

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра квантової радіофізики

До захисту допущено

Кафедрою _____ протокол № _____ від _____

завідувач кафедри _____

(підпис)

(ім'я, прізвище)

« ____ » _____ 202_ р.

Кваліфікаційна робота

здобувача _____ магістерського _____ рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

Формування типів коливань у хвилевідному резонаторі з аксіконним дзеркалом
(назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) 105 Прикладна фізика та наноматеріали
(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності - за наявності)

Освітня програма _____ Радіофізика та електроніка _____
(назва освітньої програми)

Виконавець _____
(підпис)

_____ Євгеній Нечетов _____
(ім'я, прізвище)

Науковий керівник _____
(підпис)

_____ Вячеслав Маслов _____
(ім'я, прізвище)

Анотація

Дана дипломна робота містить 41 сторінку, 10 рисунків і 18 бібліографічних посилань.

На основі методу власних коливань запропонована аналітична методика розрахунку і матричним методом проведено чисельне дослідження просторово-енергетичних характеристик двох нижчих по втратах поперечних мод для трьох класів симетрії хвилевідного діелектричного резонатора при зміні кута розкриву аксіконного дзеркала. Знайдена область оптимальних селективних властивостей для даного резонатора.

Ключові слова: ТГц-діапазон, діелектричний резонатор, аксіконне дзеркало, типи коливань, матричний метод, втрати енергії, фазовий зсув, селекція.

Abstract

This diploma master work contains 41 pages, 10 pictures and 18 references.

On the basis of self-oscillation method analytical calculation method is proposed and numerical investigation of spatial - energy characteristics of the two lower losses transverse modes for the three classes of symmetry of the waveguide dielectric resonator is made. Study was carried out at changing the angle of the axicon mirror by matrix method. The region of optimal selective properties of this resonator was found.

Keywords: THz range, dielectric resonator, axicon mirror, types of oscillations, matrix method, energy losses, phase shift, selection.

Зміст

	С.
Вступ	5
1. Аналітичний огляд літератури.....	8
1.1. Загальна лазерна обробка	8
1.2. Гаусовські та рівномірні пучки	9
1.3. Бесель і кільцеві пучки.....	11
1.4. Аксікони.....	13
1.5. Інші методи	16
2. Матрична модель діелектричного хвилевідного резонатора з аксіконним дзеркалом.....	17
2.1. Моді та сталі поширення порожнистих діелектричних надрозмірних хвилеводів.....	17
2.2. Методика розрахунку.....	22
3. Результати розрахунків	27
3.1. Результати розрахунків для класу мод EH_{nmq}	27
3.2. Результати розрахунків для класу мод	30
3.3. Результати розрахунків для класу мод $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$	33
3.3. Результати розрахунків для мод трьох класів симетрії.....	36
Висновок	39
Список літератури	40

Вступ

Протягом останніх десятиліть велика увага приділяється формуванню та застосуванню пучків Беселя й кільцевих пучків у технологіях обробки матеріалів. Ці два типи пучків тісно пов'язані між собою через перетворення Фур'є. Вони мають унікальні властивості, що відкривають широкі можливості для їх численних застосувань у наукових дослідженнях і промислових технологіях.

Беселеві світлові пучки (БСП) привертають пильну увагу науковців, оскільки володіють рядом виняткових характеристик: збереженням високої інтенсивності в приосьовій області на великих відстанях і значно меншою, порівняно з традиційними пучками, дифракційною розбіжністю центрального максимуму. Ці властивості знаходять широке застосування в оптичній когерентній томографії, керуванні мікро- та наночастинками, високоточному різанні (зварюванні), мікрообробці отворів. Для формування БСП широко використовуються аксікони або конічні лінзи.

Генерація беселевих пучків за допомогою конічної лінзи характеризується малими світловими втратами порівняно з іншими методами отримання таких полів, наприклад, із використанням кільцевих діафрагм. Формування світлового пучка аксіконом відбувається внаслідок лінійної за поперечною координатою фазової затримки для фазового світлового поля. Так, у випадку падіння плоскої хвилі на виході з аксікона утворюється беселів пучок, інтенсивність якого в радіальному перерізі описується квадратом функції Беселя нульового порядку. Якщо ж на аксікон падає гаусов пучок, то результуюче світлове поле має поперечний профіль інтенсивності, подібний до беселевого.

Існують дві основні групи методів отримання осесиметричного поляризованого випромінювання: внутрішньорезонаторні та позарезонаторні. Ці методи відзначаються високою чутливістю до заданого початкового профілю випромінювання. Використання позарезонаторної формувальної оптики є малоефективним при вирішенні багатьох завдань, пов'язаних із керуванням характеристиками вихідного випромінювання, тому досліднику або розробнику

доводиться звертатися до керування оптичними властивостями лазерного резонатора.

Відомо, що заміна одного із дзеркал резонатора на дзеркало спеціальної форми може істотно збільшити об'єм основної моди, що приводить до підвищення вихідної потужності. Для багатьох наукових та прикладних застосувань важливим є отримання певної форми поперечного просторового розподілу поля одномодового вихідного пучка, відмінної від традиційних гаусовських розподілів мод квазіоптичних відкритих резонаторів. Для досягнення оптимального результату в кожному практичному випадку потрібно використовувати певний розподіл інтенсивності лазерного випромінювання. Такі розподіли інтенсивності хвильового пучка в резонаторах зазвичай називають “спеціальними” або “custom”-модами, оскільки їх просторовий профіль оптимізовано для конкретного застосування.

Як дзеркала резонатора можуть використовуватися тригранні 90° кутові відбивачі, які не потребують точної юстування, однак виникає проблема виведення випромінювання через отвір у такому відбивачі. Крім того, кутові відбивачі складні у виготовленні та мають підвищені втрати через три відбиття від граней. Значний інтерес становлять конічні дзеркала, які є відносно простими у виготовленні й забезпечують менші втрати в резонаторі. Конічні дзеркала з кутами при вершині, близькими до 180° , використовуються в резонаторах як альтернатива сферичним дзеркалам, коригуючи розбіжність випромінювання.

Завдання формування беселевих світлових пучків вирішується в даний час успішно, проте сказане відноситься насамперед до пучків нульового порядку. Ситуація із розробкою методів отримання беселевих світлових пучків вищих порядків складніша. Труднощі отримання таких пучків пов'язані з особливостями структури, саме з наявністю у них гвинтових дислокацій хвильового фронту. Для формування таких полів у пасивних схемах необхідно виготовлення досить складних спіральних фазових пластинок, а в активних – отримання лазерної генерації вищих просторових мод.

Крім аксіонів для отримання беселевих світлових пучків використовується також метод фур'є-перетворення кільцевих пучків, голографічний метод та ін. Важливо відзначити, що, окрім пасивних методів формування беселевих світлових пучків, проводяться теоретичні та експериментальні дослідження лазерних резонаторів з беселевою та бесел-гаусовою структурою мод.

Метою даної дипломної роботи є дослідження формування пучків Бесея у хвилевідному резонаторі з аксіонним дзеркалом із використанням аналітичних виразів для двох найнижчих за втратами мод трьох класів симетрії.

1. Аналітичний огляд літератури

1.1. Загальна лазерна обробка

Лазери стали незамінними інструментами для обробки матеріалів у наукових та промислових застосуваннях. Вони забезпечують вузькоспрямовані та локалізовані джерела енергії, що дає змогу модифікувати матеріали на визначених ділянках. Сучасні лазерні системи також є гнучкими, оскільки порівняно легко адаптувати такі параметри, як розмір пучка або енергія пучка, до конкретних вимог, а системи можуть бути масштабовані для забезпечення високої продуктивності обробки матеріалів на різних довжинах масштабів [1].

Типові параметри лазера, які контролюються під час обробки матеріалів, включають енергію, густину потоку (енергія на одиницю площі), розмір плями, довжину хвилі, поляризацію, а у випадку імпульсних лазерів - тривалість імпульсу та частоту повторення [2].

Вплив цих параметрів на результуючі структури й властивості матеріалів широко досліджується як експериментально, так і теоретично [3], і таке розуміння є необхідним для визначення оптимальних умов обробки.

Наприклад, лазерна густина потоку може впливати на розмір зерен полікристалічного кремнію (поли-Si), отриманого шляхом лазерного відпалу аморфного кремнію. Цей фактор може суттєво позначатися на роботі пристроїв на основі поли-Si, таких як тонкоплівкові транзистори.

Реакція біологічних тканин залежить від довжини хвилі лазерного випромінювання, що впливає на ефективність хірургічних методів, таких як лазерний кератомілез (Lasik). Поляризація пучка може змінювати поглинання випромінювання матеріалом, що відбивається на формуванні структури під час таких процесів, як лазерне різання або зварювання [4].

