного двополюсника повертається опір R (рис. 2.38) і струм в ньому знаходиться за формулою

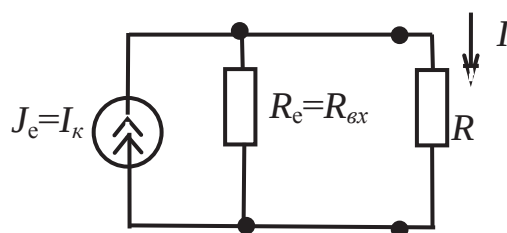


Рис. 2.38

$$I = I_k \frac{R_{6x}}{R_{6x} + R}.$$

Приклад. У електричного кола, схема якого подана на рис. 2.39, визначити струм I_2 за допомогою теореми Тевенена та Нортон.

Вимикаємо опір R_2 , в якому треба визначити струм, і відносно розімкнених затискачів розглядаємо схему, що залишалася, як активний двополюсник (рис. 2.40).

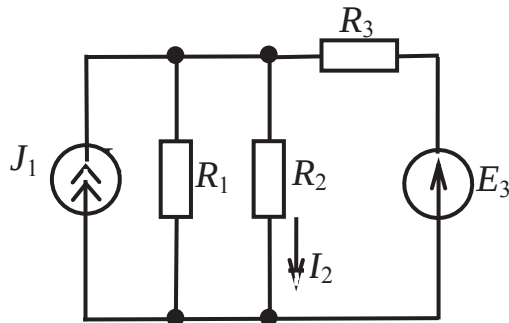


Рис. 2.39

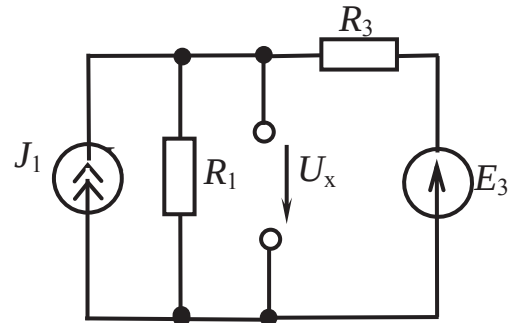


Рис. 2.40

За теоремою Тевенена замінимо активний двополюсник еквівалентним джерелом напруги, для чого визначимо $E_e = U_x$ та $R_e = R_{\text{вх}}$. Для визначення U_x зробимо заміну джерела струму J_1 з опором R_1 еквівалентним джерелом напруги $E_1 = R_1 J_1$ з опором R_1 (рис. 2.41).

Запишемо другий закон Кірхгофа для зовнішнього контуру

$$E_3 - E_1 = (R_3 + R_1)I_{3x}$$

і визначимо струм

$$I_{3x} = \frac{E_3 - E_1}{R_1 + R_3}.$$

Далі запишемо другий закон Кірхгофа для розімкненого контуру, який містить напругу U_x :

$$E_3 = R_3 I_{3x} + U_x.$$

Звідки

$$U_x = E_3 - R_3 I_{3x}.$$

Для визначення еквівалентного опору зображуємо схему відповідного пасивного двополюсника (рис. 2.42).

Тоді

$$R_e = R_{\text{вх}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}.$$

Повертаємо на місце, але в еквівалентну схему джерела напруги, опір R_2 (рис. 2.43) і визначаємо струм I_2 за формулою

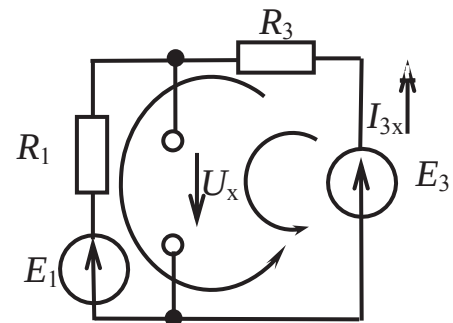


Рис. 2.41

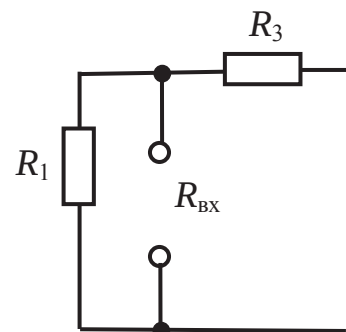


Рис. 2.42

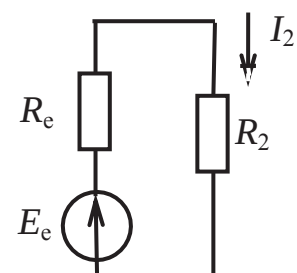


Рис. 2.43

$$I_2 = \frac{U_x}{R_{ex} + R_2}.$$

Для визначення струму за теоремою Нортонна перемкнемо затискачі активного двополюсника і визначимо струм короткого замкнення I_k (рис. 2.44). Провід зі струмом I_k поділив схему на дві незалежні частини. Тому струм I_k можна одержати як суму струмів від кожної частини схеми окремо.

$$I_k = J_1 + \frac{E_3}{R_3}.$$

Повертаємо на місце, але в еквівалентну схему джерела струму, опір R_2 (рис. 2.45) і визначаємо струм I_2 за формулою:

$$I_2 = I_k \frac{R_{ex}}{R_{ex} + R_2}.$$

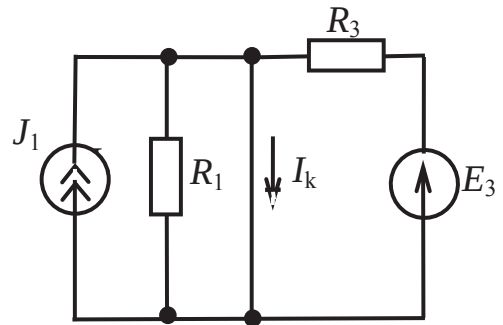


Рис. 2.44

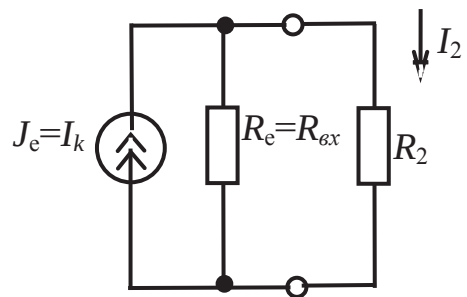


Рис. 2.45

РОЗДІЛ 3 КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ

Лекція 6

План лекції:

- 3.1. Гармонічне коливання та його параметри.
- 3.2. Діюче, середнє та середнє за модулем значення струмів і напруг.
- 3.3. Метод комплексних амплітуд.

3.1. Гармонічне коливання та його параметри.

Гармонічний режим є найбільш поширеним режимом роботи електроенергетичних установок і тому на практиці зустрічається найбільш часто. Це обумовлено економічними показниками джерел гармонічного струму (синхронних генераторів теплових, атомних та гідравлічних електростанцій).

Для значної частини сучасних спеціальностей, таких як радіоелектроніка, комп'ютерна техніка, зв'язок, автоматичні системи керування гармонічний режим є основою для вивчення більш складних процесів, пов'язаних з передачею інформації, сигналів управління та команд.

Вважається, що гармонічне коливання має місце протягом часу $-\infty < t < +\infty$ і таким чином само по собі не передає ніякої інформації. Але воно використовується як несуча функція при кодуванні інформації, в результаті чого коливання перестає бути гармонічним.

Гармонічним називається коливання, яке змінюється у часі за законом синуса або косинуса

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha) = A_m \cos(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}).$$

Часовий графік гармонічного коливання наведено на рис. 3.1.

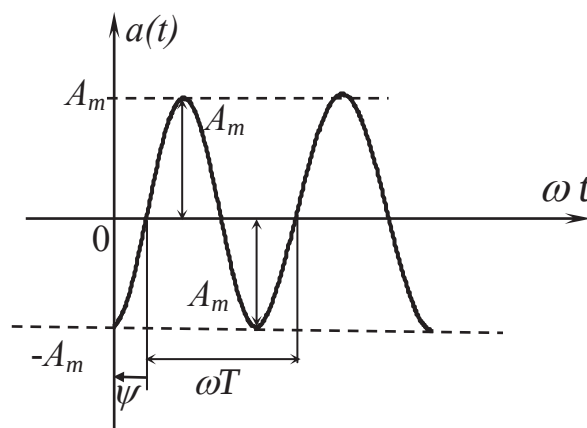


Рис. 3.1

Гармонічне коливання характеризується трьома параметрами.

Амплітуда $A_m(I_m, U_m, E_m, J_m)$ - найбільше значення гармонічної функції, $A_m > 0$.

Кутова частота $\omega = 2\pi/T$, де T – період гармонічного коливання, тобто час, протягом якого відбувається повний цикл синусоїди. Одиницею кутової частоти є радіан на секунду (rad/c). Величина, обернена періоду, позначається буквою $f = 1/T$ і називається частотою гармонічного коливання. Одиниця частоти - герц $[f] = 1/c = Гц$. Таким чином кутова частота $\omega = 2\pi f$.

У країнах Європи прийнято стандарт частоти електроенергетичних систем $f = 50 Гц$ ($\omega = 314 rad/c$), у США – 60 Гц.

Аргумент $(\omega t + \psi)$ називають фазою гармонічного коливання. Значення фази для моменту часу $t = 0$, тобто $(\omega t + \psi)|_{t=0} = \psi$ - називають початковою фазою. Одиниця початкової фази – радіан: $[\psi] = rad$. Початкова фаза показує наскільки зміщено початок синусоїди (найближча точка переходу синусоїди з “-” на “+”) від початку координат.

Якщо бодай один з трьох параметрів A_m , ω чи ψ перестає бути сталою величиною, то таке коливання не буде гармонічним. Прикладом можуть бути коливання, які використовуються для передачі інформації. В них один, чи одразу два параметри гармонічного коливання змінюються за законом інформації, яка передається. Такі коливання називають модульованими.

3.2. Діюче, середнє та середнє за модулем значення струмів і напруг.

Середнє значення періодичної функції визначається виразом

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt.$$

Для періодичних функцій, симетричних відносно осі абсцис, до яких належить і гармонічне коливання, середнє значення за період $A_0 = 0$.

Середнє випростане значення періодичної функції визначається виразом

$$A_{сep} = \frac{1}{T} \int_0^T |a(t)| dt.$$

Для гармонічної функції

$$A_{сep} = \frac{1}{T} \int_0^T |A_m \sin(\omega t + \psi)| dt = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m.$$

Для характеристики енергетичної дії змінного струму вводять поняття діючого значення.

Діючим (ефективним) значенням змінного струму називають таке значення постійного струму I , яке за час одного періоду виділяє в опорі R таку ж кількість тепла, як і змінний струм.

Чисельно діюче значення визначається як середньоквадратичне значення змінного струму за період

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

Для того, щоб підтвердити фізичний зміст наданого вище визначення діючого значення змінного струму, піднесемо до квадрата обидві частини рівняння і помножимо на деякий опір R . Одержимо

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2(t) dt.$$

З лівої сторони рівняння стоїть енергія, яка виділяється за період T в опорі R при протіканні крізь нього постійного струму I . З правої сторони – енергія, що виділяється змінним струмом $i(t)$ в опорі R за той же час. Таким чином підтверджується енергетична еквівалентність дії обох струмів.

Поняття діючого значення стосується не тільки гармонічних, але й будь яких періодичних струмів. Ним користуються також стосовно напруг, ЕРС та СРС.

Визначимо діюче значення гармонічного струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t + 2\psi)] dt} = I_m / \sqrt{2}.$$

Для гармонічного струму діюче значення менше амплітудного у $\sqrt{2}$ разів. Відповідно для напруги, ЕРС та СРС:

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad E = E_m / \sqrt{2}, \quad J = J_m / \sqrt{2}.$$

Для порівняння визначимо діюче значення періодичної негармонічної напруги, графік якої подано на рис. 3.2.

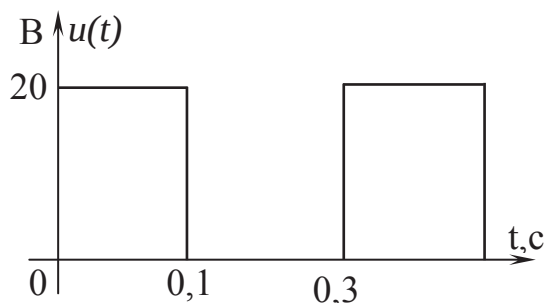


Рис. 3.2

$$U = \sqrt{\frac{1}{0,3} \int_0^{0,1} 20^2 dt} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ В.}$$

3.3. Метод комплексних амплітуд.

3.3.1. Загальні положення.

Метод комплексних амплітуд був запропонований для розрахунку електричних кіл гармонічного струму американськими інженерами Ч.П. Штейнмецем та А.Е. Конелі наприкінці 19 століття.

Сутність методу – це заміна системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, складених за законами Кірхгофа для миттєвих значень гармонічних струмів, напруг, ЕРС і СРС, системою лінійних алгебричних рівнянь, але у комплексній формі. Перш ніж перейти до викладання методу комплексних амплітуд, наведемо деякі відомості з курсу математики, які потрібні для розуміння цього питання.

- **Комплексні числа**

Величина $i = \sqrt{-1}$ називається уявною одиницею. Але в електротехніці буквою i позначається миттєве значення змінного струму і тому, щоб не плутати їх, в електротехніці домовилися позначати уявну одиницю $j = \sqrt{-1}$.

Добуток уявної одиниці на дійсне число називається уявним числом - jb .

Число $a + jb$, яке складається з дійсної та уявної частини зветься комплексним числом, записаним у алгебричній формі. Комплексне число можна зобразити у комплексній площині – це Декартові координати, де за віссю абсцис відкладаються дійсні числа, а за віссю ординат – уявні числа.

У показниковій формі комплексне число має вигляд $Ae^{j\varphi}$, де A – модуль комплексного числа, φ - аргумент.

Перехід від алгебричної до показникової форми здійснюється наступним чином:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Якщо модуль A визначається однозначно, то при визначенні аргументу треба враховувати чверть, у якій знаходиться комплексне число $a + jb$. Якщо позначити α_M - арктангенс відношення уявної і дійсної частини комплексного числа, взятого за модулем

$$\alpha_M = \arctg |b/a|,$$

то для вірного визначення аргументу φ слід користатися рис. 3.3.

Перехід від показникової форми комплексного числа до алгебричної однозначний і здійснюється за допомогою формули Ейлера

$$Ae^{j\varphi} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi = a + jb.$$

Наведемо деякі співвідношення, які будуть корисними у подальшому:

$$\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}; \quad 1 = e^{j0}; \quad -1 = e^{\pm j\pi}; \quad j^2 = -1; \quad j^3 = -j; \quad j^4 = 1;$$

$$\frac{1}{j} = -j; \quad |\pm j| = 1; \quad |e^{\pm j\varphi}| = 1.$$

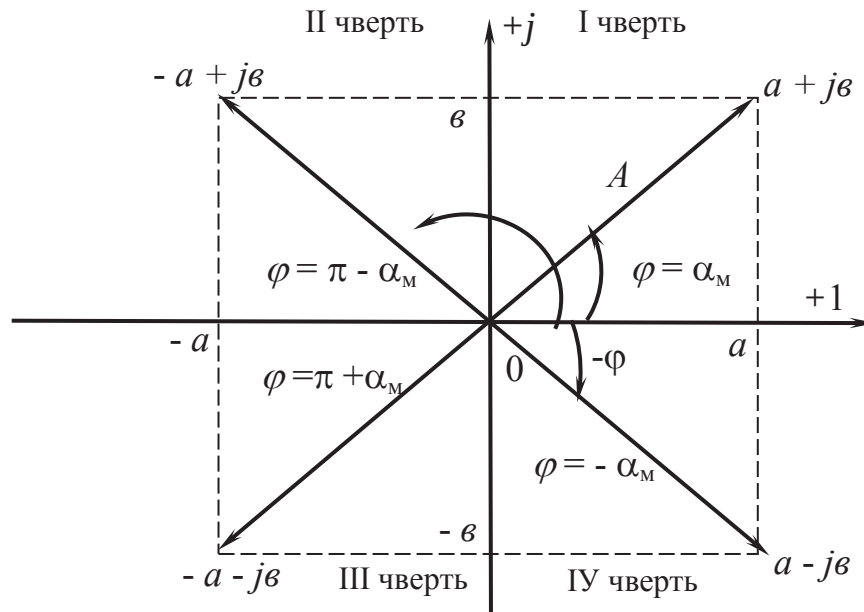


Рис. 3.3

3.3.2. Комплексне перетворення.

Гармонічну функцію часу $a(t)$ назовемо оригіналом.

Тоді комплексне число, яке визначається інтегральним перетворенням для оригіналу, записаному через синус

$$\dot{A}_m = j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_m \sin(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt = A_m e^{j\psi},$$

або через косинус

$$\dot{A}_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_m \cos(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt = A_m e^{j\psi},$$

називається комплексною амплітудою.

Комплексна амплітуда – це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді гармонічного коливання, а аргумент – початковій фазі. Як будь-яке комплексне число комплексну амплітуду можна зобразити у комплексній площині (рис. 3.4).

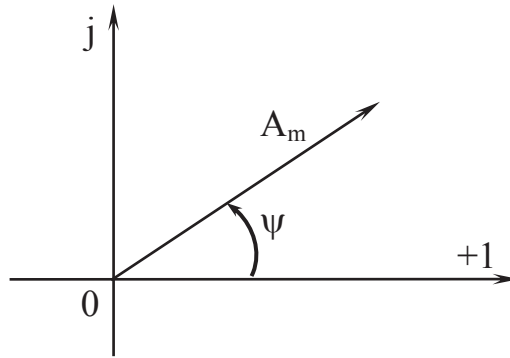


Рис. 3.4

Скорочено комплексне перетворення будемо позначати

$$a(t) \xrightarrow{K} \dot{A}_m,$$

тобто оригіналу $a(t)$ відповідає комплексна амплітуда (комплексне зображення оригіналу) $\dot{A}_m$.

Властивості комплексного перетворення.

Якщо оригіналу $a(t) \xrightarrow{K} \dot{A}_m$, то

$$1. Ca(t) \xrightarrow{K} C\dot{A}_m, \text{ де } C - \text{ стала величина.}$$

$$2. \sum_n a_n(t) \xrightarrow{K} \sum_n \dot{A}_{mn}.$$

$$3. \frac{d}{dt} a(t) \xrightarrow{K} j\omega \dot{A}_m.$$

$$4. \int_0^t a(t) dt \xrightarrow{K} \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m.$$

3.3.3. Комплексна схема заміщення. Закон Ома в комплексній формі.

Перейдемо до викладу сутності методу комплексних амплітуд. Розглянемо електричне коло з послідовно з'єднаними елементами R , L і C (послідовний-контур), на вході якого діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ (рис. 3.5).

Запишемо другий закон Кірхгофа для миттєвих значень

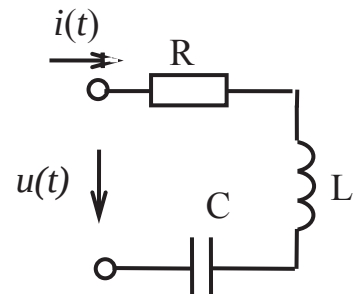


Рис. 3.5

$$Ri(t) + \frac{Ldi(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.1)$$

Оскільки похідна, а також інтеграл від гармонічної функції є гармонічними функціями тієї же частоти, то струм і всі напруги у колі також є гармонічними функціями.