Швидкість, з якою енергія подається у матеріал, також впливає на процес його модифікації. Зокрема, тривалість лазерного імпульсу може суттєво визначати динаміку видалення матеріалу. Зменшення тривалості імпульсу приводить до швидшого викиду матеріалу з меншою зоною термічного впливу [5].

Контроль та вплив інших параметрів лазера застосовуються рідше, проте вони також можуть бути важливими чинниками під час обробки матеріалів. Одним із таких параметрів є форма лазерного пучка, яка визначає розподіл інтенсивності світлового випромінювання при його взаємодії з матеріалом [6].

Хоча деякі лазерні системи випромінюють багатомодові пучки зі складним розподілом інтенсивності, більшість комерційних лазерів забезпечують або гаусов профіль інтенсивності, або “рівномірний” профіль, або ж інший тип розподілу, який належить до однієї з цих двох категорій.

1.2. Гаусовські та рівномірні пучки

Гаусовські пучки на сьогодні є найпоширенішою формою пучка, що використовується в технологіях обробки матеріалів. Зокрема, перетворення Фур’є для гаусовського пучка також залишається гаусовським, тобто він зберігає свою форму під час проходження через оптичну систему, що складається з простих лінз. Це має особливе значення у лазерній обробці, де зазвичай використовується велика кількість оптичних елементів для спрямування лазерного випромінювання на заготовку.

Більшість лазерів працюють на фундаментальній поперечній електромагнітній моді резонатора (TEM_{00}), і додаткові елементи для зміни форми пучка зазвичай не потрібні. Оскільки вихід резонатора має певні відхилення від ідеального профілю, для його опису вводиться фактор якості пучка M^2 ($M^2 \geq 1$), який показує, наскільки реальний пучок наближений до ідеального гаусовського ($M^2 = 1$).

Типові наукові твердотільні лазерні системи мають значення M^2 менше 2, однак промислові лазери з $M^2 < 10$ все ще вважаються пристроями з високою якістю гаусовського випромінювання. Загальним підходом до покращення якості пучка є використання просторових фільтрів [7]. Проте в лазерній обробці застосування апертурних фільтрів небажане, оскільки це зменшує доступну енергію, потребує точного юстування та може призвести до пошкодження матеріалу через високу інтенсивність випромінювання.

Важливою властивістю гаусовських пучків у процесах обробки матеріалів є їх мала розбіжність, що забезпечує утворення малого сфокусованого плями [8].

Насправді, коли гаусовський пучок фокусується в повітрі за допомогою лінзи, при заданій числовій апертурі діаметр пучка у фокусі може бути виражений як:

$$d_f \approx 2 \frac{\lambda M^2}{\pi NA}, \quad (1)$$

де λ - довжина хвилі лазерного випромінювання, і припускається, що пучок повністю заповнює апертуру лінзи (критерій $1/e$). Тому гаусовські пучки з M^2 , близьки до 1, забезпечують мінімальний розмір фокусної плями, а отже, вище просторове розділення, ніж багатомодові пучки.

Згідно з формулою (1), для ідеального гаусовського пучка з довжиною хвилі 1064 нм (комерційний Nd:YAG лазер), при фокусуванні через об'єтив із числовою апертурою $NA = 0,5$, можна досягти розміру фокусної плями близько 1,4 мкм. Це робить гаусовські пучки ідеальними для застосувань у мікротехнологіях.

Іншим важливим параметром при лазерній обробці матеріалів, пов'язаним із розбіжністю пучка, є глибина різкості поля. У контексті обробки матеріалів її можна розглядати як діапазон зміщення зразка від площини перетяжки, при якому розмір сфокусованої плями залишається практично незмінним. Більш точно це визначається через діапазон Релея (Rayleigh range) [9]:

$$z_f = z_r \approx \frac{\pi}{4\lambda} \frac{d_f^2}{M^2}, \quad (2)$$

z_r представляє собою відстань від перетяжки вздовж - у пляму розміром 1,4 мкм, глибина різкості буде становити приблизно 1,4 мкм. Інші моди пучка з низьким M^2 мають відносно більшу глибину різкості, але за

умови сильної фокусування глибина поля може бути занадто короткою для багатьох промислово важливих застосувань обробки.

Рівномірні пучки також широко використовуються для застосувань у обробці матеріалів. Так, наприклад, ексимерні лазери зазвичай виробляють рівномірний вихід із різним ступенем однорідності по перерізу пучка. Крім того, використовуються оптичні елементи, такі як формувачі пучка, коли вихідний пучок від лазерного резонатора є гаусовським, або однорідні системи, коли їх вихід багатомодовий. У порівнянні з гаусом, циліндричні пучки мають значення M^2 значно вище за 10.

Таким чином, із рівнянь (1) і (2) можна зробити висновок, що мінімальний розмір плями забезпечують гаусовські пучки, проте глибина різкості буде обмежена. Однак покращена просторово-енергетична однорідність рівномірних пучків представляє важливу перевагу для конкретної обробки матеріалів у порівнянні з гаусовськими пучками. Це пояснює перевагу цього типу пучка для термічної обробки, таких як лазерний відпал, осадження матеріалів (наприклад, у імпульсному лазерному осадженні), зварювання з підвищеною якістю та відтворюваністю, а також фотолітографії [10]. Однією з основних проблем, пов'язаних із рівномірними пучками, є те, що, на відміну від гауса, вони не зберігають свою форму під час поширення, і таким чином забезпечують однорідний розподіл інтенсивності лише поблизу фокальної точки або зони формування зображення оптичної системи. Поза межами цієї зони профіль пучка та його якість змінюються, що може призвести до неоднорідної обробки та небажаних ефектів.

1.3. Бесель і кільцеві пучки

Для цілей даної роботи ми визначаємо пучок Беселя як пучок, електричне поле якого явно описується функцією Беселя нульового порядку першого роду (J_0):

$$E(r, \varphi, z) = A_0 \exp(ik_z z) J_0(k_r r), \quad (3)$$

де r і φ - поперечні та полярні координати, z - координата у напрямку поширення, та відповідно продольні і радіальні хвильові вектори. У більш загальному випадку термін пучок Беселя може описуватися функцією вищого порядку, хоча в цій роботі ми цим нехтуємо. Оскільки інтенсивність пучка пропорційна квадрату електричного поля, для пучка Беселя:

$$I(r, \varphi, z) \propto J_0^2(k_r r), \quad (4)$$

цей пучок не зосереджений в одній точці, а проявляється у вигляді серії концентричних кілець. Інший спосіб аналізу пучка Беселя та його картини у далекій зоні полягає у розгляді його формування як результату інтерференції плоских хвиль з хвильовими векторами, що належать конічній поверхні. Виникає область самоінтерференції, в якій картина Беселя з'являється завдяки циліндричній симетрії. Слід також зазначити, що відповідно до формули (4) кількість кілець пучка Беселя має бути нескінченною. Проте в практично генерованих пучках Беселя наявність обмежених апертур формує пучки з кінцевими розмірами. У цій роботі розглядатимуться лише такі кінцеві пучки Беселя, які також називають квазі-Беселевими пучками. Важливо відмітити, що у далекій зоні, коли розділення між хвильовими векторами збільшується, інтенсивність пучка на центральній осі зменшується і в кінцевому підсумку наближається до нуля, що відповідає кільцевому пучку.

Кільцевий пучок, також називаний пучком у формі «пончика», - це пучок із розподілом інтенсивності, зосередженим у кільці, без інтенсивності на осі. Існують різні види кільцевих пучків залежно від розподілу випромінювання. Наприклад, розподіл може бути постійним по r та θ , і в цьому випадку кільцевий пучок описується рівнянням:

$$I(r, \theta) = \begin{cases} I_0 \\ 0 \end{cases}, \quad (5)$$

де I_0 - інтенсивність всередині кільцевого простору, r і θ - полярні координати і відповідно рідаси вхідного та вихідного світла. Найчастіше генеруються кільця з гаусовським профілем по напрямку r . Рівняння, що описує такі пучки:

$$I(r, \theta) = I_0 \exp\left(-2 \frac{(r - r_c)^2}{\omega^2}\right), \quad (6)$$

де максимальна інтенсивність пучка, положення центру, і ω - «горловина» пучка. Кільцевий пучок також може утворюватися шляхом віднімання двох гаусовських пучків із однакою максимальною інтенсивністю, але різними горловинами пучка. У цьому випадку результуюча інтенсивність пучка буде:

$$I(r, \theta) = I_0 \left[\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_1^2}\right) - \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_2^2}\right) \right]. \quad (7)$$

Ці відмінності у температурних профілях мають вирішальне значення для застосувань, де температура є ключовим параметром, наприклад, лазерне упрочнення. Варто також зазначити, що при опроміненні матеріалу лазерним променем з СВ кільцевою формою індуковане напруження в центрі оброблюваної області мінімальне - явище, яке не спостерігається з іншими формами пучка, і яке можна використовувати у таких процесах, як різання скла, де контроль напруження є бажаним.