Для визначення струму $i(t)$ треба розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язок такого рівняння відомий і не викликає особливих труднощів. Але ж це найбільш просте електричне коло. Якщо зважити, що реальні електричні кола мають не одну вітку, а набагато більше, то необхідно буде розв'язувати вже систему диференціальних рівнянь, що є набагато складнішим завданням. Щоб спростити задачу, зробимо таким чином.

Застосуємо до лівої і правої частини рівняння (3.1) комплексне перетворення і скористаємося його властивостями.

Маємо:

$$R\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_m, \quad (3.2)$$

де $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ - комплексна амплітуда струму у колі,

$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ - комплексна амплітуда напруги на вході електричного кола.

Перший доданок рівняння (3.2) назвемо комплексною напругою на опорі і позначимо

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m = RI_m e^{j\psi_i} = U_{mR} e^{j\psi_{uR}}.$$

Видно, що $\psi_{uR} = \psi_i$, тобто струм і напруга в опорі збігаються за фазою. Введемо поняття векторної діаграми.

Зображення комплексних амплітуд струмів і напруг у комплексній площині називається **векторною діаграмою**. Векторна діаграма дає наочне уявлення про співвідношення між струмами і напругами у електричному колі і використовується для більш глибокого розуміння процесів, які мають місце у електричному колі. Для складних електричних кіл векторна діаграма будується таким чином, що вона відображає перший чи другий закони Кірхгофа у комплексній площині.

На рис. 3.6, а і б – зображені відповідно часова і векторна діаграми струму і напруги в опорі R .

Другий доданок в рівнянні (3.2) назвемо комплексною амплітудою напруги на індуктивності і позначимо

$$\dot{U}_{mL} = j\omega L\dot{I}_m = \omega LI_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega LI_m e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})} = U_{mL} e^{j\psi_{uL}},$$

де $U_{mL} = \omega LI_m$, $\psi_{uL} = \psi_i + \frac{\pi}{2}$, тобто напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на кут 90° .

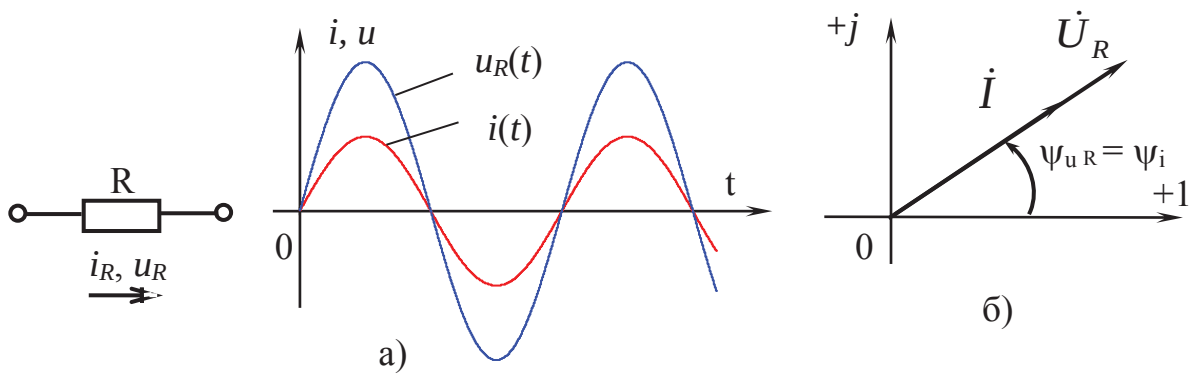


Рис. 3.6. Струм і напруга в опорі збігаються за фазою

На рис. 3.7, а і б, зображені відповідно часова та векторна діаграми струму і напруги в індуктивності.

Уведемо позначення:

$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$ - комплексний опір індуктивності;

$X_L = \omega L$ - опір індуктивності або індуктивний опір.

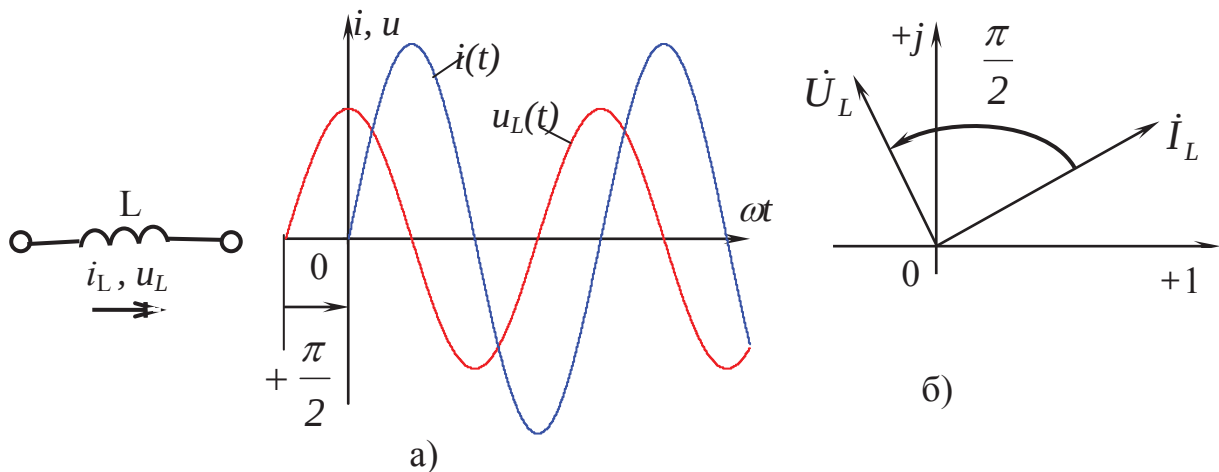


Рис. 3.7. Напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на кут 90°

На рис. 3.8, а і б подані залежності активного і індуктивного опорів від кутової частоти. На високих частотах опори реальних елементів – резисторів збільшуються за рахунок скин-ефекту.

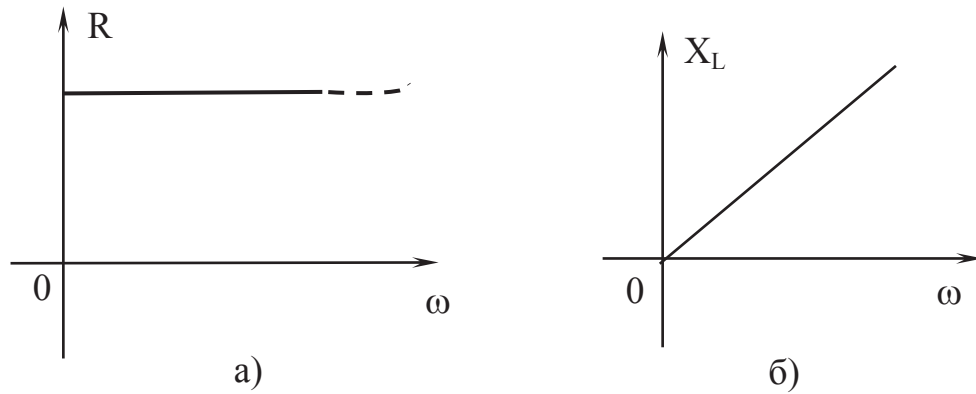


Рис. 3.8

Третій доданок в рівнянні (3.2) назовемо комплексною амплітудою напруги на ємності і позначимо.

$$\dot{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \frac{1}{\omega C} I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} = U_{mc} e^{j\psi_{uC}},$$

де $U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m$, а $\psi_{uC} = \psi_i - \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, напруга на ємності відстає від струму за фазою на кут 90° .

На рис. 3.9, а і б, зображені відповідно часова та векторна діаграми струму і напруги в ємності.

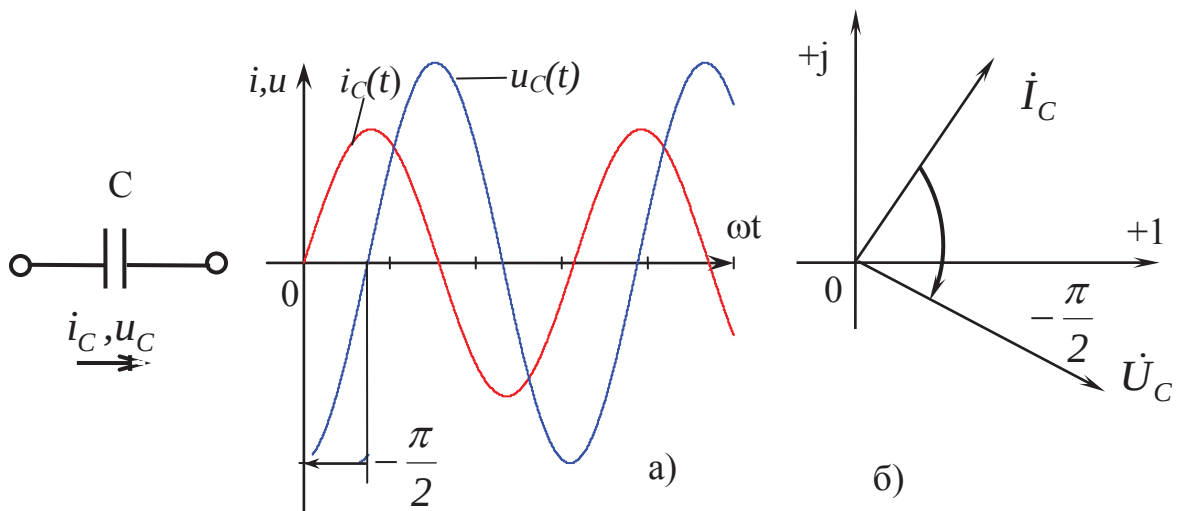


Рис. 3.9. Напруга на ємності відстає від струму за фазою на кут 90°

Уводимо позначення:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C \text{ - комплексний опір ємності,}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ - опір ємності або ємнісний опір.}$$

На рис. 3.10 показана залежність ємнісного опору від кутової частоти.

На підставі рівняння (3.2), а також уведених позначень можна скласти так звану комплексну схему заміщення електричного кола гармонічного струму (рис. 3.11).

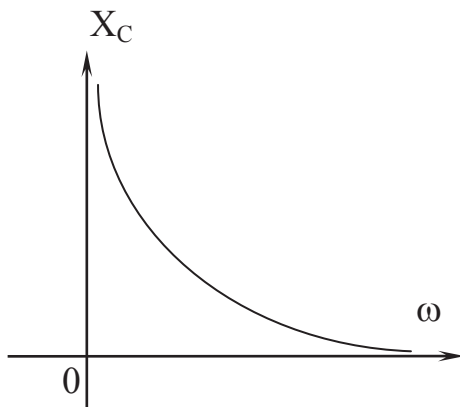


Рис. 3.10

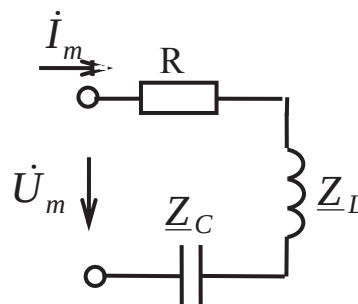


Рис. 3.11

Опір R , в якому протікає гармонічний струм $i(t)$, на комплексній схемі залишається тим же опором R , але в якому тече комплексний струм $\dot{I}_m$; індуктивність L замінюється комплексним опором індуктивності $\underline{Z}_L$; ємність C - комплексним опором ємності $\underline{Z}_C$; гармонічна напруга чи ЕРС на вході $u(t)$ або $e(t)$ - відповідно комплексними амплітудами $\dot{U}_m$ або $\dot{E}_m$, і за аналогією, гармонічна СРС $j(t)$ - комплексною амплітудою СРС $\dot{J}_m$ (рис. 3.12).

З урахуванням уведених позначень рівняння (3.2) можна записати у вигляді:

$$[R + j(X_L - X_C)]\dot{I}_m = \dot{U}_m. \quad (3.3)$$

Величину $X = X_L - X_C$ називають реактивним опором електричного кола. Реактивний опір може бути як додатною, так і від'ємною величиною.

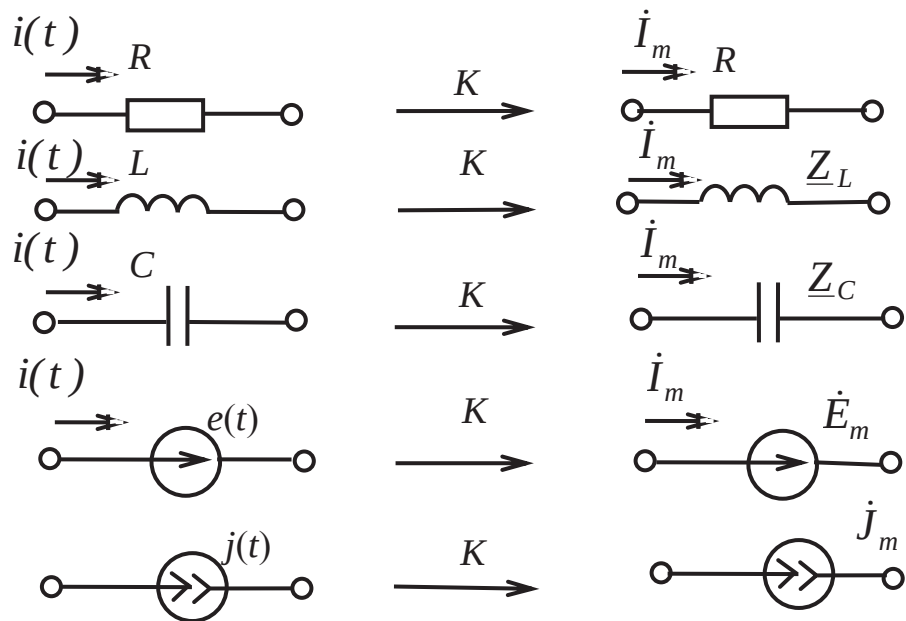


Рис. 3.12. Позначення елементів електричного кола на комплексній схемі заміщення

Графік залежності реактивного опору від кутової частоти наведено на рис. 3.13.

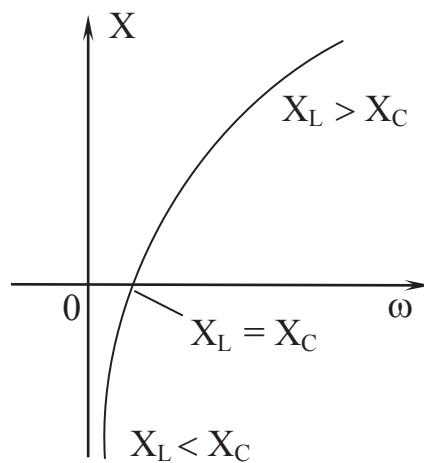


Рис. 3.13

У протилежність реактивному опору X величину R називають активним опором.

Величину

$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (3.4)$$

називають комплексним опором електричного кола, де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - повний опір кола, а $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ - кут зсуву фаз між напругою і струмом у колі.

На підставі формули (3.4) можна побудувати прямокутний трикутник (рис. 3.14), який носить назву трикутника опорів.

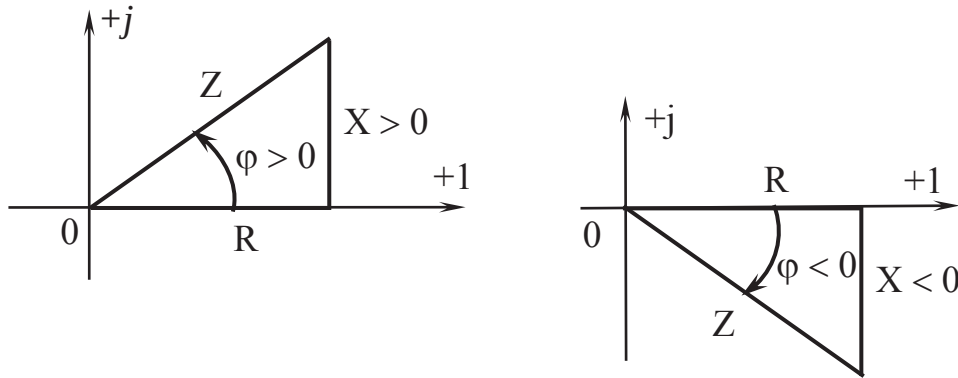


Рис. 3.14

З введенням комплексного опору кола рівняння (3.3) набуває вигляду

$$\underline{Z} \dot{I}_m = \dot{U}_m \quad \text{або} \quad \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}}. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) виражає закон Ома в комплексній формі, записаний стосовно комплексних амплітуд струму і напруги.

Величина у $\sqrt{2}$ разів менша за комплексну амплітуду $\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2}$ називається **комплексним діючим значенням**.

Отже для комплексних діючих значень закон Ома набуває вигляду:

$$\dot{U} = \underline{Z} \dot{I} \quad \text{або} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Щоб зрозуміти значення терміну кут зсуву фаз між напругою і струмом в електричному колі, запишемо закон Ома у вигляді

$$\dot{I} = \frac{U e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I e^{j\psi_i},$$

де $\psi_i = \psi_u - \varphi$, або

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

На векторних діаграмах кут φ відлічується від струму до напруги. Кут φ має від'ємне значення, якщо він відлічується за годинниковою стрілкою, і додатне – якщо проти.

3.3.4. Закони Кірхгофа в комплексній формі.

Для миттєвих значень струмів перший закон Кірхгофа має вигляд

$$\sum_k i_k(t) = 0. \quad (3.6)$$

Якщо в електричному колі має місце режим гармонічного струму, то до рівняння (3.6) можна застосувати комплексне перетворення.

Маємо

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0$$

або для комплексних діючих значень струмів:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Другий закон Кірхгофа для миттєвих значень має вигляд

$$\sum_k e_k(t) = \sum_n u_n(t). \quad (3.7)$$

Застосувавши комплексне перетворення до рівняння (3.7), одержимо другий закон Кірхгофа для комплексних амплітуд :

$$\sum_k \dot{E}_{mk} = \sum_n \dot{U}_{mn} \quad \text{або} \quad \sum_k \dot{E}_{mk} = \sum_n \underline{Z}_n \dot{I}_{mn},$$

а також для комплексних діючих значень

$$\sum_k \dot{E}_k = \sum_n \dot{U}_n \quad \text{або} \quad \sum_k \dot{E}_k = \sum_n \underline{Z}_n \dot{I}_n.$$

3.3.5. Застосування методу комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл гармонічного струму.

Оскільки записи рівнянь основних законів електричних кіл у комплексній формі за своєю структурою збігаються з відповідними рівняннями кіл постійного струму, то всі методи розрахунку електричних кіл постійного струму поширюються на кола гармонічного струму, але в комплексній формі.

Таким чином, аналіз електричних кіл гармонічного струму можна здійснювати в комплексній формі, застосовуючи метод еквівалентних перетворень, метод рівнянь Кірхгофа, методи контурних струмів та вузлових напруг, принципи взаємності та накладання, а також теореми про активний двополюсник (Тевенена та Нортена).

Алгоритм розрахунку електричних кіл гармонічного струму.

1. Зображуємо комплексну схему заміщення електричного кола і визначаємо її параметри (комплексні опори віток та комплексні амплітуди джерел напруги та струму).
2. Будь-якими відомими методами розрахунку визначаємо комплексні амплітуди (комплексні діючі значення) шуканих струмів та напруг.
3. Від комплексних амплітуд знайдених струмів і напруг переходимо до миттєвих значень.

Перший і третій пункти алгоритму дуже прості і, як правило, не викликають ніяких труднощів, тому дуже часто в умовах задач задають параметри комплексної схеми заміщення кола і ставиться задача розрахунку комплексних струмів і напруг.

Приклад. У електричному колі, схема якого зображена на рис. 3.5, задані такі параметри:

$$u(t) = 20\sin(314t - 30^\circ) \text{ В}, \quad R = 30 \text{ Ом}, \quad L = 63,7 \text{ мГн}, \quad C = 53 \text{ мкФ}.$$

Визначити струм, напруги на елементах і побудувати векторну діаграму.

1. Зображуємо комплексну схему заміщення кола (рис. 3.11) і визначаємо комплексні опори і комплексну амплітуду напруги на вході кола.

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j314 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = j20 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{314 \cdot 53 \cdot 10^{-6}} = -j60 \text{ Ом}.$$

$$\dot{U}_m = 20e^{-j30^\circ} \text{ В}.$$

2. За комплексною схемою обчислюємо комплексні амплітуди шуканих величин:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{20e^{-j30^\circ}}{30 + j20 - j60} = 0,4e^{j23^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m = 30 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 12e^{j23^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{mL} = \underline{Z}_L \cdot \dot{I}_m = j20 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 8e^{j113^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{mC} = \underline{Z}_C \dot{I}_m = -j60 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 60e^{-j90^\circ} \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 24e^{-j67^\circ} \text{ В}.$$

Для побудови векторної діаграми струму і напруг вибираємо масштаби

$$m_I = 0,1 \text{ А/см}, \quad m_U = 8 \text{ В/см}$$

і записуємо закони Кірхгофа (у даному випадку – тільки другий закон).

$$\dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = \dot{U}_m. \quad (3.8)$$

На рис. 3.15 зображено векторну діаграму, яка відображає у комплексній площині рівняння (3.8)

3. Від комплексних значень струму і напруг переходимо до миттєвих значень:

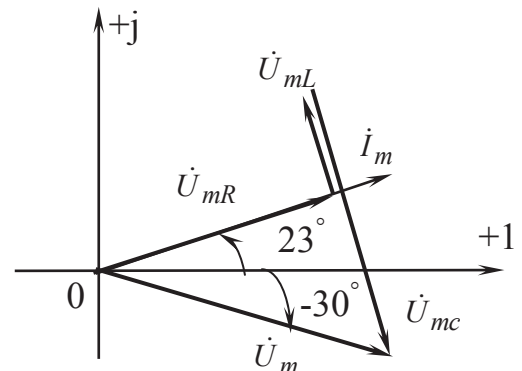


Рис. 3.15

$$i(t) = 0,4 \sin(314t + 23^\circ) A,$$

$$u_R(t) = 12 \sin(314t + 23^\circ) B,$$

$$u_L(t) = 8 \sin(314t + 113^\circ) B,$$

$$u_C(t) = 24 \sin(314t - 67^\circ) B.$$

Лекція 7

План лекції:

3.4. Потужність у колах гармонічного струму.

3.5. Баланс потужностей у колі гармонічного струму.

3.4. Потужність у колах гармонічного струму.

Запишемо вираз миттєвої потужності при гармонічному режимі

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Тут враховано, що $\psi_i = \psi_u - \varphi$. Проведемо перетворення, використовуючи формулу $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi).$$

Перший доданок (стала величина) визначає необоротний процес поглинання електромагнітної енергії електричним колом. Потужність, яка відповідає цьому необоротному процесу, дорівнює середній потужності за період і носить назву **активної потужності**.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi.$$

Одиницею активної потужності є ват (Вт).

Множник $\cos \varphi$ називають **коефіцієнтом потужності**. Він визначається співвідношенням між активним і реактивним опором кола. Чим менший кут зсуву фаз φ між струмом і напругою, тим більша активна потужність P .

Другий доданок визначає коливання енергії між джерелом і електричним колом. Середнє значення цього доданку за період дорівнює нулеві.

Амплітуда змінної складової миттєвої потужності, яка дорівнює добутку діючих значень струму і напруги у колі, носить назву **повної потужності**.

$$S = UI$$

Основною одиницею повної потужності є вольт-ампер (ВА). Величина

$$Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} = UI \sin \varphi$$

носить назву **реактивної потужності**.

Основною одиницею реактивної потужності є ВАР (вольт-ампер реактивний). З фізичної точки зору всі три потужності: активна P , реактивна Q і повна S мають однакову одиницю виміру – ват. Однак історично так склалося, що на певному етапі розвитку електротехніки для кожної з потужностей зручно було ввести свої одиниці виміру: ват, вольт-ампер та вольт-ампер реактивний. Вважаючи на зручність використання такі одиниці виміру потужностей використовуються і зараз.

Згідно з уведеними виразами для потужностей можна побудувати так званий трикутник потужностей (рис. 3.16), з якого випливають співвідношення між P , Q , S та φ .

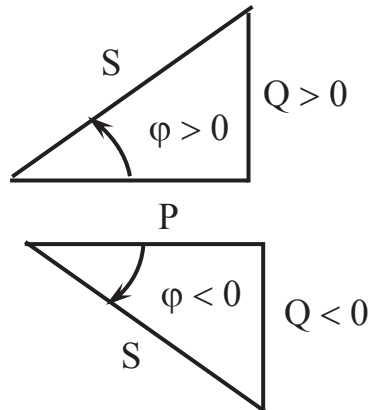


Рис. 3.16. Трикутник потужностей

Введемо поняття активної і реактивної складових струму і напруги.

Складова напруги, яка співпадає за фазою зі струмом, носить назву активної складової і позначається U_a .

Складова напруги, яка має зсув за фазою на кут $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ відносно струму, носить назву реактивної складової й позначається U_p .

Розкладання напруги на активну і реактивну складові приведено на рис. 3.17.

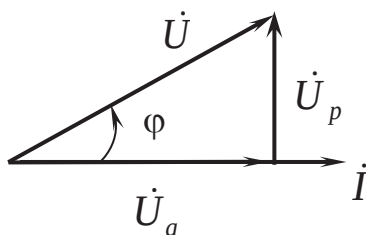


Рис. 3.17

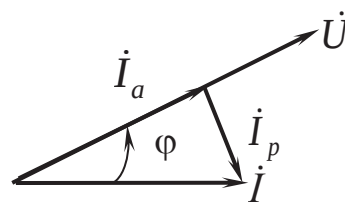


Рис. 3.18

З рис. 3.17 можна визначити, що

$$U_a = U \cos \varphi = ZI \cos \varphi = RI, \quad U_p = U \sin \varphi = ZI \sin \varphi = XI.$$

Так само струм можна розкласти на активну і реактивну складову (рис. 3.18):

$$I_a = I \cos \varphi, \quad I_p = I \sin \varphi.$$

Запишемо вирази для потужностей за введеними величинами:

$$P = UI \cos \varphi = U_a I = UI_a = Z \cos \varphi I^2 = RI^2,$$

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = UI_p = Z \sin \varphi I^2 = XI^2,$$

$$S = UI = ZI^2.$$

Величину

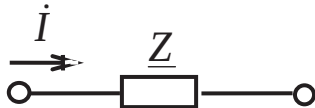
$$\tilde{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j \arctg \frac{Q}{P}} = S e^{j\varphi}$$

називають комплексною потужністю. Можна показати, що комплексна потужність може бути обчислена як добуток комплексної напруги на комплексно спряжений струм, тобто

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} \cdot I e^{-j(\psi_u - \varphi)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

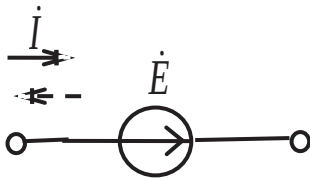
Визначимо комплексну потужність для окремих елементів комплексної схеми заміщення кола.

Комплексний опір $\underline{Z}$:



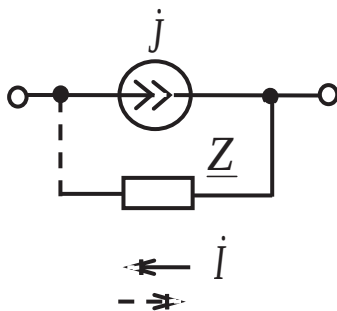
$$\tilde{S}_z = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \underline{Z} \dot{I} \dot{I}^* = \underline{Z} I^2.$$

Комплексна електрорушійна сила:



$$\tilde{S}_E = \pm \dot{E} \dot{I}^*.$$

Комплексна струморушійна сила:



$$\tilde{S}_J = \pm \dot{U}_J \dot{J}^* = \pm \underline{Z} \dot{I} \dot{J}^*.$$

Отже, зважаючи на все викладене, можна записати баланс комплексних потужностей для електричних кіл гармонічного струму у вигляді

$$\sum \dot{E} \dot{I}^* + \sum \underline{Z} \dot{I} \dot{J}^* = \sum \underline{Z} I^2.$$

Таким чином, сума комплексних потужностей ідеалізованих активних елементів кола (джерел енергії) дорівнює сумі комплексних потужностей усіх ідеалізованих пасивних елементів.

З умови балансу комплексних потужностей випливають умови балансу активних та реактивних потужностей:

$$\sum P_{\text{дж}} = \sum RI^2, \quad \sum Q_{\text{дж}} = \sum XI^2.$$

Рівняння балансу комплексних потужностей використовується для перевірки розрахунків електричних кіл гармонічного струму.

3.5. Баланс потужностей у колі гармонічного струму.

Розглянемо коло з послідовним з'єднанням опору, індуктивності і ємності, яке живиться від джерела гармонічної напруги (рис. 3.19).

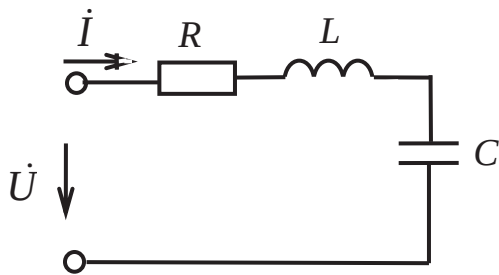


Рис. 3.19

Припустимо, що початкова фаза напруги $\psi = 0$ та $X_C > X_L$, тобто $U_C > U_L$.

Вираз для миттєвої потужності електромагнітної енергії кола має вигляд:

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (3.9)$$

Розглянемо миттєву потужність окремо в елементах R , L та C , враховуючи, що в кожному з них тече однаковий струм I .

Щодо елемента R ($\varphi_R = 0$) формула (3.9) набуває вигляду

$$p_R(t) = U_R I - U_R I \cos 2\omega t.$$

Щодо елемента L ($\varphi_L = \frac{\pi}{2}$):

$$p_L(t) = U_L I \cos \frac{\pi}{2} - U_L I \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) = -U_L I \sin 2\omega t.$$

Щодо елемента C ($\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$):

$$p_C(t) = U_C I \cos(-\frac{\pi}{2}) - U_C I \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_C I \sin 2\omega t.$$

Тоді для миттєвої потужності кола можна записати

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t) + p_C(t) = U_R I - U_R I \cos 2\omega t - U_L I \sin 2\omega t + U_C I \sin 2\omega t.$$

Графіки миттєвої потужності в опорі, ємності та індуктивності подані на рис. 3.20.

Розглянемо часові діаграми миттєвої потужності у кожному елементі.

Миттєва потужність в опорі для будь-якого моменту часу – додатна, тобто опір завжди, хоч із змінною швидкістю, споживає електромагнітну енергію від джерела і перетворює її необоротно в інші види енергії.

Ємність і індуктивність за одну частину періоду накопичують енергію, а за другу – віддають накопичувану енергію. При цьому, якщо ємність накопичує

енергію ($P > 0$), то індуктивність у цей же час віддає накопичувану енергію ($P < 0$).

Якщо коло складається тільки з ємності та індуктивності, то енергія, яка передається від джерела напруги до електричного кола, тимчасово накопичується або у магнітному полі індуктивності, або у електричному полі ємності, а потім повертається назад до джерела.

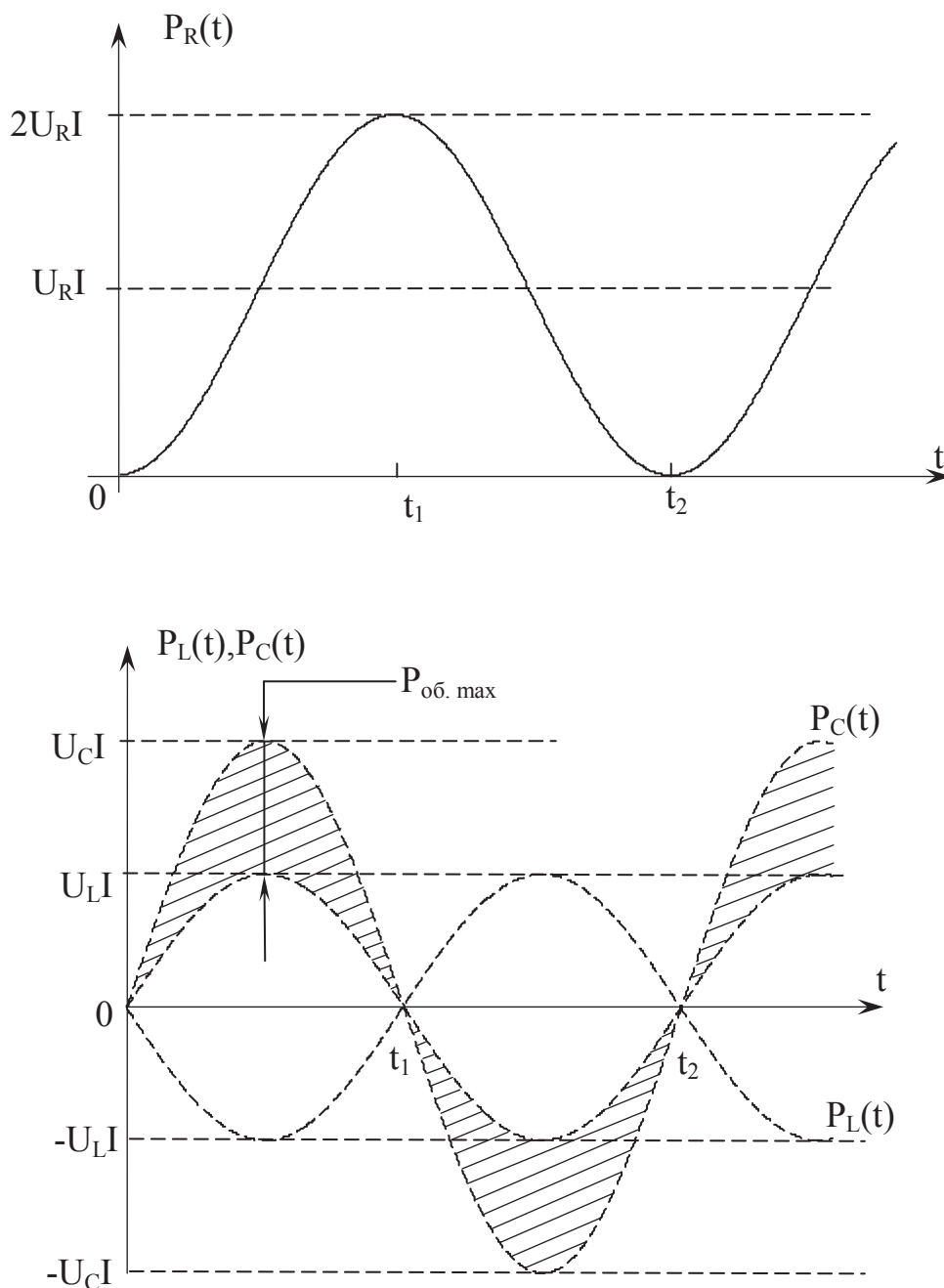


Рис. 3.20.

Оскільки у нашому випадку $U_C > U_L$, то ємність у проміжку часу від 0 до t_1 (перший півперіод) накопичує енергії більше, ніж за цей же час віддає індуктивність, тобто коло відбирає енергію від джерела і накопичує її в

електричному полі ємності. У другий півперіод ($t_1 < t < t_2$) ємність віддає енергії більше, ніж за цей же час накопичує індуктивність, тобто коло повертає лишок енергії у джерело.

На рис. 3.20 заштрихована ділянка визначає ту енергію, якою коло обмінюється із джерелом напруги кожного півперіоду. Потужність, яка відповідає енергії обміну між джерелом і електричним колом, носить назву обмінної потужності.

Визначимо максимальне значення обмінної потужності $P_{об.м}$.

Максимальна потужність в індуктивності

$$P_{Lm} = U_L I = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega \frac{L I_m^2}{2} = \omega W_{маг.м},$$

в ємності

$$P_{Cm} = U_C I = \frac{U_C^2}{X_C} = \omega C U_C^2 = \omega \frac{C U_{mC}^2}{2} = \omega W_{ел.м},$$

де $W_{маг.м}$ та $W_{ел.м}$ - максимальні значення енергії, яка накопичується відповідно у магнітному полі індуктивності та електричному полі ємності.

Тоді

$$P_{об.м} = P_{Lm} - P_{Cm} = \omega(W_{маг.м} - W_{ел.м}).$$

З іншого боку

$$P_{об.м} = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = (X_L - X_C) I^2 = X I^2 = Q,$$

тобто

$$P_{об.м} = \omega(W_{маг.м} - W_{ел.м}) = Q,$$

де Q - реактивна потужність кола.

Звідси легко зрозуміти фізичний сенс реактивної потужності – це максимальне значення потужності, якою коло кожного періоду обмінюється із джерелом напруги.

РОЗДІЛ 4

РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Лекція 8

План лекції:

- 4.1. Резонанс у послідовному контурі (резонанс напруг).
- 4.2. Частотні та резонансні характеристики послідовного контуру.
- 4.3. Комплексна провідність кола. Еквівалентні перетворення послідовного та паралельного з'єднання елементів. Трикутник провідностей.

4.1. Резонанс у послідовному контурі (резонанс напруг).

Явище резонансу, з яким вперше знайомляться в курсі фізики, передбачає взаємодію коливальної системи, рух якої описується синусоїдальною функцією часу, та зовнішнього періодичного впливу, що діє в «такт» із рухом коливальної системи. При цьому в коливальній системі відбувається періодичний обмін кінетичної і потенціальної енергій.

При наближенні частоти зовнішнього періодичного впливу до власної частоти коливань механічної системи спостерігається явище різкого збільшення амплітуди коливань системи, що і називають в механіці резонансом.

В електротехніці в якості коливальної системи виступає електричне коло з різними за характером накопичувальними елементами (ємністю та індуктивністю), в якому можливий періодичний обмін між енергіями електричного і магнітного поля, а в якості зовнішнього впливу – синусоїдальна напруга чи струм на вході кола.

При плавній зміні частоти вхідної напруги в послідовному контурі з малими втратами спостерігається різке зростання амплітуд струму на вході кола та напруг на ємності та індуктивності, при чому максимальні значення цих величин мають місце при різних частотах. Що ж в цьому випадку прийняти за резонансну частоту, якщо критерій амплітудного резонансу виявився не однозначним? Для розв'язку проблеми визначення явища резонансу по відношенню до електричних кіл було прийнято наступне компромісне рішення:

резонансом називають такий режим роботи електричного кола, яке містить ємності та індуктивності, за якого різниця фаз напруги і струму на вході кола дорівнює нулеві.

Тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Такий резонанс умовно називають **фазовим резонансом**, а частоту зовнішнього впливу, яка відповідає такому режиму - **резонансною частотою**.

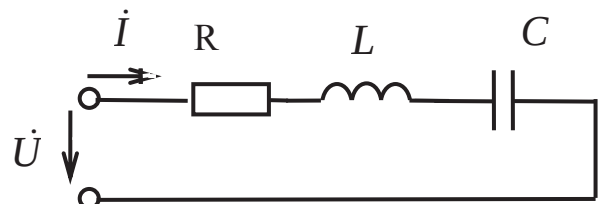


Рис. 4.1

Розглянемо послідовний контур, тобто коло, яке складається з послідовного з'єднання елементів R, L та C (рис. 4.1).

Комплексний опір послідовного контуру

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$

З визначення резонансу $\varphi = 0$ для послідовного контуру можна записати умову резонансу:

$$X = 0 \text{ або } X_L = X_C, \text{ при цьому вхідний опір є чисто активним } \underline{Z} = R.$$

Умова резонансу дозволяє визначити резонансну частоту послідовного контуру ω_0 .

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \quad \text{звідки} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Відзначимо, що резонансна частота послідовного контуру дорівнює частоті власних коливань, що не згасають, контуру, який складено з ємності та індуктивності, і не залежить від опору

$$\omega_{вл} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

На попередній лекції було встановлено, що максимальне значення обмінної потужності між джерелом енергії та послідовним R, L, C – колом визначається за виразом

$$P_{обм.м} = XI^2 = \omega(W_{маг.м} - W_{ел.м}).$$

При резонансі

$$X = 0, \quad P_{обм.м} = 0, \quad W_{маг.м} = W_{ел.м}, \text{ тобто } \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Висновки. При резонансі обмін енергією між магнітним полем індуктивності та електричним полем ємності збалансований. Між колом та джерелом обміну енергією не відбувається.

Джерело енергії передає в коло тільки активну потужність P, що поглинається опором R.

Введемо в розгляд так називані вторинні параметри контуру.

Опір ємності чи індуктивності при резонансі називається **характеристичним (хвильовим) опором** контуру та позначається буквою ρ .

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротністю контуру Q називається відношення характеристичного опору контуру до активного опору

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}.$$

Для розуміння фізичного сенсу добротності контуру Q визначимо напруги на ємності та індуктивності при резонансі.

$\dot{U}_L = jX_L \dot{I}$; $\dot{U}_C = -jX_C \dot{I}$, а з урахуванням того, що при резонансі $X_L = X_C = \rho$, то $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$, тобто напруги на ємності та індуктивності дорівнюють одна одній за модулем, направлені протилежно і таким чином компенсують одна одну. Тому резонанс в послідовному контурі називають **резонансом напруг**.

Побудуємо векторну діаграму для випадку резонансу (рис. 4.2).

Направимо струм $\dot{I}$ за дійсною віссю. Тоді напруга на індуктивності $\dot{U}_L$ буде випереджати струм за фазою на 90° , а напруга на ємності $\dot{U}_C$ - відставати на 90° , тобто напруги будуть направлені протилежно одна одній. Вхідна напруга

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_R.$$

Діючі напруги на індуктивності та ємності

$$U_L = U_C = \rho I = \rho \frac{U}{R} = QU.$$

Таким чином, добротність Q показує, у скільки разів напруга на ємності чи індуктивності при резонансі більш ніж напруга на вході кола.

Наприклад. При вхідній напрузі $U = 10\text{ В}$ і добротності $Q = 100$, напруга на ємності та індуктивності при резонансі досягатиме $U_{Cp} = U_{Lp} = 1000\text{ В}$.

В радіотехніці використовуються контури з високою добротністю, приблизно від 10^2 до 10^5 . Це досягається завдяки зменшенню активного опору R та збільшенню характеристичного опору ρ . Якщо в послідовному контурі взяти $R = 0$, то такий контур називається ідеальним. Вхідний опір ідеального послідовного контуру при резонансі дорівнює нулеві.

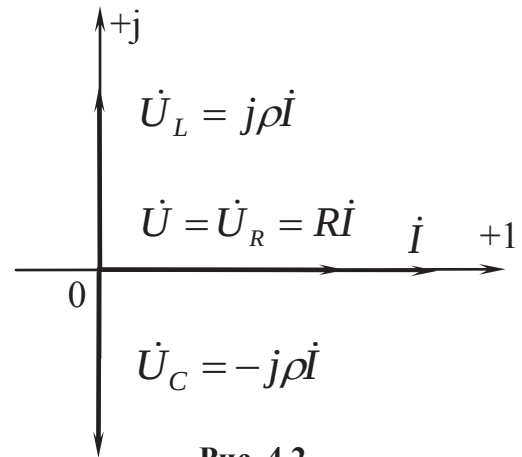


Рис. 4.2

4.2. Частотні та резонансні характеристики послідовного контуру.

Залежності модуля та аргументу комплексного опору (провідності) електричного кола від частоти будемо називати **частотними характеристиками**.

Визначимо частотні характеристики послідовного контуру.

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, |\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Побудуємо частотні характеристики послідовного контуру (рис. 4.3).

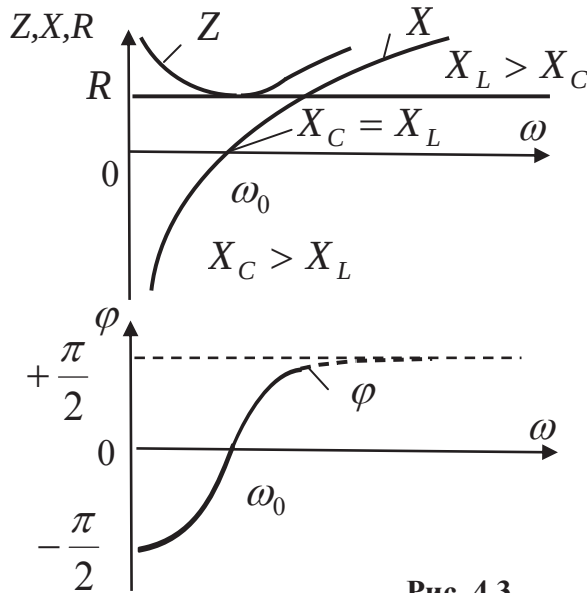


Рис. 4.3

Якщо $\omega < \omega_0$; $X < 0$; $\varphi < 0$ - реактивний опір кола носить ємнісний характер.

Якщо $\omega = \omega_0$; $X = 0$; $\varphi = 0$ - опір послідовного контуру чисто активний.

Якщо $\omega > \omega_0$; $X > 0$; $\varphi > 0$ - реактивний опір кола носить індуктивний характер.

Таким чином, у момент резонансу відбувається зміна характеру реактивного опору кола.

Залежності діючих значень (амплітуд) струмів та напруг від частоти будемо називати **резонансними кривими**.

Для побудови резонансних кривих одержимо залежності $I(\omega)$, $U_R(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$.

Визначимо струм і напруги на елементах в послідовному контурі.

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

Для того, щоб перейти від комплексних діючих значень до самих діючих значень, що їх показують вимірювальні прилади, необхідно взяти модуль від лівої та правої частини рівняння. Тоді маємо:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_R = RI; \quad U_C = \frac{1}{\omega C} I; \quad U_L = \omega L I.$$

Залежність $I(\omega)$ будемо, враховуючи, що при $\omega = 0$ та $\omega \rightarrow \infty$, $I = 0$, а при $\omega = \omega_0$, $I_0 = \frac{U}{R}$.

При побудові залежності $U_C(\omega)$, враховуємо, що при постійному струмі ємність являє собою розрив кола, тому при $\omega = 0$ напруга на ній дорівнює вхідній напрузі.

Визначимо, де знаходиться максимум напруги за частотою. Для цього здиференціюємо $U_C(\omega)$ і похідну дорівнюємо нулеві

$$\frac{dU_C(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 C} I(\omega) + \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{dI(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Величини I , ω , C є додатними. Щоб сума дорівнювала нулеві, похідна від струму повинна бути додатною $\frac{dI(\omega)}{d\omega} > 0$, тобто крива $I(\omega)$ на цій ділянці повинна зростати. Тому максимум $U_C(\omega)$ буде знаходитися лівіше від частоти ω_0 , тобто $\omega_C < \omega_0$.

Якщо $\omega \rightarrow \infty$, то $U_C \rightarrow 0$, причому скоріше за струм.

При побудові залежності $U_L(\omega)$ враховуємо, що при $\omega = 0$, $U_L = 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$, $X_L \rightarrow \infty$, що еквівалентно розриву кола. Тому напруга на індуктивності прямуватиме до вхідної напруги, тобто $U_L \rightarrow U$.

Визначимо, де знаходиться максимум напруги U_L за частотою. Здиференціюємо $U_L(\omega)$ і похідну дорівнюємо нулеві

$$\frac{dU_L(\omega)}{d\omega} = LI(\omega) + \omega L \cdot \frac{dI(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Це рівняння може виконуватися лише при умові $\frac{dI(\omega)}{d\omega} < 0$, тобто крива $I(\omega)$ на цій ділянці частоти повинна спадати. Тому максимум $U_L(\omega)$ буде знаходитися правіше від резонансної частоти, тобто $\omega_L > \omega_0$.

Як було встановлено раніше, на резонансній частоті $U_L = U_C$.

Залежність $U_R(\omega)$ буде повторювати залежність $I(\omega)$ з урахуванням коефіцієнта R .

На підставі вищенаведених міркувань на рис. 4.4 побудовані резонансні криві послідовного контуру.

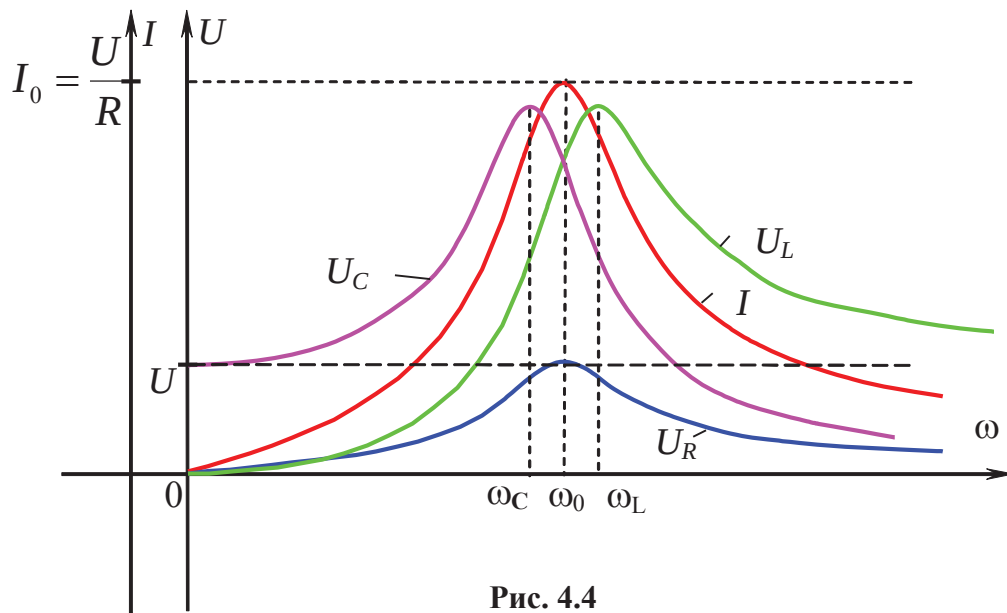


Рис. 4.4

Реальна котушка індуктивності містить наряду з індуктивністю L активний опір R_k , тому при експериментальному одержанні резонансних кривих максимальна напруга на котушці буде вище максимальної напруги на ємності.

Смугою пропускання кола $\Delta\omega$ називається інтервал частот, в межах якого струм $I(\omega)$ зменшується не більш ніж у $\sqrt{2}$ разів від максимального значення струму I_0 на резонансній частоті (рис. 4.5).

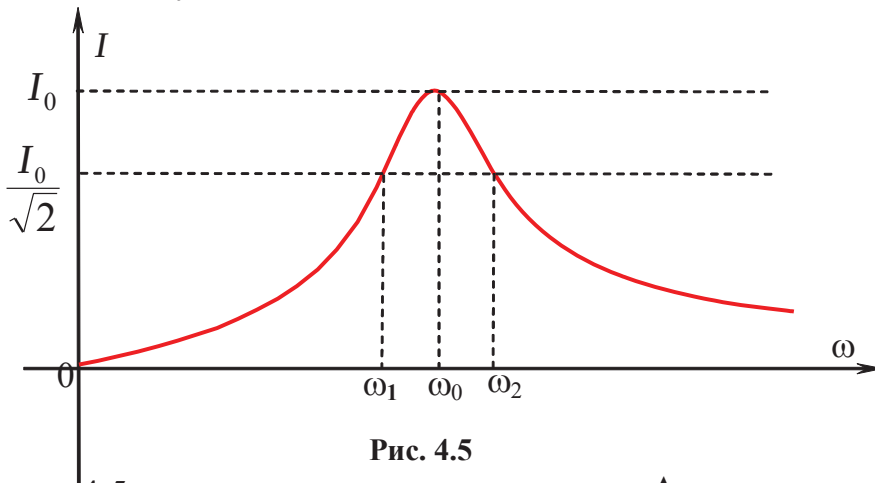


Рис. 4.5

З рис. 4.5 видно, що смуга пропускання $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, де ω_1 та ω_2 - граничні частоти смуги пропускання.

Для визначення граничних частот смуги пропускання можна скористатися виразом

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

де $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ - відносна частота, звідкіля $\eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q}$, або $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.

Таким чином, добротність контуру $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Чим вище добротність контуру, тим вуже смуга пропускання, тобто резонансна крива гостріша.

Резонанс в послідовному контурі можна отримати при сталій частоті зовнішньої напруги шляхом зміни параметрів L чи C . При цьому можна отримати залежності I , U_L , U_C від змінного параметру, які не будуть співпадати з резонансними кривими.

Залежності U_R , U_L , U_C від L чи C називають кривими настройки, щоб не плутати їх з резонансними кривими.

4.3. Комплексна провідність кола. Еквівалентні перетворення послідовного та паралельного з'єднання елементів. Трикутник провідностей.

Величина, яка є оберненою комплексному опору кола, називається **комплексною провідністю** (позначається $\underline{Y}$).

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = Ye^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G - jB.$$

Дійсну частину комплексної провідності позначають буквою G та називають **активною провідністю**.

Уявну частину позначають буквою B та називають **реактивною провідністю**.

Активна провідність завжди додатна, а реактивна – може бути як додатною, так і від'ємною величиною в залежності від знаку реактивного опору X .

Величина обернена повному опору кола називається **повною провідністю**.

$$Y = \frac{1}{Z} = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

Уведеним вище провідностям відповідає так званий трикутник провідностей (рис. 4.6).

Розглянемо послідовне з'єднання активного та реактивного опорів (рис. 4.7,а).

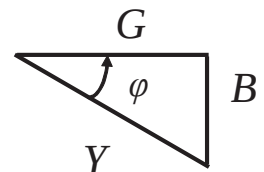


Рис. 4.6

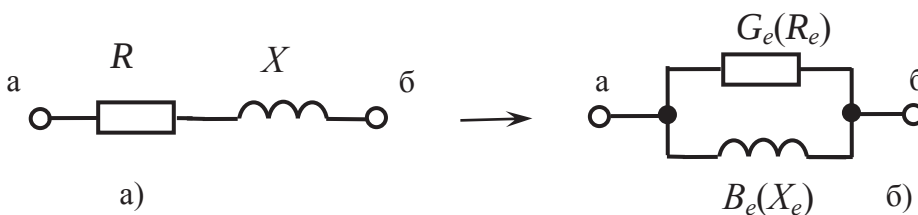


Рис. 4.7

Нехай реактивний опір має індуктивний характер.

Запишемо еквівалентну комплексну провідність ділянки кола

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G_e - jB_e. \quad (4.1)$$

Згідно виразу (4.1) ділянка послідовного кола *аб* може бути подана у вигляді паралельного з'єднання елементів (рис. 4.7,б) з еквівалентними активним та реактивним опорами. Еквівалентний активний опір при паралельному з'єднанні $R_e = \frac{1}{G_e}$, а еквівалентний реактивний опір - $X_e = \frac{1}{B_e}$.

Таким чином, будь яке послідовне з'єднання активного і реактивного елементів можна замінити еквівалентним паралельним. Так саме справедлива і зворотна заміна (рис. 4.8)

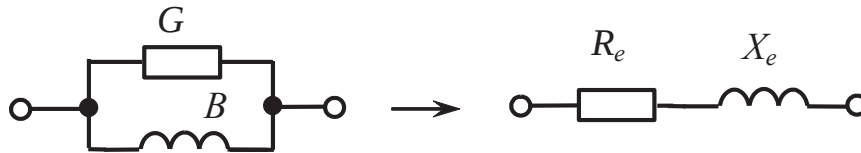


Рис. 4.8

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R_e + jX_e.$$

Слід відзначити, що параметри еквівалентних активних і реактивних опорів (провідностей) залежать від частоти ω , тому така заміна справедлива лише на фіксованій частоті.

Уведемо поняття активної і реактивної складової струму.

Для цього розглянемо паралельне коло (рис. 4.9), до якого прикладена напруга $\dot{U}$. За законом Ома

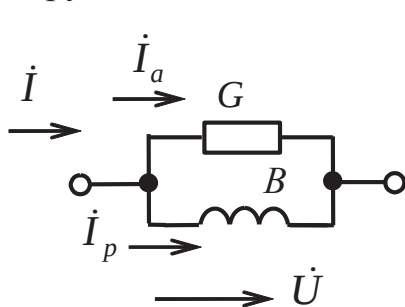


Рис. 4.9

$$\dot{I} = \dot{U} \underline{Y} = \dot{U} (G - jB) = \dot{U}G - j\dot{U}B = \dot{I}_a + \dot{I}_p.$$

Складові струму $\dot{U}G$, яка збігається за фазою з прикладеною напругою, називається активною складовою струму і позначається $\dot{I}_a$.

Складові струму $-j\dot{U}B$, яка відстає від напруги на кут 90° , називається реактивною складовою і позначається $\dot{I}_p$.

Таким чином, через активну провідність буде протікати активний струм, а через реактивну – реактивний струм.

Якщо $\dot{U}$ направити за дійсною віссю, то векторна діаграма струмів буде мати вигляд як на рис. 4.10.

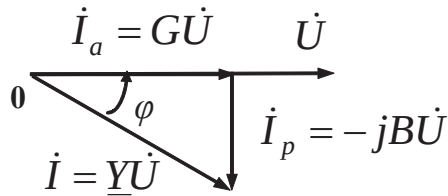


Рис. 4.10

Як приклад побудуємо векторну діаграму струмів для паралельного з'єднання елементів R , L , C (рис. 4.11).