1.4. Аксікони

Аксікон, або конічний лінзовий елемент, як показано на рис. 1.1, є, мабуть, найзручнішим і найекономічнішим способом створення пучків Беселя [11]. У цьому випадку падаючий пучок заломлюється, утворюючи інтерференційну картину, описану раніше. Такий підхід забезпечує оптично ефективніший спосіб отримання пучка Беселя, ніж методи, засновані на використанні апертур.

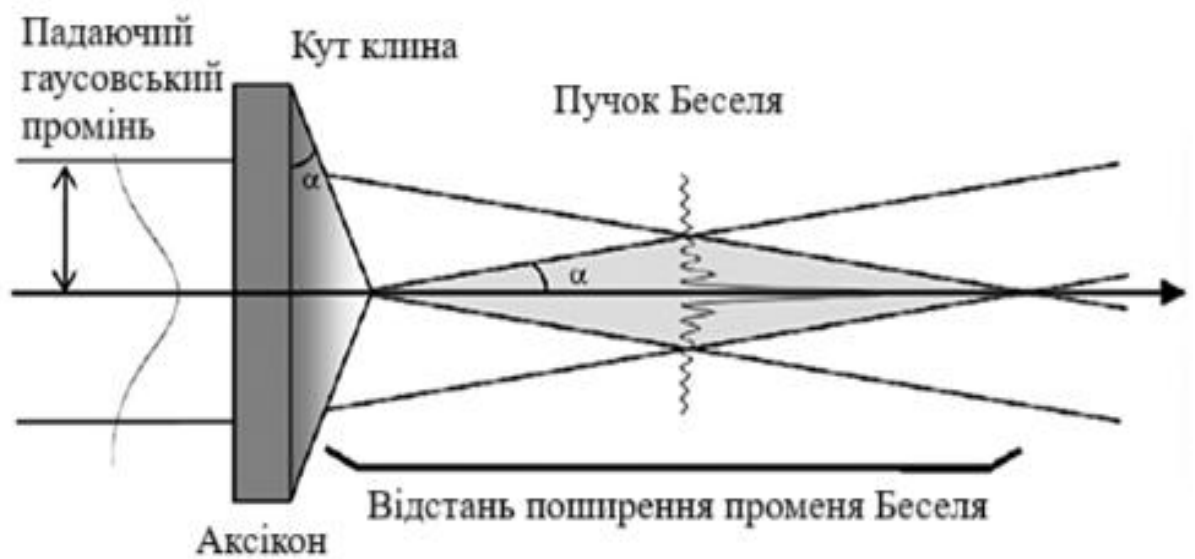


Рис. 1.1. Створення пучка Беселя за допомогою аксікону, освітленого гаусовським пучком. Якщо збіжну лінзу розмістити після аксікону, то кільцевий пучок формується у фокальній площині лінзи.

Проте співвісність між падаючим лазерним пучком і аксіконом є критично важливим фактором, оскільки неправильне вирівнювання може призвести до неоднорідності розподілу інтенсивності.

Зазвичай падаючий пучок має гаусовський профіль, і в цьому випадку утворений після проходження через аксікон пучок називають пучком Гаусса–Беселя, інтенсивність якого описується наступним чином:

$$I(r, z) = 2k\pi(\tan^2 \alpha)(n-1)^2 z I_0 e^{-2(n-1)z \tan \alpha / \omega_0} \times J_0^2(kr(n-1) \tan \alpha), \quad (8)$$

де r і z - радіальна та поздовжня координати, J_0 та ω_0 - інтенсивність та радіус перетяжки падаючого гаусовського пучка, k - хвильовий вектор, n - показник заломлення матеріалу аксікона, α - кут клина.

Цю формулу можна еквівалентно записати через кут конуса B на вершині аксікона. Використовуючи формулу (2), можна визначити ширину центральної пелюстки шляхом знаходження першого нуля функції Беселя. Це дає:

$$d_f = \frac{2.4a}{k(n-1) \tan(\alpha)}, \quad (9)$$

де a - стала величина порядку одиниці. Підставляючи це у формулу (1) для діапазону Релея дає:

$$z_r \approx \frac{D}{2(n-1) \tan(\alpha)}. \quad (10)$$

Таким чином, кут клина всередині аксікону в кінцевому підсумку визначає радіус і ступінь центральної пелюстки пучка Беселя [2], з меншими кутами, що відповідають ширшим пелюсткам і меншому дифракційному поширенню. Для типової реалізації в обробці матеріалів цей кут клина малий (<0,1 рад). Кільцеві пучки також можуть формуватися аксіконом двома різними способами. Перший

шлях - це просто розмістити заготовку на відстані достатньо далеко від аксікону для того, щоб сформувати профіль дальньої зони аксікону, що відповідає кільцю. В якості альтернативи можна об'єднати аксікон з іншим фокусуєчим елементом, щоб створити кільце у фокальній площині системи. Зовнішній діаметр кільця, що генерується в цьому випадку, визначається за формулою:

$$d = 2F \tan(\alpha(n-1)), \quad (11)$$

де F — ефективна фокусна відстань лінзи [3]. Останній підхід дозволяє краще контролювати розмір і форму кільцевого пучка.

Аксікони можуть бути або заломлювальними, або дифракційними, перші широко прийняті у зв'язку з відносною простотою їх виготовлення. Нещодавно дослідники показали можливість створення рідинного перебудованого пристрою, який дозволяє контролювати кут клина в аксіконі. Дифракційні аксікони подібні за конструкцією до лінзи Френеля й мають перевагу в тому, що вони тонші, ніж заломлювальні аксікони. Крім того, для надкоротких імпульсів, що часто зустрічаються в обробці матеріалів, пучки, створені дифракційними методами, менш схильні до розширення за рахунок нелінійних характеристик матеріалу лінзи.

1.5. Інші методи

На додаток до найбільш поширених методів, зазначених вище, для обробки матеріалів існує ряд альтернативних способів отримання пучків Беселя або кільцевих пучків. Дослідники досягли успіху, використовуючи швидкобудовані голографічні дисплеї [12], дифракційні оптичні елементи [13], фазові пластини оптичні або фазові просторові маски [14]. Для OV-пучків спіральні фазові пластини (SPP), діелектричний матеріал з товщиною, що змінюється по азимуту навколо пластини, показують великий потенціал для поширення пучка високої інтенсивності [15]. Крім того, одноосні двопронезаломлюючі кристали [16] дозволили успішну генерацію високої інтенсивності надшвидких вихрових імпульсів без розширення, тим самим забезпечуючи зручний інструмент для дослідження обробки матеріалу з OVS.

2. Матрична модель діелектричного хвилевідного резонатора з аксіконним дзеркалом

2.1. Моді та сталі поширення порожнистих діелектричних надрозмірних хвилеводів

Розглянемо хвилевід, що складається з кругового циліндра радіусом a , розміщеного у вільному просторі з діелектричною проникністю ε_0 , який поміщено в інше діелектричне або металеве середовище, що характеризується комплексною діелектричною проникністю ε . Магнітна проникність μ_0 передбачається однаковою для обох середовищ. Розглянемо компоненти поля нормальних мод хвилеводу та комплексні сталі поширення для цих мод. Задача суттєво спрощується, якщо припустити, що

$$ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \square |v|u_{nm},$$

$$\left| \frac{\gamma}{k} - 1 \right| \square 1, \quad (12)$$

де $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}2\pi / \lambda$ – стала поширення у вільному просторі, u_{nm} – це m - корінь рівняння $J_{n-1}(u_{nm})=0$, де n і m – цілі числа, що характеризують поширювані моди, $v = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$ – комплексний показник заломлення зовнішнього середовища, а γ – стала поширення мод. Перша нерівність означає, що радіус a значно більший за довжину хвилі λ у вільному просторі. У випадку металізації зовнішнього середовища може бути досить великим, але скінченним на оптичних частотах. Друга нерівність обмежує наш аналіз модами з малими втратами, якими є ті, чий сталі поширення γ аналогічні сталим поширення у вільному просторі [17]. Компоненти поля нормальних коливань найбільш загальної кругової циліндричної структури з довільними ізотропними внутрішнім і зовнішнім середовищами були визначені Стреттоном. Ця структура підтримує три типи коливань: по-перше -

поперечні кругові електричні моди, єдиними компонентами поля яких є E_θ , H_r та H_z ; по-друге – поперечні кругові магнітні моди, компонентами поля яких є H_θ , E_z , E_r ; по-третє – гібридні моди з усіма електричними та магнітними компонентами. Приблизні вирази для компонент поля цих мод наведено нижче. Вони були отримані з використанням нерівностей (12) і нехтуванням членами зі значеннями λ/a , які більші за одиницю. Верхні індекси i та s відносяться відповідно до внутрішнього та зовнішнього середовищ.

1. Кругові електричні моди TE_{0m} ($n = 0$)

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta 0m}^i &= J_1(k_i r) \\ H_{r 0m}^i &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} J_1(k_i r) \\ H_{z 0m}^i &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{u_{0m}}{ka} J_0(k_i r) \end{aligned} \right\} \exp i(\gamma z - \omega t). \quad (13)$$

2. Кругові магнітні моди TM_{0m} ($n = 0$)

$$\left. \begin{aligned} E_{r 0m}^i &= J_1(k_i r) \\ E_{z 0m}^i &= i \frac{u_{0m}}{ka} J_0(k_i r) \\ H_{\theta 0m}^i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} J_1(k_i r) \end{aligned} \right\} \exp i(\gamma z - \omega t). \quad (14)$$

3. Гібридні моди EH_{nm} ($n \neq m$)

$$\left. \begin{aligned}
 E_{\theta 0m}^i &= \left[\begin{aligned} &J_{n-1}(k_i r) + \frac{i u_{nm}^2}{2nka} \sqrt{v^2 - 1} J_n'(k_i r) \\ &\cdot \cos n(\theta + \theta_0) \end{aligned} \right] \\
 E_{rnm}^i &= \left[\begin{aligned} &J_{n-1}(k_i r) + \frac{i u_{nm}^2}{2kr} \sqrt{v^2 - 1} J_n(k_i r) \\ &\cdot \sin n(\theta + \theta_0) \end{aligned} \right] \\
 E_{znm}^i &= -i \frac{u_{nm}}{ka} J_n(k_i r) \sin n(\theta + \theta_0)
 \end{aligned} \right\} \exp i(\gamma z - \omega t), \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_{\theta nm}^i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{rnm}^i \\
 H_{rnm}^i &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{\theta nm}^i \\
 H_{znm}^i &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{rnm}^i \operatorname{ctn} n(\theta + \theta_0)
 \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

де комплексна стала поширення γ задовольняє співвідношенням:

$$k_i^2 = k^2 - \gamma^2, \quad (17)$$

$$k_e^2 = v^2 k^2 - \gamma^2,$$

та u_{nm} , де m – корінь рівняння:

$$J_{n-1}(u_{nm}) = 0. \quad (18)$$

Також необхідно визначити сталу поширення γ , в TE_{0m} , TM_{0m} та EH_{nm} модах у прямому порожнистому хвилеводі на оптичних довжинах хвиль. Сталі поширення є коренями наступного характеристичного рівняння для загальної кругової циліндричної структури. Вони пов'язані з k_i та k_e у виразі (17).

$$\left[\frac{J_n'(k_i a)}{J_n(k_i a)} - \frac{k_i H_n^{(1)'}(k_i a)}{k_e H_n^{(1)}(k_i a)} \right] \left[\frac{J_n'(k_i a)}{J_n(k_i a)} - \frac{v^2 k_i H_n^{(1)'}(k_i a)}{k_e H_n^{(1)}(k_i a)} \right] = \left[\frac{n\lambda}{kk_i a} \right]^2 \left[1 - \left(\frac{k_i}{k_e} \right) \right]^2 \quad (19)$$

Це рівняння суттєво спрощується, коли вводяться наближення у рівняння (12). Оскільки $k_e a \gg 1$, то може бути використане наближене значення функції Ханкеля:

$$\frac{H_n^{(1)'}(k_e a)}{H_n^{(1)}(k_e a)} \approx i + 0(1/k_e a), \quad k_e a \gg 1, \quad (20)$$

$$\frac{v^2}{k_e a} \approx \frac{v^2}{(v^2 - 1)^2} \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right) \gg 1, \quad (21)$$

Оптичною силою $\frac{v^2}{k_e a}$ більше не потрібно знехтувати. Тоді характеристичне рівняння спрощується:

$$J_{n-1}(k_i a) = i v_n (k_i / k) J_n(k_i a), \quad (22)$$

де

$$v_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \text{ для } TE_{0m} \text{ моди } (n = 0), \\ \frac{v^2}{\sqrt{v^2-1}} \text{ для } TM_{0m} \text{ моди } (n = 0), \\ \frac{\frac{1}{2}(v^2+1)}{\sqrt{v^2-1}} \text{ для } EH_{nm} \text{ моди } (n \neq 0). \end{cases} \quad (23)$$

Розв'язавши характеристичне рівняння для k та a , помічено, що, оскільки з (12) і (17), права частина рівняння (22) прямує до нуля. Використовуючи метод послідовних наближень і зберігаючи лише перший член збурення, маємо:

$$k_i a \approx u_{nm} (1 - i v_n / ka), \quad (24)$$

де u_{nm} як і раніше m – корінь рівняння

$$J_{n-1}(u_{nm}) = 0. \quad (25)$$

Нерівність (25) забезпечується за умови, що порядок моди є достатньо низьким, так що $|v_n| u_{nm} \ll ka$. Тоді можна отримати сталу поширення γ з (17)

$$\gamma \approx k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{nm} \lambda}{2\pi a} \right)^2 \left(1 - \frac{i v_n \lambda}{\pi a} \right) \right]. \quad (26)$$

Фазова стала (27) та стала загасання (28) для кожної моди є дійсною та уявною частинами γ відповідно,

$$\beta_{nm} = \text{Re}(\gamma) = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{nm} \lambda}{2\pi a} \right]^2 \left[1 + \text{Im} \left(\frac{v_n \lambda}{\pi a} \right) \right] \right\}, \quad (27)$$

$$\alpha_{nm} = \text{Im}(\gamma) = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda^2}{a^3} \text{Re}(v_n) . \quad (28)$$

2.2. Методика розрахунку

Представимо шукані функції розподілу поля, що описують типи коливань резонатора, у вигляді розкладу по модах хвилеводу типу канал у діелектрику (ХКД). Взаємодію випромінювання з аксіоном опишемо за допомогою функції фазової корекції [18]. Позначимо діаметр хвилеводу (розкриття дзеркал) через $2a$, його довжину (відстань між розкриттями) через L (рис. 2.1.). Враховуючи, що поточна задача є осесиметричною, тобто визначено підлягає радіальний розподіл поля, позначимо радіальні ортонормовані функції ХКД $V_m^{(0)}(\rho, \varphi)$, де $\rho = r/a$ – безрозмірна радіальна координата для хвилеводу, φ - азимутальна координата. Запишемо вираз для шуканої комплексної амплітуди компоненти електромагнітного поля парціального пучка, що падає на розкриття плоского дзеркала, у вигляді:

$$U^{(1)}(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_m V_m^{(0)}(\rho, \varphi) . \quad (29)$$

Вираз для комплексної амплітуди компоненти поля для хвильового пучка на відстані L від розкриття плоского дзеркала можна записати у вигляді:

$$U^{(2)}(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_m V_m^{(0)}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{nm}L} . \quad (30)$$

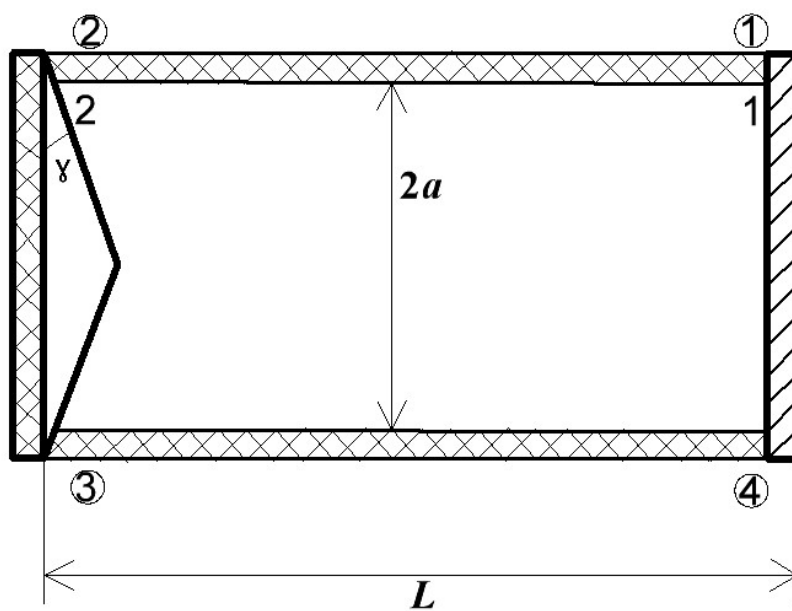


Рис. 2.1. Теоретична модель хвилевідного резонатора з дзеркалом конічної форми:

1 – плоске дзеркало, 2 – аксіконне дзеркало.