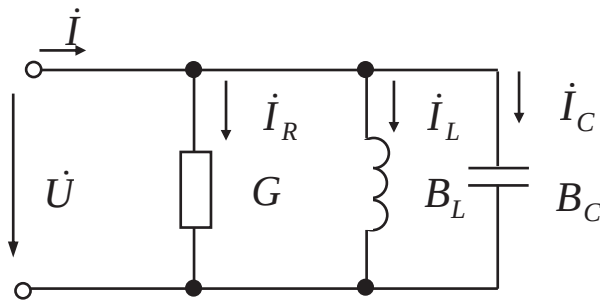


Рис. 4.11

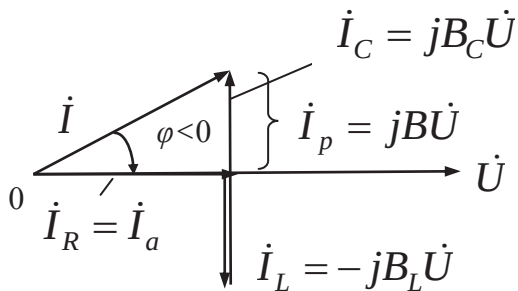
Для цього спочатку визначимо струм на вході кола.

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{U} \underline{Y} = \dot{U} (G - jB) = \dot{U} G - j\dot{U} B = \dot{U} G - j\dot{U} (B_L - B_C) = \\ &= \dot{U} G - j\dot{U} B_L + j\dot{U} B_C = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \end{aligned}$$

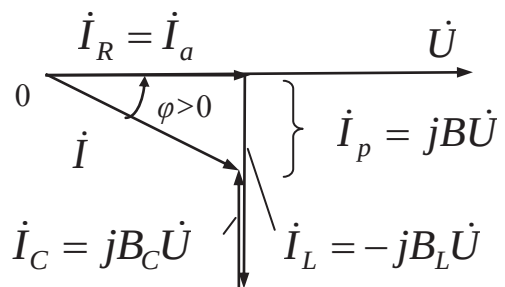
Направимо вектор напруги $\dot{U}$ за дійсною віссю, тобто $\dot{U} = U$.

Якщо $B_L < B_C$, тоді $I_L < I_C$ і $B = B_L - B_C < 0$, $\varphi < 0$. Векторна діаграма для цього випадку подана на рис. 4.12,а.

Якщо $B_L > B_C$, тоді $B > 0$, $\varphi > 0$. Векторна діаграма представлена на рис. 4.12,б.



а)



б)

Рис. 4.12

Лекція 9

План лекції:

- 4.4. Резонанс в паралельному контурі (резонанс струмів).
- 4.5. Частотні та резонансні характеристики паралельного контуру.
- 4.6. Умова передачі максимальної потужності від джерела напруги до навантаження.

4.4. Резонанс в паралельному контурі (резонанс струмів).

Коло, що складається з паралельних віток з різними за характером накопичувальними елементами, називається паралельним контуром.

З визначення виходить, що можливо 4 варіанти паралельного контуру (рис. 4.13).

Контур першого виду називається простим контуром тому що в інших трьох контурах разом із резонансом в паралельному контурі можливий резонанс в послідовному одному чи у двох контурах.

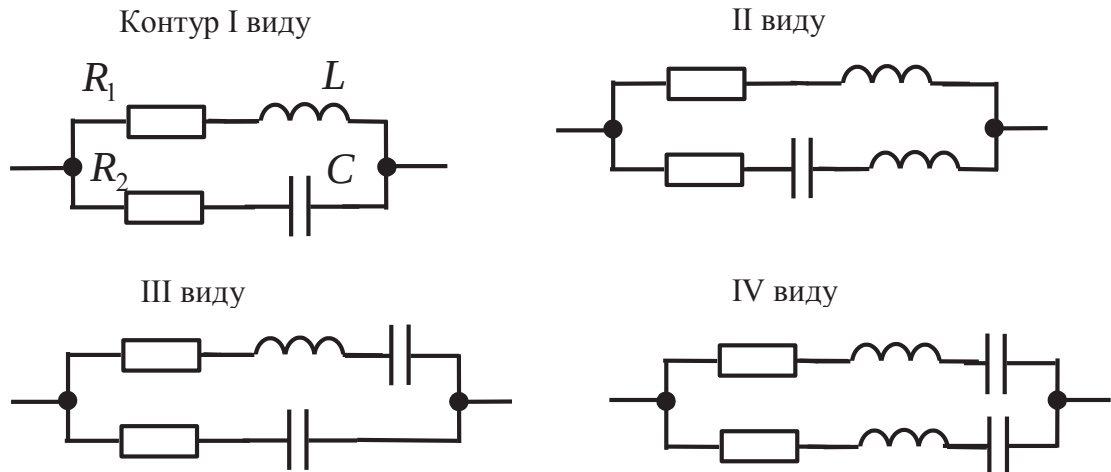


Рис. 4.13

Згадаємо визначення резонансу. Під резонансом розуміють такий режим роботи електричного кола, що містить ємності та індуктивності, при якому зсув фаз між струмом та напругою на вході кола дорівнює нулеві.

Комплексну провідність паралельних віток можна записати в вигляді

$$\underline{Y} = G - jB = Ye^{-j\varphi},$$

де G - активна провідність, B - реактивна провідність, $\varphi = \arctg \frac{B}{G}$ - кут зсуву фаз між струмом і напругою.

З визначення резонансу ($\varphi = 0$) випливає умова резонансу: $B = 0$.

Комплексна схема заміщення паралельного контуру наведена на рис. 4.14, де $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$.

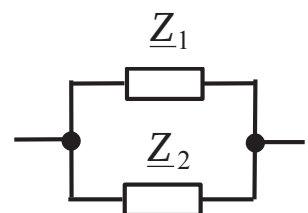


Рис. 4.14

Визначимо комплексну провідність паралельного контуру.

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_1 - jX_1}{R_1^2 + X_1^2} - \frac{R_2 - jX_2}{R_2^2 + X_2^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} - j\left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}\right) = \\ &= (G_1 + G_2) - j(B_1 + B_2) = G - jB.\end{aligned}$$

Умова резонансу для паралельного контуру будь якого виду

$$B = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 0.$$

З умови резонансу можна визначити резонансну частоту.

Визначимо її для простого паралельного контуру, тобто для контуру I виду. В цьому контурі (див. рис. 4.13)

$$X_1 = \omega L; \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C} \quad (X_2 = X_{L2} - X_{C2} = 0 - \frac{1}{\omega C}).$$

Підставимо в умову резонансу замість X_1 та X_2 їх значення та розв'яжемо одержане рівняння відносно частоти ω .

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0.$$

Приводимо вираз до загального знаменника і чисельник дорівнюємо нулеві

$$\omega L R_2^2 + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{R_1^2}{\omega C} - \frac{L^2 \omega}{C} = 0.$$

Після перетворення одержимо

$$\omega L \left(R_2^2 - \frac{L}{C}\right) = \frac{1}{\omega C} \left(R_1^2 - \frac{L}{C}\right), \text{ або } \omega^2 = \frac{1}{LC} \cdot \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}.$$

Враховуючи введені раніше позначення

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

отримаємо вираз для резонансної частоти паралельного контуру I виду

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Якщо в паралельному контурі прийняти $R_1 = R_2 = 0$, то такий паралельний контур називається ідеальним. Для нього

$$\omega_p = \omega_0.$$

В загальному випадку резонансна частота паралельного контуру відрізняється від резонансної частоти ідеального контуру ω_0 і залежить від співвідношення активних опорів та хвильового опора.

Проаналізуємо вираз для резонансної частоти паралельного контуру.

Випадок перший: $R_1, R_2 > \rho$. Добротність контуру $Q < 1$.

В контурах з низькою добротністю не проявляється ніяких особливостей в поведінці струмів і напруг, тому ми не будемо на них зупинятися.

Випадок другий: $R_1 > \rho, R_2 < \rho$ чи $R_1 < \rho, R_2 > \rho$.

При такому співвідношенні параметрів під коренем маємо від'ємне число, резонансна частота - уявна, і резонанс в колі з такими параметрами неможливий.

Випадок третій: $R_1 = R_2 = \rho$. Добротність контуру мала $Q < 1$.

Вираз для резонансної частоти невизначений, тому що в чисельнику і в знаменнику отримаємо нулі. Умова резонансу виконується на будь-яких частотах, тобто резонанс спостерігається на всіх частотах, тому його називають «байдужим» резонансом.

Випадок четвертий: $\rho \gg R_1, R_2$. При такій умові маємо контур з високою добротністю, в якому яскраво проявляються резонансні явища. Для практичного використання цей випадок найцікавіший. Розглянемо його детальніше.

Якщо $\rho \gg R_1, R_2$, то у виразі для ω_p активними опорами можна знехтувати, при цьому:

$$\omega_p \approx \omega_0; \quad X_1 = \omega_p L \approx \omega_0 L = \rho; \quad X_2 = -\frac{1}{\omega_p C} \approx -\frac{1}{\omega_0 C} = -\rho.$$

Тоді вираз для повної провідності контуру на частоті резонансу має вигляд

$$Y_{рез} = G_{рез} = \frac{R_1}{R_1^2 + \rho^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \rho^2} \approx \frac{R_1}{\rho^2} + \frac{R_2}{\rho^2} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2}.$$

Величина, що є зворотною $G_{рез}$, являє собою активний опір паралельного контуру при резонансі, який називають еквівалентним опором та позначають

$$R_{0e} = \frac{1}{G_{рез}} = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2} = \rho Q = (R_1 + R_2) Q^2,$$

де $Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2}$ - добротність паралельного контуру.

Таким чином, при резонансі еквівалентний опір паралельного контуру високої добротності в Q^2 разів вище за суму активних опорів віток.

Простежимо якісно залежність повного опору паралельного контуру від частоти (випадок четвертий, $\rho \gg R_1, R_2$) (рис. 4.15).

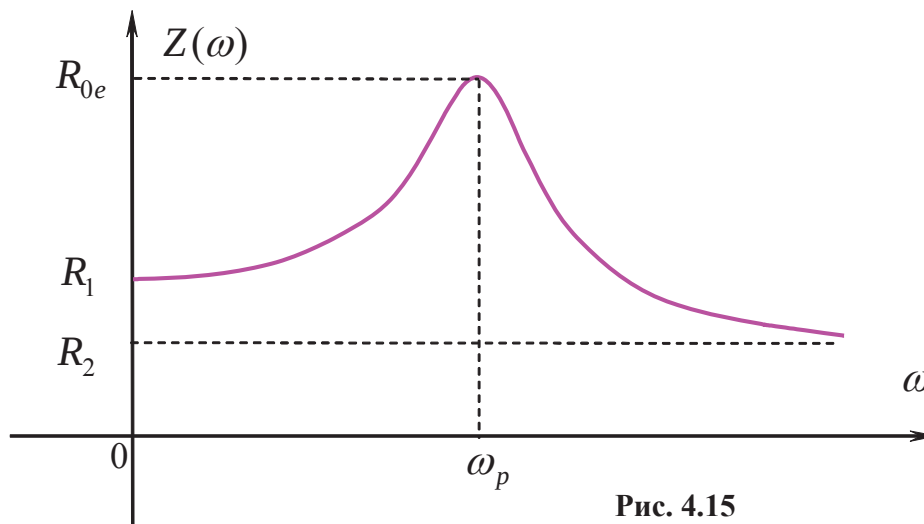


Рис. 4.15

З аналізу схеми паралельного контуру першого виду видно, що при $\omega = 0$, $Z = R_1$, а при $\omega \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow R_2$.

На резонансній частоті $\omega = \omega_p$ повний опір

$$Z = R_{0e} = (R_1 + R_2)Q^2 = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2}.$$

Висновки. Вхідний опір паралельного контуру на резонансній частоті досягає максимального значення, яке в Q^2 разів перевищує сумарний активний опір віток. В ідеальному паралельному контурі ($R_1 = R_2 = 0$) при $\omega \rightarrow \omega_p$ вхідний опір прямує до нескінченності, тобто контур не пропускає електричного струму (еквівалентний розриву кола).

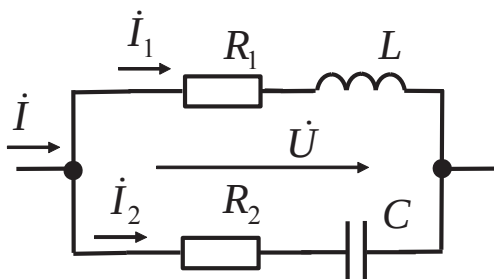


Рис. 4.16

Побудуємо векторну діаграму паралельного контуру I виду (рис. 4.16) для випадку резонансу. Позначимо струми в вітках - I_1 та I_2 , а загальний струм - I .

Представимо загальний струм у вигляді суми активної та реактивної складових $\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_p$. Модуль реактивної складової можна записати через реактивну провідність

$$I_p = UB = U \left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_p} = U \left(\frac{\rho}{R_1^2 + \rho^2} - \frac{\rho}{R_2^2 + \rho^2} \right) \approx$$

$$\approx \frac{U}{\rho} - \frac{U}{\rho} = I_{p1} - I_{p2} = 0.$$

При резонансі $B = 0$, тому реактивна складова загального струму дорівнює нулеві. Реактивні складові струмів в вітках I_{p1} та I_{p2} дорівнюють між собою за величиною, протилежно спрямовані і компенсують одна одну. Тому резонанс в паралельному контурі отримав назву **резонансу струмів**.

Загальний струм при резонансі дорівнює активному струму

$$I = I_a = UG = U \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_p} \approx U \left(\frac{R_1}{\rho^2} + \frac{R_2}{\rho^2} \right) =$$

$$= I_{a1} + I_{a2} = \frac{U}{\rho} \cdot \frac{R_1 + R_2}{\rho} = I_p \cdot \frac{1}{Q}.$$

Звідки отримуємо $I_p = QI_a = QI$. При $Q \gg 1$, $I_p \gg I_a$.

Висновок. При резонансі струми у паралельних вітках контуру високої добротності в Q разів перевищують струм на вході контуру.

Векторна діаграма паралельного контуру при $\omega = \omega_p$ наведена на рис. 4.17.

Аналогічно розглянутому вище послідовному контуру, при резонансі паралельний контур споживає від джерела тільки активну потужність. Обміну реактивною потужністю між джерелом та колом не відбувається. Обмін енергією між магнітним полем індуктивності та електричним полем ємності є збалансованим, тобто енергія, що накопичена за чверть періоду в електричному полі ємності, за другу чверть періоду повністю віддається індуктивності та навпаки.

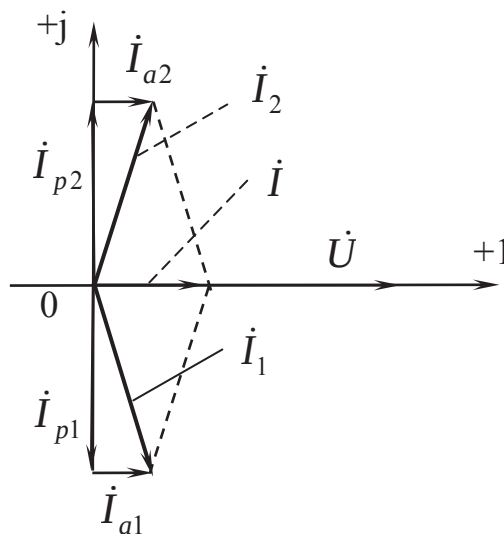


Рис. 4.17

4.5. Частотні та резонансні характеристики паралельного контуру.

Аналіз частотних та резонансних характеристик паралельних контурів I – IV виду, що містять активні опори у вітках з ємністю і індуктивністю, доволі складний, а отримані при цьому висновки не виправдовують витрат часу.

Для отримання уяви про частотні та резонансні характеристики паралельного контуру розглянемо найпростішу схему (рис. 4.18,а). В цій схемі:

$$\underline{Y} = G - jB = G - j(B_L - B_C); \quad B = \frac{1}{\omega L} - \omega C.$$

Модуль і аргумент повної провідності

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

Частотні характеристики такого паралельного контуру наведені на рис. 4.18,б.

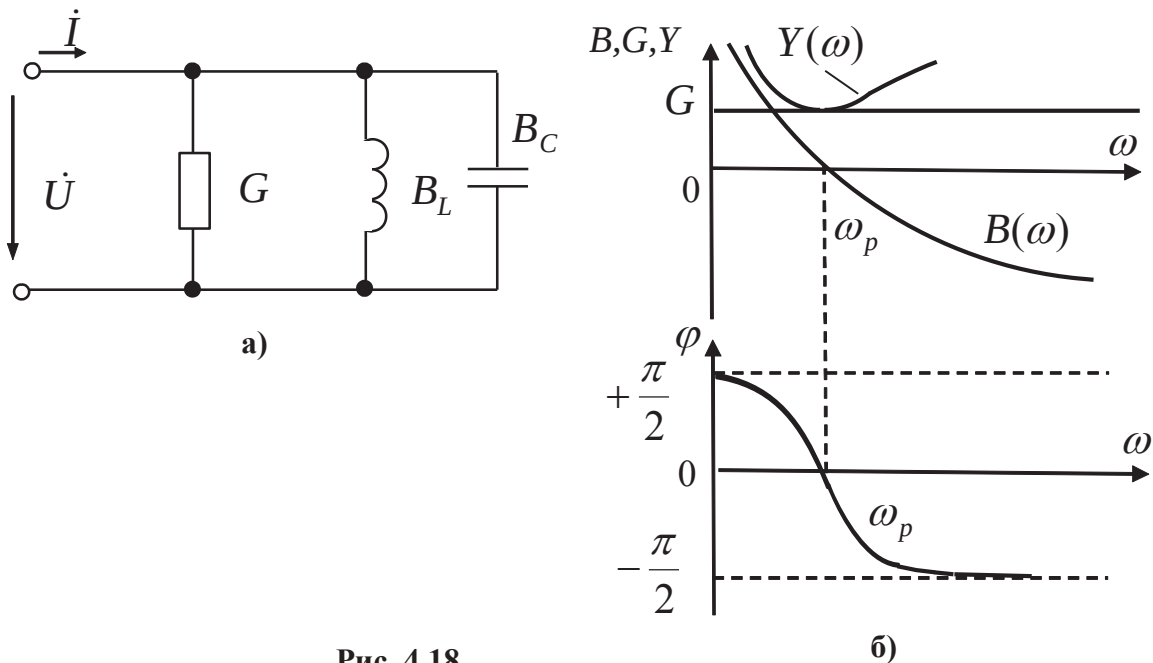


Рис. 4.18

При резонансі відбувається зміна характеру реактивної провідності. Резонансні криві контуру наведені на рис. 4.19.

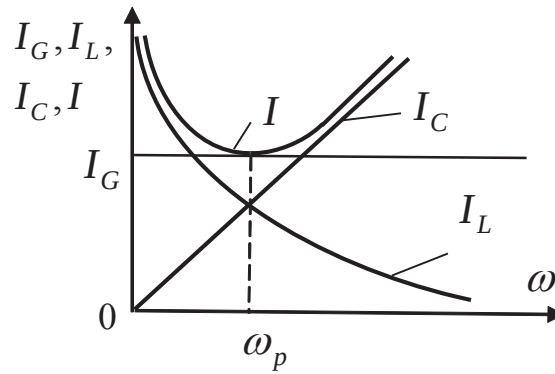


Рис. 4.19

4.6. Умова передачі максимальної активної потужності від джерела до навантаження.

На практиці часто необхідно підібрати такий комплексний опір навантаження, який дозволить для даного джерела енергії забезпечити режим передачі до навантаження найбільшої активної потужності.

Нехай джерело енергії являє собою будь який активний двополіусник (рис. 4.20,а). Згідно теореми Тевенена представимо його у вигляді джерела напруги (рис. 4.20,б).

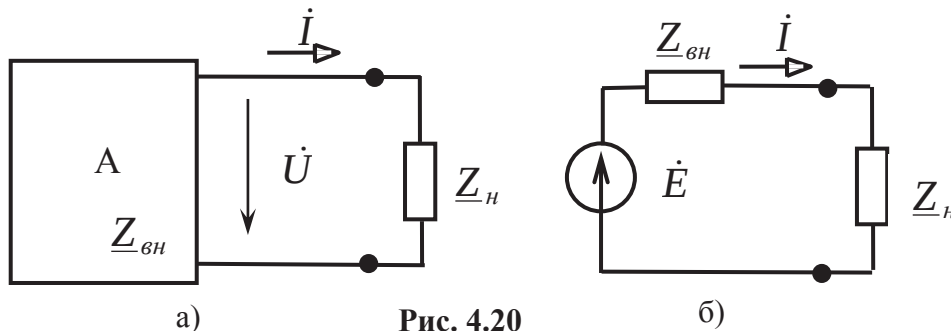


Рис. 4.20

У загальному випадку внутрішній опір джерела напруги $\underline{Z}_{вн} = R_{вн} + jX_{вн}$ і опір навантаження $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$ є комплексними.

Активна потужність, яка передається у навантаження, $P = I^2 R_н$. При $\underline{Z}_н = 0$ ($R_н = X_н = 0$) активна потужність $P = 0$.

При $\underline{Z}_н \rightarrow \infty$ ($R_н \neq 0$) струм $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{вн} + \underline{Z}_н} \rightarrow 0$ і активна потужність у навантаженні також прямує до нуля.

Визначимо, при якому опорі навантаження активна потужність, яка передається від джерела до навантаження, буде максимальною.

Розглянемо вираз для активної потужності

$$P = R_н I^2 = R_н \frac{E^2}{|\underline{Z}_н + \underline{Z}_{вн}|^2} = E^2 \frac{R_н}{(R_н + R_{вн})^2 + (X_н + X_{вн})^2}.$$

Максимум активної потужності буде в тому випадку, коли знаменник буде мінімальним. В знаменнику ми маємо суму квадратів двох величин. З двох доданків тільки другий доданок може дорівнювати нулеві. Тобто

$$X_n + X_{en} = 0, \text{ або } X_n = -X_{en}.$$

Це перша умова передачі максимальної активної потужності від джерела до навантаження, яка відповідає умові послідовного резонансу в колі.

Таким чином, максимум активної потужності, що передається у навантаження, може мати місце за умови, якщо навантаження та джерело мають однакові за модулем, але різні за характером реактивні опори.

При виконанні цієї умови вираз для активної потужності набуває вигляду

$$P = E^2 \frac{R_n}{(R_n + R_{en})^2}.$$

Визначимо, при якому співвідношенні між R_n та R_{en} активна потужність буде максимальна. Для цього візьмемо похідну від потужності за активним опором навантаження і дорівнюємо її нулеві

$$\frac{dP}{dR_n} = E^2 \frac{(R_n + R_{en})^2 - 2R_n(R_n + R_{en})}{(R_n + R_{en})^4} = 0.$$

$$\text{Звідки } R_n + R_{en} - 2R_n = 0, \text{ або } R_n = R_{en}.$$

Це друга умова передачі максимальної активної потужності.

Об'єднаємо першу та другу умову. Тоді маємо

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_{en}^*.$$

Тобто, комплексний опір навантаження повинен бути комплексно спряженим до внутрішнього опору джерела.

Режим, при якому в навантаження передається максимальна активна потужність, називається **узгодженим режимом**.

Висновок. Максимальна активна потужність передається від джерела до навантаження при умові, що опір навантаження дорівнює комплексно спряженому внутрішньому опору джерела енергії.

За цієї умови потужність, що споживається навантаженням, дорівнює потужності втрат всередині джерела, тобто

$$P_n = P_{дж} \text{ або } R_n I^2 = R_{en} I^2.$$

Таким чином, ККД джерела в режимі передачі максимальної активної потужності

$$\eta = \frac{R_n I^2}{EI} = \frac{R_n}{E} \cdot \frac{E}{R_n + R_{en}} = \frac{R_n}{R_n + R_{en}} = 0,5.$$

В потужних енергетичних системах ККД повинен бути достатньо високим (75-90%), що відповідає умові $R_n \gg R_{en}$. При цьому у навантаження передається потужність менша за максимальну. В радіотехнічних пристроях, де потужності сигналу не великі, а ККД не має особливого значення,

використовується режим передачі максимальної потужності, тобто узгоджений режим.

Приклади узгодження.

1. В телевізійних антенах потужність сигналу дуже мала і щоб передати його з мінімальними втратами, вихідний опір самої антени обов'язково узгоджують з вхідним опором кабелю, а вихідний опір кабелю – з вхідним опором першого каскаду телевізійного приймача.

2. В інструкціях з експлуатації потужних підсилювачів звукових частот обов'язково вказується, що до виходу не можна підключати інші типи акустичних систем, що не узгоджені. Це не можна робити тому, що при узгодженому навантаженні потужність підсилювача порівну поділяється між вихідним каскадом підсилювача та акустичною системою. Якщо з'ясується, що $R_n < R_{вн}$, то потужність, яку повинен розсіювати вихідний каскад, може збільшитися майже вдвічі, що призведе до виходу його з ладу.

3. При прийомі УВЧ - терапії у лікарні після ввімкнення апарату медсестра обов'язково підстроює прилад так, щоб забезпечити передачу максимальної активної потужності від генератора надвисоких частот до місця, що прогрівається, і тільки після цього пацієнт відчуває появу тепла.

В тих випадках, коли не виконуються умови передачі максимальної активної потужності і не можна змінювати опір навантаження, то між джерелом і навантаженням вмикається узгоджувальний пристрій, наприклад, трансформатор.

РОЗДІЛ 5

ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Лекція 10

План лекції:

- 5.1. Основні поняття й визначення.
- 5.2. Схема з'єднання «зірка-зірка».
- 5.3. Аналіз схеми з'єднання «зірка-зірка».

Вироблення, передача й розподіл електричної енергії між споживачами відбувається за допомогою трифазних електричних кіл. Значну частину споживачів електроенергії становлять трифазні системи. Таке широке практичне використання трифазних систем обумовлено наступними чинниками:

- 1. Найбільш економічна, з погляду вартості проводів, передача енергії на значні відстані (необхідно усього три проводи).
- 2. Незалежність від часу сумарної миттєвої потужності симетричної трифазної системи – це врівноважена система мінімальної фазності. При цьому потужність від генератора в навантаження подається рівномірно протягом усього періоду.
- 3. Простота створення обертового в просторі магнітного поля, що використовується в найпростішому й розповсюдженішому асинхронному двигуні.
- 4. Два рівні напруг: лінійна й фазна, що дозволяє використовувати без трансформаторів навантаження, розраховані на різні напруги.

5.1. Основні поняття й визначення.

Багатофазною системою називається сукупність електричних кіл, у яких діють гармонічні ЕРС однакової частоти, зсунуті за фазою на однаковий кут і створювані спільним джерелом.

Кожне з електричних кіл, що входить до складу багатофазної системи, називають фазою (не плутати з початковою фазою гармонічного коливання).

Сукупність ЕРС, які діють у багатофазній системі, називають багатофазною системою ЕРС.

Система багатофазних ЕРС (струмів, напруг) називається симетричною, якщо амплітуди всіх ЕРС однакові за величиною, а початкові фази відрізняються на однаковий кут.

Система електричних кіл (навантаження) називається симетричною, якщо комплексні опори окремих фаз однакові.

Для одержання трифазної системи ЕРС використовується трифазний генератор.

На рис. 5.1 представлено схематичне зображення трифазного генератора. Він складається з нерухомої частини-статора (заштрихована зона) і рухливої

частини - ротора. Статор виконаний із трансформаторного заліза, у пазах якого покладені три однакові обмотки, розташовані в просторі під кутом 120° одна до одної.

Початок першої обмотки позначають буквою А, кінець -Х, другої - В-У, третьої - С-З.

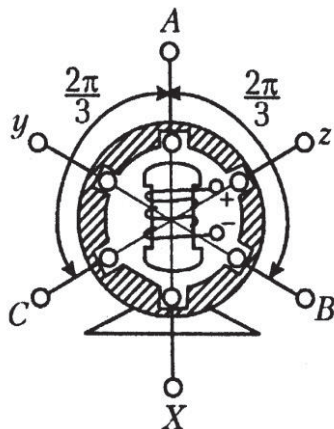


Рис. 5.1

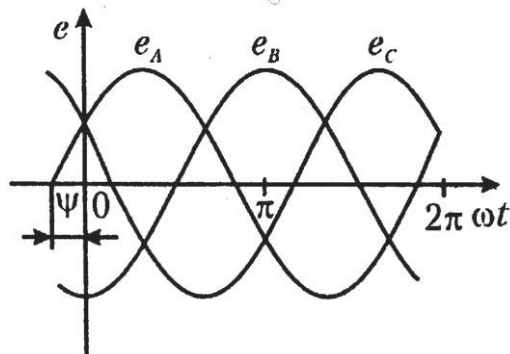


Рис. 5.2

Ротор генератора являє собою електромагніт, що розташований на осі гідротурбіни, парової турбіни тощо. Ротор генератора обертається від дії зовнішніх сил неелектричної природи, найчастіше, механічних.

При обертанні магніту (ротора) в обмотках статора відповідно до закону електромагнітної індукції по черзі наводяться ЕРС. В силу того, що обмотки статора зсунуті у просторі на кут $\pm 120^\circ$, то ЕРС обмоток будуть зсунуті за фазою на кут $\pm 120^\circ$.

На рис. 5.2 наведена часова діаграма трифазної системи ЕРС. Для миттєвих значень трифазної симетричної системи ЕРС маємо:

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ),$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + \psi + 120^\circ).$$

Як правило, початкову фазу ψ приймають такою що дорівнює нулеві, тоді ЕРС фаз у комплексній формі можна записати:

$$\dot{E}_A = Ee^{j0}, \dot{E}_B = Ee^{-j120^\circ}, \dot{E}_C = Ee^{j120^\circ}.$$

Для запису симетричної системи ЕРС використовують так званий оператор повороту $a = e^{j120^\circ} = -0,5 + j0,866$. Властивості оператора повороту:

$$a^2 = e^{j240^\circ} = -0,5 - j0,866; \quad a^3 = e^{j360^\circ} = e^{j0} = 1; \quad a + a^2 + a^3 = 0.$$

Оператор повороту a – це одиничний вектор, модуль якого $|a|=1$.

У комплексній площині оператор повороту a і його ступеня a^2 та a^3 зображуються у вигляді симетричної системи одиничних векторів

(рис. 5.3). Необхідно підкреслити, що при розгляді трифазних кіл комплексну площину прийнято повертати на кут 90° проти годинникової стрілки.

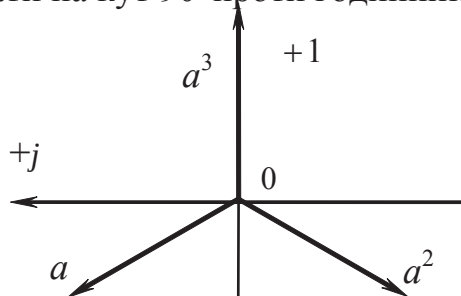


Рис. 5.3

ЕРС фаз В та С із використанням оператора повороту записуються в такий спосіб: $\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A$, $\dot{E}_C = a \dot{E}_A$.

Векторна діаграма симетричного трифазного джерела ЕРС має вигляд, представлений на рис. 5.4.

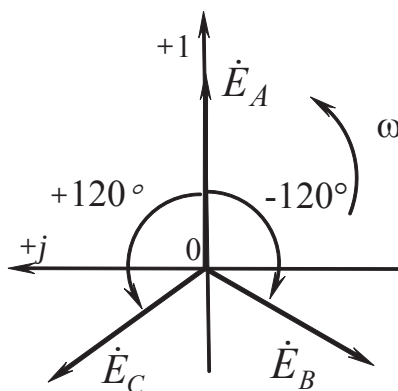


Рис. 5.4

Трифазна система ЕРС називається зв'язаною, якщо електричні кола, що утворюють її, мають гальванічні зв'язки, і незв'язаною - якщо не мають.

На практиці використовуються тільки зв'язані трифазні системи. Зв'язану систему можна отримати шляхом з'єднання або кінців обмоток генератора в один вузол (з'єднання зіркою), або послідовним з'єднанням кінців одних обмоток з початками наступних (з'єднання трикутником). Навантаження, як і генератор, також може з'єднуватися або зіркою (Y), або трикутником (Δ). Залежно від цього розрізняють такі види з'єднань: зірка-зірка, зірка-трикутник, трикутник - зірка й трикутник-трикутник.

5.2. Схема з'єднання «зірка-зірка».

На клемну колодку генератора виходять шість виводів: початки обмоток А, В, С та кінці - Х,У,З (рис. 5.5). З'єднання джерела зіркою одержують шляхом з'єднання кінців обмоток Х,У,З в одну точку, називану нейтральною точкою джерела. На клемній колодці таке з'єднання виглядає так, як показано на рис. 5.5.

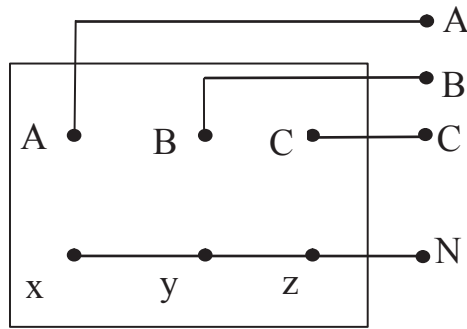


Рис. 5.5

Зв'язана трифазна система може бути трипровідною або чотиріпровідною (з нульовим або нейтральним проводом). Схема трифазного кола з нульовим проводом представлена на рис. 5.6.

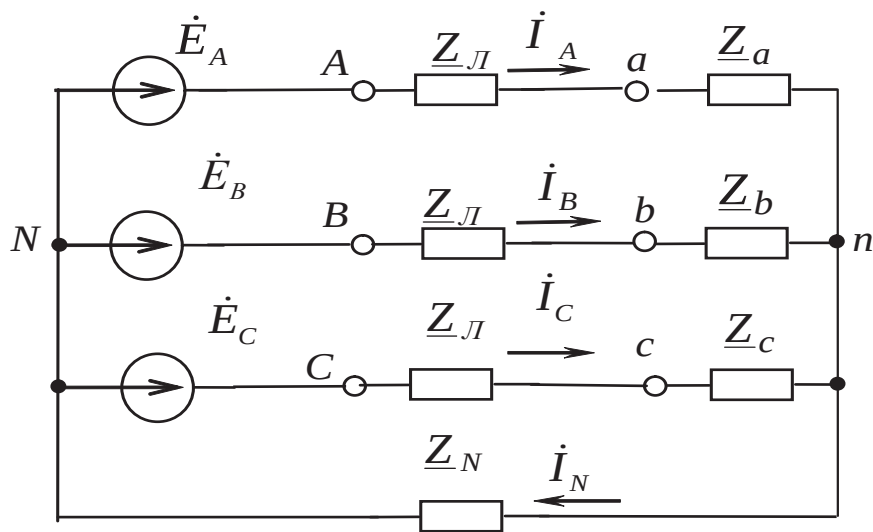


Рис. 5.6

Тут N - нейтральна точка джерела (генератора), n - нейтральна точка навантаження. Проводи $A-a$, $B-b$, $C-c$ - лінійні проводи. $\underline{Z}_L$ - опір лінійного проводу. Струми в лінійних проводах $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ - називаються лінійними струмами. Струми у фазах джерела або у фазах навантаження називають фазними. У такій схемі фаза джерела, лінійний провід й фаза навантаження з'єднані послідовно. Тому при з'єднанні зірка-зірка лінійні струми збігаються з фазними $\dot{I}_L = \dot{I}_\phi$, тобто існує одна система струмів.

Провід, що з'єднує нейтральні точки джерела й навантаження називають нейтральним або нульовим проводом. $\dot{I}_N$ - струм у нейтральному проводі.

Напруги $\dot{U}_{AN}$, $\dot{U}_{BN}$, $\dot{U}_{CN}$ - фазні напруги джерела, а напруги $\dot{U}_{an}$, $\dot{U}_{bn}$, $\dot{U}_{cn}$ - фазні напруги навантаження. Напруги між лінійними проводами - $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ - називаються лінійними напругами джерела, напруги $\dot{U}_{ab}$, $\dot{U}_{bc}$, $\dot{U}_{ca}$ - лінійними напругами навантаження.

Напруга між нейтральними точками навантаження й джерела $\dot{U}_{nN}$ називається напругою зсуву нейтралі або «зсувом нейтралі».

Одержимо з розгляду векторної діаграми співвідношення між фазними й лінійними напругами симетричного джерела (рис. 5.7). На векторних діаграмах трифазних кіл напруги прийнято направляти від другого індексу до першого, тобто напруга $\dot{U}_{AB}$ спрямована від точки B до точки A . Опустимо перпендикуляр із точки N на вектор $\dot{U}_{AB}$ й одержимо прямокутний трикутник з гострим кутом 60° .

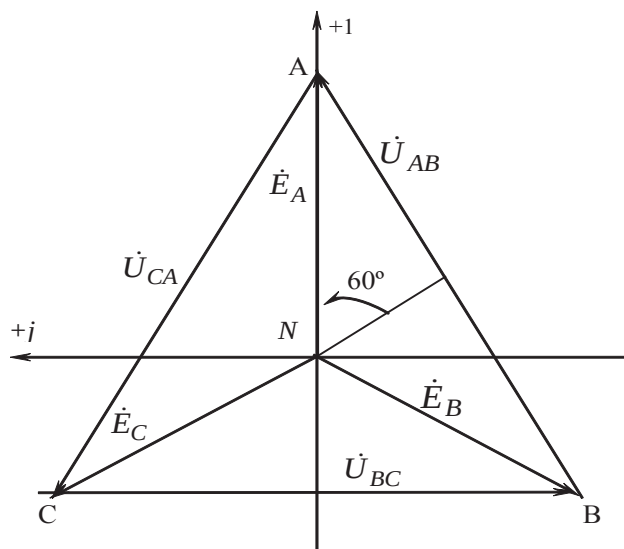


Рис. 5.7

Перпендикуляр ділить відрізок AB навпіл, тому

$$\sin 60^\circ = \frac{U_{AB}}{2E_A} = \frac{U_L}{2U_\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси одержуємо співвідношення між лінійними та фазними напругами для симетричного трифазного джерела $U_L = \sqrt{3}U_\phi$. На щитках електроживлення часто можна побачити написи 380/220 або 220/127. Таким чином зазначають лінійну й фазну напругу симетричного трифазного джерела.

5.3. Аналіз схеми з'єднання «зірка-зірка».

Постановка задачі: задані ЕРС фаз симетричного джерела й комплексні опори електричного кола. Необхідно розрахувати струми у всіх вітках кола й напруги на опорах навантаження.

У загальному випадку розрахунок трифазних кіл нічим не відрізняється від розрахунку кіл гармонічного струму із трьома джерелами.