Після взаємодії хвилі з аксіконом, на його розкритті, розглядана компонента поля може бути представлена виразом:

$$U^{(3)}(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_m e^{i\gamma_{nm}L} F(\rho) V_m^{(0)}(\rho, \varphi), \quad (31)$$

де γ_{nm} – стала поширення для мод ХКД, $F(\rho)$ – функція фазової корекції аксікону. Ця функція, згідно з [14], має вигляд:

$$F(\rho) = e^{-i2k(n_a-1)\gamma a\rho}, \quad (32)$$

n_a – показник заломлення аксікону, γ – конічний кут аксікону, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ -хвильове число. Таке описання справедливе при $L \gg a$, що в ПЧ та субміліметрових лазерах завжди виконується. Перепишемо (31), представивши $F(\rho)V_m^{(0)}(\rho, \varphi)$ у вигляді ряду по власних функціях порожнього каналу, тобто:

$$U^{(3)}(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_m e^{i\gamma_{1m}L} \sum_{l=1}^N B_{ml} V_l^{(0)}(\rho, \varphi), \quad (33)$$

де $B_{ml} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(\rho) V_m^{(0)}(\rho, \varphi) V_l^{(0)}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi$. Представимо вираз для комплексної

амплітуди хвильового пучка, що падає на розкриття плоского дзеркала, у вигляді:

$$U^{(4)}(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_m e^{i\gamma_{1m}L} \sum_{l=1}^N B_{ml} V_l^{(0)}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_{1l}L}. \quad (34)$$

Зауважимо, що $U^{(4)}(\rho, \varphi)$ отримано в результаті кругового обходу хвилі, яка характеризується функцією $U^{(1)}(\rho, \varphi)$ з (29). Для встановлених коливань у резонаторі компонента поля в парціальному пучку до і після кругового обходу змінюється відповідно до виразу $U^{(4)}(\rho, \varphi) = e^{i2kL} \Lambda U^{(1)}(\rho, \varphi)$. Звідки з (29) і (34) після очевидних перетворень отримуємо рівняння для знаходження основних характеристик типів коливань досліджуваного резонатора:

$$\Lambda C_k = \sum_{m=1}^M C_m e^{i\gamma_{1m}L} B_{mk} e^{i\gamma_{1k}L}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (35)$$

Розв'язок системи рівнянь (35) дає M власних значень Λ і стільки ж власних векторів C_m , компоненти яких представляють собою коефіцієнти розкладу мод резонатора по хвилевідних модах. Власні вектори даної матриці представляють поперечні моди резонатора, а її власні значення дають відповідні втрати енергії і додатковий фазовий зсув за час кругового обходу.

Відносні втрати енергії δ і додатковий до геометрично-оптичного фазовий зсув моди θ за круговий обхід резонатора визначаються відповідно виразами:

$$\delta = 1 - |\Lambda|^2 \quad \text{и} \quad \theta = \arg \Lambda. \quad (36)$$

При чисельному дослідженні характеристик діелектричного хвилевідного резонатора обмежимося практично найбільш важливим випадком генерації лінійно поляризованого випромінювання. Серед множини типів коливань ХКД існує набір мод EH_{1m} , набір комбінованих мод $TE_{0m} + EH_{2m}$ та $EH_{-1m} + EH_{3m}$, які при $m < (a/\lambda)^{1/2}$ мають лінійну поляризацію поля та комплексні амплітуди поперечної компоненти поля, що описуються складовими повну систему ортонормованих функцій.

Для моди EH_{1mq} функція має вигляд:

$$V_m^{(0)}(\rho) = \sqrt{2} J_0(U_{0m}\rho) / J_1(U_{0m}), \quad (37)$$

де J_1 – функція Беселя першого роду першого порядку, U_{0m} – корені рівняння $J_0(U_{0m}) = 0$.

Для комбінованих мод $TE_{0mq} + EH_{2mq}$:

$$V_m^{(0)}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{J_2(U_{2m})} J_1(U_{2m} \frac{r}{a}) \cos \varphi, \quad (38)$$

де J_2 – функція Беселя першого роду другого порядку, U_{1m} – корені рівняння $U_{2m} - J_2(U_{2m}) = 0$.

Для комбінованих мод $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$:

$$V_m^{(0)}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{J_3(U_{3m})} J_2(U_{3m} \frac{r}{a}) \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}, \quad (39)$$

де J_3 – функція Беселя першого роду третього порядку, U_{3m} – корені рівняння $U_{3m} - J_3(U_{3m}) = 0$.

Постійні поширення цих мод дорівнюють:

$$\gamma_{1m} = k \left\{ 1 - 0.5 \left(\frac{U_{1m}}{2\pi a} \lambda \right)^2 \left[1 - \frac{i\nu_n \lambda}{\pi a} \right] \right\}, \quad (40)$$

де $\nu_1 = (\nu^2 + 1) / 2(\nu^2 - 1)^{1/2}$ для наборів мод, ν – показник заломлення стінки хвилеводу.

3. Результати розрахунків

За описаною вище методикою за допомогою математичного пакета Fortran на ЕОМ були проведені розрахунки. Було знайдено власні функції та власні значення двох найнижчих за втратами мод для трьох класів симетрії. Досліджувалися залежності модових втрат від збільшення розкриву аксіконного дзеркала та залежності різниці фазових зсувів цих мод від розкриву дзеркала.

Довжина хвилі досліджуваного випромінювання становила $\lambda = 0,4326$ мм. Під час проведення розрахунків довжина хвилеводу була вибрана аналогічно до експериментальної моделі й склала $L = 1000$ мм, а радіус хвилеводу - $a = 18$ мм. Як матеріал стінок хвилеводів було обрано скло з розрахунковим показником заломлення $\nu = 2,57 + i 0,15$ [18], показник заломлення аксіконного дзеркала $n_a = 2,14$ [14].

3.1. Результати розрахунків для класу мод EH_{nmq}

На рис. 3.1 представлена залежність відносних втрат енергії за круговий обхід резонатора для двох найнижчих за втратами мод класу EH_{nmq} при зміні величини кута розкриву дзеркала γ . На рис. 3.2 — залежність різниці фазового зсуву за круговий обхід при зміні величини кута розкриву дзеркала γ для цього класу мод.

З рис. 3.1 видно, що при довжині резонатора $L = 1000$ мм у діапазоні кутів $\gamma = 1 - 7$ хв за малих кутів розкриву аксіконного дзеркала різниця втрат між розглянутими модами є максимальною.

Далі в діапазоні кутів $\gamma = 7-20$ хв спостерігається погіршення селективних властивостей досліджуваного резонатора. При цьому різниця фаз (рис. 3.2) між модами EH_{11q} та EH_{12q} за круговий обхід є максимальною в діапазоні кутів розкриву $\gamma = 4-20$ хв, що підтверджує хороші селективні властивості резонатора в діапазоні кутів $\gamma = 7-15$ хв. Отже, ці кути є оптимальними для резонатора даної довжини класу мод EH_{nmq} .

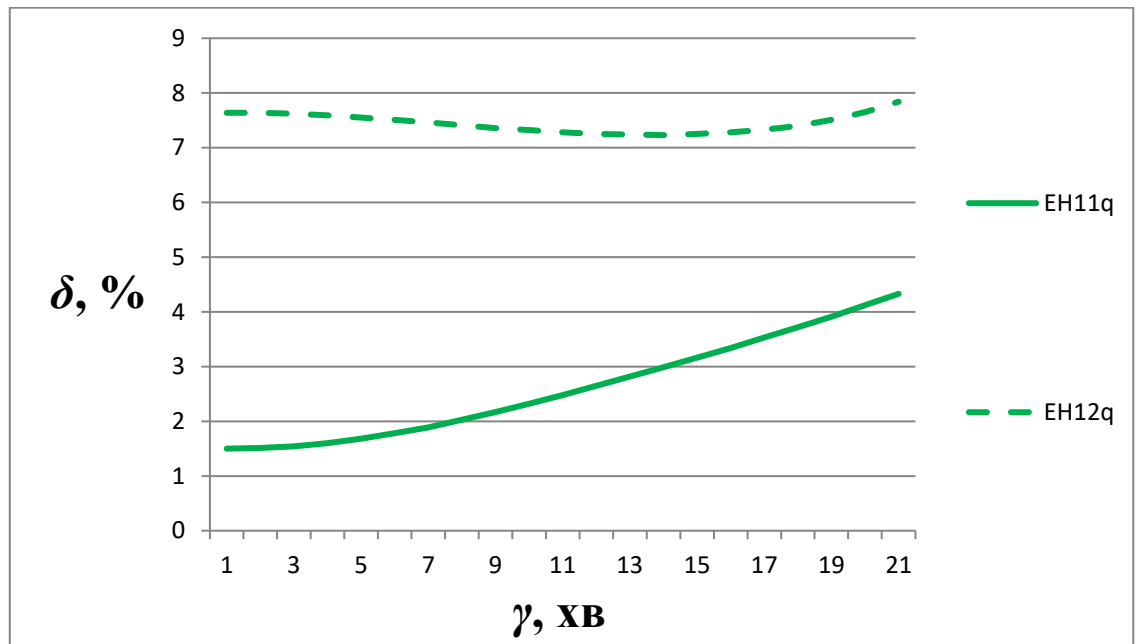


Рис. 3.1. Залежність відносних втрат енергії δ за круговий обхід для двох найнижчих за втратами мод резонатора класу EH_{nmq} при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