Схема, яка зображена на рис. 5.6, має чотири вітки. Тому для розрахунку електричного кола методом рівнянь Кірхгофа необхідно розв'язати систему із

чотирьох рівнянь: одне рівняння записується за першим законом Кірхгофа й три - за другим.

Для розрахунку кола методом контурних струмів потрібно розв'язати систему трьох рівнянь (три контури), а методом вузлових напруг - тільки одне рівняння. Зупинимося на останньому методі. Вузол N звичайно приймають за базисний. Тоді напруга зсуву нейтралі запишеться у вигляді (див. метод вузлових напруг):

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_A \dot{E}_A + \underline{Y}_B \dot{E}_B + \underline{Y}_C \dot{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \text{ де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_A};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_B}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}; \quad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Запишемо другий закон Кірхгофа для фази A , замкнувши її напругою $\dot{U}_{nN}$.

$$\dot{E}_A = (\underline{Z}_L + \underline{Z}_A) \dot{I}_A + \dot{U}_{nN}, \text{ звідси } \dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_A}.$$

$$\text{Аналогічно } \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

Струм у нейтральному проводі визначимо за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Напруги у фазах навантаження й лінійних проводах визначають за законом Ома.

$$\dot{U}_A = \underline{Z}_A \dot{I}_A; \quad \dot{U}_B = \underline{Z}_B \dot{I}_B; \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C; \quad \dot{U}_L = \dot{I}_L \underline{Z}_L.$$

Побудову векторної діаграми трифазного кола при з'єднанні «зірка-зірка» (рис. 5.8) починають із симетричної системи ЕРС.

1. Вибираємо масштаби $m_U = \dots B / \text{см}$, $m_I = \dots A / \text{см}$ і в масштабі відкладаємо фазні ЕРС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ симетричного джерела. Для визначеності задамося типом навантаження й опором нейтрального проводу:

$$\underline{Z}_L = 0, \quad \underline{Z}_A = R, \quad \underline{Z}_B = jX_L, \quad \underline{Z}_C = -jX_C.$$

2. Відкладаємо напругу зсуву нейтралі $\dot{U}_{nN}$ й одержуємо нейтральну точку навантаження n .

3. З'єднуємо точку n із точками A, B, C й одержуємо фазні напруги навантаження $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

4. Відносно фазних напруг навантаження відкладаємо струми у фазах $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ з урахуванням типу опорів навантаження фаз.

5. Додаючи струми $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$, одержуємо струм в нейтральному проводі $\dot{I}_N$.

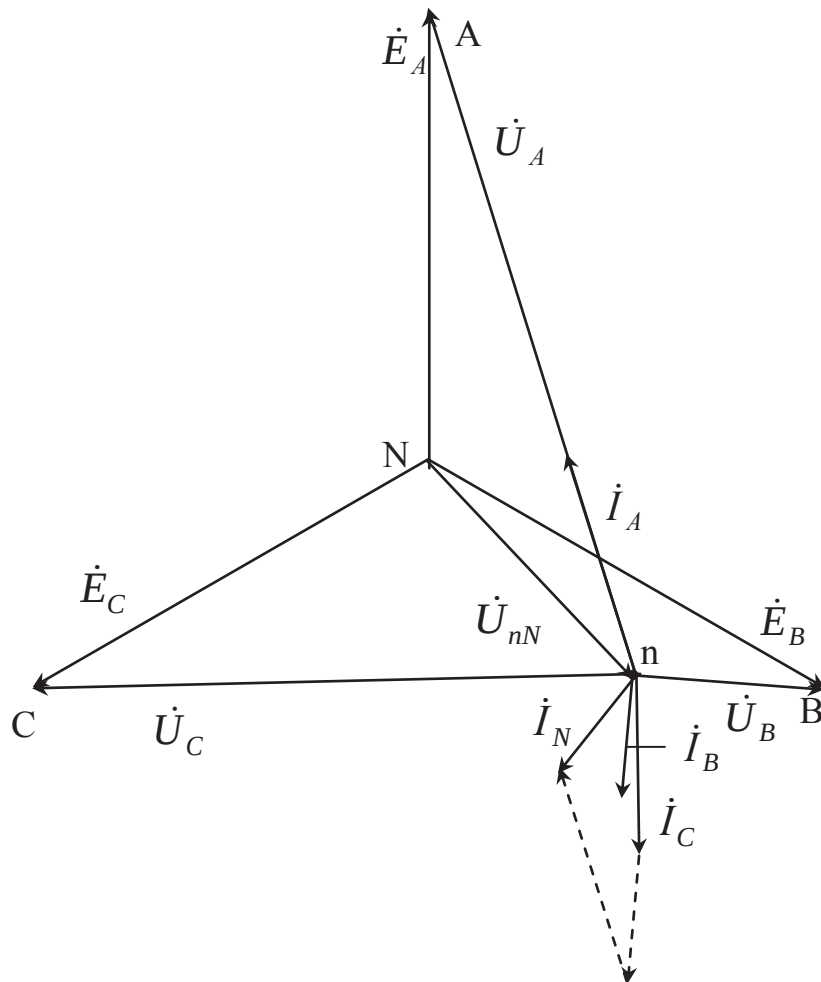


Рис. 5.8

Необхідно звернути увагу на те, що поява напруги зсуву нейтралі приводить до «перекосу фаз», тобто різкої несиметрії напруг у фазах навантаження. У фазах *A* й *C* напруга значно зросла, а у фазі *B* - зменшилася. Це може привести до виходу з ладу електроустаткування, підключеного до фаз *A* й *C*, і поганій роботі (при зниженій напрузі) устаткування у фазі *B*.

При живленні житлових будинків такий режим допускати не можна. Щоб уникнути появи напруги зсуву нейтралі нейтральні точки *N* й *n* повинні бути надійно з'єднані проводом з мінімальним опором.

Лекція 11

План лекції:

5.4. Схема з'єднання «трикутник - трикутник».

5.5. Аварійні режими трифазного кола, навантаження якого з'єднане зіркою.

5.4. Схема з'єднання «трикутник - трикутник».

З'єднання джерела трикутником одержують шляхом з'єднання кінця попередньої фази з початком наступної. На клемній колодці таке з'єднання виглядає, як показано на рис. 5.9.

При з'єднанні трифазного кола трикутником (рис. 5.10) лінійні й фазні напруги збігаються, тобто $U_L = U_\phi$, а лінійні й фазні струми відрізняються один від одного. Таким чином, маємо дві системи струмів: лінійну й фазну, і одну систему напруг. У симетричному трифазному колі, з'єднаному за схемою «трикутник-трикутник»,

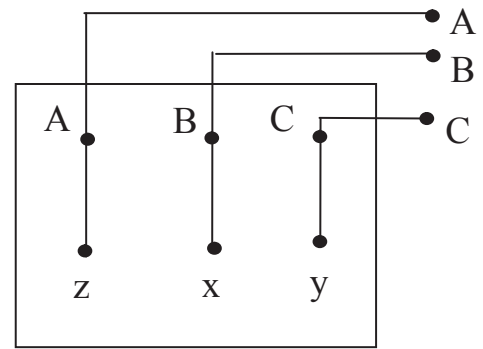


Рис. 5.9

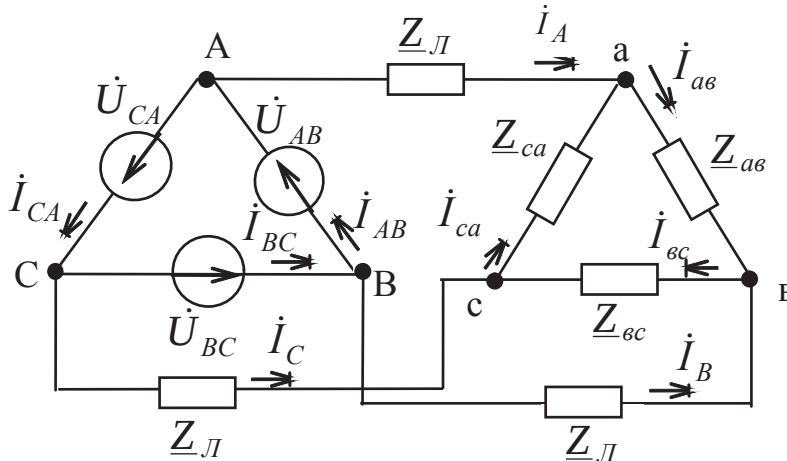


Рис. 5.10

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi, \quad U_L = U_\phi.$$

Для розрахунку трифазного кола, у якому навантаження з'єднане трикутником, зовсім не важливо за якою схемою з'єднане симетричне трифазне джерело. Тому схему з'єднання обмоток генератора звичайно не вказують, і розрахункова схема виглядає, як показано на рис. 5.11.

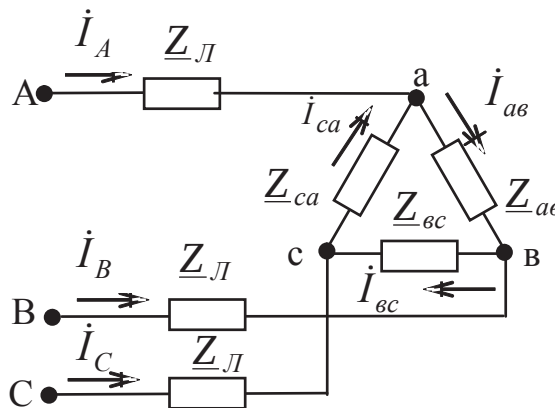


Рис. 5.11

Для розрахунку такого кола трикутник опорів навантаження перетворюють в еквівалентне з'єднання зіркою. Розраховують коло зірка-зірка,

а потім, знаючи лінійні струми $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ й лінійні напруги $\dot{U}_{av}, \dot{U}_{вс}, \dot{U}_{ca}$, розраховують фазні струми навантаження.

Побудуємо векторну діаграму (рис. 5.12) несиметричного трифазного кола, з'єднаного за схемою трикутника для випадку, коли $\underline{Z}_L = 0$.

1. Відкладаємо симетричну систему напруг джерела, що збігається із системою фазних напруг навантаження, тому що

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{av}, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{вс}, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{ca}.$$

2. Відносно фазних напруг відкладаємо фазні струми $\dot{I}_{av}, \dot{I}_{вс}, \dot{I}_{ca}$.

3. На підставі першого закону Кірхгофа одержуємо лінійні струми й будуємо їх як різницю фазних струмів:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{av} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{вс} - \dot{I}_{av}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{вс}.$$

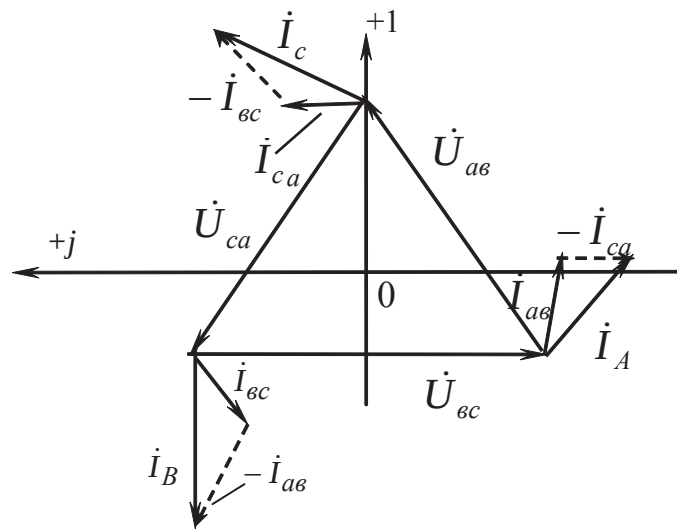


Рис. 5.12

Якщо в схемі є опори лінії й навантаження несиметричне, то після побудови симетричної системи напруг джерела відкладають напруги у фазах ліній $\dot{U}_{Aa}, \dot{U}_{Bb}, \dot{U}_{Cc}$ й, з'єднавши точки а, в, с, одержують фазні напруги навантаження. Далі діаграма будується аналогічно розглянутій вище схемі.

5.5. Аварійні режими трифазного кола, навантаження якого з'єднане зіркою.

5.5.1. Коротке замикання однієї з фаз симетричного навантаження.

Припустимо, що в трифазному двигуні відбулося замикання витків в одній з обмоток, наприклад у фазі А (рис. 5.13)

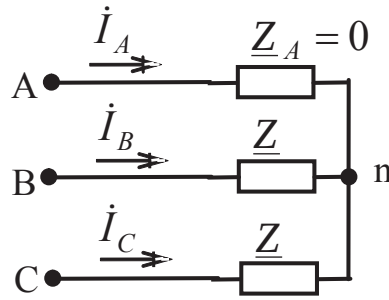


Рис. 5.13

В силу того, що $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \infty$, то розрахувати напругу зсуву нейтралі за формулою для двох вузлів не представляється можливим.

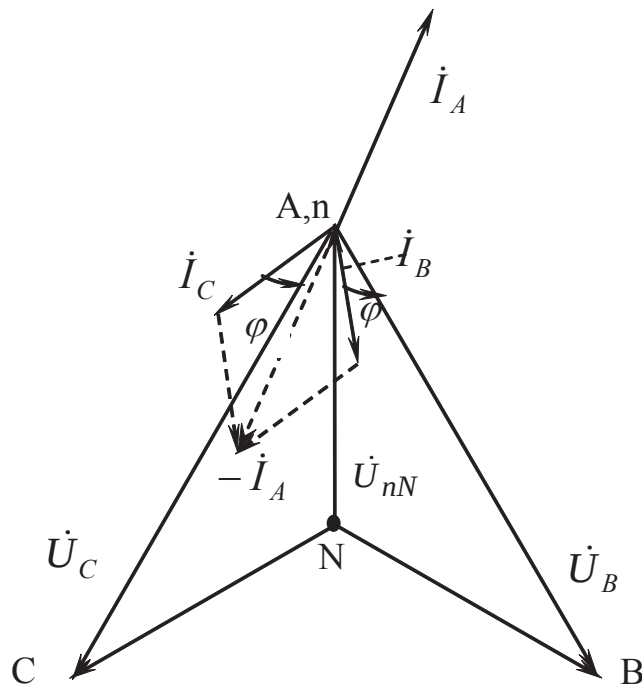


Рис. 5.14

Очевидно, що $\dot{U}_{nA} = 0$, тобто точки n й A співпали. Якщо побудувати векторну діаграму для даного випадку (рис. 5.14), то видно, що при замиканні фази A напруга у двох інших фазах збільшиться у $\sqrt{3}$ разів, наприклад з 220 В до 380 В. Тоді обмотки фаз B й C можуть згоріти через перевантаження. Якщо прийняти, що опори навантаження мають індуктивний характер $\underline{Z} = R + jX_L$, то на векторній діаграмі струми у фазах відстають від відповідних напруг на деякий кут φ .

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}}; \quad \dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) .$$

5.5.2. Обрив однієї з фаз симетричного трифазного навантаження.

На рис. 5.15 приведена схема режиму обриву фази А.

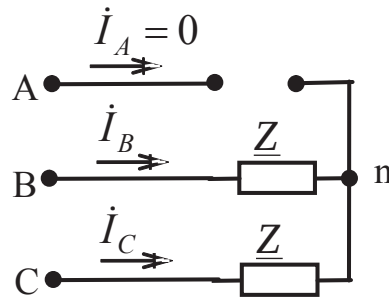


Рис. 5.15. Обрив фази А симетричного навантаження

Опір $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$, тому

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}_\phi (\dot{E}_B + \dot{E}_C)}{2 \underline{Y}_\phi} = -\frac{\dot{E}_A}{2}.$$

На рис. 5.16 наведена векторна діаграма, що відповідає цьому випадку. Із діаграми видно, що напруга у фазі А:

$$U_{An} = E_A + \frac{E_A}{2} = \frac{3}{2} E_A.$$

Наприклад, якщо $E_A = 220 \text{ В}$, то $U_{An} = 330 \text{ В}$.

Але якщо у фазі А обрив, та така напруга не приводить до аварії.

$$\dot{U}_{Bn} = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN} = \dot{E}_B + \frac{\dot{E}_A}{2} = \frac{1}{2} \dot{U}_{BC}; \quad \dot{I}_B = \frac{0,5 \dot{U}_{BC}}{\underline{Z}};$$

$$\dot{U}_{Cn} = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN} = \dot{E}_C + \frac{\dot{E}_A}{2} = \frac{1}{2} \dot{U}_{CB}; \quad \dot{I}_C = \frac{0,5 \dot{U}_{CB}}{\underline{Z}}.$$

З діаграми видно, що напруга в неушкоджених фазах зменшилася у $\frac{\sqrt{3}}{2}$ рази.

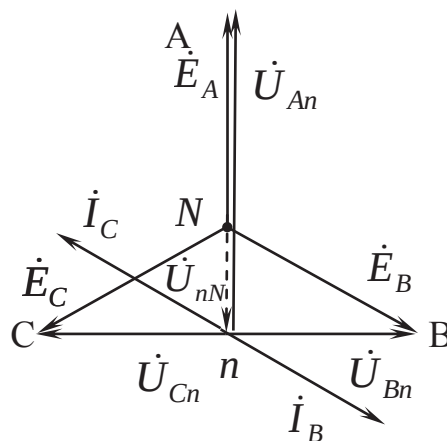


Рис. 5.16

5.5.3. Обрив нейтрального проводу у випадку несиметричного трифазного навантаження.

За своїми наслідками аварійний режим, пов'язаний з обривом нейтрального проводу при несиметричному трифазному навантаженні, несе велику загрозу для споживачів електричної енергії, особливо тих, які не мають захисту від перевищення напруги в електромережі. Такий аварійний режим відповідає схемі рис. 5.17.

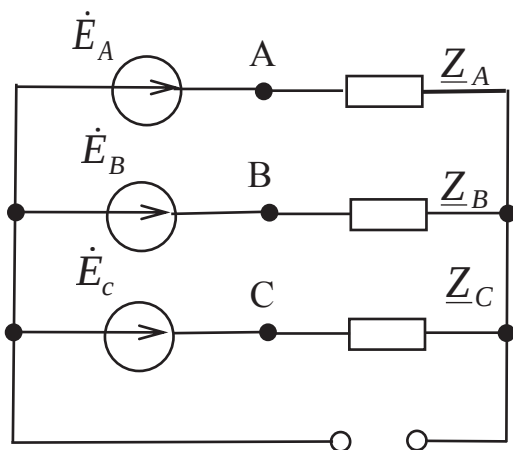


Рис. 5.17

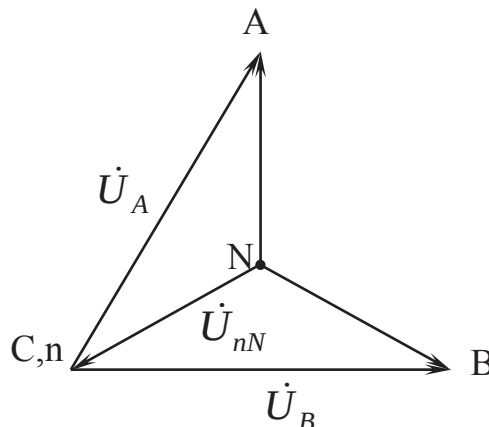


Рис. 5.18

Нехай споживачем електричної енергії з лінійною напругою 380 В є багатоквартирний будинок, кожна квартира якого живиться від однієї із фаз та нейтрального проводу. Припустимо, що навантаження носить активний характер, а потужність споживачів у фазі C значно перевищує потужності, які споживаються у фазах A та B . Наприклад, у фазах A й B ввімкнені блоки живлення радіотелефонів, телевізорів у режимі очікування і таке інше, а у фазі C – електричний чайник та праска, загальною потужністю більше 3 кВт, тобто опір $\underline{Z}_C$ значно менший опорів $\underline{Z}_A$ та $\underline{Z}_B$. У такому випадку у виразі для напруги зсуву нейтралі доданками, які містять провідності $\underline{Y}_A$ та $\underline{Y}_B$ можна знехтувати у порівнянні з доданком, який містить $\underline{Y}_C$, і зсув нейтралі буде дорівнювати напрузі у фазі C , тобто точка n переміститься у точку C (рис. 5.18).