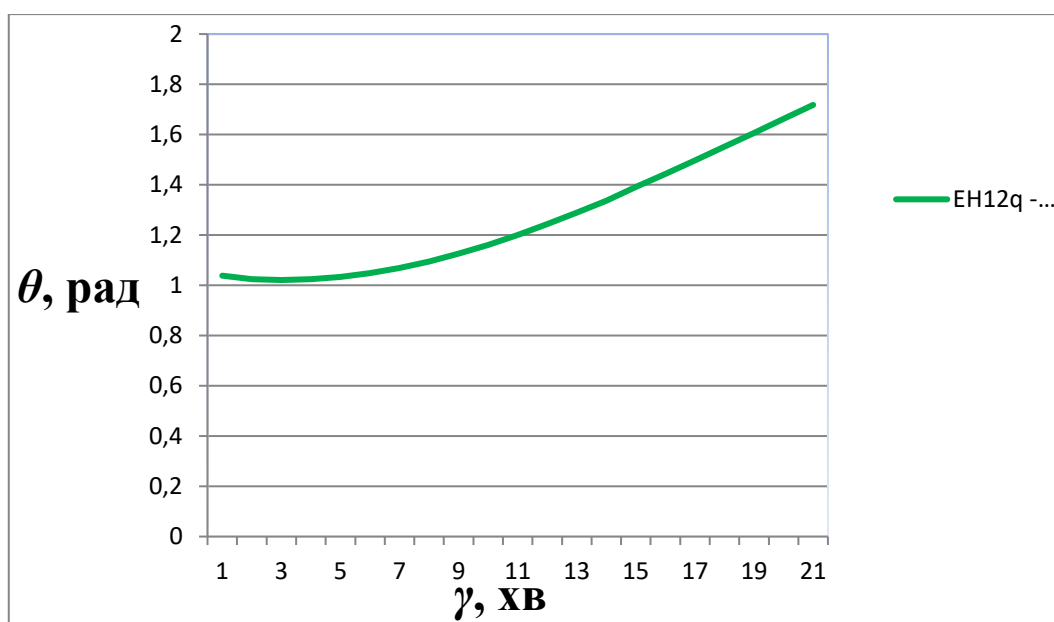


Рис. 3.2. Залежність різниці фаз θ за круговий обхід між модами EH_{12q} та EH_{11q} резонатора при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

3.2. Результати розрахунків для класу мод

На рис. 3.3 і 3.4 представлені залежності відносних втрат енергії та залежність різниці фазового зсуву за круговий обхід резонатора для двох найнижчих за втратами комбінованих мод класу $TE_{0mq} + EH_{2mq}$ при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

З рис. 3.3 видно, що при довжині резонатора $L = 1000$ мм у діапазоні кутів $\gamma = 8\text{--}12$ хв за малих кутів розкриву аксіконного дзеркала різниця втрат між розглянутими модами є максимальною. Далі, у діапазоні кутів $\gamma = 12\text{--}20$ хв, спостерігається погіршення селективних властивостей досліджуваного резонатора. При цьому різниця фаз (рис. 3.4) між комбінованими модами за круговий обхід є максимальною в діапазоні кутів розкриву $\gamma = 0\text{--}9$ хв, що підтверджує хороші селективні властивості резонатора в діапазоні кутів $\gamma = 1\text{--}10$ хв. Отже, ці кути є оптимальними для резонатора даної довжини класу мод $TE_{0mq} + EH_{2mq}$.

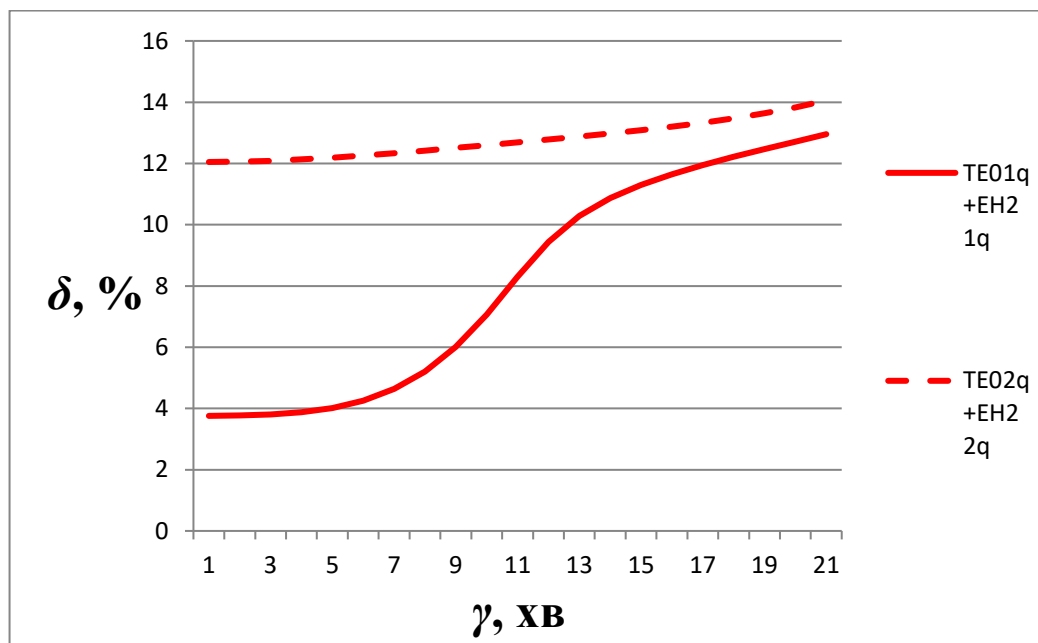


Рис. 3.3. Залежність відносних втрат енергії δ за круговий обхід для двох найнижчих за втратами мод резонатора класу $TE_{0mq} + EH_{2mq}$ при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

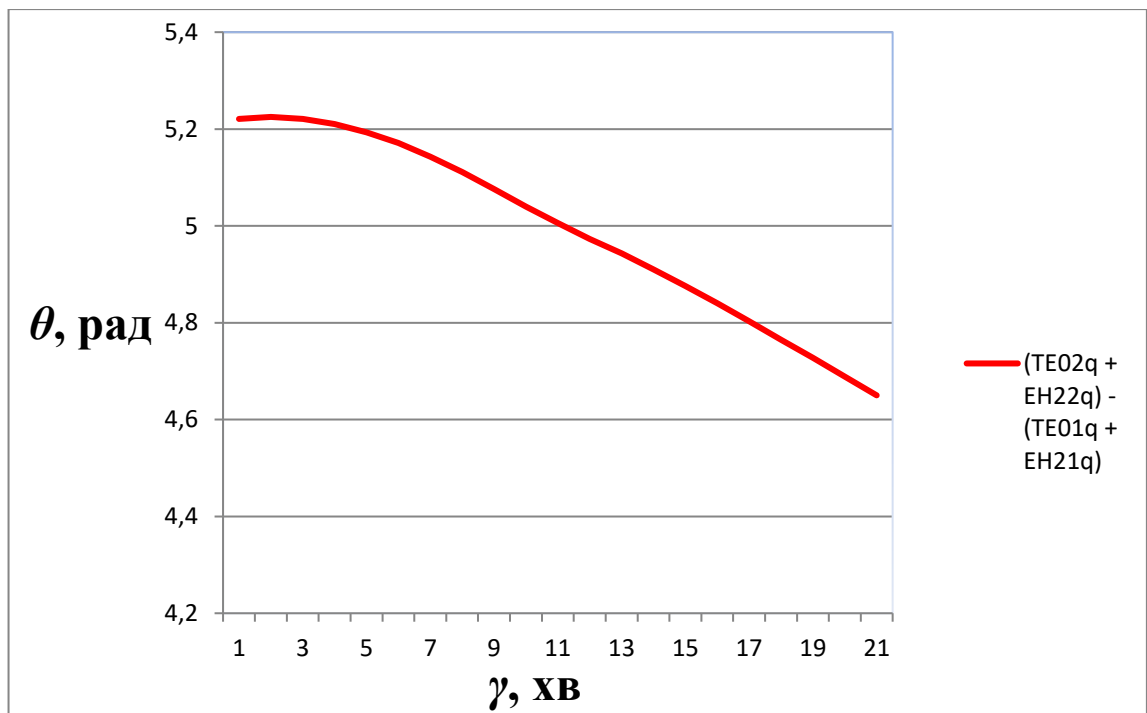


Рис. 3.4. Залежність різниці фаз θ за круговий обхід між модами $TE_{02q} + EH_{22q}$ та $TE_{01q} + EH_{21q}$ резонатора при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

3.3. Результати розрахунків для класу мод $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$

На рис. 3.5 і 3.6 наведені ці залежності для класу комбінованих мод $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$. З рис. 3.5 видно, що при довжині резонатора $L = 1000$ мм у діапазоні кутів $\gamma = 14\text{--}19$ хв за великих кутів розкриву аксіконного дзеркала різниця втрат між розглянутими модами є максимальною. У діапазоні кутів $\gamma = 1\text{--}14$ хв спостерігається погіршення селективних властивостей досліджуваного резонатора. При цьому різниця фаз (рис. 3.6) між комбінованими модами за круговий обхід є максимальною в діапазоні кутів розкриву $\gamma = 13\text{--}16$ хв, що підтверджує хороші селективні властивості резонатора в діапазоні кутів $\gamma = 14\text{--}16$ хв. Отже, ці кути є оптимальними для резонатора даної довжини класу мод $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$.

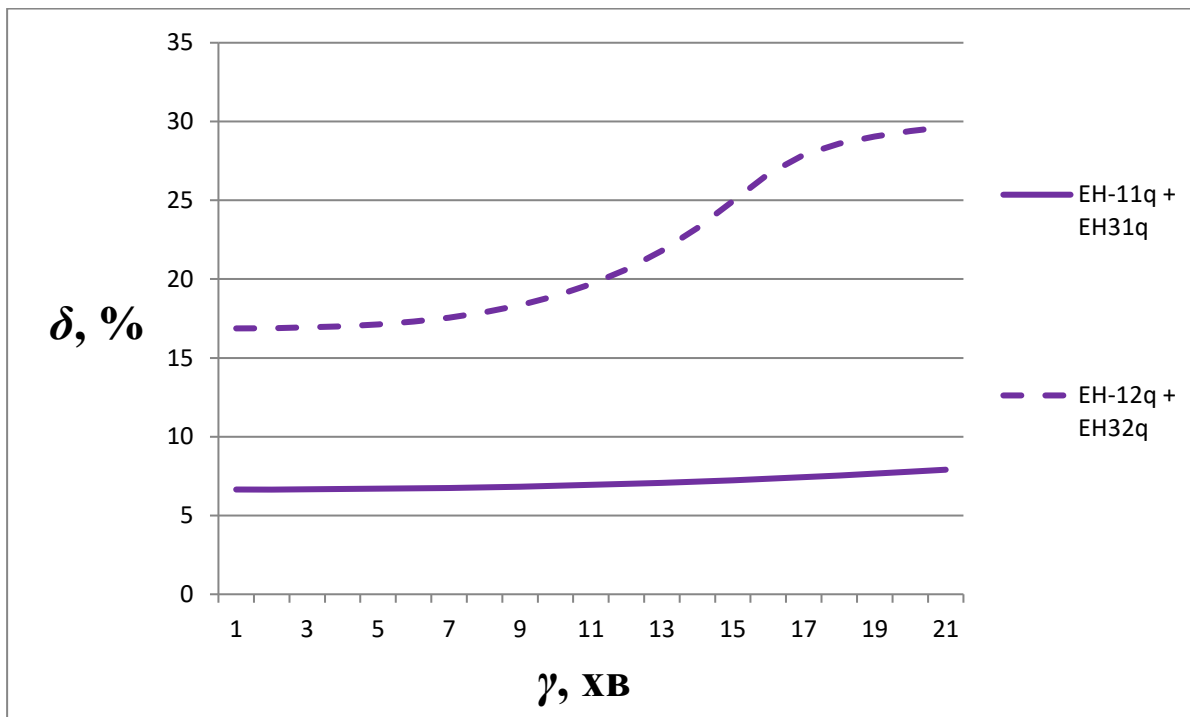


Рис. 3.5. Залежність відносних втрат енергії δ за круговий обхід для двох найнижчих за втратами мод резонатора класу $EH_{-1mq} + EH_{3mq}$ при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

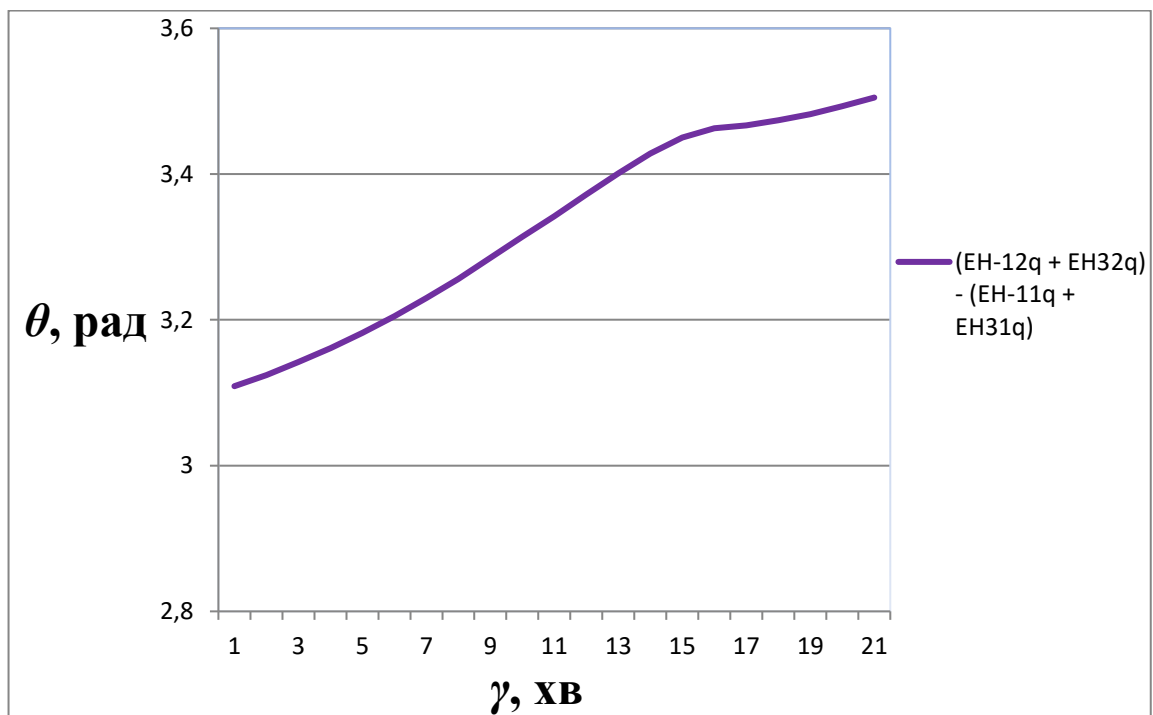


Рис. 3.6. Залежність різниці фаз θ за круговий обхід між модами $EH_{-12q} + EH_{32q}$ та $EH_{-11q} + EH_{31q}$ резонатора при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

3.3. Результати розрахунків для мод трьох класів симетрії

На рис. 3.7 наведені залежності відносних втрат енергії за круговий обхід резонатора для двох найнижчих за втратами мод для трьох класів симетрії резонатора при зміні величини кута розкриву дзеркала γ . На рис. 3.8 показана залежність різниці фазового зсуву за круговий обхід від збільшення розкриву дзеркала для цих мод. Із рисунка 3.7 видно, що при довжині резонатора $L = 1000$ мм у діапазоні кутів $\gamma = 9\text{--}13$ хв за малих кутів розкриву аксіконного дзеркала різниця втрат між розглянутими модами є максимальною. У діапазоні кутів $\gamma = 13\text{--}20$ хв спостерігається погіршення селективних властивостей досліджуваного резонатора. При цьому різниця фаз (рис. 3.7) між модами трьох класів симетрії за круговий обхід є максимальною в діапазоні кутів розкриву $\gamma = 11\text{--}15$ хв, що підтверджує хороші селективні властивості резонатора в діапазоні кутів $\gamma = 10\text{--}13$ хв. Отже, ці кути є оптимальними для резонатора даної довжини.

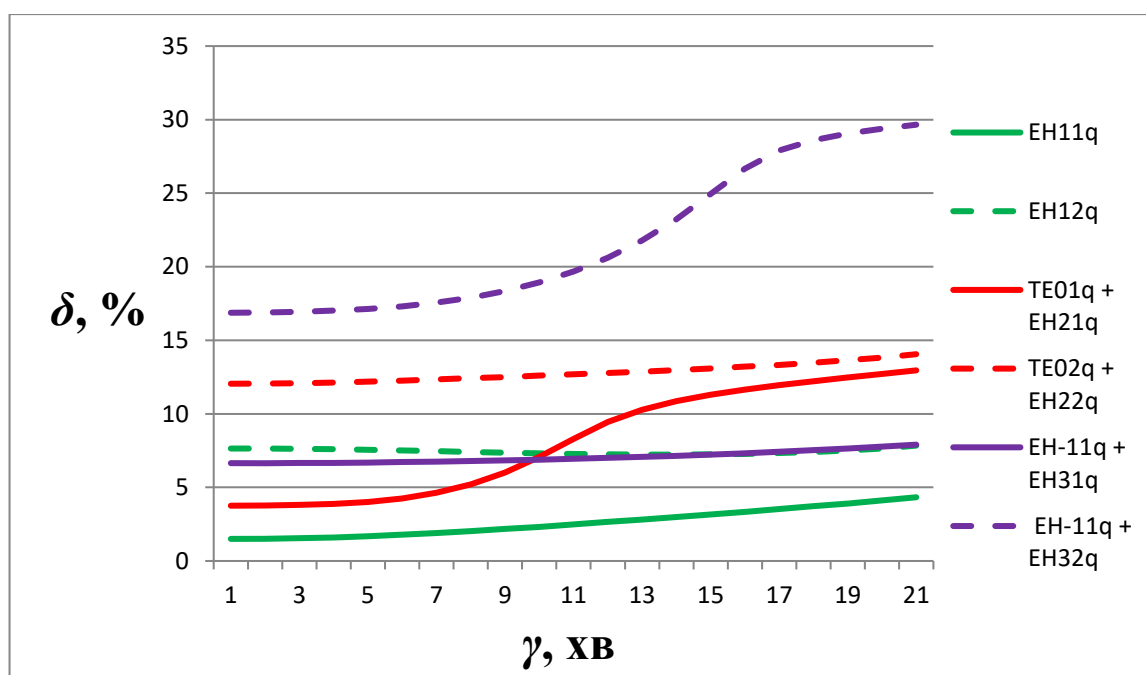


Рис.3.7. Залежність відносних втрат енергії за круговий обхід для двох нижчих за втрат мод для трьох класів симетрії резонатора при зміні величини кута розкриву дзеркала γ .

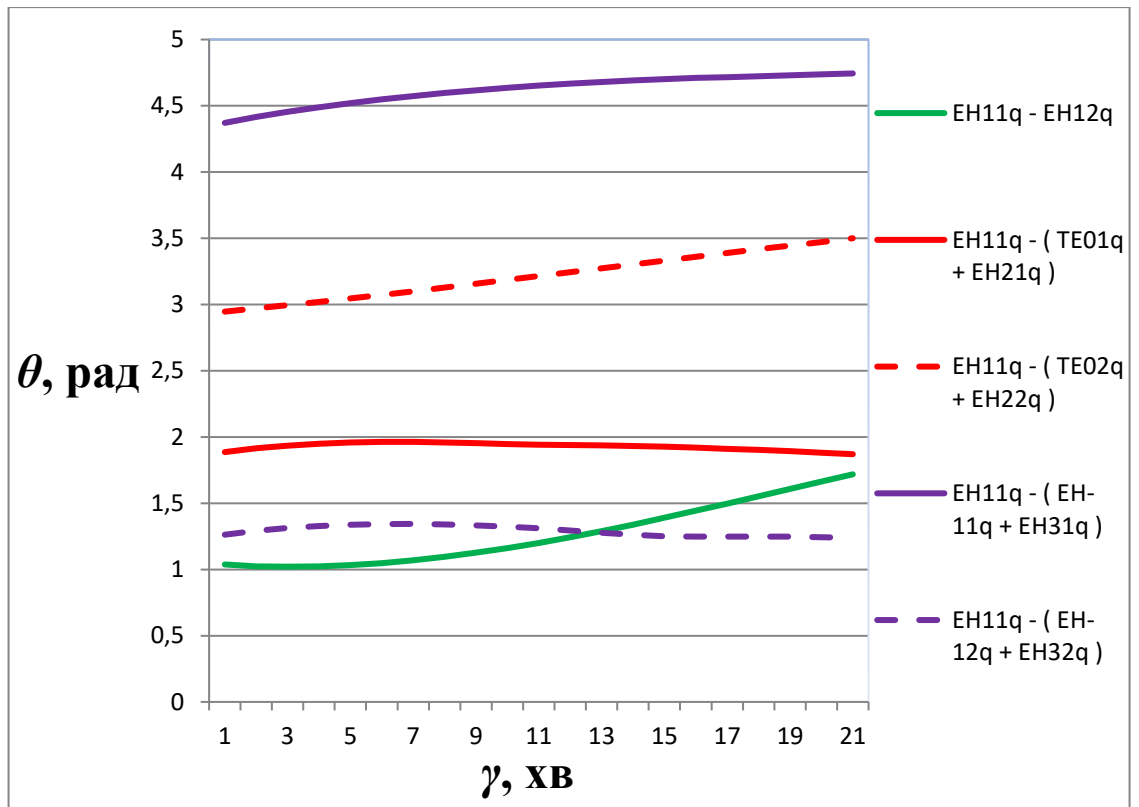


Рис. 3.8. Залежність різниці фаз θ за круговий обхід між модами трьох класів симетрії резонатора при зміні величини кута розкриття дзеркала γ .

Висновок

Матричним методом проведено чисельне дослідження просторово-енергетичних характеристик двох найнижчих за втратами мод для трьох класів симетрії хвилеводного діелектричного резонатора при зміні кута розкриву аксіконного дзеркала. Визначено області геометричних параметрів резонатора для забезпечення його оптимальних селективних властивостей. Для резонатора довжиною $L = 1000$ мм такою областю є область кутів $\gamma = 10\text{--}13$ хв.

Список літератури

1. G. Račiukaitis, Ultra-Short Pulse Lasers for Microfabrication: A Review, IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 27, no. 6, pp. 1-12, 2021.
2. Dowden J. M. The Mathematics of Thermal Modeling: An Introduction to the Theory of Laser Material Processing, 2e. – CRC Press, 2024.
3. Francis L. F. Materials Processing: A Unified Approach to Processing of Metals, Ceramics, and Polymers. – Elsevier, 2024.
4. V. G. Niziev and A. V. Nesterov, J. Phys. D. Longitudinal fields in electromagnetic waves // Appl. Phys., Vol. 32, P. 1450-1455 (1999).
5. Förster D. J. et al. Review on experimental and theoretical investigations of ultra-short pulsed laser ablation of metals with burst pulses //Materials. – 2021. – T. 14. – №. 12. – C. 3331.
6. Liu Y. H., Cheng C. W. The Experimental and Modeling Study of Femtosecond Laser-Ablated Silicon Surface //Journal of Manufacturing and Materials Processing. – 2023. – T. 7. – №. 2. – C. 68.
7. Al Javed M. O., Bin Rashid A. Laser-assisted micromachining techniques: An overview of principles, processes, and applications //Advances in Materials and Processing Technologies. – 2025. – T. 11. – №. 3. – C. 1583-1626.
8. Andrews L. C., Beason M. K. Laser beam propagation in random media: new and advanced topics. – 2023.
9. Roncaglia A. Advanced Lithography //Springer Handbook of Semiconductor Devices. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – C. 279-308.
10. Dickey F. M. (ed.). Laser beam shaping: theory and techniques. – CRC press, 2018.
11. McLeod J. H. The axicon: a new type of optical element //Journal of the optical society of America. – 1954. – V. 44. – №. 8. – P. 592-597.
12. Nasrollahi V. et al. Laser drilling with a top-hat beam of micro-scale high

- aspect ratio holes in silicon nitride // Journal of Materials Processing Technology. – 2020. – V. 281. – P. 116636.
13. Winfield R., R. J. Winfield, B. Bhuian, S. O'Brien, G. M. Crean. Excimer laser processing of ZnO thin films prepared by the sol-gel process // J. Appl. Phys. Lett. – 2007. No 90. P. 111115.
14. Forbes A. (ed.). Laser beam propagation: generation and propagation of customized light. – CRC Press, 2014.
15. Pal V. et al. Generating flat-top beams with extended depth of focus //Applied optics. – 2018. – V. 57. – №. 16. – P. 4583-4589.
16. Winter P. W., Shroff H. Faster fluorescence microscopy: advances in high speed biological imaging //Current opinion in chemical biology. – 2014. – V. 20. – C. 46-53.
17. Marcatily E.A.J., Schmeltzer R.A. Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers // Bell Syst. Tech. J. – 1964. – Vol.43, № 4. – P.1783–1809.
18. Birch J.R., Cook R.J., Harding A.F. et al. The optical constants of ordinary glass from 0.29 to 4000 cm^{-1} // J. Phys. D: Appl. Phys.– 1975. – Vol.8, № 1. – P.1353 – 1368.