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_A \dot{E}_A + \underline{Y}_B \dot{E}_B + \underline{Y}_C \dot{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} \approx \dot{E}_C.$$

Таким чином, напруга у фазах A й B збільшиться майже до лінійної напруги 380 В і споживачі, які були розраховані на напругу 220 В, можуть не витримати навантаження, спалахнути та спричинити пожежу. Для запобігання таких аварій на вході у квартиру можна встановити реле напруги, яке відключає живлення квартири, якщо напруга в мережі перевищує максимально припустиму 250 В.

Лекція 12

План лекції:

5.6. Симетричні системи ЕРС, напруг, струмів.

5.7. Розкладання несиметричної системи ЕРС, напруг або струмів на симетричні складові.

5.8. Потужність у трифазних колах.

5.9. Обертове магнітне поле.

5.6. Симетричні системи ЕРС, напруг, струмів.

Трифазна система джерела називається симетричною, якщо ЕРС окремих фаз однакові за величиною, а кожна наступна ЕРС відстає від попередньої за фазою на однаковий кут $q \frac{2\pi}{3}$, де $q = 1, 2, 3, \dots$

Порядок, у якому ЕРС фаз досягають свого позитивного максимуму, називають **порядком чергування фаз** або **послідовністю чергування фаз**. Обертання векторів на комплексній площині прийнято проти годинникової стрілки.

Якщо $q = 1, 4, 7, \dots$, то кожна наступна ЕРС відстає від попередньої на кут $\frac{2\pi}{3}$ (120°).

Порядок чергування фаз – ABC , наведений на рис. 5.19, називається **прямим порядком чергування фаз** або **прямою послідовністю**.

Якщо $q = 2, 5, 8, \dots$, то кожна наступна ЕРС відстає за фазою від попередньої на кут $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$ й ЕРС фаз записуються у вигляді:

$$\dot{E}_A = E e^{j\psi}, \quad \dot{E}_B = a \dot{E}_A, \quad \dot{E}_C = a^2 \dot{E}_A.$$

Векторна діаграма для цього випадку має вигляд, представлений на рис. 5.20. Порядок чергування фаз ACB називається **зворотним порядком чергування фаз** (звотною послідовністю).

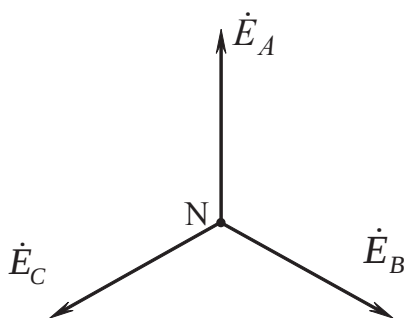


Рис. 5.19

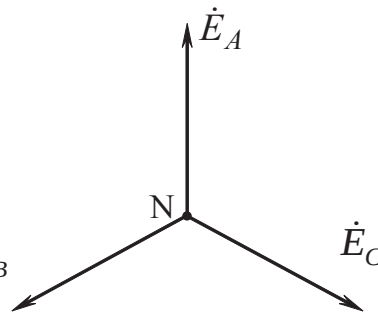


Рис. 5.20

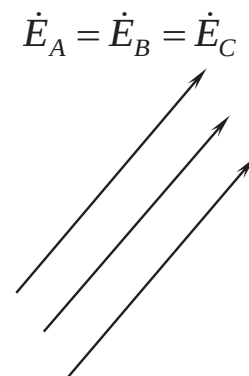


Рис. 5.21

Якщо $q = 3, 6, 9, \dots$, то кожна наступна ЕРС відстає від попередньої за фазою на кут $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 360^\circ$, тобто $\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C = \dot{E}$. Векторна діаграма для цього випадку представлена на рис. 5.21. Це **нульовий порядок чергування фаз** або **нульова послідовність**. Для прямого й зворотного порядку чергування фаз $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$. Для нульового $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 3\dot{E}$.

5.7. Розкладання несиметричної системи ЕРС, напруг або струмів на симетричні складові.

Питання несиметрії трифазних систем має велике практичне значення, тому що ступінь несиметрії трифазної напруги - один з найважливіших показників якості електроенергії, що регламентується й контролюється національною комісією з питань регулювання електроенергетики України.

Основною причиною несиметрії в трифазних колах - це умови роботи трифазних генераторів електричної енергії, а також присутність у системі потужних однофазних споживачів.

Подання несиметричної трифазної системи через симетричні складові лежить в основі розрахункового методу, що називається методом симетричних складових. Найчастіше він використовується при аналізі несиметричних режимів енергетичних пристроїв із взаємними індуктивностями між окремими фазами електричних машин, ліній електропередачі й трансформаторів з динамічним навантаженням.

Будь-яку несиметричну систему ЕРС, струмів або напруг можна представити сукупністю трьох симетричних трифазних систем прямої, зворотної й нульової послідовності (рис. 5.22).

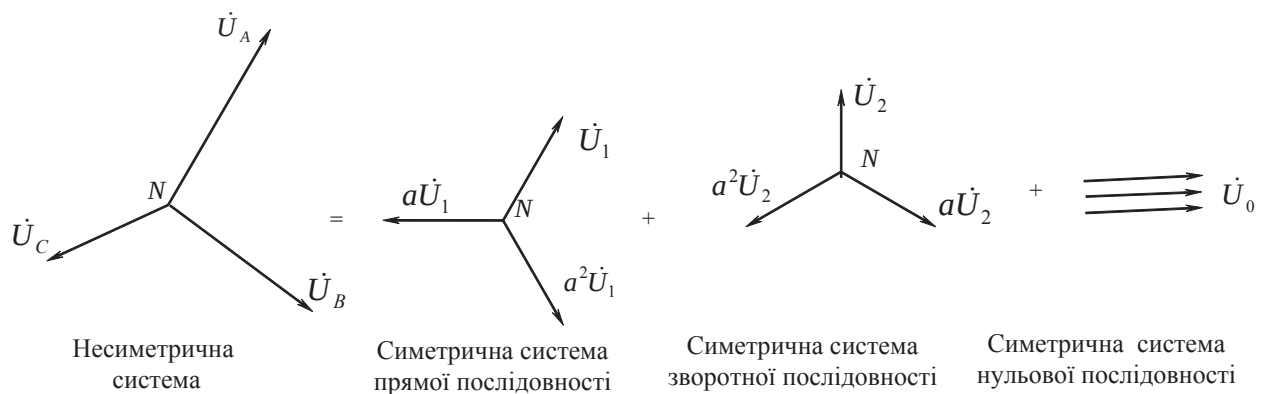


Рис. 5.22. Розкладання несиметричної системи на симетричні складові

Припустимо, що напруги у фазах несиметричної системи представлені у вигляді суми напруг симетричних систем нульової, прямої і зворотної послідовності:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 \quad (5.2)$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 \quad (5.3)$$

Для знаходження симетричних складових нульової послідовності додамо рівняння 5.1 – 5.3 і врахуємо, що сума симетричних систем фаз прямої і зворотної послідовності дорівнює нулеві. Тоді

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 3\dot{U}_0, \text{ звідки } \dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C).$$

Далі помножимо рівняння (5.2) на $a = e^{j120^\circ}$, а (5.3) - на a^2 і додамо всі рівняння. Звідки

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C).$$

Тепер рівняння (5.2) помножимо на a^2 , а (5.3) - на a й знову додамо їх. Тоді

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C).$$

У такий спосіб ми показали, що будь-яку несиметричну систему легко розкласти на суму трьох симетричних складових. Розкладання на симетричні складові - це фактично використання методу накладання, що дозволяє звести розрахунок складного трифазного кола з несиметричним джерелом до розрахунку трьох більш простих симетричних систем.

Кожна із симетричних систем розраховується «на одну фазу».

5.8. Потужність у трифазних колах.

Комплексна потужність, споживана трифазним навантаженням, дорівнює сумі потужностей окремих фаз

$$\tilde{S} = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C = P + jQ,$$

де

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C.$$

Реактивна потужність індуктивного навантаження - додатна, ємнісного - від'ємна.

У симетричному трифазному колі

$$S = 3U_\phi I_\phi, \quad P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi, \quad Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi.$$

В силу того, що при з'єднанні навантаження зіркою $I_L = I_\phi$, $U_L = \sqrt{3}U_\phi$, а при з'єднанні трикутником $U_L = U_\phi$, $I_L = \sqrt{3}I_\phi$, то для симетричного трифазного навантаження можна записати:

$$S = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}}, \quad P = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} \cos \varphi, \quad Q = \sqrt{3}U_{\text{Л}}I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

Активна потужність кожної фази симетричного трифазного кола однакова, тому для її виміру досить одного ватметра. Тоді активна потужність всього кола $P = 3P_W$.

Для чотирипровідного симетричного трифазного кола схема включення ватметра представлена на рис. 5.23, а для трипровідного - на рис. 5.24 (схема зі штучною нульовою точкою), де $\underline{Z}$ - опір, який дорівнює комплексному опорі обмотки напруги ватметра.

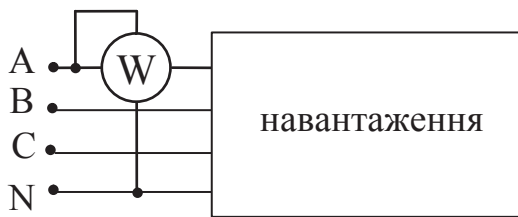


Рис. 5.23

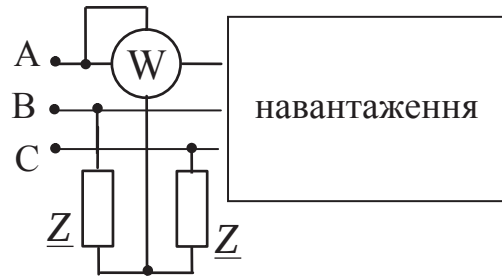


Рис. 5.24

Для виміру активної потужності несиметричного трифазного навантаження у чотирипровідній системі необхідно три ватметра (рис. 5.25), а у трипровідній без нейтрального проводу - два ватметра (рис. 5.26).

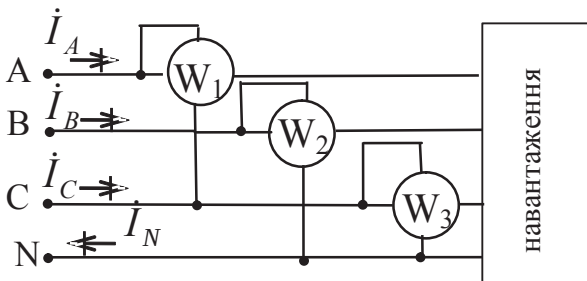


Рис. 5.25

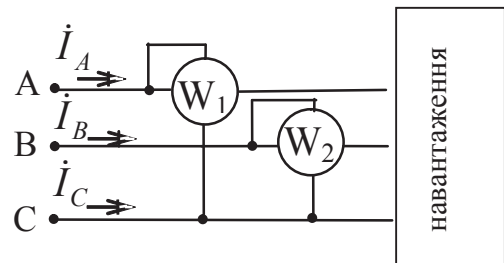


Рис. 5.26. Схема Арона

У першому випадку активна потужність трифазного навантаження визначається як сума показань трьох ватметрів. У другому випадку при вимірі потужності за схемою Арона перший ватметр показує потужність

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* \right], \quad \text{а другий} \quad P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \right].$$

Сума цих показань дає активну потужність, споживану трифазним навантаженням.

$$P = P_{W1} + P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \right] = \operatorname{Re} \tilde{S}.$$

Щоб довести це, розглянемо вираз

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AC}^* I_A^* + \dot{U}_{BC}^* I_B^* &= (\dot{U}_A - \dot{U}_C)^* I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C)^* I_B^* = \dot{U}_A^* I_A^* - \dot{U}_C^* I_A^* + \\ &+ \dot{U}_B^* I_B^* - \dot{U}_C^* I_B^* = \dot{U}_A^* I_A^* + \dot{U}_B^* I_B^* - \dot{U}_C^* (I_A^* + I_B^*) = \\ &= \dot{U}_A^* I_A^* + \dot{U}_B^* I_B^* + \dot{U}_C^* I_C^* = \tilde{S}.\end{aligned}$$

Таким чином розглянута сума дає повну комплексну потужність, споживану навантаженням.

5.9. Обертове магнітне поле.

Однією з переваг багатофазної системи є здатність створювати обертове магнітне поле, що лежить в основі принципу дії найбільш простих і розповсюджених електродвигунів змінного струму (асинхронних двигунів).

Обертним магнітним полем називається поле, вектор результуючої магнітної індукції якого незмінний за величиною й обертається з постійною кутовою швидкістю у просторі.

Для створення обертового магнітного поля потрібен одночасний зсув декількох магнітних полів у часі й просторі. Принцип одержання обертового магнітного поля розглянемо на прикладі двофазної системи.

Нехай є дві однакові котушки, які розташовані в просторі під кутом 90° (рис. 5.27) та живляться струмами однакової амплітуди, але зсунутими за фазою на кут 90° .

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos \omega t.$$

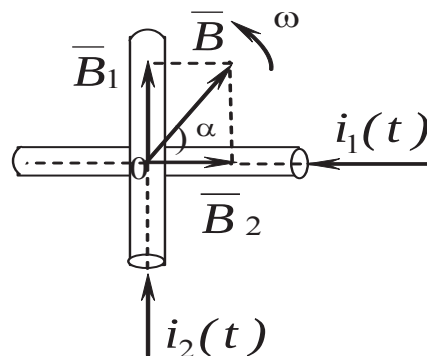


Рис. 5.27

Струмам i_1 й i_2 відповідають магнітні потоки з індукціями $B_1 = B_m \sin \omega t$ і $B_2 = B_m \cos \omega t$, напрямок яких визначається за правилом правого гвинта.

Величину вектора сумарної магнітної індукції $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, можна визначити із прямокутного трикутника

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{B_m^2 \sin^2 \omega t + B_m^2 \cos^2 \omega t} = B_m.$$

Кут α , що утворить вектор результуючої магнітної індукції з горизонтальною віссю, визначається з виразу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_1}{B_2} = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t, \text{ звідки } \alpha = \omega t.$$

Таким чином, отримане магнітне поле, вектор результуючої магнітної індукції якого незмінний за величиною й обертається у просторі з постійною кутовою швидкістю ω , тобто обертове магнітне поле.

Якщо один зі струмів у котушках направити в протилежну сторону, то напрямок обертання магнітного поля також зміниться на протилежний.

У трифазних асинхронних двигунах статор має три однакові обмотки рис. 5.28, розташовані у просторі під кутами $\pm 120^\circ$ по відношенню одна до одної, які живляться симетричною трифазною системою струмів:

$$i_A = I_m \sin \omega t,$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

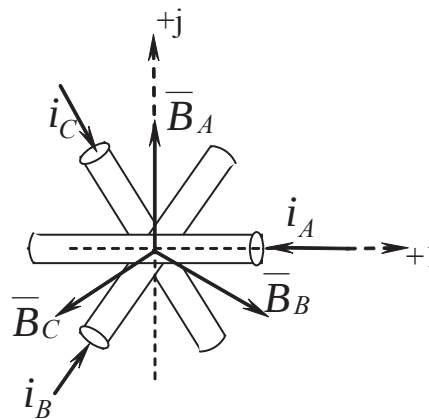


Рис. 5.28

При пропорційній залежності індукцій від струмів миттєві значення індукцій фаз також створюють симетричну систему:

$$B_A(t) = B_m \sin \omega t,$$

$$B_B(t) = B_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$B_C(t) = B_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Враховуючи просторове розташування усіх трьох обмоток у статорі для магнітних індукцій фаз маємо:

$$B_A(\alpha, t) = B_A(t) \cos \alpha,$$

$$B_B(\alpha, t) = B_B(t) \cos(\alpha + 120^\circ),$$

$$B_C(\alpha, t) = B_C(t) \cos(\alpha - 120^\circ),$$

де кут α визначає просторове положення вектора магнітної індукції у повітряному проміжку статора при відліку його проти руху годинникової стрілки відносно осі обмотки фази А.

Використовуючи принцип накладання для сумарного значення індукції магнітного поля дістанемо

$$B(\alpha, t) = B_A + B_B + B_C = B_m \sin \omega t \cos \alpha + B_m \sin(\omega t - 120^\circ) \cos(\alpha + 120^\circ) +$$

$$+ B_m \sin(\omega t + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) = 0,5 B_m [\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t + \alpha) +$$

$$+ \sin(\omega t - \alpha - 240^\circ) + \sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha + 240^\circ)] = 1,5 B_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Таким чином, у трифазному двигуні величина результуючої магнітної індукції у 1,5 рази перевищує амплітуди індукцій у фазах. У порівнянні із двофазною системою має місце вииграш у 1,5 рази.

При живленні двигуна струмами прямої послідовності обертання ротора відбувається за годинниковою стрілкою, при живленні зворотною послідовністю - проти годинникової стрілки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: навч. посібник / В.С. Маляр. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.
2. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолоб Ю.Ф., Курило І.А. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т./ Чиженко І.М., Бойко В.С., ред. – Київ : Політехніка, 2004. – Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.
3. Шегедин О.І., Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1: Навчальний посібник для студентів дистанційної форми навчання електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Львів : Видавництво «Новий Світ – 2000», 2020. – 168 с.
4. Лінійні електричні кола постійного струму. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами «Електричні системи і мережі», «Електричні станції», «Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність», «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії» спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / М. П. Бурик, В. С. Бойко, Л. Ю. Спінул, В. Ю. Лободзинський, І. П. Бурик; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 1-е вид. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,69 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 173 с.

Допоміжна

1. Рибалко М. П. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола : підручник / М. П. Рибалко, В. О. Есауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003. – 513 с.
2. Основи теорії кіл : підручник для студентів вищих навчальних закладів / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін. – Харків : Компанія СМІТ, 2008. – 432 с.
3. Воробкевіч А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навч. посібник. / А. Ю. Воробкевіч, О. І. Шегедін. – Київ : «Магнолія плюс», 2004. ч. 1. – 224 с.
4. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл : навч. посібник / А. В. Булашенко. – Суми : Вид-во СумДУ, 2009. – 398 с.

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Тарасенко Анатолій Іванович
Мосієнко Ганна Миколаївна

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Конспект лекцій
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальностями 015.33 «Професійна освіта.
Енергетика, електротехніка та електромеханіка»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

У 2 частинах

Частина 1

В авторській редакції

Підписано до розміщення 23.04.2025. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 5,8. Обсяг 2,922 Мб. Зам. № 164/25.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна