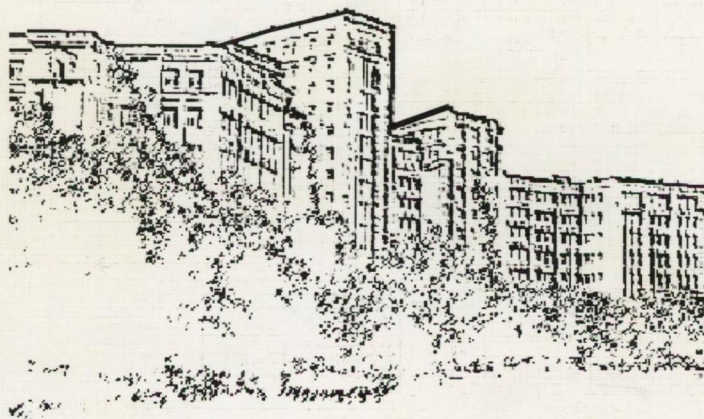


ISSN 0453-8048

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету ім. В.Н. Каразіна



№ 711

Харків  
2005

**K-14038**

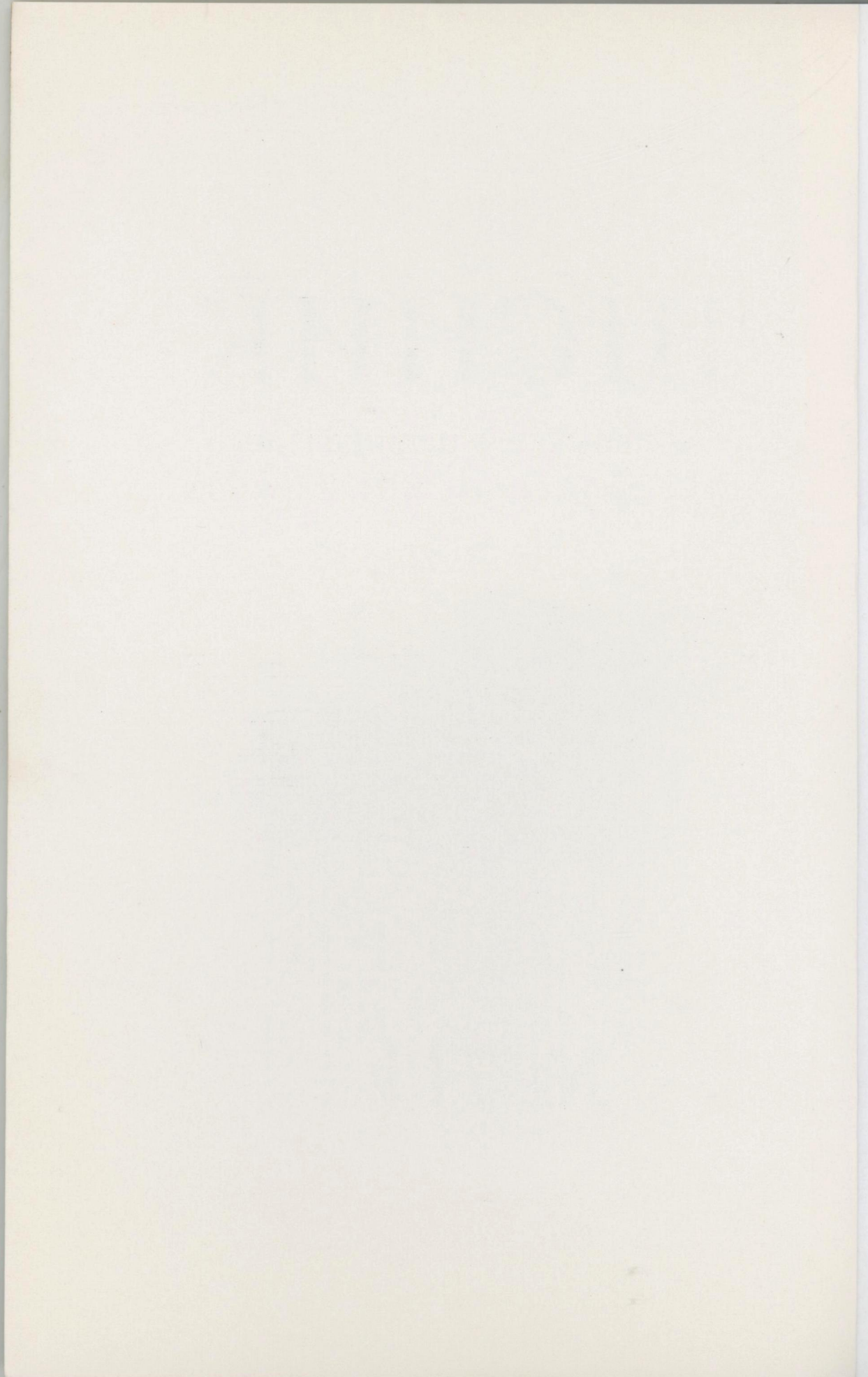
**П330032**

V.N. Karazin Kharkiv National University



00515482

7



Міністерство освіти та науки України

ISSN 0453-8048

Заснований у 1965 р.

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету ім. В. Н. Каразіна



№ 711

**Серія**

«Математика,  
прикладна математика  
і механіка»

**Випуск 55**

Харків

2005

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

**Редакційна колегія:**

**Головний редактор** – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

**Члени редакційної колегії:**

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Пацегон Н. Ф. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинович І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуєнко О.В.

**Адреса редакційної колегії:** 61077, Харків, м. Свободи, 4,  
ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.

Тел. 7075518, 7075135, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Интернет:

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

*Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 14 від 30 грудня 2005 р.).*

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

©Харківський національний університет, 2005

К-14038

Центральна наукова бібліотека  
Харківського національного  
університету ім. В.Н.Каразіна

ім. №

17330032

## On some property of a family of unitary operators commuting to within a constant

S.L. Gefter, T.S. Shcherbina

*V.N.Karazin Kharkov National University, Ukraine,*

*B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkov, Ukraine*

We study families of unitary operators on a Hilbert space  $H$ , commuting to within a constant. It is shown that if such a family generates in the norm topology the algebra  $B(H)$  of all bounded linear operators, then the dimension of  $H$  is finite and there exist some unitary operators  $v_1, v_2, \dots, v_m \in S$  which generate  $B(H)$  such that  $(\lambda_j v_j)^n = I$  ( $j = 1, \dots, m$ ), where  $n = \dim H$  and  $\lambda_j$  - some constants which belong to the unit circle. *2000 Mathematics Subject Classification 42A70.*

Let  $H$  be a Hilbert space and let  $S$  a family of unitary operators on  $H$  with the following property:

$$\text{for each pair of operators } u, v \in S \text{ there exists a constant } \lambda(u, v), \text{ such that } vu = \lambda(u, v)uv \quad (1)$$

(we remark, that since  $u, v$  are unitary  $\lambda(u, v)$  belongs to the unit circle  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ).

Such families of operators appear in mathematical physics (commutation relations in the Weyl form [1]-[4]), the theory of group representations (projective unitary representations (see, for example, [5, 6]) and in the operator algebras theory ("non-commutative" tori [7, 8]).

The simplest example of a family of non-commuting unitary operators, possessing the property (1), is the following pair of  $n \times n$  matrices  $u, v$ :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix},$$

where  $\lambda = e^{2\pi i/n}$ . In this example  $u$  and  $v$  satisfy the relation  $vu = \lambda uv$ . Besides,  $u^n = v^n = 1$  and one can show that the matrices  $u$  and  $v$  generate

the algebra  $M_n(\mathbb{C})$  of all matrices  $n \times n$ , i.e. the linear span of the set  $\{u^k v^l : k, l = 0, 1, \dots, n-1\}$  coincides with  $M_n(\mathbb{C})$ . The main result of this note is the theorem which states that similar examples describe all possible families of unitary operators, possessing the property (1), and generating (in the norm topology) the algebra of all bounded operators on the Hilbert space. The proof is based on the Slawny uniqueness theorem from the theory of projective unitary representations of Abelian groups (see theorem 3.7 of [9]).

**Theorem.** *Let  $S$  be a family of unitary operators on a Hilbert space  $H$ , possessing the property (1). Suppose that  $S$  generates in the norm topology the algebra  $B(H)$  of all bounded linear operators on  $H$ , i.e. the closure with respect to the operator norm of the linear span of the set  $\{u_1 u_2 \dots u_k : u_j \in S\}$  coincides with  $B(H)$ . Then the dimension of  $H$  is finite, and there exist  $v_1, v_2, \dots, v_m \in S$  which generate  $B(H)$  and such constants  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{T}$  that  $(\lambda_j v_j)^n = I$ ,  $j = 1, \dots, m$ , where  $n = \dim H$ .*

*Proof.* Consider the group  $U$ , generated by the family  $S$  and by the scalar operators  $\{\alpha I : \alpha \in \mathbb{T}\}$ . Since this group generates (in the norm topology) the algebra  $B(H)$  and the center of  $B(H)$  is trivial (i.e. it coincides with the set  $\{\alpha I : \alpha \in \mathbb{C}\}$ ), then the center  $Z(U)$  of the group  $U$  is of the form  $\{\alpha I : \alpha \in \mathbb{T}\}$ . Consider the quotient group  $G = U/Z(U)$ . It follows from (1) that this group is Abelian. For the sake of convenience below we consider  $G$  as an additive Abelian group.

Let  $\pi : U \rightarrow G$  be a canonical projection. Consider some section  $\sigma : G \rightarrow U$ , i.e. such a mapping that  $\pi \circ \sigma = id_G$  and  $\sigma(0) = I$ . Let us prove that  $\sigma$  is a projective unitary representation of  $G$ , i.e.

$$\sigma(g+h) = \omega(g, h) \sigma(g) \sigma(h), \quad g, h \in G.$$

Here  $\omega : G \times G \rightarrow \mathbb{T}$  is a normalized 2-cocycle, that is

$$\begin{aligned} \omega(g+h, s) \omega(g, h) &= \omega(g, h+s) \omega(h, s), \\ \omega(g, 0) &= \omega(0, h) = 1, \quad g, h, s \in G. \end{aligned} \quad (2)$$

Really, for  $g, h \in G$  consider the operator

$$\tilde{\omega}(g, h) = \sigma(g+h) \sigma(h)^* \sigma(g)^*.$$

Since

$$(\pi \circ \sigma)(g+h) = g+h, \quad (\pi \circ \sigma)(g) = g, \quad (\pi \circ \sigma)(h) = h,$$

$\sigma(g+h)$  and  $\sigma(g) \sigma(h)$  belong to the same co-set with respect to  $Z(U)$ . Hence, the operator  $\tilde{\omega}(g, h)$  is of the form  $\omega(g, h) I$ , where  $\omega(g, h) \in \mathbb{T}$ . Let us prove (1) for this function  $\omega$ . It is easy to note that

$$\begin{aligned} \sigma(g+h+s) &= \omega(g+h, s) \sigma(g+h) \sigma(s) \\ &= \omega(g+h, s) \omega(g, h) \sigma(g) \sigma(h) \sigma(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(g+h+s) &= \omega(g, h+s) \sigma(g) \sigma(h+s) \\ &= \omega(g, h+s) \omega(h, s) \sigma(g) \sigma(h) \sigma(s),\end{aligned}$$

therefore  $\omega(g+h, s) \omega(g, h) = \omega(g, h+s) \omega(h, s)$ . Besides,

$$\omega(g, 0) I = \tilde{\omega}(g, 0) = \sigma(g) \sigma(g)^* = I,$$

and so  $\omega(g, 0) = 1$  and similarly  $\omega(0, h) = 1$ . Thus, relations (1) are proved.

Now we prove that the 2-cocycle  $\omega$  is non-degenerate, i.e. for each  $g \in G$ ,  $g \neq 0$  there exists  $h \in G$  such that  $\omega(g, h) \overline{\omega(h, g)} \neq 1$  which is equivalent to  $\sigma(g) \sigma(h) \neq \sigma(h) \sigma(g)$ . Really, consider an arbitrary  $g \in G$ ,  $g \neq 0$ . Since the centre of  $U$  is trivial, there exists  $u_0 \in U$  such that  $\sigma(g) u_0 \neq u_0 \sigma(g)$ . Let us take  $h = \pi(u_0)$ . Then  $\sigma(\pi(u_0)) = \alpha u_0$  for some  $\alpha \in \mathbb{T}$ . Hence

$$\begin{aligned}\sigma(g) \sigma(h) &= \sigma(g) \sigma(\pi(u_0)) = \alpha \sigma(g) u_0 \neq \alpha u_0 \sigma(g) \\ &= \sigma(\pi(u_0)) \sigma(g) = \sigma(h) \sigma(g).\end{aligned}$$

Using the 2-cocycle  $\omega$ , construct the regular projective unitary representation  $L$  of the group  $G$ . This representation acts in the space  $l^2(G)$  and its operators are of the form

$$(L(g)\xi)(h) = \overline{\omega(h, g)} \xi(h+g), \quad g \in G, \quad \xi \in l^2(G).$$

Consider the  $C^*$ -algebra  $C^*(G, \omega)$  which is generated by these operators (see [10]). It is easy to check that the linear functional  $\tau: C^*(G, \omega) \rightarrow \mathbb{C}$  of the form

$$\tau(a) = \langle a \xi_0, \xi_0 \rangle, \quad \text{where } \xi_0(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}, \quad h \in G$$

is a trace on  $C^*(G, \omega)$ , i.e.  $\tau(ab) = \tau(ba)$  for each  $a, b \in C^*(G, \omega)$ . On the other hand, by the Slawny theorem (see theorem 3.7 of [9] and theorem 5.2.8 of [4]),  $C^*(G, \omega)$  is  $*$ -isomorphic to the  $C^*$ -algebra, generated by operators of the representation  $\sigma$ . But according to our assumption this  $C^*$ -algebra coincides with  $B(H)$ . Since a trace can be defined on the whole  $B(H)$  if and only if  $\dim H < \infty$ , we have proved that  $\dim H < \infty$ .

Now let us prove the rest statement of the theorem. Since the dimension of  $H$  is finite and  $B(H)$  is generated by the family  $S$ , it is evident that there exist  $v_1, v_2, \dots, v_m \in S$  which also generate  $B(H)$ . Hence, we are left to prove that there exist constants  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{T}$  such that  $(\lambda_j v_j)^n = I$ ,  $j = 1, \dots, m$ , where  $n = \dim H$ . Let  $\alpha$  be an eigenvalue of  $v_1$  and let  $e$  be a corresponding eigenvector. Then for any fixed  $i \in \{2, \dots, m\}$

$$v_1 v_i e = \lambda(v_1, v_i) v_i v_1 e = \alpha \lambda(v_1, v_i) v_i e,$$

i.e.  $\alpha \lambda(v_1, v_i)$  is also an eigenvalue of  $v_1$ , corresponding to the eigenvector  $v_i e$ . Thus we get that if  $\alpha$  is an eigenvalue of  $v_1$  then also  $\alpha \lambda(v_1, v_i)$ ,  $\alpha \lambda(v_1, v_i)^2$ ,

$\alpha\lambda(v_1, v_i)^3, \dots$  are eigenvalues of  $v_1$ . Since  $\dim H = n < \infty$ ,  $\lambda(v_1, v_i)$  is the  $k_i$ -th root of 1 for some positive integer  $k_i$ . Then eigenvalues of the operator  $v_1$  are divided in a few non-intersecting subsets with a  $k_i$  numbers  $\beta, \beta\lambda(v_1, v_i), \dots, \beta\lambda(v_1, v_i)^{k_i-1}$  for some  $\beta \in \mathbb{T}$ . Let us note, that all eigenspaces of  $v_1$ , corresponding to the eigenvalues of the same subset, are the same dimension, because each of them can be transform isomorphically to any other one by using of some power of the unitary operator  $v_i$ . Since the sum of dimensions of all eigenspaces  $v_1$  is equal to  $n$ , we can conclude that  $k_i|n$  and so  $\lambda(v_1, v_i)^n = 1$ . Since  $i$  was chosen arbitrarily, we get that  $\lambda(v_1, v_j)^n = 1$  for any  $j = 2, \dots, m$ .

Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be all eigenvalues of  $v_1$ . If for any  $\alpha_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) there exist  $s_1, \dots, s_l = 2, \dots, m$  and  $p_1, \dots, p_l = 0, 1, 2, \dots$  such that

$$\alpha_1 = \alpha_i \lambda(v_1, v_{s_1})^{p_1} \cdot \dots \cdot \lambda(v_1, v_{s_l})^{p_l},$$

then, taking the  $n$ -th power, we get  $\alpha_1^n = \alpha_i^n$  for any  $\alpha_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ), which means that  $(\alpha_1^{-1}v_1)^n = I$ , and so in this case the theorem is proved. Hence, we are left to consider the case when there exist  $\alpha_i$  ( $i \in \{2, \dots, n\}$ ) such that  $\alpha_1 \neq \alpha_i \lambda(v_1, v_{s_1})^{p_1} \cdot \dots \cdot \lambda(v_1, v_{s_l})^{p_l}$  for any  $s_1, \dots, s_l = 2, \dots, m$  and any  $p_1, \dots, p_l = 0, 1, 2, \dots$ . Consider the subspace  $V$  of the space  $H$ , which is the direct sum of eigenspaces of  $v_1$ , corresponding to the eigenvalues of the form  $\alpha_i \lambda(v_1, v_{s_1})^{p_1} \cdot \dots \cdot \lambda(v_1, v_{s_l})^{p_l}$ , where  $s_1, \dots, s_l = 2, \dots, m$ ,  $p_1, \dots, p_l = 0, 1, 2, \dots$ . It is easy to see that an eigenvector, corresponding to the eigenvalue  $\alpha_1$ , does not belong to  $V$ . So  $V$  does not coincide with  $H$ . On the other hand,  $V$  is invariant with respect to all operators  $v_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), because if  $v_1 e = \alpha e$ , then  $v_1(v_j e) = \lambda(v_1, v_j)\alpha(v_j e)$ . Therefore, all operators  $v_j$  posses a common non-trivial invariant subspace, and so they cannot generate  $B(H)$ . Hence, this case is impossible and so we complete the proof of the theorem.

**Remark.** If we assume that the family  $S$  from the theorem generates the algebra  $B(H)$  in the *strong* or *weak* operator topology, but does not in the norm topology, then the statement of the theorem can be wrong. Indeed, as an example consider  $H = l^2(\mathbb{Z})$  and  $S = \{u, v, u^*, v^*\}$ , where

$$(uf)(k) = f(k-1), (vf)(n) = \lambda^n f(n), f \in l^2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}$$

and  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ ,  $\theta \notin \mathbb{Q}$ . It is easy to see, that  $uv = \lambda vu$ . Besides,  $u$  and  $v$  have no common non-trivial invariant subspaces. Hence, the commutant of the algebra, generated by  $S$ , is trivial. Then, the second commutant of this algebra coincides with  $B(H)$ . On the other hand, by the bicommutant theorem (see theorem 2.4.11 from [3]) the second commutant is the closure of our algebra in the weak (or strong) topology.

**Acknowledgment.** The research of the first author was supported in part by CRDF grant UM1-2546-KH-03.

## REFERENCES

1. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics V 1.- New York: Academic Press, 1972.- 357 p.
2. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. V 2.- New York: Academic Press, 1975.- 395 p.
3. Bratteli O., Robinson D.W. Operator algebras and quantum statistical mechanics.V 1.- Springer-Verlag, 1979.-498 p.
4. Bratteli O., Robinson D.W. Operator algebras and quantum statistical mechanics.V 2.- Springer-Verlag, 1981.-509 p.
5. Barut O., Raczka R. Theory of group representation and applications.- Warszawa: PWN-Polish Scintific Publishers, 1977.-663 p.
6. Mackey G.W. Unitary group representations in physics, probability, and number theory.- London: The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., 1978.- 402 p.
7. Rieffel M.A.  $C^*$ -algebras associated with irrational rotations // Pacif.J.Math.- 1981. - **93**. - P. 415-429.
8. Connes A. Noncommutative geometry.-San Diego, CA: Academic Press, Inc., 1994. -432 p.
9. Slawny J. On factor representation and  $C^*$ - algebra of canonical commutation relations // Commun.Math.Phys. - 1972. - **24**. - P. 151-170.
10. Zeller-Meier G. Produits croisés d'une  $C^*$ -algèbre par un groupe d'automorphismes // J.Math.Pures Appl. - 1968. - **47(9)**. - P. 101-239.

## Оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса

Є.В. Массалітіна

Київський національний технічний університет "КПІ", Україна

Дана оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса з даними на характеристиках. 2000 Mathematics Subject Classification 35L70.

Розглянемо одну з відомих задач математичної фізики - задачу Гурса з даними на характеристиках [1].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y)u(x, y) + k(x, y)u^\alpha(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g_1(x),$$

$$u(0, y) = g_2(y).$$

З необхідністю розв'язання цієї крайової задачі стикаються при дослідженні процесів сорбції та десорбції газів та багатьох інших фізичних задач, пов'язаних з газо і гідродинамікою.

Будемо вважати, що функції  $g_1(x)$ ,  $g_2(y)$  - диференційовні, та задовольняють умові узгодженості  $g_1(0) = g_2(0)$ . Послідовно інтегруючи по  $x$  та  $y$  рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(0, y)}{\partial y} + \int_0^x (f(s, y)u(s, y) + k(s, y)u^\alpha(s, y)) ds,$$

$$u(x, y) = g_1(x) + g_2(y) - g_1(0) + \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t)u(s, t) + k(s, t)u^\alpha(s, t)) ds.$$

Припускаючи, що існує невід'ємний розв'язок цього рівняння, знайдемо його оцінку.

**Теорема 1.** Нехай в області  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$  виконуються наступні умови:

- 1) функції  $u(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $k(x, y)$  неперервні та невід'ємні;
- 2) функції  $g_1(x)$ ,  $g_2(y)$  - додатні та диференційовні;

3)  $g_1'(x)$ ,  $g_2'(y)$  - невід'ємні;

4)  $g_1(0) = g_2(0)$ .

Функція  $u(x, y)$  в області  $D$  задовольняє нерівності

$$u(x, y) \leq g_1(x) + g_2(y) - g_1(0) + \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t)u(s, t) + k(s, t)u^\alpha(s, t)) ds. \quad (2)$$

Тоді в області  $D$  справедливі оцінки:

при  $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x, y) \leq \left\{ [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)] \exp \left( (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds \right) + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp \left( (1-\alpha) \int_t^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad (3)$$

при  $\alpha = 1$

$$u(x, y) \leq \frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(0)} \exp \left\{ \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t) + k(s, t)) ds \right\}; \quad (4)$$

при  $\alpha > 1$  оцінка (3) буде справедлива в області

$$D_\alpha = \left\{ (x, y) \in D : \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp \left( (\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \right) ds < \right. \\ \left. < (\alpha-1)^{-1} [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)] \right\}.$$

Доведення. В залежності від значень  $\alpha$  розглянемо три випадки:

Нехай  $0 \leq \alpha < 1$ . Позначимо праву частину нерівності (2)

$$g_1(x) + g_2(y) - g_1(0) + \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t)u(s, t) + k(s, t)u^\alpha(s, t)) ds = \nu(x, y).$$

Тоді

$$u(x, y) \leq \nu(x, y), \quad (5)$$

$$\nu(0, y) = g_2(y), \quad (6)$$

$$\nu(x, 0) = g_1(x), \quad (7)$$

та в силу умов 1)-4) теореми

$$0 \leq \frac{\partial \nu(x, y)}{\partial x} = \frac{dg_1(x)}{dx} + \int_0^y (f(x, t)u(x, t) + k(x, t)u^\alpha(x, t))dt,$$

$$0 \leq \frac{\partial \nu(x, y)}{\partial y} = \frac{dg_2(y)}{dy} + \int_0^x (f(s, y)u(s, y) + k(s, y)u^\alpha(s, y))ds.$$

Отже, функція  $\nu(x, y)$  неспадна по кожній змінній:

$$\forall s \in [0, x] \quad \nu(s, y) \leq \nu(x, y), \quad (8)$$

$$\forall t \in [0, y] \quad \nu(x, t) \leq \nu(x, y). \quad (9)$$

Тому, враховуючи нерівності (5), (8), (9) можна записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu(x, y)}{\partial x} &\leq \frac{dg_1(x)}{dx} + \int_0^y (f(x, t)\nu(x, t) + k(x, t)\nu^\alpha(x, t))dt \leq \\ &\leq \frac{dg_1(x)}{dx} + \nu(x, y) \int_0^y f(x, t)dt + \nu^\alpha(x, y) \int_0^y k(x, t)dt, \\ \frac{\partial \nu(x, y)}{\partial y} &\leq \frac{dg_2(y)}{dy} + \int_0^x (f(s, y)\nu(s, y) + k(s, y)\nu^\alpha(s, y))ds \leq \\ &\leq \frac{dg_2(y)}{dy} + \nu(x, y) \int_0^x f(s, y)ds + \nu^\alpha(x, y) \int_0^x k(s, y)ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Помножимо нерівність (10) на додатний множник

$$(1 - \alpha)\nu^{-\alpha}(x, y)\exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t)ds\right) \quad (11)$$

і отримаємо

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\nu^{-\alpha}(x, y)\frac{\partial \nu(x, y)}{\partial y}\exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t)ds\right) - \\ - (1 - \alpha)\nu^{1-\alpha}(x, y)\exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t)ds\right) \int_0^x f(s, y)ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \alpha)\nu^{-\alpha}(x, y) \frac{dg_2(y)}{dy} \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \\ &+ (1 - \alpha) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \int_0^x f(s, y) ds. \end{aligned}$$

Тоді, скориставшись тим, що  $\forall s \in [0, x] \quad \nu(s, y) \leq \nu(x, y)$ , та згорнувши ліву частину отриманої нерівності, можна записати

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu^{1-\alpha}(x, y) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \right] \leq \\ &\leq (1 - \alpha) \frac{1}{\nu^\alpha(0, y)} \frac{dg_2(y)}{dy} \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \\ &+ (1 - \alpha) \int_0^x k(s, y) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Після інтегрування нерівності (12) по змінній  $y$  в межах від 0 до  $y$ , враховуючи умови (6)-(7), матимемо

$$\begin{aligned} &\nu^{1-\alpha}(x, y) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) - \nu^{1-\alpha}(x, 0) \leq \\ &\leq (1 - \alpha) \int_0^y \exp\left((\alpha - 1) \int_0^\tau dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \frac{dg_2(\tau)}{g_2^\alpha(\tau)} + \\ &+ (1 - \alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds. \\ &\nu^{1-\alpha}(x, y) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) - g_1^{1-\alpha}(x) \leq \\ &\leq \int_0^y \exp\left((\alpha - 1) \int_0^\tau dt \int_0^x f(s, t) ds\right) dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ &+ (1 - \alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha - 1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

або

$$\begin{aligned} \nu(x, y) \leq & \exp\left(\int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \left\{ g_1^{1-\alpha}(x) + \right. \\ & + \int_0^y \exp\left((\alpha-1) \int_0^\tau dt \int_0^x f(s, t) ds\right) dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ & \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \nu(x, y) \leq & \left\{ g_1^{1-\alpha}(x) \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \right. \\ & + \int_0^y \exp\left((1-\alpha) \int_\tau^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ & \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((1-\alpha) \int_t^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu(x, y) \leq & \left\{ g_1^{1-\alpha}(x) \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \right. \\ & + \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \int_0^y dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ & \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} \nu(x, y) \leq & \left\{ [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)] \times \right. \\ & \times \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \\ & \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((1-\alpha) \int_t^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Враховуючи нерівність (5), приходимо до оцінки (3), яка буде справедлива для всіх  $(x, y) \in D$ .

Нехай  $\alpha > 1$ . Проробляючи все, як і в попередньому випадку, домножимо нерівність (10) на множник (11), який змінить знак нерівності на протилежний. Після ряду аналогічних перетворень прийдемо до нерівності (13) тільки з протилежним знаком:

$$\begin{aligned} \nu^{1-\alpha}(x, y) \exp\left((\alpha-1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) &\geq g_1^{1-\alpha}(x) + \\ &+ \int_0^y \exp\left((\alpha-1) \int_0^\tau dt \int_0^x f(s, t) ds\right) dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ &+ (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $1-\alpha < 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \nu^{\alpha-1} &\leq \exp\left((\alpha-1) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) \times \left\{ g_1^{1-\alpha}(x) + \right. \\ &+ \int_0^y \exp\left((\alpha-1) \int_0^\tau dt \int_0^x f(s, t) ds\right) dg_2^{1-\alpha}(\tau) + \\ &+ (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \left. \right\}^{-1}, \\ \nu(x, y) &\leq \left\{ [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)] \times \right. \\ &\quad \times \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) + \\ &\quad \left. + (1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp\left((1-\alpha) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi\right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (15) \end{aligned}$$

Нерівність (15) буде справедливою лише при умові

$$[g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)] \exp\left((1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds\right) +$$

$$+(1-\alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s,t) \exp\left((1-\alpha) \int_t^y d\eta \int_0^x f(\xi,\eta) d\xi\right) ds > 0, \quad (16)$$

яка виникає в силу того  $1-\alpha < 0$ , а вираз, який стоїть у фігурних дужках в нерівності (15) повинен бути більше нуля. Умову (16) простіше перевіряти в еквівалентній і більш зручній формі

$$\begin{aligned} & \int_0^y dt \int_0^x k(s,t) \exp\left((\alpha-1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi,\eta) d\xi\right) ds < \\ & < (\alpha-1)^{-1} [g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(0)], \end{aligned}$$

яка визначає область  $D_\alpha$ . Далі, повертаючись до нерівності (5), приходимо до оцінки (3), але вже в області  $D_\alpha$ .

Нехай  $\alpha = 1$ . Позначимо праву частину нерівності (2)

$$g_1(x) + g_2(y) - g_1(0) + \int_0^y dt \int_0^x (f(s,t) + k(s,t)) u(s,t) ds = \nu(x,y).$$

Тоді, враховуючи справедливість співвідношень (6)-(9), можна записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu(x,y)}{\partial y} & \leq \frac{dg_2(y)}{dy} + \int_0^x (f(s,y) + k(s,y)) \nu(s,y) ds \leq \\ & \leq \frac{dg_2(y)}{dy} + \nu(x,y) \int_0^x (f(s,y) + k(s,y)) ds, \\ \frac{1}{\nu(x,y)} \cdot \frac{\partial \nu(x,y)}{\partial y} & \leq \frac{1}{\nu(x,y)} \frac{dg_2(y)}{dy} + \int_0^x (f(s,y) + k(s,y)) ds \leq \\ & \leq \frac{1}{\nu(0,y)} \frac{dg_2(y)}{dy} + \int_0^x (f(s,y) + k(s,y)) ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Після інтегрування нерівності (17) по змінній  $y$  в межах від 0 до  $y$ , враховуючи умови (6)-(7), отримаємо

$$\begin{aligned} \ln \nu(x,y) - \ln \nu(x,0) & \leq \int_0^y \frac{dg_2(y)}{g_2(y)} + \int_0^y dt \int_0^x (f(s,t) + k(s,t)) ds, \\ \ln \frac{\nu(x,y)}{g_1(x)} & \leq \ln \frac{g_2(y)}{g_1(0)} + \int_0^y dt \int_0^x (f(s,t) + k(s,t)) ds, \end{aligned}$$

$$\ln v(x, y) \leq \ln \frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(0)} + \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t) + k(s, t)) ds.$$

Звідси, враховуючи введене позначення та нерівність (5), приходимо до оцінки (4).

Оцінки, приведені в теоремі 1, є узагальненням результату, отриманого в роботі [2]. Аналогічно можна довести наступну теорему.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови 1) - 3) теореми 1 та функція  $u(x, y)$  в області  $D$  задовольняє нерівності*

$$u(x, y) \leq g_1(x) + g_2(y) + \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t)u(s, t) + k(s, t)u^\alpha(s, t)) ds.$$

Тоді в області  $D$  справедливі оцінки:

при  $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x, y) \leq \left\{ \exp \left( (1 - \alpha) \int_0^y dt \int_0^x f(s, t) ds \right) \times \right. \\ \times [(g_1(x) + g_2(0))^{1-\alpha} + (g_1(0) + g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(0) + g_2(0))^{1-\alpha}] + \\ \left. + (1 - \alpha) \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp \left( (1 - \alpha) \int_t^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \right) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad (18)$$

при  $\alpha = 1$

$$u(x, y) \leq \frac{(g_1(x) + g_2(0))(g_1(0) + g_2(y))}{g_1(0) + g_2(0)} \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^y dt \int_0^x (f(s, t) + k(s, t)) ds \right\};$$

при  $\alpha > 1$  оцінка (18) буде справедлива в області

$$D_\alpha = \left\{ (x, y) \in D : \int_0^y dt \int_0^x k(s, t) \exp \left( (\alpha - 1) \int_0^t d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \right) ds < \right. \\ \left. < (\alpha - 1)^{-1} [(g_1(x) + g_2(0))^{1-\alpha} + (g_1(0) + g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(0) + g_2(0))^{1-\alpha}] \right\}.$$

Зауважимо, що результат теореми 2 при умові  $\alpha = 1$ , співпадає з результатом, наведеним в роботі [3] (теорема 1.5.4).



### On a Class of Nonstationary Curves in Hilbert Space

Raed Hatamleh

Dept. of Mathematics,  
Irbid National University, Irbid-Jordan,  
E-mail: raedhat@yahoo.com

Nonstationarity character for a solution of heterogeneous linear differential equation in Hilbert space are studied . The right side of equation  $L_t y = x(t)$  is defined by semigroup of operators with bounded infinitesimal quasi-unitary operator. To investigate nonstationarity properties, an infinitesimal function has been introduced. The canonical representations for infinitesimal function have been obtained with the help of triangular models of quasiunitary operators. *2000 Mathematics Subject Classification* 47A45, 60G12.

#### 1. Introduction

The linear transformations of the random functions are widely used in the theory of stochastical processes [1]. The most interesting ones for applications are the linear transformations, which are based on the differential or difference equations [2]. If the random process is embedded in the respective Hilbert space, then there is one more possibility to obtain enough wide classes of the random processes by means of the curves of the linear transformation in the Hilbert space [3].

In this article we study the random processes, which are considered as the curve in the Hilbert space, based on such linear differential equation as

$$L_t y = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = x(t) \tag{1}$$

where  $a_k \in \mathbb{C}$  and  $x(t)$  is a curve in the Hilbert space  $H$  of the form  $x(t) = e^{itA}x_0$ ,  $A \in [H, H]$ ,  $x_0 \in H_0$ . The structure of  $y(t)$  depending on the spectrum of the operator  $A$  and the subspace dimension  $D_A = \overline{(I - A^*A)H}$  is studied.

#### 2. Infinitesimal Function and Nonstationary Index

Let us find the form of the partial solution of equation (1). Suppose that  $y(t) = e^{itA}y_0$ . From (1) we obtain

$$\sum_{k=0}^n a_k (iA)^k y_0 = x_0. \tag{2}$$

Suppose that the roots of the characteristic equation are simple, so that

$$P_n(\mu) = \sum_{k=0}^n b_k \mu^k = 0, \quad (b_k = i^k a_k).$$

Then  $P_n(\mu) = b_n \prod_{\ell=1}^n (\mu - c_\ell)$ , where,  $c_\ell \neq c_n$ ,  $\ell \neq n$ . If  $c_\ell \notin \sigma(A)$ , then the general solution of equation (1) takes the form

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k(t) h_k + e^{itA} P_n^{-1}(iA) x_0 \quad (3)$$

where

$$P_n^{-1}(iA) = b_n^{-1} \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} \alpha_v (R_{\mu_v} - R_{\mu_n}), \quad (4)$$

$$\alpha_v = \left( \prod_{j=1}^{\ell} (\mu_v - \mu_j) \right)^{-1}, \quad v \neq j,$$

and  $\sum_{k=1}^n \theta_k(t) h_k$ ,  $h_k \in H$  is the general solution of the homogeneous equation determined by the initial conditions.

It is easy to get representation (4) for  $P_n^{-1}(t)$  by using the Hilbert identity for the resolvent. In order to clarify the nonstationary process character, let us introduce the next function

$$W(t, s) = K(t, s) - \frac{\partial^2 K(t, s)}{\partial t \partial s}, \quad (5)$$

where  $K(t, s) = \langle y(t), y(s) \rangle$  is the correlation function of the curve  $y(t)$ . This function  $W(t, s)$  we will call the infinitesimal one. In order to restore the correlation function on the base of  $W(t, s)$ , it is necessary to solve the Darboux-Goursat problem for hyperbolic equation (5).

**Lemma.** For the curves in Hilbert space of the form  $y(t) = e^{itA} y_0$ ,  $W(t, s)$  has the form

$$W(t, s) = \langle (I - A^* A) y(t), y(s) \rangle. \quad (6)$$

*Proof.* If the random process is embedded in Hilbert space then the correlation function takes the form of the scalar product as follows  $K(t, s) = \langle y(t), y(s) \rangle$ , where  $y(t)$  is the curve in the Hilbert space  $H = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} y(t_k)$ . Then  $K(t, s) = \langle e^{itA} y_0, e^{isA} y_0 \rangle$ . From this and (5) the representation (6) follows. When the rank of the nonstationarity is closely related to the dimension of the subspace  $\overline{2J_m A H}$  [4], and is not finite, it is convenient to use the representation (6).

The maximal rank of the quadratic form  $\Phi[z] = \sum_{\ell, m=1}^n W(t_\ell, t_m) z_\ell \bar{z}_m$ , where  $z_\ell \in \mathbb{C}$  is called the nonstationary index.

**Theorem 1.** *In order that the curve  $y(t) = e^{iA}y_0$  has a finite nonstationary index it is necessary and sufficient that the defect subspace  $D_A = \overline{(I - A^*A)H}$  be finitedimensional.*

*Proof. Sufficiency:* Let  $m = \dim \overline{(I - A^*A)H}$ ,  $m < \infty$ . Then  $I - A^*A$  may be represented in the form [5]

$$I - A^*A = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \langle \cdot, g_\alpha \rangle J_{\alpha, \beta} g_\beta \quad (7)$$

where the matrix  $J_{\alpha, \beta}$  has the following property  $J_{\alpha, \beta} = \overline{J_{\beta, \alpha}}$  and  $\sum_{\gamma=1}^m J_{\alpha, \gamma} J_{\gamma, \beta} = \delta_{\alpha, \beta}$ . Therefore, for  $W(t, s)$  we have the representation

$$W(t, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \varphi_\alpha(t) \overline{J_{\alpha, \beta} \varphi_\beta(s)}, \quad (8)$$

where  $\varphi_\alpha(t) = \langle e^{iA}y_0, g_\alpha \rangle$ . Similarly for  $\phi[z]$  we get

$$\phi[z] = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \sum_{p, q=1}^n \varphi_\alpha(t_p) \overline{J_{\alpha, \beta} \varphi_\beta(t_q)} z_p \bar{z}_q = \sum_{\alpha, \beta=1}^m J_{\alpha, \beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta,$$

where  $\xi_\alpha = \sum_{p=1}^n \varphi_\alpha(t_p) z_p$ . Thus it follows that  $\text{range } \phi[z] < m$ .

*Necessity:* Taking into account that

$$\langle (I - A^*A)h, h \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^k W(t_\alpha, t_\beta) z_\alpha \bar{z}_\beta,$$

where  $z \in H(t_1, \dots, t_k) = \bigvee_{\alpha=1}^k y(t_\alpha)$ , then it follows, that

$$\text{range } \sum_{\alpha, \beta=1}^k W(t_\alpha, t_\beta) z_\alpha \bar{z}_\beta = \dim D(t_1, \dots, t_k), \quad (9)$$

where  $D(t_1, \dots, t_k) = P_k (I - A^*A) P_k H$ , and  $P_k$  is an operator of the orthogonal projection on the subspace  $H(t_1, \dots, t_k)$ . If  $\{t_k\} = [0, +\infty)$  and  $\bigvee_k y(t_k) = H$ , then

$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = I$  and consequently  $\lim_{k \rightarrow \infty} D(t_1, \dots, t_k) = D_A$ . Finally,

$$\dim D_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \dim D(t_1, \dots, t_k) \leq \text{range } \phi[z],$$

since  $\dim D(t_1, \dots, t_k) \leq \text{range } \phi[z]$ .

From the proof it follows that in the case of finite nonstationarity index the curve  $y(t) = e^{iA}y_0$  is equal to the corresponding defect subspace dimension  $\dim(I - A^*A)H$ . Later we will consider the case when all quadratic forms  $\phi[z]$  are nonnegative. Then such a curve is called a contracting one. Because in this case for the curve of the form  $e^{itA}y_0$ , the operator  $A$  is a contraction, as it follows from the Lemma.

### 3. Representaion for $W(t,s)$

Let us consider the case when the nonstationarity index is equal to one. This limitation is not important because using the universal models of the contractions it is easy to get the correspondent results not only for the finite nonstationarity index but for the infinite one too.

Now we consider the case when the operator  $A$  has a discrete spectrum within the unit circle or the operator  $A$  has infinite-fold spectrum, situated on the unit circle.

In case  $\dim(I - A^*A)H = 1$ , we have

$$W(t, s) = \psi(t) \overline{\psi(s)}, \quad (10)$$

where

$$\psi(t) = \langle e^{itA} P_n^{-1}(iA)x_0, g \rangle, \quad (11)$$

and  $g$  is a canal element of the operator  $A$ , i.e.  $I - A^*A = \langle \cdot, g \rangle g$ .

Using the resolvent representation for the operator function  $\psi(t)$ , we get the next representation

$$\psi(t) = \langle x_0, g(t) \rangle, \quad (12)$$

where

$$g(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \overline{P_n^{-1}(i\lambda)} (A^* - \lambda I)^{-1} g d\lambda, \quad (13)$$

and the contour  $\gamma$  contains all the spectrum of the operator  $A$ .

In the scalar product (12) it is possible to get over to the arbitrary of the unitary equivalent elements, that allow us to use the triangular models of the contractions to get the representation for  $\psi(t)$  and at the same time  $W(t, s)$  for the different spectrum cases.

So, for the discrete contraction spectrum case, the operator  $A$  is unitary equivalent to the own triangular model, which acts in the space  $\ell_2$  and has the following form [5]:

$$(Af)_k = \mu_k f_k - \sum_{j=k+1}^{\infty} f(j) \nu(j) \theta(k), \quad (14)$$

where

$$\nu_k = P_k \nu(0, k+1), \quad P_k^2 = 1 - |\mu_k|^2, \quad |\mu_k| < 1,$$

$$\theta(k) = \nu^{-1}(0, k+1) \frac{P_k}{\mu_k}, \quad \nu_0 = \nu(0, \infty),$$

and

$$\nu(\xi, n) = \nu_0 \prod_{k=n}^{\infty} \frac{\bar{\mu}_k - \xi}{1 - \mu_k \xi} \cdot \frac{|\mu_k|}{\bar{\mu}_k}.$$

Then

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{0k} \Lambda_k(t), \tag{15}$$

where

$$\Lambda_k(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \frac{1}{\bar{b}_n \prod_{\ell=1}^n (\lambda - \bar{c}_\ell)} \frac{v(k)}{\bar{\mu}_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \lambda \mu_j}{\bar{\mu}_j - \lambda} d\lambda. \tag{16}$$

From (16) it is seen, that the functions  $\Lambda_k(t)$  are calculated only on the base of the spectrum of the operator  $A$ . Hence the next theorem is valid.

**Theorem 2.** *In order that the function  $W(t, s)$  be infinitesimal one of the curve  $y(t) = e^{itA}y_0$  which is the solution of problem (1) with zero initial conditions, where  $A$  is a contraction of the discrete spectrum, it is necessary and sufficient that the function  $W(t, s)$  is defined by (10), (15), and (16).*

*Proof.* For the proof of the sufficiency it is necessary only to restore the unitary equivalent triangular model of the operator on the base of  $\{\mu_j\}$  and to restore operator  $L_t$  by  $\{C_\ell\}_{\ell=1}^n$  and  $b_n$ .

Let us go over to the case of the operator continuous spectrum. Then the contraction is unitary equivalent to the own triangular model in the space  $L^2_{[0, \ell]}$ :

$$(Af)(x) = e^{i\alpha(x)}f(x) - 2e^{i\alpha(x)+x} \int_x^\ell e^{-\xi}f(\xi) d\xi \tag{17}$$

where  $\alpha(x)$  is a continuous real function for  $x \in [0, \ell]$ .

In this case, using the same representations (12), (13) and the model of the operator (17), we get the next expression for  $\psi(t)$ :

$$\psi(t) = \int_0^\ell x_0(\xi) \Lambda(t, \xi) d\xi, \tag{18}$$

where the function  $\Lambda(t, \xi)$  is determined only by the spectrum of operator  $A$ :

$$\Lambda(t, \xi) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \frac{\sqrt{2}e^{i\alpha(\xi)-\xi}}{\bar{b}_n \prod_{j=1}^n (\lambda - \bar{C}_j)} \left(1 + 2 \int_0^\xi \frac{e^{\int_y^\xi \frac{2}{1-\lambda e^{i\alpha(\tau)}} d\tau}}{1 - \lambda e^{i\alpha(y)}} dy\right) d\lambda \tag{19}$$

In particular, if  $\alpha(x) = \alpha_0 = \text{const}$ , then

$$\Lambda(t, \xi) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \frac{\sqrt{2} e^{i\alpha_0 - \xi + \frac{2\xi}{1 - \lambda e^{i\alpha_0}}}}{\bar{b}_n \prod_{j=1}^n (\lambda - \bar{C}_j)} d\lambda,$$

and the function  $\Lambda(t, \xi)$  is evaluated through the hypergeometric function.

**Theorem 3.** *In order that the function  $W(t, s)$  be an infinitesimal one of the curve  $y(t) = e^{itA}y_0$ , which is the solution of the problem (1) with a zero initial conditions, where  $A$  is a contraction of the continuous spectrum, it is necessary and sufficient the function  $W(t, s)$  is defined by (10), (18), and (19).*

*Proof.* The proof of the necessary is already realized. For the Proof of the sufficiency it is necessary to restore the triangular model of the operator  $A$  with the help of the function  $\alpha(x)$  and to restore the operator  $L_t$  by  $\{C_\ell\}_{\ell=1}^n$  and  $b_n$ .

#### REFERENCES

1. Kalman R. E. Control of randomly varying linear dynamical systems. //Proc. Symp. Appl. Math., -1962.-V.13.-P. 287-298.
2. Sage A. P. and Melse J. L. Estimation theory with application to communication and control. -N-Y.: McGraw-Hill.- 1972.
3. Niemi N., On the linear prediction problem of certain non-stationary stochastic processes.// Math. Scand,-1976.- V.39.- P.146-160.
4. Livshits M. S. and Yantsevich A. A. Theory of operator colligations in Hilbert spaces. Engl. Ttansl. N. Y.:J. Wiley. - 1979.
5. Yantsevich A. A. Nonstationary sequence in a Hilbert space. I. Correlation theory. //Journal of Soviet Mathematics, -1990.- 4.-V.48.- P.491-493.

## Робастные системы. Синтез ограниченного управления

В.И. Коробов<sup>a,b</sup>, В.М. Гавриляко<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Щецинский университет, Польша

<sup>b</sup>Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Для робастной системы  $\dot{x} = (A + pD)x + bu$ ,  $-d_1 \leq p \leq d_2$ ,  $(d_1, d_2 > 0)$  изучается возможность построения управления  $u = u(x)$ ,  $|u| \leq 1$  такого, что траектория  $x(t, x_0)$  системы  $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$ , выходящая из произвольной точки  $x_0 \in E_n$  в момент времени  $t_0 = 0$ , попадает в точку  $x_1 = 0$  за конечное время  $T(x_0)$  при любом допустимом  $p$ . Решение основано на методе функций управляемости.

2000 Mathematics Subject Classification 47A45.

### §1. Предварительные сведения

При описании модели физического объекта системой дифференциальных уравнений, как правило, параметры объекта не известны точно. При этом сами уравнения, описывающие движение, известны точно.

В этом случае система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

где  $A, b$  - матрицы размерности  $n \times n$ ;  $n \times 1$  соответственно,  $u$  - скалярное управление, заменяется на семейство  $\dot{x} = A(p)x + bu$ , где матрица  $A(p)$  зависит от параметров  $p \in Q \subset \mathbb{R}^m$ . Используемое управление  $u$  должно быть работоспособно при наличии неопределенности. Такие системы называют робастными [1], а управление  $u$  - робастным.

В данной работе рассмотрена задача синтеза ограниченного управления для систем вида

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu, \quad -d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1, d_2 > 0), \quad (2)$$

т.е. построение управления  $u = u(x)$ ,  $|u| \leq 1$  такого, что траектория  $x(t, x_0)$  системы  $\dot{x} = (A + pD)x + bu(x)$ , выходящая из произвольной точки  $x_0 \in E_n$  в момент времени  $t_0 = 0$ , попадает в точку  $x_1 = 0$  за конечное время  $T(x_0)$  при любом допустимом  $p$ . Относительно параметра  $p$  мы предполагаем, что

он может меняться в заданных пределах, но непрерывным образом. Конечность времени управления приводит к тому, что данная задача не может быть решена с помощью линейной обратной связи  $u = Lx$ , поскольку решение замкнутой системы  $\dot{x} = (A + pD + bL)x$  не обращается в ноль (при любой матрице  $L$  и при  $t \geq 0$ ;  $x_0 \neq 0$ ). Управление  $u(x)$  должно быть также не гладким по крайней мере в точке  $x = 0$ , поскольку попадание в ноль за конечное время означает нарушение теоремы единственности решения дифференциального уравнения. При  $p = 0$  задача синтеза ограниченного управления решена в [2] с использованием вспомогательной функции, названной функцией управляемости  $\theta(x)$ . Этот подход связан с построением достаточных условий, обеспечивающих решение поставленной задачи.

Приведем некоторые результаты работы [2], необходимые для дальнейшего.

Рассмотрим линейную систему (1). Для нее функция управляемости  $\theta = \theta(x)$  определяется как положительное решение уравнения

$$2a_0\theta = (N_\theta^{-1}x, x), \quad (3)$$

где матрица  $N_\theta \equiv N_{\theta(x)}$  задается выражением

$$N_\theta = \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-At} b b^* e^{-A^*t} dt,$$

а управление  $u = u(x)$  равно

$$u(x) = -\frac{1}{2} b^* N_{\theta(x)}^{-1} x. \quad (4)$$

Коэффициент  $a_0$  выбирается согласно неравенству

$$a_0 \leq \inf_{0 < \theta < \infty} \left( \frac{2}{\theta (N_\theta^{-1}b, b)} \right). \quad (5)$$

В этой же работе доказывается, что полная производная функции  $\theta(x)$  в силу системы (1) с управлением (4):

$$\dot{x} = Ax - \frac{1}{2} b^* N_{\theta(x)}^{-1} x \quad (6)$$

удовлетворяет равенству

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{(6)} = (\text{grad } \theta, Ax + bu(x)) = -1. \quad (7)$$

Условия (7) и (5) обеспечивают конечность времени приведения системы в начало координат и ограниченность управления  $|u(x)| \leq 1$ .

При решении задачи синтеза для робастных систем будем искать ограниченное управление вида  $u = u(x)$ ,  $|u(x)| \leq 1$  так, чтобы у замкнутых систем

$$\dot{x} = (A + pD)x + bu(x), \quad -d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1, d_2 > 0), \quad (8)$$

была общая функция управляемости  $\theta(x)$ , обеспечивающая выполнение неравенства

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{(8)} = (\text{grad } \theta, (A + pD)x + bu(x)) \leq \mu < 0. \quad (9)$$

для всех возможных значений параметра  $p$ .

## §2. Синтез ограниченного управления.

Рассмотрим применение метода функций управляемости при исследовании линейных робастных систем на примере следующей колебательной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + px_1 + u, \quad -d_1 \leq p \leq d_2, \quad (d_1, d_2 > 0) \end{cases} \quad (10)$$

или в матричном виде:  $\dot{x} = (A_0 + pD)x + b_0u$ .

Здесь

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема** Пусть управление  $u(x)$  определяется равенством (4), где  $\theta(x)$  есть положительное решение уравнения (3) при  $a_0 = \frac{1}{3}$ . Пусть  $Q = \{x : \theta(x) < c\}$  и числа  $d_1$  и  $d_2$  выбраны так, что  $d_1 \leq 1/c$ ,  $d_2 \leq 1.29/c$ . Тогда при любом значении  $p$ , удовлетворяющем неравенству  $-d_1 < p < d_2$  управление  $u(x)$  решает задачу синтеза в области  $Q$  для системы (10), т.е. траектория системы (10) при  $u = u(x)$ , начинающаяся в произвольной точке  $x_0 \in Q$ , оканчивается в точке  $x = 0$  за конечное время  $T(x_0)$ , причем

$$x(t) \in Q, \quad |u(x)| \leq 1;$$

$$T(x_0) \leq \max \left\{ \frac{\theta(x_0)}{1 - 0.77cd_1}, \frac{\theta(x_0)}{1 - 0.5cd_2} \right\}$$

**Доказательство:** Рассмотрим выражение

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{(10)} = (\text{grad } \theta, A_0x + b_0u(x)) + p(\text{grad } \theta, Dx) = -1 + p(\text{grad } \theta, Dx);$$

$$(\text{grad } \theta, Dx) = \frac{((N_\theta^{-1}D + D^*N_\theta^{-1})x, x)}{2a_0 - \left(\frac{d}{d\theta}N_\theta^{-1}x, x\right)} \quad (11)$$

Учитывая [2], получаем:  $2a_0 - \left(\frac{d}{d\theta}N_\theta^{-1}x, x\right) = N_\theta^{-1}N_F(\theta)N_\theta^{-1}$ .

Здесь

$$N_F(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta e^{-A_0t} b_0 b_0^* e^{-A_0^*t} dt$$

Сделаем замену переменных  $y = N_\theta^{-1} x$ . Тогда выражение (11) приобретает вид

$$(\text{grad } \theta, Dx) = p \frac{((D N_\theta + N_\theta D^*) y, y)}{(N_F(\theta) y, y)} \quad (12)$$

Согласно [3]

$$(\text{grad } \theta, Dx) \leq \lambda_{\max} [p N_F^{-1}(\theta) (D N_\theta + N_\theta D^*)]$$

Матрицы  $N_\theta$  и  $N_F(\theta)$  равны:

$$N_\theta = \frac{1}{8\theta} \begin{pmatrix} -1 + 2\theta^2 + \cos(2\theta) & -2\theta + \sin(2\theta) \\ -2\theta + \sin(2\theta) & 1 + 2\theta^2 - \cos(2\theta) \end{pmatrix};$$

$$N_F(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\theta - \cos(\theta) \sin(\theta)}{2\theta} & -\frac{\sin^2(\theta)}{2\theta} \\ -\frac{\sin^2(\theta)}{2\theta} & \frac{\theta + \cos(\theta) \sin(\theta)}{2\theta} \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы  $p [N_F^{-1}(\theta) (D N_\theta + N_\theta D^*)]$  определяются выражениями

$$\lambda_1(p, \theta) = p \frac{a - \sqrt{2b}}{d}; \quad \lambda_2(p, \theta) = p \frac{a + \sqrt{2b}}{d},$$

где

$$a = -4 - 4\theta^2 + 4 \cos(2\theta) - 4\theta^2 \cos(2\theta) + 8\theta \sin(2\theta);$$

$$b = 2 + 60\theta^2 - 36\theta^4 + 32\theta^6 + (-1 - 48\theta^2 + 64\theta^4) \cos(2\theta) + \\ + 2(-1 - 6\theta^2 + 2\theta^4) \cos(4\theta) + \cos(6\theta) - 32\theta \sin(2\theta) - 32\theta^3 \sin(2\theta) + \\ + 16\theta \sin(4\theta) - 16\theta^3 \sin(4\theta);$$

$$d = 8(-1 + 2\theta^2 + \cos(2\theta)).$$

Обозначим  $f_1(\theta) = \frac{a - \sqrt{2b}}{d}$  и  $f_2(\theta) = \frac{a + \sqrt{2b}}{d}$ . Можно показать, что  $f_1(\theta) \geq -0.77\theta$  и  $f_2(\theta) \leq 0.5\theta$ . Так как  $-d_1 < p < d_2$ , где  $d_1 = 1/c$ ,  $d_2 = 1.29/c$ , то

$$\lambda_1(p, \theta) \leq \left(-\frac{1}{c}\right) (-0.77c) = 0.77;$$

$$\lambda_2(p, \theta) \leq \left(\frac{1.29}{c}\right) (0.5c) = 0.645$$

Следовательно,

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{(10)} \leq -1 + \max\{0.77; 0.645\} = -0.23$$

Это является достаточным условием попадания в начало координат за конечное время [2].

Оценим теперь величину коэффициента  $a_0$ . Для того, чтобы управление  $u$  удовлетворяло заданным ограничениям  $|u| \leq 1$  в робастной системе (10),

достаточно чтобы выполнялось неравенство (5) при всех допустимых  $p, \theta$ . Таким образом должно выполняться усиленное неравенство (5):

$$0 < a_0 \leq \inf_{0 < \theta; 0 \leq p} \left( \frac{2}{\theta \left( N_{(\theta,p)}^{-1} b_0, b_0 \right)} \right) \quad (13)$$

Матрица  $N_{(\theta,p)}$  для системы (2) определяется выражением:

$$N_{(\theta,p)} = \begin{pmatrix} \frac{-1-2(-1+p)\theta^2 + \cos(2\theta\sqrt{1-p})}{8(-1+p)^2\theta} & \frac{1}{8} \left( \frac{2}{-1+p} + \frac{\sin(2\theta\sqrt{1-p})}{\theta(1-p)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \frac{1}{8} \left( \frac{2}{-1+p} + \frac{\sin(2\theta\sqrt{1-p})}{\theta(1-p)^{\frac{3}{2}}} \right) & \frac{-1+2(-1+p)\theta^2 + \cos(2\theta\sqrt{1-p})}{8(-1+p)\theta} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \theta \left( N_{(\theta,p)}^{-1} b_0, b_0 \right) &= \\ &= \frac{4\theta^2(-1+p)(1+2(-1+p)\theta^2 - \cos(2\theta\sqrt{1-p}))}{-1-2\theta^2+2p\theta^2+2\theta^4-4p\theta^4+2p^2\theta^4 + \cos(2\theta\sqrt{1-p})+2\theta\sqrt{1-p}\sin(2\theta\sqrt{1-p})} \end{aligned} \quad (14)$$

Можно показать, что

$$\max_{0 \leq p; \theta \geq 0} \theta \left( N_{(\theta,p)}^{-1} b_0, b_0 \right) \leq 6.$$

Поэтому  $a_0 = \frac{1}{3}$  и управление  $u(x_1, x_2)$  имеет вид

$$u(x_1, x_2) = 8 p x_1 \theta \frac{x_2 - 2x_1\theta - 2x_2\theta^2 - x_2 \cos(2\theta) + x_1 \sin(2\theta)}{1 + 2\theta^2 - 2\theta^4 - \cos(2\theta) - 2\theta \sin(2\theta)}; \quad \theta = \theta(x_1, x_2).$$

### Пример

Зададим начальные условия системы (10) равными  $x_1(0) = 1; x_2(0) = 0.5$ . Тогда  $\theta(x_1(0), x_2(0)) = 3.21$ ,  $d_1 = 1/3.21 = 0.31$ ,  $d_2 = 1.29/3.21 = 0.40$  и  $\forall p: p \in [-0.31; 0.40]$  справедливо неравенство  $\frac{d\theta}{dt}|_{(10)} \leq -0.23$ .

Это является достаточным условием попадания в начало координат за конечное время  $T(x_0)$  [2] для  $\forall p: p \in [-0.31; 0.40]$ , при этом  $T(x_0) \leq 13.71$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.П. Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002. - 303 с.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М. // Дифференц. уравнения.-1990.Т.26,№ 11. - с. 1914-1924.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.:Наука, 1967.-575 с.

## Стабилизация линейных автономных дискретных систем

В.И. Коробов<sup>a,b</sup>, А.В. Луценко<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Щецинский университет, Польша

<sup>b</sup> Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В работе исследуются условия, при которых дискретная автономная система  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  может быть стабилизирована. Доказана теорема, содержащая несколько эквивалентных алгебраических и геометрических необходимых и достаточных условий стабилизируемости. *2000 Mathematics Subject Classification* 93B05.

Рассмотрим дискретную автономную систему управления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $A, B$  – постоянные вещественные матрицы размеров  $(n \times n)$  и  $(n \times r)$ , соответственно,  $x(k) \in \mathbb{C}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{C}^r$ .

**Определение.** Система (1) называется *стабилизируемой*, если существует управление  $u(k) = Fx(k)$ ,  $F \in \mathbb{C}^{r \times n}$ , такое, что каждое решение системы (1) с данным управлением, то есть системы  $x(k+1) = (A + BF)x(k)$ , стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

Другими словами, система (1) *стабилизуема*, если найдется постоянная матрица  $F$  такая, что  $A + BF$  представляет собой дискретно устойчивую матрицу, то есть матрицу, для которой  $\sigma(A + BF) \subset S$ , где через  $\sigma(\cdot)$  обозначен спектр матрицы, стоящей в скобках, и где  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ .

Задача стабилизации дискретной системы рассматривалась в [6], [7]. Однако большинство результатов по проблеме стабилизации относятся к непрерывным системам, см. [1] – [5].

Данная работа посвящена исследованию условий, при которых система (1) может быть стабилизирована. Доказана теорема, содержащая шесть эквивалентных необходимых и достаточных условий стабилизируемости.

Будем обозначать: через  $A^*$  матрицу, сопряженную к матрице  $A$ ; через  $Q(A, B)$  матрицу

$$Q(A, B) = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B),$$

где  $A$  – матрица размеров  $(n \times n)$ ,  $B$  – матрица размеров  $(n \times r)$ .

**Теорема.** Для стабилизируемости системы (1) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1°. существует симметрическая положительно определенная матрица  $R$ , являющаяся решением матричного уравнения

$$A^*RA - R - A^*RB(I + B^*RB)^{-1}B^*RA + I = 0;$$

2°. не существует невырожденной матрицы  $T$  такой, чтобы матрицы  $A_0 = TAT^{-1}$  и  $B_0 = TB$  имели вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и чтобы  $\sigma(A_{22}) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$ , где  $A_{11}$  - квадратная матрица порядка  $k < n$ ,  $A_{22}$  - квадратная матрица порядка  $(n - k)$ ,  $B_1$  - матрица размеров  $(k \times r)$ ;

3°. не существует  $A$ -инвариантного подпространства размерности меньше  $n$ , содержащего все векторы, являющиеся столбцами матрицы  $B$ , и такого, что его ортогональное дополнение не содержит ни одного собственного вектора матрицы  $A^*$ , соответствующего собственному числу  $\lambda$ , удовлетворяющему условию  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ ;

4°. не существует собственного вектора матрицы  $A^*$ , соответствующего собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ , ортогонального столбцам матрицы  $B$ ;

5°.  $\text{rank}(A - \lambda I) = n$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ ;

6°. корневые подпространства  $K(\lambda_i) = \{x : (A - \lambda_i I)^{n_i} x = 0, n_i - \text{кратность собственного числа } \lambda_i \text{ матрицы } A\}$ , соответствующие собственным числам  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus S$ , принадлежат подпространству  $L = \text{Lin}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ .

Для доказательства теоремы понадобятся четыре вспомогательных утверждения, которые оформим в виде лемм.

**Лемма 1.** Если  $\text{rank} Q(A, B) = n$ , то система (1) стабилизируема.

*Доказательство.* Из условия  $\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$  следует (см. [9,10]), что для произвольного  $n$ -точечного множества  $\Omega$  комплексных чисел, симметричного относительно действительной оси, найдется  $(r \times n)$ -матрица  $F$  такая, что  $\sigma(A + BF) = \Omega$ . Если выбрать множество  $\Omega$  внутри единичного круга  $S$ , то управление  $u(k) = Fx(k)$  будет стабилизировать систему (1).

**Лемма 2.** Если  $x_0 \in K(\lambda_i)$ , где  $K(\lambda_i)$  - корневое подпространство матрицы  $A$ , соответствующее собственному числу  $\lambda_i$  кратности  $n_i$ , то при  $k \geq n_i$  имеет место равенство  $A^k x_0 = \sum_{j=0}^{n_i-1} C_k^j \lambda_i^{k-j} x_{0j}$ , где  $x_{0j} = (A - \lambda_i I)^j x_0 \in K(\lambda_i)$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы вытекает из очевидного равенства  $A^k x_0 = ((A - \lambda_i I) + \lambda_i I)^k x_0$ .

**Лемма 3.** Пусть все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  матрицы  $A$  лежат в единичном круге  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ . Тогда

1)  $\exists M > 0 \exists q \in (0, 1) \forall k \geq 0 : \|A^k\| \leq Mq^k$ ;

2) все решения системы  $x(k+1) = Ax(k) + f(k)$ , где функция  $f(k)$  определена при  $k \geq 0$ , стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , если  $f(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* 1) Обозначим через  $p_i$  кратность  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , в минимальном полиноме матрицы  $A$ . Тогда [8]

$$A^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} k(k-1)\dots(k-j+1)\lambda_i^{k-j} h_{ij}(A),$$

где  $h_{ij}(\lambda)$  — полиномы. Выберем два числа  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  так, чтобы  $|\lambda_i| < \alpha < \delta < 1$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Произведем оценку  $\|A^k\|$ :

$$\begin{aligned} \|A^k\| &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} k(k-1)\dots(k-j+1)|\lambda_i|^{k-j} \|h_{ij}(A)\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} k^j C_{ij} \alpha^k \alpha^{-j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} \gamma_{ij} k^j \delta^k \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k = q^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} \gamma_{ij} k^j \delta^k, \end{aligned}$$

где  $q = \alpha/\delta < 1$ ,  $C_{ij} = \|h_{ij}(A)\|$ ,  $\gamma_{ij} = C_{ij}\alpha^{-j}$ .

Так как  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} \gamma_{ij} k^j \delta^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $\exists M > 0 \forall k \geq 0$ :

$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p_i-1} \gamma_{ij} k^j \delta^k \leq M$  и, следовательно,  $\|A^k\| \leq Mq^k$ .

2) Каждое решение данной системы имеет вид  $x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} f(j)$ , откуда  $\|x(k)\| \leq Mq^k \|x(0)\| + \left\| \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} f(j) \right\|$ . Первое слагаемое стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Покажем, что стремится к нулю и второе слагаемое. Имеем:

$$\left\| \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} f(j) \right\| \leq M \sum_{j=0}^{k-1} q^{k-j-1} \|f(j)\| = \frac{M \sum_{j=0}^{k-1} q^{-j-1} \|f(j)\|}{q^{-k}}.$$

Применив теорему Штольца, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} q^{-j-1} \|f(j)\|}{q^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q^{-k} \|f(k-1)\|}{q^{-k} - q^{-k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f(k-1)\|}{1-q} = 0.$$

Таким образом,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} f(j) \right\| = 0$ .

**Лемма 4.** Если  $\text{rank } Q(A, B) = p$ , то существует преобразование  $y = Tx$ , приводящее систему (1) к виду

$$\begin{cases} y_1(k+1) = A_{11}y_1(k) + A_{12}y_2(k) + B_1u(k), & (2) \\ y_2(k+1) = A_{22}y_2(k), & (3) \end{cases}$$

где  $A_{11} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{C}^{p \times (n-p)}$ ,  $B_1 \in \mathbb{C}^{p \times r}$ .

Кроме того,  $\text{rank } Q(A_{11}, B_1) = p$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $v_1, \dots, v_p$  базис подпространства  $L = \text{Lin}(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ , через  $d_1, \dots, d_l$  – базис подпространства  $L^\perp$ ,  $l = n - p$ . Положим

$$T_1 = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_p^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times n}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_l^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-p) \times n}, \quad T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Под действием преобразования  $y = Tx$  система (1) переходит в систему

$$y(k+1) = TAx + TBu, \quad (5)$$

где  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  $y_1 = T_1x$ ,  $y_2 = T_2x$ . Учитывая, что  $T_2B = 0$ , систему (5) можно представить в виде

$$y_1(k+1) = T_1AT^{-1} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} + T_1Bu, \quad (6)$$

$$y_2(k+1) = T_2Ax. \quad (7)$$

Так как подпространство  $L^\perp$  является  $A^*$ -инвариантным, то

$$T_2A = (A^*T_2^*)^* = \left( \sum_{i=1}^l \alpha_{1i}d_i \quad \sum_{i=1}^l \alpha_{2i}d_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^l \alpha_{li}d_i \right)^* = (T_2^*A_{22}^*)^* = A_{22}T_2,$$

где  $A_{22} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{12} & \dots & \bar{\alpha}_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_{l1} & \bar{\alpha}_{l2} & \dots & \bar{\alpha}_{ll} \end{pmatrix}$ . Если обозначить через  $A_{11}$  матрицу, об-

разованную первыми  $p$  столбцами матрицы  $T_1AT^{-1}$ , через  $A_{12}$  матрицу, образованную последними  $n - p$  столбцами матрицы  $T_1AT^{-1}$ , система (6)–(7) примет форму

$$y_1(k+1) = A_{11}y_1(k) + A_{12}y_2(k) + B_1u \quad (8)$$

$$y_2(k+1) = A_{22}y_2(k), \quad (9)$$

где  $B_1 = T_1B$ .

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$p = \text{rank } Q(A, B) = \text{rank } (TQ(A, B)) = \text{rank } Q(A_0, B_0),$$

где  $A_0 = TAT^{-1}$ ,  $B_0 = TB$ .

Так как

$$Q(A_0, B_0) = \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то на основании теоремы Гамильтона-Кели получаем

$$p = \text{rank} (B_1 \ A_{11}B_1 \ \dots \ A_{11}^{n-1}B_1) = \text{rank} Q(A_{11}, B_1).$$

*Доказательство теоремы.* Доказательство теоремы будет проводиться по следующей схеме:

стабилизируемость (1)  $\Rightarrow 1^0 \Rightarrow 2^0 \Rightarrow 3^0 \Rightarrow 4^0 \Rightarrow 5^0 \Rightarrow 6^0 \Rightarrow$  стабилизируемость (1).

Тот факт, что если система (1) стабилизируемая, то справедливо  $1^0$ , доказан в [6].

Теперь докажем справедливость импликации  $1^0 \Rightarrow 2^0$ . Если  $2^0$  не справедливо, то найдется невырожденное преобразование  $y(k) = Tx(k)$ , приводящее систему (1) к виду

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= A_{11}y_1(k) + A_{12}y_2(k) + B_1u(k) \\ y_2(k+1) &= A_{22}y_2(k). \end{aligned} \quad (10)$$

Решения второго уравнения системы (10) имеют вид  $y_2(k) = A_{22}^k y_2(0)$ , и так как  $\sigma(A_{22}) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$ , то не все функции  $y_2(k)$  будут стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . (Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве начального вектора  $y_2(0)$  взять собственный вектор матрицы  $A_{22}$ , соответствующий собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ ). Это в свою очередь означает, что какое бы управление ни брать, найдется решение  $y(k)$  системы (8),(9) такое, что  $y(k)$  и, следовательно, функция  $x(k) = T^{-1}y(k)$  не будет стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Однако, так как справедливо  $1^0$ , существует (см. [6]) симметрическая положительно определенная матрица  $R$  такая, что матрица  $A + BP$ , где  $P = -(I + B^*RB)^{-1}B^*RA$ , является дискретно устойчивой. Это означает, что управление  $u(k) = Px(k)$  стабилизирует систему (1).

Докажем теперь справедливость импликации  $2^0 \Rightarrow 3^0$ . Если допустить, что  $3^0$  не справедливо, то найдется  $A$ -инвариантное подпространство  $M \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\dim M < n$ , содержащее столбцы матрицы  $B$  и такое, что его ортогональное дополнение  $M^\perp$  содержит собственный вектор матрицы  $A^*$ , соответствующий собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ . Выберем в  $\mathbb{C}^n$  базис из векторов  $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ , где  $e_1, \dots, e_p$  — базис  $M$ , а остальные векторы — базис  $M^\perp$ . В системе (1) сделаем замену  $y(k) = Tx(k)$ , где  $T^{-1} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$ .

При такой замене матрицы системы (1) преобразуются в матрицы  $A_0 = TAT^{-1}$ ,  $B_0 = TB$ , откуда получаем

$$T^{-1}B_0 = B, \quad T^{-1}A_0 = AT^{-1}. \quad (11)$$

Так как столбцы матрицы  $B$  принадлежат подпространству  $M$ , то каждый из них представляет собой линейную комбинацию векторов  $e_1, \dots, e_p$ . Поэтому, в силу (11), матрица  $B_0$  должна иметь вид  $\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $B_1$  — матрица

размеров  $(p \times r)$ . В силу  $A$ -инвариантности подпространства  $M$  справедливы включения  $Ae_i \in M, i = \bar{1}, p$ . В таком случае, как следует из (11),

$$T^{-1}A_0 = (e_1 \dots e_n)A_0 = \left( \sum_{i=1}^p \alpha_{1i}e_i \dots \sum_{i=1}^p \alpha_{pi}e_i \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{p+1i}e_i \dots \sum_{i=1}^n \alpha_{ni}e_i \right).$$

Это означает, что матрица  $A_0$  должна иметь вид  $A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ , где  $A_{22}$

- квадратная матрица порядка  $(n - p)$ . Поскольку  $A_0^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$  и  $M^\perp$  содержит собственный вектор матрицы  $A^*$ , соответствующий собственному числу  $\lambda$ , у которого  $|\lambda| \geq 1$ , то для этого  $\lambda$  выполняется включение  $\lambda \in \sigma(A_{22}^*)$ .

Теперь докажем справедливость импликации  $3^0 \Rightarrow 4^0$ . Если допустить, что  $4^0$  не имеет места, то найдется собственный вектор  $x_0$  матрицы  $A^*$ , соответствующий собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ , ортогональный всем столбцам матрицы  $B$ . Из равенства  $x_0^*Ax = \bar{\lambda}x_0^*x, x \in \mathbb{C}^n$ , следует, что множество  $L = \{x \in \mathbb{C}^n : x_0^*x = 0\}$  представляет собой  $A$ -инвариантное подпространство, размерность которого меньше  $n$ . Это подпространство содержит все векторы, являющиеся столбцами матрицы  $B$ . Вектор  $x_0$  принадлежит ортогональному дополнению подпространства  $L$  и соответствует собственному числу  $\lambda$  матрицы  $A^*$  с  $|\lambda| \geq 1$ .

Докажем теперь справедливость импликации  $4^0 \Rightarrow 5^0$ . Если допустить, что  $5^0$  не справедливо, то найдется собственное значение  $\lambda$  матрицы  $A$ , удовлетворяющее условию  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ , такое, что  $rank(A - \lambda I B) < n$ . В таком случае существует ненулевой вектор  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , для которого  $x_0^*(A - \lambda I B) = 0$ , или в эквивалентной форме

$$x_0^*(A - \lambda I) = 0, \quad x_0^*B = 0. \tag{12}$$

Равенства (12) означают, что  $x_0$  является собственным вектором матрицы  $A^*$ , соответствующим собственному числу  $\bar{\lambda}$  и ортогональным столбцам матрицы  $B$ .

Теперь докажем справедливость импликации  $5^0 \Rightarrow 6^0$ . Из равенства  $rank(A - \lambda I B) = n, \lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ , следует, что для любой невырожденной матрицы  $T$  при  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$  будет

$$rank(T^{-1}AT - \lambda I \quad T^{-1}B) = n. \tag{13}$$

Действительно, если предположить, что найдется матрица  $T$  такая, что  $rank(T^{-1}AT - \lambda I \quad T^{-1}B) < n$ , то найдется ненулевой вектор  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  такой, что  $x_0^*(T^{-1}AT - \lambda I \quad T^{-1}B) = 0$ , или в эквивалентной форме

$$x_0^*(T^{-1}AT - \lambda I) = 0, \quad x_0^*T^{-1}B = 0. \tag{14}$$

Если ввести вектор  $y_0^* = x_0^*T^{-1}$ , то, очевидно,  $y_0 \neq 0$  и равенства (14) примут форму  $y_0^*(A - \lambda I) = 0, y_0^*B = 0$ , откуда следует, что  $rank(A - \lambda I B) < n$ , что

невозможно. Выберем матрицу  $T$  так, чтобы преобразование  $x(k) = Ty(k)$  приводило систему (1) к виду

$$y(k+1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} y(k) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(k),$$

или

$$y_1(k+1) = A_1 y_1(k) + B_1 u(k) \quad (15)$$

$$y_2(k+1) = A_2 y_2(k) + B_2 u(k), \quad (16)$$

где  $(p \times p)$ -матрица  $A_1$  удовлетворяет условию  $\sigma(A_1) \subset \mathbb{C} \setminus S$ , а матрица  $A_2$  — условию  $\sigma(A_2) \subset S$ . При этом соотношение (13) принимает форму

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 - \lambda I & B_2 \end{pmatrix} = n,$$

откуда

$$\text{rank} (A_1 - \lambda I \quad B_1) = p, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus S. \quad (17)$$

Из (17) вытекает равенство

$$\text{rank} (B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{p-1} B_1) = p. \quad (18)$$

Действительно, если  $\text{rank} (B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{p-1} B_1) < p$ , то существует ненулевой вектор  $x \in \mathbb{C}^p$  такой, что  $x^* (B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{p-1} B_1) = 0$ , то есть

$$x^* B_1 = 0, \quad x^* A_1 B_1 = 0, \quad \dots \quad x^* A_1^{p-1} B_1 = 0. \quad (19)$$

Равенства (19) означают, что вектор  $x$  ортогонален подпространству  $L = \text{Lin} (B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{p-1} B_1)$  и следовательно,  $x \in L^\perp$ . Так как  $\dim L^\perp \geq 1$ , то существуют собственный вектор  $y \in L^\perp$  матрицы  $A_1^*$  и число  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$  такие, что  $y^* (A_1 - \bar{\lambda} I) = 0$ . Учитывая, что и  $y^* B_1 = 0$ , получаем  $y^* (A_1 - \bar{\lambda} I \quad B_1) = 0$ , что противоречит (17).

Из леммы 1 вытекает, что система (15) стабилизируема. Следовательно, существует  $(r \times p)$  — матрица  $F_1$  такая, что  $A_1 + B_1 F_1$  является дискретно устойчивой. Очевидно, матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & 0 \\ B_2 F_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

также дискретно устойчива, так как дискретно устойчивы ее диагональные блоки. Следовательно, система (15), (16) является стабилизируемой управлением  $u(k) = F_1 y_1(k)$ . Выразим управление  $u(k)$  через вектор  $x(k)$ . Так как  $y_1(k) = PT^{-1}x(k)$ , где  $(p \times n)$ -матрица  $P$  имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

получаем  $u(k) = F_1 P T^{-1} x(k)$ . Таким образом, система (1) является стабилизируемой управлением  $u(k) = Fx(k)$ , где  $F = F_1 P T^{-1}$ , и, следовательно, при таком выборе управления все ее решения стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Если допустить, что  $6^0$  не справедливо, то найдется корневое подпространство  $K(\lambda_i)$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus S$ , не принадлежащее  $L$ . Это означает, что найдется вектор  $x_0 \in K(\lambda_i)$  такой, что  $x_0 \notin L$ . Обозначим через  $d_1, \dots, d_l$  базис подпространства  $L^\perp$ , через  $x(k)$  — решение системы  $x(k+1) = (A + BF)x(k)$ , выходящее из точки  $x_0 = x(0)$ . Тогда

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B F x(j) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} (\varphi_1(j) b_1 + \dots + \varphi_r(j) b_r),$$

где  $b_1, \dots, b_r$  — столбцы матрицы  $B$ ,  $\varphi_1(j), \dots, \varphi_r(j)$  — координаты вектора  $Fx(j)$ . Так как  $A^{k-j-1} b_i \in L$ , то  $d_j^* x(k) = d_j^* A^k x_0$ , откуда, в силу леммы 2,

$$d_j^* x(k) = \sum_{m=0}^{n_i-1} C_k^m \lambda_i^{k-m} d_j^* x_{0m}, \quad x_{00} = x_0.$$

Поскольку  $x_0 \notin L$ , то по крайней мере для одного  $j$  будет  $d_j^* x_{00} \neq 0$ , а значит,  $d_j^* x(k)$  не может стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , хотя, как установлено выше,  $x(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Докажем теперь, что если выполняется  $6^0$ , то система (1) стабилизируема. Пусть  $\text{rank } Q(A, B) = p$ ,  $L = \text{Lin}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$  и пусть  $v_1, \dots, v_p$  — базис подпространства  $L$ ,  $d_1, \dots, d_l$  — базис подпространства  $L^\perp$ . В силу леммы 4 существует матрица  $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ , где  $T_1, T_2$  задаются равенствами (4), приводящая систему (1) к виду (2), (3). Так как произвольное решение системы (1) имеет форму  $x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j)$ , то  $y_2(k) = T_2 x(k) = T_2 A^k x(0)$ . Поскольку пространство  $\mathbb{C}^n$  есть прямая сумма корневых подпространств  $K(\lambda_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то  $x(0) = \sum_{j=1}^m \xi_j$ , где  $\xi_j \in K(\lambda_j)$ .

Следовательно,

$$y_2(k) = \sum_{j=1}^m T_2 A^k \xi_j = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j-1} C_k^s \lambda_j^{k-s} T_2 \xi_{js},$$

где  $\xi_{js} = (A - \lambda_j I)^s \xi_j \in K(\lambda_j)$ . Так как  $\xi_{js} \in L$  при  $|\lambda_j| \geq 1$ , то для этих векторов  $\xi_{js}$  выполняется равенство  $T_2 \xi_{js} = 0$ . В таком случае

$$y_2(k) = \sum_{j: |\lambda_j| < 1} \sum_{s=0}^{n_j-1} C_k^s \lambda_j^{k-s} T_2 \xi_{js},$$

откуда следует, что  $y_2(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  независимо от выбора управления.

Как установлено в лемме 4,  $\text{rank } Q(A_{11}, B_1) = p$ . Тогда в силу леммы 1 существует управление  $u(k) = F_1 y_1(k)$  такое, что матрица  $(A_{11} + B_1 F_1)$  дискретно устойчива. И так как  $A_{12} y_2(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то на основании леммы 3 заключаем, что все решения системы  $y_1(k+1) = (A_{11} + B_1 F_1) y_1(k) + A_{12} y_2(k)$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, управление  $u(k) = F_1 y_1(k)$  стабилизирует систему (2), (3) и, следовательно, управление  $u(k) = F_1 P T^{-1} x(k)$ , где  $P$  из (20), стабилизирует систему (1).

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И., Луценко А.В. Критерии стабилизируемости линейной системы // Вестн. Харьк. ун-та. Управляемые системы. - 1988. - **315**. - С. 3-12.
2. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. I, II // Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика. - 1976. **134**. - С. 114 - 123. - 1977. **148**. - С. 3-11.
3. Габелая А.Г. Единый подход к задачам управляемости и стабилизируемости линейных автономных систем // Сообщ. АН ГССР, 1977, 85, № 2. С.333-3336.
4. Нестерова Т.М. Стабилизируемость относительно подпространства линейных систем с неполной информацией о состоянии // Вестн. Харьк. ун-та, 1992, № 361. Прикладная мат-ка и механика. С. 40 - 48.
5. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М., 1980. 376 с.
6. Луценко А.В. К задаче стабилизации. // Вестн. Харьк. ун-та, 1992, № 361. Прикладная мат-ка и механика. С. 26 - 29.
7. Власенко Л.А., Луценко А.В. О стабилизации линейной системы относительно подпространства // Вестн. Харьк. ун-та, 1989, № 334. Динамические системы. С. 3 - 9.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988. 552 с.
9. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 424 с.
10. Zabczyk J. Mathematical Control Theory: An Introduction. Birkhauser Boston, 1992.

## Интервалы Вейля, ассоциированные с задачей Неванлинны - Пика в классе $R[a, b]$

И.Ю. Серикова

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

В этой статье вводятся матричные интервалы Вейля, ассоциированные с усеченной вполне неопределенной задачей Неванлинны-Пика в классе  $R[a, b]$ . Доказано, что при добавлении интерполяционных условий интервалы Вейля вкладываются друг в друга. Доказано заполнение интервалов Вейля значениями решений задачи Неванлинны-Пика в соответствующей точке. Введены предельные интервалы Вейля. Доказано, что предельные интервалы Вейля полностью заполняются значениями решений соответствующей задачи. Получен критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции. *2000 Mathematics Subject Classification* 47A57, 42A82.

### 1. Введение

Класс аналитических функций  $R[a, b]$  был введен М.Г. Крейном ([1], с. 527) в связи с исследованием степенной проблемы моментов на компактном интервале. В работе ([2]) была рассмотрена матричная усеченная интерполяционная задача Неванлинны-Пика в классе  $R[a, b]$  в случае, когда заданы простые комплексные узлы интерполяции.

В этой статье рассматривается задача Неванлинны-Пика в классе  $R[a, b]$  в случае, когда задано бесконечное число простых комплексных узлов интерполяции. Для такой задачи с каждой точкой  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  можно связать интервал Вейля. В работе показано, что интервалы Вейля полностью заполняются значениями решений интерполяционной задачи. Доказано, что для вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика необходимо, чтобы интервалы Вейля были невырождены для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  и достаточно, чтобы хотя бы для одного  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  соответствующий интервал Вейля был невырожден.

## 2. Классы аналитических матриц-функций

Пусть заданы вещественные числа  $a < b$  и натуральное число  $m$ . Обозначим  $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$ ,  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ ,  $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+$ . Через  $\mathbb{C}^{m \times m}$  обозначим множество комплексных квадратных матриц порядка  $m$ . Множество неотрицательных и положительных матриц обозначим  $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$  и  $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$  соответственно. Для неотрицательных (положительных) матриц мы также будем использовать обозначения  $A \geq 0$  ( $A > 0$ ). Символами  $I_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$  и  $0_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$  будем обозначать единичную и нулевую матрицы.

**Определение 1.** Голоморфная матрица-функция (м.ф.)  $w : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$  называется неванлинновской, если

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

Множество всех неванлинновских м.ф. обозначим  $\mathcal{R}$ .

**Определение 2.** Символом  $R[a, b]$  обозначим голоморфные м.ф.  $s : \mathbb{C} \setminus [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$  такие, что

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm,$$

$$s(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, a), \quad s(x) \leq 0, \quad x \in (b, +\infty).$$

Пусть функция  $f$  определена в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и пусть  $\hat{\Omega} \subset \Omega$ . Тогда символ  $f|_{\hat{\Omega}}$  обозначает сужение  $f$  на  $\hat{\Omega}$ .

Сформулируем теорему ([1], с. 528).

**Теорема 1.** Пусть м.ф.  $s \in R[a, b]$ . Тогда  $(z-a)s|_{\mathbb{C}_+} \in \mathcal{R}$  и  $(b-z)s(z)|_{\mathbb{C}_+} \in \mathcal{R}$ .

Наоборот, пусть голоморфная м.ф.  $s : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$  такова, что  $(z-a)s \in \mathcal{R}$  и  $(b-z)s \in \mathcal{R}$ . Тогда м.ф.  $s$  однозначно продолжается до голоморфной в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  м.ф. класса  $R[a, b]$ .

Рассмотрим блочные матрицы

$$J = \begin{bmatrix} 0_m & -iI_m \\ iI_m & 0_m \end{bmatrix}, \quad J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}.$$

**Определение 3.** Пусть матрица  $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ . Матрица  $A$  называется  $J$ -растягивающей ( $J_\pi$ -растягивающей), если

$$AJA^* - J \geq 0, \quad (AJ_\pi A^* - J_\pi \geq 0).$$

**Определение 4.** Матрица  $A \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}$  называется  $J$ -унитарной ( $J_\pi$ -унитарной), если

$$AJA^* - J = 0, \quad (AJ_\pi A^* - J_\pi = 0).$$

Можно доказать (см. [3]), что

$$AJA^* - J \geq 0 \iff A^*JA - J \geq 0, (AJ_\pi A^* - J_\pi \geq 0 \iff A^*J_\pi A - J_\pi \geq 0). \quad (1)$$

$$AJA^* - J = 0 \iff A^*JA - J = 0, (AJ_\pi A^* - J_\pi = 0 \iff A^*J_\pi A - J_\pi = 0). \quad (2)$$

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и  $D \subset \Omega$ . Множество  $D$  назовем дискретным в  $\Omega$ , если для любого компакта  $K \subset \Omega$  пересечение  $D$  и  $K$  конечно.

В [4] доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $D$  - дискретное множество в  $\mathbb{C}_+$  и задана голоморфная в  $\mathbb{C}_+ \setminus D$  м.ф.  $w$  такая, что

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}_+ \setminus D.$$

Тогда все точки множества  $D$  являются устранимыми особыми точками для м.ф.  $w$ . И, продолженная по непрерывности в точки  $D$ , м.ф.  $w \in \mathcal{R}$ .

**Определение 5.** Пару  $[p(z), q(z)]$  мероморфных в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  м.ф. назовем  $R[a, b]$ -парой, если существует дискретное в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  множество  $\mathcal{D}_{pq}$ , такое, что

1. М.ф.  $p, q$  - голоморфны в  $\mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a, b]\}$ .

$$2. [p(z), q(z)] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a, b]\}.$$

$$3. [(z-a)p(z), q(z)] \frac{J}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} (\bar{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

$$4. [(b-z)p(z), q(z)] \frac{J}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} (b-\bar{z})p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

Очевидно, что условие 2 эквивалентно, тому что ранг пары  $[p(z), q(z)]$  максимален, т.е.  $\text{rang}[p(z), q(z)] = m$ .

Пары  $[p_1(z), q_1(z)]$  и  $[p_2(z), q_2(z)]$  назовем эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  м.ф.  $Q(z)$ , такая, что  $p_2(z) = Q(z)p_1(z), q_2(z) = Q(z)q_1(z)$ . Множество классов эквивалентности обозначим  $R_\infty[a, b]$ .

**Теорема 2.** Для того, чтобы пара  $[p(z), q(z)]$  мероморфных в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  м.ф. являлась  $R[a, b]$ -парой необходимо и достаточно, чтобы существовало множество изолированных точек  $\mathcal{D}_{pq} \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$  такое, что

1. М.ф.  $p, q$  - голоморфны в  $\mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a, b]\}$ .

$$2. [p(z), q(z)] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup [a, b]\}.$$

$$3'. [p(z), q(z)] \frac{J}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

$$4'. \begin{cases} [p(x), q(x)]J_\pi \begin{bmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{bmatrix} \geq 0, & x \in (-\infty, a), \\ [p(x), q(x)]J_\pi \begin{bmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{bmatrix} \leq 0, & x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

*Доказательство. Достаточность.* Пусть для пары  $[p(z), q(z)]$  выполнены условия 1, 2, 3', 4'.

1. Сначала рассмотрим случай, когда  $\det [q(z)] \neq 0$ . Тогда пара  $[p(z), q(z)]$  эквивалентна паре  $[s(z), I_m] = [q^{-1}(z)p(z), I_m]$ . Для этой пары условие 3' примет вид

$$\frac{s^*(z) - s(z)}{\bar{z} - z} \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

По лемме 1, все особенности являются устранимыми и после их устранения  $s \in \mathcal{R}$  и  $s(x) = s^*(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Тогда условие 4' примет вид

$$\begin{cases} s(x) \geq 0, & \forall x \in (-\infty, a), \\ s(x) \leq 0, & \forall x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Отсюда  $s \in R[a, b]$ . По теореме 1,  $(z - a)s \in \mathcal{R}$ , т.е.

$$[(z - a)s(z), I_m] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} (\bar{z} - a)s^*(z) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0.$$

Домножая слева на  $q(z)$ , а справа на  $q^*(z)$ , получим условие 3. Аналогично, из того, что  $(b - z)s \in \mathcal{R}$  следует условие 4.

2. Пусть теперь  $\det [q(z)] \equiv 0$ . Рассмотрим пару

$$[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)] = [p(z), q(z)] \begin{bmatrix} I_m & i\varepsilon I_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} = [p(z), i\varepsilon p(z) + q(z)].$$

Из невырожденности матрицы  $\begin{bmatrix} I_m & i\varepsilon I_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}$  следует, что  $\text{rank}[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)] = \text{rank}[p(z), q(z)] = m$ , т.е. условие 2 для пары  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$  выполнено. Условия 3' и 4' следуют очевидным образом из  $J$  ( $J_\pi$ )- унитарности верхнетреугольной матрицы  $\begin{bmatrix} I_m & i\varepsilon I_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}$ .

Покажем, что  $\det q_\varepsilon(z) \neq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(z)q_\varepsilon^*(z) &= (i\varepsilon p(z) + q(z))(-i\varepsilon p^*(z) + q^*(z)) \\ &= \varepsilon^2 p(z)p^*(z) + q(z)q^*(z) + i\varepsilon(-q(z)p^*(z) + p(z)q^*(z)) \\ &= \varepsilon^2 \{p(z)p^*(z) + q(z)q^*(z)\} + (1 - \varepsilon^2)q(z)q^*(z) + \varepsilon [p(z), q(z)] \frac{J}{i} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из 2 и 3' для пары  $[p(z), q(z)]$  следует, что при  $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$

$$q_\varepsilon(z)q_\varepsilon^*(z) > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Для пары  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$  выполнены условия 1, 2, 3', 4' и  $\det(q_\varepsilon(z)) \neq 0$ , значит, как показано выше, пара  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$  удовлетворяет условиям 3 и 4. Переходя в этих неравенствах к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим условия 3 и 4 для пары  $[p(z), q(z)]$ .

*Необходимость.* Пусть пара  $[p(z), q(z)]$  - является  $R[a, b]$  парой, покажем выполнение условий 3' и 4'.

1. Пусть  $\det q(z) \neq 0$ . Пара  $[s(z), I_m] = [q^{-1}(z)p(z), I_m]$  эквивалентна паре  $[p(z), q(z)]$ . Применяя лемму 1, из условий 3 и 4 получим,  $(z - a)s(z) \in \mathcal{R}$  и  $(b - z)s(z) \in \mathcal{R}$ , тогда, по теореме 1,  $s(z) \in R[a, b]$ . Отсюда и из эрмитовости  $s(x)$  следует выполнение условий 3' ( $s(z) \in \mathcal{R}$ ) и 4'.

2. Пусть далее  $\det q(z) \equiv 0$ . Складывая условия 3 и 4 получим

$$(b - a) \left\{ [p(z), q(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \right\} \geq 0,$$

т.е. условие 3'. Определим, далее,

$$[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)] = [p(z), q(z)] \begin{bmatrix} I_m & i\varepsilon I_m \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} = [p(z), i\varepsilon p(z) + q(z)].$$

Условия 1, 2, 3, 4 для пары  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$ , очевидно, выполнены. Значит  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$  является  $R[a, b]$ -парой.

Как и при доказательстве достаточности,  $\det q_\varepsilon(z) \neq 0$ . Применяя пункт 1 к паре  $[p_\varepsilon(z), q_\varepsilon(z)]$  и, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в неравенстве 4', получим условие 4' для пары  $[p(z), q(z)]$ .

Теорема полностью доказана.

### 3. Постановка задачи Неванлинны-Пика в классе $R[a, b]$

Пусть задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел  $Z_\infty = \{z_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$  и бесконечная последовательность матриц  $\{s_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ . В задаче Неванлинны-Пика требуется описать все м.ф.  $s \in R[a, b]$  такие, что

$$s(z_j) = s_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Множество всех решений задачи (3) обозначим  $\mathcal{F}_\infty$ .

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Наряду с задачей (3) будем рассматривать усеченную задачу Неванлинны-Пика

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{4}$$

Множество всех решений задачи (4) обозначим  $\mathcal{F}_n$ . Введем обозначения  $Z_n = \{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_+$ ,  $\bar{Z}_n = \{\bar{z}_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_-$ ,  $\bar{Z}_\infty = \{\bar{z}_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}_-$ . Ясно, что  $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ .

Приведем основные результаты о задаче (4), следуя работе [2]. С усеченной задачей (4) свяжем следующие объекты

$$s_1(z) = (z - a)s(z), \quad s_2(z) = (b - z)s(z). \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} z_1 I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & z_2 I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \cdots & z_n I_m \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} (z_1 - a)s_1 \\ \vdots \\ (z_n - a)s_n \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} (b - z_1)s_1 \\ \vdots \\ (b - z_n)s_n \end{bmatrix},$$

$$R_T(z) = (T - zI_{m \times m})^{-1} = \begin{bmatrix} (z_1 - z)^{-1} I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \cdots & (z_n - z)^{-1} I_m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \left\{ \frac{(z_i - a)s_i - (\bar{z}_j - a)s_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1}^n, \quad K_2 = \left\{ \frac{(b - z_i)s_i - (b - \bar{z}_j)s_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1}^n.$$

Имеет место Основное тождество

$$vu_1^* R_T^*(a) = \frac{1}{a - b} R_T^{-1}(b) K_1 + \frac{1}{a - b} R_T^{-1}(a) K_2. \quad (6)$$

**Теорема 3.** Если м.ф.  $s \in \mathcal{F}_n$ , то она удовлетворяет следующей системе основных матричных неравенств (ОМН) В.П. Потапова ( $r = 1, 2$ )

$$\left[ \frac{K_r}{\{R_{T^*}^*(z)\{u_r - vs_r^*(z)\}\}^*} \mid \frac{R_{T^*}^*(z)\{u_r - vs_r^*(z)\}}{\frac{s_r(z) - s_r^*(z)}{z - \bar{z}}} \right] \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z_n \cup \bar{Z}_n\}.$$

Наоборот, пусть м.ф.  $s$  голоморфна в  $\mathbb{C}_\pm$  и построенные по ней с помощью формул (5)  $s_1$  и  $s_2$  удовлетворяют системе ОМН. Тогда  $s \in \mathcal{F}_n$ .

**Определение 6.** Усеченная задача Неванлинны-Пика (4) называется вполне неопределенной, если  $K_{1,(n)} > 0$ ,  $K_{2,(n)} > 0$ .

**Определение 7.** Матрица-функция

$$U(z) = \left[ \frac{\alpha(z)}{\gamma(z)} \mid \frac{\beta(z)}{\delta(z)} \right] \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} I_m - (z - a)v^* R_T^*(a) K_2^{-1} R_T(z) u_2 & -(z - a)(b - z)v^* R_T^*(a) K_2^{-1} R_T(z) v \\ u_1^* R_T^*(a) K_1^{-1} R_T(z) u_1 & I_m + (z - a)u_1^* R_T^*(a) K_1^{-1} R_T(z) v \end{bmatrix}$$

называется резольвентной матрицей задачи (4).

Рассмотрим м.ф.

$$U_1(z) = \left[ \begin{array}{cc} \alpha(z) & \frac{1}{z - a} \beta(z) \\ (z - a) \gamma(z) & \delta(z) \end{array} \right], \quad U_2(z) = \left[ \begin{array}{cc} \alpha(z) & \frac{1}{b - z} \beta(z) \\ (b - z) \gamma(z) & \delta(z) \end{array} \right]. \quad (8)$$

В работе [2] были получены выражения для  $J$ -форм ( $r = 1, 2$ )

$$U_r^*(z)JU_r(z) - J = \iota(\bar{z} - z) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[u_r, v], \quad (9)$$

$$U_r^{-1}(z)JU_r^{-1*}(z) - J = -\iota(\bar{z} - z)J \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v] \quad (10)$$

Непосредственные вычисления, с использованием (7), (8), (9) позволяют получить  $J_\pi$ -форму для резольвентной матрицы  $U$

$$\begin{aligned} & U^*(z)J_\pi U(z) - J_\pi \\ &= \left( \frac{\gamma^*(z)\alpha(z) + \alpha^*(z)\gamma(z)}{\delta^*(z)\alpha(z) + \beta^*(z)\gamma(z) - I_m} \mid \frac{\gamma^*(z)\beta(z) + \alpha^*(z)\delta(z) - I_m}{\delta^*(z)\beta(z) + \beta^*(z)\delta(z)} \right) = \frac{2}{a-b} \\ &\times \left\{ (\operatorname{Re} z - b) \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & (\bar{z} - a)I_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[u_1, v] \right. \\ &\times \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & (z - a)I_m \end{pmatrix} + (\operatorname{Re} z - a) \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & (b - \bar{z})I_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_2^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_2^{-1} \\ &\left. \times R_T(z)[u_2, v] \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & (b - z)I_m \end{pmatrix} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Во вполне неопределенном случае система ОМН эквивалентна факторизованной системе ОМН (ФОМН) для всех  $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z_n \cup \bar{Z}_n\}$

$$[s_r(z), I_m] \frac{U_r^{-1}(z)JU_r^{-1*}(z)}{\iota(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} s_r^*(z) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, 2. \quad (12)$$

**Теорема 5.** Дробно-линейное преобразование

$$s(z) = \{p(z)\beta(z) + q(z)\delta(z)\}^{-1} \{p(z)\alpha(z) + q(z)\gamma(z)\} \quad (13)$$

задает взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{F}_n$  и  $R_\infty[a, b]$ . Теоремы 4 и 5 доказаны в [2].

#### 4. Решения Фридрихса и Крейна. Интервалы Вейля усеченной задачи Неванлинны-Пика в классе $R[a, b]$

Рассмотрим усеченную задачу (4) при фиксированном  $n$ . Легко видеть, что пары  $[I_m, 0_m]$  и  $[0_m, I_m]$  являются  $R[a, b]$ -парами. Подставив эти пары в дробно-линейное преобразование (13), получим

$$s_K(z) = \beta^{-1}(z)\alpha(z) \in \mathcal{F}_n, \quad s_F(z) = \delta^{-1}(z)\gamma(z) \in \mathcal{F}_n. \quad (14)$$

М.ф.  $s_F$  называется решением Фридрихса, а  $s_K$  - решением Крейна. При исследовании решений Фридрихса и Крейна мы будем пользоваться некоторыми результатами работы [5, 6].

**Теорема 6.** Решения Фридрикса и Крейна (14) допускают представления в виде матричных пучков ( $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ )

$$s_F(z) = (a - b)u_1^* R_T^*(a) [(z - b)K_1 + (z - a)K_2]^{-1} R_T(a)u_1, \quad (15)$$

$$s_K(z) = \frac{1}{(a - b)(z - a)(z - b)} \quad (16)$$

$$\times \left\{ v^* \left[ (z - a)R_T^{-1}(b)K_1 R_T^{-1*}(b) + (z - b)R_T^{-1}(a)K_2 R_T^{-1*}(a) \right]^{-1} v \right\}^{-1}.$$

*Доказательство.*

Рассмотрим рациональную функцию  $\Psi(z) = \det [(z - b)K_1 + (z - a)K_2]$ . Ясно, что для вполне неопределенной задачи (4)  $\Psi(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  и, следовательно,  $\Psi(z)$  неравная тождественно нулю рациональная функция. Конечное множество нулей и полюсов функции  $\Psi$  обозначим  $\mathcal{D}_\Psi$ . Ясно, что в  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_\Psi$  м.ф.  $[(z - b)K_1 + (z - a)K_2]$  обратима.

Пусть  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_\Psi \cup \mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}$ . Из Основного тождества (6) получим

$$\begin{aligned} & \delta(z)(a - b)u_1^* R_T^*(a) [(z - b)K_1 + (z - a)K_2]^{-1} R_T(a)u_1 \\ &= (a - b)u_1^* R_T^*(a)K_1^{-1} R_T(z) \{ R_T^{-1}(z)K_1 + (z - a)vu_1^* R_T^*(a) \} \\ & \times [(z - b)K_1 + (z - a)K_2]^{-1} R_T(a)u_1 = (a - b)u_1^* R_T^*(a)K_1^{-1} R_T(z) \\ & \times \left\{ \left( R_T^{-1}(z) + \frac{z - a}{a - b} R_T^{-1}(b) \right) K_1 + \frac{z - a}{a - b} R_T^{-1}(a)K_2 \right\} \\ & \times [(z - b)K_1 + (z - a)K_2]^{-1} R_T(a)u_1 = u_1^* R_T^*(a)K_1^{-1} R_T(z)u_1 = \gamma(z). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана формула (15) для  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{D}_\Psi \cup \mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}$ . В силу аналитичности формула (15) имеет место для  $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ .

Формула (16) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Из (9) следует, что  $U_r^*(x)JU_r(x) - J = 0_{2m}$ , для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  и  $r = 1, 2$ . Отсюда (см. (2)) и из блочного представления (7) имеем

$$\begin{aligned} -\alpha(x)\beta^*(x) + \beta(x)\alpha^*(x) &= 0_m; & -\alpha(x)\delta^*(x) + \beta(x)\gamma^*(x) &= -I_m; \\ -\gamma(x)\beta^*(x) + \delta(x)\alpha^*(x) &= I_m; & -\gamma(x)\delta^*(x) + \delta(x)\gamma^*(x) &= 0_m. \end{aligned} \quad (17)$$

**Теорема 7.** Пусть дана вполне неопределенная задача Неванлинны-Лука (4). Тогда  $\{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1}$  допускает представление

$$\begin{aligned} \{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1} &= \frac{(z - a)^2(z - b)}{a - b} v^* R_{T^*}(z)K_1^{-1} R_T(z)v \\ &+ \frac{(z - a)(z - b)^2}{a - b} v^* R_{T^*}(z)K_2^{-1} R_T(z)v, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}. \end{aligned} \quad (18)$$

*Доказательство.* Зафиксируем произвольную точку  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Из определения 2 следует, что  $s_F(x) = s_F^*(x)$ . Отсюда и из формулы (14) имеем

$$\begin{aligned} s_K(x) - s_F(x) &= \beta^{-1}(x)\alpha(x) - \gamma^*(x)\delta^{-1*}(x) \\ &= \beta^{-1}(x) \{ \alpha(x)\delta^*(x) - \beta(x)\gamma^*(x) \} \delta^{-1*}(x) = \beta^{-1}(x)\delta^{-1*}(x). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (17). Следовательно,

$$\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} = \delta^*(x)\beta(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \quad (19)$$

Отсюда, из (7) и Основного тождества (6), имеем

$$\begin{aligned} \{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} &= (x-a)(x-b)v^*R_T^*(x)K_1^{-1}R_T(a) \\ &\times \left\{ R_T^{-1}(a)K_1R_T^{-1*}(x) + (x-a)u_1v^* \right\} R_T^*(a)K_2^{-1}R_T(x)v \\ &= (x-a)(x-b)v^*R_T^*(x)K_1^{-1}R_T(a) \\ &\times \left\{ R_T^{-1}(a)K_1 \left[ R_T^{-1*}(x) + \frac{x-a}{a-b}R_T^{-1*}(b) \right] + \frac{x-a}{a-b}R_T^{-1}(a)K_2R_T^{-1*}(a) \right\} \\ &\times R_T^*(a)K_2^{-1}R_T(x)v = \frac{(x-a)^2(x-b)}{a-b}v^*R_T^*(x)K_1^{-1}R_T(x)v \\ &+ \frac{(x-a)(x-b)^2}{a-b}v^*R_T^*(x)K_2^{-1}R_T(x)v. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались очевидным тождеством

$$(a-b)R_T^{-1*}(x) + (x-a)R_T^{-1*}(b) = (x-b)R_T^{-1*}(a).$$

Таким образом, представление (18) доказано для  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Продолжая по аналитичности, получим представление (18) для  $z \in \mathbb{C} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть дана вполне неопределенная интерполяционная задача (4) и  $s_F$  и  $s_K$  являются решениями Фридрихса и Крейна. Тогда

$$s_K(x) > s_F(x), \quad \forall x < a, \quad s_K(x) < s_F(x), \quad \forall x > b. \quad (20)$$

По аналогии с [5], можно доказать следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть дана вполне неопределенная задача Неванлинны-Пика (4) и пусть  $s_F$  и  $s_K$  обозначают решения Фридрихса и Крейна соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} &U^*(x)J_\pi U(x) - J_\pi \\ &= 2 \begin{bmatrix} I_m & s_F(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_F(x) & 0_m \\ 0_m & (s_K(x) - s_F(x))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ s_F(x) & I_m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда и из (20) имеем

$$U^*(x)J_\pi U(x) \geq J_\pi, \quad x < a, \quad U^*(x)J_\pi U(x) \leq J_\pi, \quad x > b. \quad (22)$$

**Теорема 8.** Пусть дана вполне неопределенная интерполяционная задача (4) и  $s_F$  и  $s_K$  являются решениями Фридрихса и Крейна. И пусть  $s$  - произвольное решение  $n$ -ой усеченной задачи (4). Тогда

$$\begin{aligned} 0_m < s_F(x) \leq s(x) \leq s_K(x), \quad &x < a, \\ s_K(x) \leq s(x) \leq s_F(x) < 0_m, \quad &x > b. \end{aligned} \quad (23)$$

*Доказательство.* Пусть  $s \in \mathcal{F}_n$ , тогда она допускает представление (13) с некоторой парой  $[p(z), q(z)]$ . Пусть  $x \in \mathbb{R} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{D}_{pq}\}$ . Из эрмитовости  $s_K(x)$  и (17) получим

$$s_K(x) - s(x) = \{p(x)\beta(x) + q(x)\delta(x)\}^{-1} q(x)\beta^{-1*}(x). \quad (24)$$

Таким образом, разность  $s_K(x) - s(x)$  представлена в виде дробно-линейного преобразования над парой  $[p(z), q(z)]$  с резольвентной матрицей

$$\tilde{U}(x) = \begin{bmatrix} 0_m & \beta(x) \\ \beta^{-1*}(x) & \delta(x) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что её  $J_\pi$ -форма имеет вид

$$\tilde{U}(x)J_\pi\tilde{U}^*(x) - J_\pi = \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ 0_m & \beta^{-1*}(x)\{\beta^*(x)\delta(x) + \delta^*(x)\beta(x)\}\beta^{-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Из (21) следует, что  $U^*(x)J_\pi U(x) - J_\pi \geq 0$  для  $x < a$  и  $U^*(x)J_\pi U(x) - J_\pi \leq 0$  для  $x > b$ . Используя блочное представление (7), получим  $\beta^*(x)\delta(x) + \delta^*(x)\beta(x) \geq 0$  для  $x < a$  и  $\beta^*(x)\delta(x) + \delta^*(x)\beta(x) \leq 0$  для  $x > b$ . Поэтому  $\tilde{U}(x)J_\pi\tilde{U}^*(x) \geq J_\pi$  для  $x < a$  и  $\tilde{U}(x)J_\pi\tilde{U}^*(x) \leq J_\pi$  для  $x > b$ . С учетом этого неравенства получаем для  $x < a$

$$\begin{aligned} & [q(x)\beta^{-1*}(x), p(x)\beta(x) + q(x)\delta(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \beta^{-1}(x)q^*(x) \\ \beta^*(x)p^*(x) + \delta^*(x)q^*(x) \end{bmatrix} \\ &= [p(x), q(x)] \begin{bmatrix} 0_m & \beta(x) \\ \beta^{-1*}(x) & \delta(x) \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} 0_m & \beta^{-1}(x) \\ \beta^*(x) & \delta^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{bmatrix} \\ &= [p(x), q(x)]\tilde{U}(x)J_\pi\tilde{U}^*(x) \begin{bmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{bmatrix} \geq [p(x), q(x)]J_\pi \begin{bmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из эквивалентного определения  $R[a, b]$ -пары (теорема 2). Таким образом, для  $x < a$  имеем

$$[q(x)\beta^{-1*}(x), p(x)\beta(x) + q(x)\delta(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \beta^{-1}(x)q^*(x) \\ \beta^*(x)p^*(x) + \delta^*(x)q^*(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Умножим это неравенство слева на  $\{p(x)\beta(x) + q(x)\delta(x)\}^{-1}$ , а справа на  $-\{p(x)\beta(x) + q(x)\delta(x)\}^{-1*}$ . С учетом (24) получим

$$[s_K(x) - s(x), I_m]J_\pi \begin{bmatrix} s_K^*(x) - s^*(x) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x < a.$$

Аналогично, для  $x > b$  получим

$$[s_K(x) - s(x), I_m]J_\pi \begin{bmatrix} s_K^*(x) - s^*(x) \\ I_m \end{bmatrix} \leq 0.$$

М.ф.  $s_K$  и  $s$  принадлежат  $\mathcal{F}_n \subset R[a, b]$ , а значит  $s_K(x)$  и  $s(x)$  эрмитовы. Но тогда последние неравенства имеют вид

$$s_K(x) \geq s(x), \quad \forall x < a \quad \text{и} \quad s_K(x) \leq s(x), \quad \forall x > b.$$

Эти неравенства продолжаютсЯ в точки  $x \in \{\mathbb{R} \setminus [a, b]\} \cap \mathcal{D}_{pq}$  по непрерывности.

Неравенства  $s_F(x) \leq s(x)$ , для  $x < a$  и  $s_F(x) \geq s(x)$ , для  $x > b$  доказываются аналогичным образом.

Неравенства  $0 < s_F(x)$ , для  $x < a$  и  $s_F(x) < 0$ , для  $x > b$  следуют из представления (18) для вполне неопределенной усеченной задачи Неванлинны-Пика. Теорема доказана.

Пусть  $A, B \in \mathbb{C}_>^{m \times m}$  и выполнено условие  $A \leq B$ . Матричным интервалом называется

$$[A, B] = \{X \in \mathbb{C}_>^{m \times m} : A \leq X \leq B\}.$$

Число  $\text{rank}\{B - A\}$  называется *рангом* матричного интервала.

Интервал  $[A, B]$  называется невырожденным, если  $A < B$ .

**Определение 8.** Матричный интервал

$$\mathcal{I}(x) = \begin{cases} [s_F(x), s_K(x)], & x < a, \\ [s_K(x), s_F(x)], & x > b. \end{cases}$$

называется *интервалом Вейля* в точке  $x$ .

Из (20) для вполне неопределенной задачи (4) следует, что интервалы Вейля  $\mathcal{I}(x)$  невырождены для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ .

**Теорема 9.** Интервал Вейля полностью заполняется решениями интерполяционной задачи (4), т.е

$$\{s(x) : s \in \mathcal{F}_n\} = \mathcal{I}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

*Доказательство.* Включение  $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{I}(x)$  следует из (23). Докажем обратное включение  $\mathcal{I}(x) \subset \{s(x) : s \in \mathcal{F}_n\}$ . Пусть  $M \in \mathbb{C}_n^{m \times m}$  такова, что  $s_F(x) \leq M \leq s_K(x)$  при  $x < a$ . Докажем, что существует м.ф.  $s \in \mathcal{F}_n$  такая, что  $s(x) = M$  ( $x < a$ ).

1. Сначала рассмотрим случай, когда  $M < s_K(x)$ .

Из (13) следует обратимость м.ф.  $\beta(z)$ . Таким образом, м.ф.  $\beta(x)M - \alpha(x) = \beta(x)\{M - s_K(x)\}$  обратима. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} p &= \{\gamma(x) - \delta(x)M\}\{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1} \\ &= \{\gamma(x) - \delta(x)M\}\{M - s_K(x)\}^{-1}\beta^{-1}(x). \end{aligned} \tag{25}$$

Покажем, что постоянная пара  $[p, I_m]$  является  $R[a, b]$ -парой.

Очевидно, что условия 1 и 2 определения 5 выполнены. Докажем условие 3', которое для постоянной пары  $[p, I_m]$  имеет вид  $p = p^*$ .

Имеем

$$\begin{aligned} p \pm p^* &= \{\gamma(x) - \delta(x)M\}\{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1} \\ &\pm \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1}\{\gamma^*(x) - M\delta^*(x)\} = \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1} \\ &(\{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}\{\gamma(x) - \delta(x)M\} \pm \{\gamma^*(x) - M\delta^*(x)\}\{\beta(x)M - \alpha(x)\}) \\ &\times \{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1} = \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1}(\{M - s_K^*(x)\}\beta^*(x) \\ &\times \delta(x)\{s_F(x) - M\} \pm \{s_F^*(x) - M\}\delta^*(x)\beta(x)\{M - s_K(x)\}) \\ &\times \{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1}. \end{aligned}$$

Из (19) и равенств  $s_F^*(x) = s_F(x)$ ,  $s_K^*(x) = s_K(x)$  следует

$$\begin{aligned} p \pm p^* &= \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1}(\{M - s_K(x)\}\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1}\{s_F(x) - M\} \\ &\pm \{s_F(x) - M\}\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1}\{M - s_K(x)\})\{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1}. \end{aligned}$$

Из очевидного тождества

$$\begin{aligned} &\{M - s_K(x)\}\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1}\{s_F(x) - M\} \\ &= \{s_F(x) - M\}\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1}\{M - s_K(x)\}. \end{aligned}$$

имеем  $p - p^* = 0_m$ . Таким образом, условие 3' выполнено.

Докажем условие 4', которое для пары  $[p, I_m]$  имеет вид  $p \geq 0$ . Из равенства  $s_F(x) - M = (s_K(x) - M) - (s_K(x) - s_F(x))$ , следует что

$$\begin{aligned} p &= \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1}\{M - s_K(x)\}\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1}\{s_F(x) - M\} \\ &\times \{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1} = \{M\beta^*(x) - \alpha^*(x)\}^{-1}\{s_K(x) - M\} \\ &\times (\{s_K(x) - M\}^{-1} - \{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1})\{s_K(x) - M\}\{\beta(x)M - \alpha(x)\}^{-1}. \end{aligned}$$

Из неравенства  $s_K(x) - M \leq s_K(x) - s_F(x)$ , ( $x < a$ ) и теоремы Лёвнера следует, что  $-(s_K(x) - M)^{-1} \leq -(s_K(x) - s_F(x))^{-1}$ . Имеем  $(s_K(x) - M)^{-1} - (s_K(x) - s_F(x))^{-1} \geq 0$ . Отсюда,  $p \geq 0$ , таким образом, условие 4' - выполнено. По теореме 2,  $[p, I_m]$  является  $R[a, b]$  - парой. По теореме 6, м.ф.

$$s(z) = \{p\beta(z) + \delta(z)\}^{-1}\{p\alpha(z) + \gamma(z)\} \in \mathcal{F}_n.$$

Вычислим значение м.ф.  $s$  в точке  $x$ . Из очевидного тождества  $M = s_K(x) + [M - s_K(x)]$  имеем

$$\begin{aligned} s(x) &= (M - s_K(x))\{\gamma(x) - \delta(x)s_K(x)\}^{-1} \\ &\times \{(\gamma(x) - \delta(x)s_K(x))[M - s_K(x)]^{-1}s_K(x) - \delta(x)s_K(x) + \gamma(x)\} \\ &= (M - s_K(x))\{\gamma(x) - \delta(x)s_K(x)\}^{-1}\{\gamma(x) - \delta(x)s_K(x)\} \\ &\times [(M - s_K(x))^{-1}s_K(x) + 1] \\ &= (M - s_K(x))[(M - s_K(x))^{-1}s_K(x) + 1] = s_K(x) + M - s_K(x) = M. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной матрицы  $s_F(x) \leq M < s_K(x)$  построена м.ф.  $s \in \mathcal{F}_n$  такая, что  $s(x) = M$  при  $x < a$ .

2. Пусть теперь  $s_F(x) \leq M \leq s_K(x)$  и матрица  $\{M - s_K(x)\}$  - необратима. Рассмотрим матрицу

$$M_\varepsilon = M - \varepsilon(M - s_F(x)), \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Отсюда

$$M_\varepsilon - s_F(x) = (1 - \varepsilon)(M - s_F(x)) \geq 0$$

и, с учетом невырожденности интервалов Вейля,

$$\begin{aligned} s_K(x) - M_\varepsilon &= (s_K(x) - M) + \varepsilon(M - s_F(x)) = \varepsilon(s_K(x) - s_F(x)) \\ &+ (1 - \varepsilon)(s_K(x) - M) > 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что  $s_F(x) \leq M_\varepsilon < s_K(x)$ . По доказанному в шаге 1, существует постоянная  $R[a, b]$  - пара  $[p_\varepsilon, I_m]$  такая, что м.ф.

$$s_\varepsilon(z) = \{p_\varepsilon \beta(z) + \delta(z)\}^{-1} \{p_\varepsilon \alpha(z) + \gamma(z)\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{и} \quad s_\varepsilon(x) = M_\varepsilon.$$

Из очевидного неравенства  $M - M_\varepsilon = \varepsilon(M - s_F(x)) \geq 0$  следует, что  $M_\varepsilon \leq M$ . Отсюда

$$0_m < s_\varepsilon(x) \leq M, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

По теореме Вейерштрасса  $s_\varepsilon(x) \rightarrow M$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим м.ф.  $s_{1,\varepsilon}$  и  $s_{2,\varepsilon}$ , построенные по м.ф.  $s_\varepsilon$  по формулам (5). По теореме 1,  $s_{1,\varepsilon}, s_{2,\varepsilon} \in \mathcal{R}$  для всех  $\varepsilon \in (0, 1)$ . В точке интерполяции  $z_1$  семейства  $\{s_{1,\varepsilon}(z_1)\}$  и  $\{s_{2,\varepsilon}(z_1)\}$  ограничены по норме. Следовательно, (см. [7], §2, лемма 3), существует последовательность  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  такая, что равномерно на компактах из  $\mathbb{C}_+$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{1,\varepsilon_k}(z) = s_1(z) \in \mathcal{R}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2,\varepsilon_k}(z) = s_2(z) \in \mathcal{R}.$$

А значит, и существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{\varepsilon_k}(z) = s(z) \in \mathcal{R}$ . По теореме 1,  $s \in R[a, b]$ . Очевидно, что  $s(x) = M$ . Таким образом, построено решение интерполяционной задачи (4), принимающее в точке  $x$  значение  $M$ .

Теорема доказана.

## 5. Предельные интервалы Вейля

Несложно доказать следующую лемму.

**Лемма 3.** Пусть дана квадратная блочная матрица  $H > 0$ . Тогда

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}^{-1} \geq \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим интерполяционную задачу Неванлинны-Пика (3) и порожденные ею  $n$ -ые усеченные задачи (4). Для объектов, связанных с задачей

(3) (соответственно  $n$ -ой усеченной задачей Неванлинны-Пика (4)), будем использовать нижний индекс в круглых скобках  $(\infty)$  и  $(n)$  соответственно.

**Лемма 4. 1.** Для вполне неопределенной задачи (4) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} U_{1,(n)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n)}(z) &> J_{\pi}, \quad \{\operatorname{Re} z < a\} \setminus \{\mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ U_{1,(n)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n)}(z) &< J_{\pi}, \quad \{\operatorname{Re} z > b\} \setminus \{\mathcal{Z}_n \cup \bar{\mathcal{Z}}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (26)$$

2.  $J_{\pi}$  - формы резольвентных матриц монотонны, т.е.

$$\begin{aligned} U_{1,(n+1)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n+1)}(z) - J_{\pi} &\geq U_{1,(n)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n)}(z) - J_{\pi}, \\ z \in \{\operatorname{Re} z < a\} \setminus \{\mathcal{Z}_{n+1} \cup \bar{\mathcal{Z}}_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ U_{1,(n+1)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n+1)}(z) - J_{\pi} &\leq U_{1,(n)}^*(z) J_{\pi} U_{1,(n)}(z) - J_{\pi}, \\ z \in \{\operatorname{Re} z > b\} \setminus \{\mathcal{Z}_{n+1} \cup \bar{\mathcal{Z}}_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Лемма является следствием (11) и леммы 3.

**Лемма 5.** Пусть для семейства м.ф.  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset R[a, b]$  существует вещественная константа  $C > 0$  такая, что в некоторой точке  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  выполняется неравенство  $\|s_k(x_0)\| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Тогда для любого компакта  $K \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$  существует вещественная константа  $C(K) > 0$  такая, что  $\|s_k(z)\| \leq C(K), \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in K$ .

*Доказательство.* Из интегрального представления для класса  $R[a, b]$  (см. [1], [2]) имеем

$$s(z) + s^*(z) \geq 0, \quad \forall z \in \{z : \operatorname{Re} z < a\}. \quad (28)$$

$$s(z) + s^*(z) \leq 0, \quad \forall z \in \{z : \operatorname{Re} z > b\}. \quad (29)$$

Не теряя общности рассуждений, будем считать, что  $x_0 < a$ . Пусть  $\lambda = \tau(z) = \frac{i(z-a)}{x_0-a}$  - дробно-линейное преобразование, осуществляющее взаимно-однозначное соответствие  $\{z : \operatorname{Re} z < a\} \leftrightarrow \mathbb{C}_+$  такое, что  $\tau(x_0) = i$ . Из (28) следует, что  $F_k(\lambda) = i s_k(\tau^{-1}(\lambda)) \in \mathcal{R}$  и эти функции ограничены по норме в точке  $i$ . Но тогда (см. [7], §2, лемма 3) семейство функций  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничено на компактах, содержащихся в  $\mathbb{C}_+$ . Отсюда и из определения функций  $F_k$  следует, что семейство функций  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничено на компактах из  $\{z : \operatorname{Re} z < a\}$ .

Пусть  $z_+$  - произвольную точку из  $\mathbb{C}_+ \cap \{z : \operatorname{Re} z < a\}$ . По доказанному выше, семейство  $\{s_k(z_+)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ограничено по норме. Следовательно, (см. [7], §2, лемма 3), семейство неванлинновских функций  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничено на компактах из  $\mathbb{C}_+$ . Из принципа симметрии следует равномерная ограниченность на компактах из  $\mathbb{C}_-$ .

Выберем, далее, произвольную точку  $z_b \in \{\mathbb{C}_+ \cap \{z : \operatorname{Re} z > b\}\}$ . По доказанному выше, семейство  $\{s_k(z_b)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ограничено по норме. Пусть  $\lambda = \tau(z) = \frac{i(z-b)}{z_b-b}$  - дробно-линейное преобразование, осуществляющее взаимно-однозначное соответствие  $\{z : \operatorname{Re} z > b\} \leftrightarrow \mathbb{C}_+$  такое, что  $\tau(z_b) = i$ . Из (29) следует, что  $F_k(\lambda) = -i s_k(\tau^{-1}(\lambda)) \in \mathcal{R}$  и эти функции ограничены по норме в

точке  $z$ . Но тогда (см. [7], §2, лемма 3) семейство функций  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничено на компактах из  $\{z : \operatorname{Re} z > b\}$ .

Семейство функций  $\{s_k(z), z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничено на компактах из  $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-, \{z : \operatorname{Re} z < a\}$  и  $\{z : \operatorname{Re} z > b\}$ . Поэтому оно равномерно ограничено и на компактах, содержащихся в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ . Лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть семейство м.ф.  $\{s_{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset R[a, b]$  таково, что существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{(n)}(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ .

Тогда существуют равномерные на компактах из  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  пределы

$$s_{(\infty)}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{(n)}(z) \text{ и } s_{(\infty)} \in R[a, b].$$

*Доказательство.* Пусть  $K$  – произвольный компакт из  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ . Обозначим через  $\Omega$  односвязную открытую область с гладкой границей такую, что

а)  $K \subset \Omega$ .

б) Замыкание  $\Omega$  является компактом в  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ .

в) Область  $\Omega$  содержит некоторый интервал  $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Для всех  $x \in (x_1, x_2)$  семейство  $\{s_{(n)}\}_{n=1}^\infty$  сходится, а значит ограничено по норме. По лемме 5 семейство м.ф. равномерно ограничено в замыкании области  $\Omega$ . Применяя теорему Витали к семейству м.ф.  $\{s_{(n)}\}_{n=1}^\infty$ , получим равномерную сходимость на произвольном компакте  $K$ . Ясно, что предельная м.ф.  $s_{(\infty)} \in R[a, b]$ . Лемма доказана.

**Теорема 10.** Пусть дана интерполяционная задача (3). Тогда

1. Существуют равномерные на компактах  $K \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$  пределы

$$s_{K,(\infty)}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{K,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty, \quad s_{F,(\infty)}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{F,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty. \quad (30)$$

2. Для всех  $s \in \mathcal{F}_\infty$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0_m < s_{F,(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_{K,(\infty)}(x), \quad x < a, \\ s_{K,(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_{F,(\infty)}(x) < 0_m, \quad x > b. \end{aligned} \quad (31)$$

*Доказательство.* Докажем для  $x \in (-\infty; a)$ .

1. Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что  $\mathcal{F}_{n+k} \subset \mathcal{F}_n, \forall n, k \in \mathbb{N}$ . Отсюда и из (23) получим, что для всех  $x < a$

$$s_{F,(n)}(x) \leq s_{F,(n+k)}(x) \leq s_{K,(j)}(x), \quad \forall n, k, j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в каждой точке  $x < a$  семейство м.ф.  $\{s_{F,(n)}(x)\}_{n=1}^\infty$  монотонно возрастает и ограничено сверху матрицей  $s_{K,(j)}(x)$ . По теореме Вейерштрасса, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F,(n)}(x), \forall x < a$ . По лемме 6 отсюда следует существование первого из пределов в (30). Аналогично доказывается существование второго предела в (30).

Зафиксируем  $n_0, k \in \mathbb{N}$ . М.ф.  $s_{F,(n_0+k)} \in \mathcal{F}_{n_0}$  и, следовательно, выполнена система ОМН В.П. Потапова ( $r = 1, 2, \forall k \in \mathbb{N}$ )

$$\left[ s_{F,r,(n_0+k)}(z), I_m \right] \frac{U_{r,(n_0)}^{-1}(z) J U_{r,(n_0)}^{-1*}(z)}{z(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} s_{F,r,(n_0+k)}^*(z) \\ I_m \end{bmatrix} \geq 0_m.$$

Перейдя в к пределу  $k \rightarrow \infty$ , получим  $s_{F,(\infty)} \in \mathcal{F}_{n_0}$  (теорема 4). В силу произвольности  $n_0$  отсюда следует, что  $s_{F,(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$ . Утверждение относительно  $s_{K,(\infty)}$  доказывается аналогичным образом.

2. Пусть задана некоторая м.ф.  $s \in \mathcal{F}_\infty$ . По определению  $s \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . По теореме 9 имеют место неравенства  $0_m < s_{F,(n)}(x) \leq s(x) \leq s_{K,(n)}(x)$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим (31). При этом первое из неравенств остается строгим и после предельного перехода в силу монотонного возрастания по  $n$  семейства м.ф.  $s_{F,(n)}(x), x < a$ . Теорема доказана.

**Определение 9.** Матричный интервал

$$\mathcal{I}_\infty(x) = \begin{cases} [s_{F,(\infty)}(x), s_{K,(\infty)}(x)], & x < a, \\ [s_{K,(\infty)}(x), s_{F,(\infty)}(x)], & x > b. \end{cases}$$

называется *интервалом Вейля задачи (3)* в точке  $x$ .

**Теорема 11.** Пусть дана интерполяционная задача Неванлинны-Пика (4). И пусть, далее,  $\mathcal{I}_\infty(x)$  обозначает ассоциированный с задачей (4) интервал Вейля в точке  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ .

Тогда предельный интервал Вейля полностью заполняется значениями всех решений интерполяционной задачи (4) в точке  $x$ , т.е.

$$\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} = \mathcal{I}_\infty(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

*Доказательство.* Включение  $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} \subset \mathcal{I}_\infty(x)$  следует из (31). Докажем обратное включение  $\mathcal{I}_\infty(x) \subset \{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\}$ . Пусть  $M \in \mathbb{C}_n^{m \times m}$  такова, что  $s_{F,(\infty)}(x) \leq M \leq s_{K,(\infty)}(x)$ . Тогда для всех  $n \in \mathbb{N}$   $s_{F,(n)}(x) \leq M \leq s_{K,(n)}(x)$ . По теореме 9 для всех  $n \in \mathbb{N}$  существует м.ф.  $s_{(n)} \in \mathcal{F}_n$  такая, что  $s_{(n)}(x) = M$ . По лемме 6, последовательность  $\{s_{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  равномерно ограничена на компактах из  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ . Следовательно, существует подпоследовательность  $\{s_{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  равномерно сходящаяся на компактах из  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ . Обозначим  $s(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{(n_k)}(z), z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ . Очевидно, что  $s \in \mathcal{F}_\infty$  и  $s(x) = M$ . Теорема доказана.

## 6. Критерий неопределенности интерполяционной задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции

Обозначим  $\Pi_a = \{\operatorname{Re} z < a\} \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \bar{\mathcal{Z}}_\infty\}$  и  $\Pi_b = \{\operatorname{Re} z > b\} \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \bar{\mathcal{Z}}_\infty\}$ .

**Лемма 7.** Пусть дана интерполяционная задача Неванлинны-Пика (3). И пусть существует  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , для которой  $\mathcal{I}_\infty(x_0)$  - невырожден. Тогда для всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  соответствующие интервалы Вейля,  $\mathcal{I}_\infty(x)$  являются невырожденными матричными интервалами.

*Доказательство.* По лемме 4 для  $z \in \Pi_a$   $J_\pi$  - формы резольвентных матриц монотонно возрастают и являются  $J_\pi$ -растягивающими для всех  $n \in \mathbb{N}$  и - монотонно убывают и являются  $J_\pi$ -сжимающими для всех для  $z \in \Pi_b$ .

По теореме Вейерштрасса существует предел  $z \in \Pi_a \cup \Pi_b$

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} [U_{1,(n)}^*(z) J_\pi U_{1,(n)}(z) - J_\pi]^{-1},$$

и по теореме С.А. Орлова ([8]), для всех  $z_1, z_2 \in \Pi_a$  и  $z_3, z_4 \in \Pi_b$

$$\text{rank } \Gamma(z_1) = \text{rank } \Gamma(z_2), \quad \text{rank } \Gamma(z_3) = \text{rank } \Gamma(z_4). \quad (32)$$

Из (23) следует, что  $s_{F,(n)}(x) > 0_m, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (-\infty; a)$ . Отсюда и из (21) имеем

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ -s_{F,(\infty)}(x) & I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_{F,(\infty)}^{-1}(x) & 0_m \\ 0_m & s_{K,(\infty)}(x) - s_{F,(\infty)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -s_{F,(\infty)}(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}.$$

Т.к.  $s_{F,(\infty)}(x) > 0$ , то  $\text{rank } \Gamma(x) = \text{rank} [s_{K,(\infty)}(x) - s_{F,(\infty)}(x)] + \text{rank } s_{F,(\infty)}(x) = \text{rank} [s_{K,(\infty)}(x) - s_{F,(\infty)}(x)] + m$ .

Тогда для всех  $x_1, x_2 \in (-\infty; a)$  имеет место равенство

$$\text{rank} \{s_{K,(\infty)}(x_1) - s_{F,(\infty)}(x_1)\} = \text{rank} \{s_{K,(\infty)}(x_2) - s_{F,(\infty)}(x_2)\}.$$

Аналогично доказывается утверждение для  $x \in (b; \infty)$ .

Пусть существует  $x_0 \in (-\infty; a)$ , для которой  $\mathcal{I}_\infty(x_0)$  - невырожден. Отсюда,  $\det (s_F(x) - s_K(x)) \neq 0$  для всех  $x \in (-\infty; a)$ . Продолжая по аналитичности, имеем  $\det (s_F(z) - s_K(z)) \neq 0, z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{Z}_\infty$ . Отсюда для всех  $x \in (b; \infty)$  интервал Вейля  $\mathcal{I}_\infty(x)$  - невырожден. Лемма доказана.

**Определение 10.** Предельная интерполяционная задача (3) называется вполне неопределенной, если все предельные интервалы Вейля

$$\mathcal{I}_\infty(x) = \begin{cases} [s_{F,(\infty)}(x), s_{K,(\infty)}(x)], & x < a, \\ [s_{K,(\infty)}(x), s_{F,(\infty)}(x)], & x > b \end{cases}$$

являются невырожденными матричными интервалами.

Из этого определения и леммы 7 непосредственно вытекает

**Теорема 12.** Для того, чтобы предельная интерполяционная задача (3) была вполне неопределенной, необходимо, чтобы при всех  $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  предельные интервалы Вейля были невырождены и достаточно, чтобы хотя бы для одного  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$  был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. -М.: Наука, 1973.
2. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. Интерполяционная задача в классе  $\mathcal{R}[a, b]$  // Укр. мат. журн.-2003.-**55**.-N 8.-С. 1044-1057. English transl. Ukrainian Mathematical Journal.-2003.- **55**.-N 8.-P.1265-1282.
3. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц // Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев: Наукова думка, 1979. С.75-97.
4. Dym Н. On Hermitian Block Hankel Matrices, Matrix Polynomials, the Hamburger Moment Problem, Interpolation and Maximum Entropy // Integral Equations and Operator Theory.-1989.-**12**.-P.757-812.
5. Дюкарев Ю.М. О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стильтеса // Мат. заметки. - 2004. **75**. №1. С.71-88.
6. Дюкарев Ю.М. О неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтеса // Математический сборник.-2005.-**196**.-N3.-С. 61-88.
7. Donoghue W.F. Monotone matrix functions and analytic continuation Berlin-N.Y.: Springer-Verlag (1974).
8. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1976. **40**. N3. С.593-644.

## Глобальный аттрактор сингулярно возмущенной системы Захарова

А.С. Щербина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В данной работе рассматривается регуляризация системы Захарова на основе сингулярного возмущения оператора Лапласа бигармоническим оператором с малым коэффициентом. Основным результатом является доказательство сходимости аттракторов сингулярно возмущенных систем к аттрактору двумерной системы Захарова.

2000 *Mathematics Subject Classification* 35Q55, 35B40.

### Введение

Следующая система

$$\begin{cases} n_{tt} - \Delta(n + |E|^2) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ iE_t + \Delta E - nE = 0, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

была предложена Захаровым [14] для описания распространения волн Лэнгмюра в плазме. Здесь  $n(x, t)$  и  $E(x, t)$  – действительная и комплекснозначная функции действительных аргументов соответственно. Существование локальных по времени решений исследовалось во многих работах (более подробно см. [4] и указанные там ссылки).

В этой работе нас интересует диссипативный вариант задачи (1)

$$\begin{cases} n_{tt} - \Delta(n + |E|^2) + \alpha n_t + \beta n = f(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ iE_t + \Delta E - nE + i\gamma E = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – неотрицательные параметры, а внешние силы  $f(x)$  и  $g(x)$  являются известными (действительной и комплекснозначной) функциями соответственно. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – или гладкая ограниченная область или прямоугольник  $(0, l_1) \times (0, l_2)$ . Мы будем рассматривать (2) как с граничными условиями Дирихле

$$n(x, t) = 0, \quad E(x, t) = 0 \quad \text{для } x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3)$$

так (в случае прямоугольной области  $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ ),  $(l_1, l_2)$ -периодические граничные условия:

$$n(x, t) \text{ и } E(x, t) \text{ } (l_1, l_2)\text{-периодичны на } \mathbb{R}^2, t > 0. \quad (4)$$

Существование глобального аттрактора для одномерного случая системы (2) было доказано в [5] для граничных условий Дирихле. После этого в [12] было показано, что в случае периодических граничных условий, аттрактор состоит из аналитических функций пространственной переменной.

Вопрос существования глобального решения и компактного глобального аттрактора для системы (2) в некотором подмножестве фазового пространства  $L^2 \times H^1 \times H^2$  с различными граничными условиями был исследован в работе [3]. Причем существование аттрактора было установлено при довольно жестких условиях на параметры задачи. В связи с этим представляет интерес вопрос о существовании регуляризаций задачи (2) таких, что (а) семейство регуляризованных задач порождает динамическую систему во всем фазовом пространстве, (б) аттракторы регуляризованных задач стремятся к аттрактору задачи (2) в тех случаях, когда последний существует.

Целью данной работы является построение указанной регуляризации на основе сингулярного возмущения оператора Лапласа с помощью бигармонического оператора с малым коэффициентом.

Пусть  $A = -\Delta$  в случае (3) и  $A = \beta I - \Delta$  в случае периодических граничных условий. Более того, мы будем считать, что в случае граничных условий Дирихле  $\beta = 0$ , а в случае периодических граничных условий  $\beta > 0$ . Рассмотрим сингулярно возмущенный вариант системы Захарова

$$\begin{cases} n_{tt} + \alpha n_t + \mu A^2 n + A(n + |E|^2) - \beta |E|^2 = f(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ iE_t - AE - nE + i\gamma E = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\mu > 0$ . Мы будем рассматривать эту систему как с граничными условиями

$$n(x, t) = 0, \quad \Delta n(x, t) = 0, \quad E(x, t) = 0 \quad \text{для } x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (6)$$

так и с условиями (4). Данная система является частным случаем задачи Шредингера-Буссинеска

$$\begin{cases} n_{tt} - \Delta(n + |E|^2) + \alpha n_t + \beta n + \mu \Delta^2 n - \Delta h(n) = f(x) \\ iE_t + \Delta E - nE + i\gamma E = g(x) \end{cases} \quad (7)$$

с  $h \equiv 0$ . Одномерный случай этой задачи (с некоторыми условиями на  $h$ ) был рассмотрен в [6, 7]. Авторами было доказано, что система (7) с граничными условиями (6) порождает динамическую систему, которая обладает компактным глобальным аттрактором в  $L^2 \times H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1 \cap H^2$ . Для большей размерности существование аттрактора доказано только в случае сильной диссипации, то есть в случае, когда слагаемое  $\alpha n_t$  из первого уравнения (7) заменяется на  $-\alpha \Delta n_t$  (более подробно см. [9]).

Основным результатом данной работы является доказательство близости глобального аттрактора сингулярно возмущенной системы (5) к аттрактору задачи (2) в случае, когда  $\mu \rightarrow 0$ . Для доказательства этого факта нам понадобятся равномерные по  $\mu \in [0, \mu_0]$  оценки. Для их получения используются методы, развитые в [3].

## 1 Предварительные сведения

Очевидно, что как в случае граничных условий Дирихле, так и в случае периодических граничных условий  $A$  — положительно определенный самосопряженный

оператор на  $L_2(\Omega)$  и обладает компактной резольвентой. Более того, существует ортонормированный базис  $\{e_k\}$  состоящий из собственных функций оператора  $A$ :

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

Для  $s \in [-2, 2]$  мы определим пространство Соболева  $\mathcal{H}_s$  как  $\mathcal{H}_s = D(A^{s/2})$  с нормой, которую мы будем обозначать  $\|\cdot\|_s \equiv \|A^{s/2} \cdot\|$  при  $0 \leq s \leq 2$  и  $\mathcal{H}_s = [\mathcal{H}_{-s}]'$  - пополнение  $\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} = L_2(\Omega)$  относительно  $\|\cdot\|_s \equiv \|A^{s/2} \cdot\|$  при  $-2 \leq s < 0$ . Эти нормы являются эквивалентными стандартным нормам в  $H_s(\Omega)$  (подробнее см. [10]). Будем обозначать скалярное произведение в  $\mathcal{H}_s$  как  $(\cdot, \cdot)_s$ , а при  $s = 0$  мы будем опускать индекс 0. Заметим, что мы работаем как с действительной так и с комплексной версией пространств  $\mathcal{H}_s$ . Будем писать  $\mathcal{H}_s$  в действительном случае и  $\overline{\mathcal{H}}_s$  - в комплексном. Аналогично мы будем поступать с нормами и скалярными произведениями.

Эти обозначения позволяют переписать задачу (2) в операторном виде (независимо от граничных условий):

$$\begin{cases} n_{tt} + \alpha n_t + A(n + |E|^2) - \beta |E|^2 = f(x), \\ iE_t - AE - nE + i\gamma E = g(x). \end{cases} \quad (8)$$

Дополним системы (5) и (8) начальными условиями

$$n_t|_{t=0} = n_0, \quad n|_{t=0} = n_1, \quad E|_{t=0} = E_0. \quad (9)$$

Как и в [3] решение (8) (соответственно (5)) будем понимать в смысле следующего определения:

**Определение 1.** Будем говорить, что пара  $(n; E)$  является полусильным решением (8) (соотв. (5)) на интервале  $[0, T]$  если

$$(n_t; n; E) \in L_\infty([0, T]; \mathcal{E}(\text{соотв. } \mathcal{F})), \quad \mathcal{E} \equiv \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_1 \times \overline{\mathcal{H}}_2, \quad \mathcal{F} \equiv \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_2 \times \overline{\mathcal{H}}_2, \quad (10)$$

- и
- 1) уравнения (8) (соотв. (5)) выполнены в смысле обобщенных функций,
- 2)  $(n_t; n; E)$  удовлетворяют начальным условиям (9).

При получении необходимых априорных оценок мы будем использовать без доказательства (см. [3] и указанные там ссылки) следующий частный случай известной оценки для  $L_4$  нормы:

**Лемма 1** Для произвольной  $u \in \mathcal{H}_1$  выполнено неравенство:

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^2 \leq \sqrt{c_0(\Omega)} \|u\| \cdot \|u\|_1. \quad (11)$$

В случае граничных условий Дирихле  $c_0(\Omega) = 2$ .

Воспользуемся без доказательства результатом [3, Теоремы 2] о существовании аттрактора для системы (2).

**Теорема.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$  и  $\lambda_1 > 0$  - наименьшее собственное значение оператора  $A$ ,  $\kappa = \frac{1}{4} \min\{\lambda_1, 8\gamma_0, 2\}$ . Пусть

$$B_r = \{U \equiv (n_1; n_0; E_0) \in L_2 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 : \|E_0\| < r\} \subset L_2 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, \quad (12)$$

где  $\gamma^{-1} \|g\| \leq r < r_\Omega = \sqrt{2/c_0(\Omega)}$ . Тогда существуют константы  $b_1$  и  $b_2$ , зависящие только от  $r$ , такие, что при выполнении условий

$$\alpha^2 \geq \max\{1, \kappa\}, \quad \|g\|^2 \leq b_1 \kappa \alpha^{-1} \gamma \quad (13)$$

и

$$d_{\Omega}^2 \cdot \left[ \left(1 + \frac{\gamma\alpha}{\kappa}\right) \|g\| + \frac{\|f\|^2}{2\lambda_1\kappa} \left(1 + \frac{1}{2\lambda_1}\right) \right] \leq b_2\alpha\gamma. \quad (14)$$

динамическая система  $(B_r, S_t)$ , порожденная (2), обладает компактным глобальным аттрактором  $A$ .

Напомним, что под динамической системой понимается пара  $(X, S(t))$ , состоящая из метрического пространства  $X$  (фазового пространства) и непрерывного эволюционного оператора  $S(t) : X \rightarrow X$ , для которого выполняются полугрупповые соотношения

$$S(0) = I, \quad S(t)S(s) = S(t+s), \quad t, s \geq 0. \quad (15)$$

Пусть задача Коши

$$\dot{u}(t) = f(u), \quad u(0) = u_0 \quad (16)$$

имеет единственное решение на некотором положительно инвариантном множестве  $A$  (если  $u_0 \in A$ , то для любого положительного  $t$  выполнено  $u(t, u_0) \in A$ , где  $u(t, u_0)$  — решение (16) в момент времени  $t$ ) и отображение  $u_0 \rightarrow u(t, u_0)$  непрерывно. Тогда дифференциальное уравнение (16) определяет динамическую систему  $(A, S_t)$ , где  $S_t u_0 = u(t, u_0)$ . Данная система называется диссипативной, если существует ограниченное поглощающее множество. То есть такое  $B$ , что для любого  $V \subset A$  найдется  $t_0(B)$  такое, что  $S_t B \subset V$  для всех  $t \geq t_0(B)$ .

Основным результатом о существовании решения задачи (5) и диссипативности является следующая

**Теорема 1** Пусть  $(n_1, n_0, E_0) \in \mathcal{F} \equiv \mathcal{H} \times \mathcal{H}_2 \times \overline{\mathcal{H}}_2$  и  $(f, g) \in \mathcal{H} \times \overline{\mathcal{H}}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\mu > 0$ . Тогда задача (5) с начальными условиями (9) имеет единственное полусильное решение на  $[0, T]$ , где  $T > 0$  — произвольное число. Более того, система (5) порождает непрерывную динамическую систему  $(\mathcal{F}, S_t)$ , которая в случае достаточно большого  $\gamma$  является диссипативной.

Заметим, что в отличие от системы Захарова (2), нам удалось доказать глобальную разрешимость системы (5) во всем пространстве при любых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Это связано с тем, что в возмущенной системе при априорных оценках мы можем использовать норму большего порядка для функции  $n$ . Теми же причинами обусловлена диссипативность динамической системы  $(\mathcal{F}, S_t)$ .

Следующее утверждение дает достаточные условия, при которых динамическая система  $(\mathcal{F}, S_t)$  обладает компактным глобальным аттрактором.

**Теорема 2** Пусть  $\delta = \min\{\alpha/5, \lambda_1/(2\alpha)\}$ ,  $\theta = \min\{\delta/2, 2\gamma\}$  и  $\mu > 0$ . Тогда существуют такие константы  $d_{\Omega}$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  такие, что если

$$d_{\Omega}^2 \cdot \left[ 4\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right) \|g\|^2 + \frac{\|f\|_{-1}^2}{\alpha\theta} + \frac{\|g\|^6}{2\gamma^7} \left( \frac{\beta^2\kappa_1^2}{\mu} + \frac{4\gamma^2\kappa_2^2}{3\delta} \right)^2 + \frac{16\kappa_1^4}{9\gamma^6\mu^2} \|g\|^6 \right] \leq \gamma\delta, \quad (17)$$

то

- динамическая система  $(\mathcal{F}, S_t)$  обладает компактным глобальным аттрактором  $A_{\mu}$ ;
- для любого положительного  $r$  множество  $B_r^* = B_r \cap \mathcal{F}$ , где  $B_r$  определено в (12), является положительно инвариантным, а сужение  $(B_r^*, S_t)$  динамической системы  $(\mathcal{F}, S_t)$  на  $B_r^*$  обладает компактным глобальным аттрактором  $A_{\mu}^r$ , который совпадает с  $A_{\mu}$  при  $r \geq \|g\|/\gamma$ .

Утверждение о существовании аттрактора в Теореме 2 относится к случаю всего пространства  $\mathcal{F}$  или множества  $B_r^* = B_r \cap \mathcal{F}$  при произвольных  $r$ . Если же потребовать  $r < r_\Omega$ , то утверждение о существовании аттрактора можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 3** Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда динамическая система  $(B_r^*, S_t)$  обладает компактным глобальным аттрактором. Более того, для траекторий, лежащих в аттракторе, имеет место следующая, равномерная по  $\mu$  оценка:

$$\|n_t(t)\|^2 + \|n(t)\|_1^2 + \mu\|n(t)\|_2^2 + 2\|E(t)\|_2^2 \leq C_r, \quad (18)$$

где  $C_r$  не зависит от  $\mu$ .

Следствием Теоремы 3 является основной результат данной работы о близости аттракторов  $A$  и  $A_\mu$ .

**Теорема 4** Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0} \{\text{dist}_\sigma(y, A) : y \in A_\mu\} = 0, \quad (19)$$

где  $A$  – компактный глобальный аттрактор задачи (2), а  $\text{dist}_\sigma(y, A)$  – расстояние от элемента  $y$  до множества  $A$  в пространстве  $\mathcal{H}_{-\sigma} \times \mathcal{H}_{1-\sigma} \times \overline{\mathcal{H}}_{2-\sigma}$  для произвольного  $\sigma > 0$ .

## 2 Доказательство Теоремы 1

Доказательство этой теоремы основано на методе компактности.

Пусть  $m = n_t + \delta n$ , где  $\delta$  – положительный параметр, который будет определен позднее. Рассмотрим аппроксимации по Галеркину системы (5)

$$\begin{cases} m^N = n_t^N + \delta n^N, \\ m_t^N + A n^N + A P_N |E^N|^2 + \mu A^2 n^N \\ \quad = -(\alpha - \delta) m^N + \delta(\alpha - \delta) n + \beta P_N |E|^2 + P_N f, \\ i E_t^N - A E^N - P_N (n^N E^N) + i \gamma E^N = P_N g, \end{cases} \quad (20)$$

где  $P_N$  – ортопроектор на  $\text{Span}\{e_k : k = 1, 2, \dots, N\}$ , а  $\{e_k\}$  – собственные функции оператора  $A$ . В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы не будем писать индекс  $N$ .

Умножим третье уравнение системы (20) на  $2\overline{E}$  и проинтегрируем мнимую часть результата по  $\Omega$ . Т. к.  $P_N$  – самосопряженный оператор, то

$$\frac{d}{dt} \|E\|^2 + 2\gamma \|E\|^2 = 2\Im(g, E) \leq 2\|E\| \|g\| \leq \gamma \|E\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|g\|^2.$$

Следовательно,

$$\|E(t)\|^2 \leq e^{-\gamma t} \|E_0\|^2 + \frac{\|g\|^2}{\gamma^2}.$$

Таким образом, первая априорная оценка имеет вид

$$\|E(t)\| \leq e^{-\gamma t/2} \|E_0\| + \frac{\|g\|}{\gamma}. \quad (21)$$

Умножим второе уравнение системы (20) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $2A^{-1}m$ , а третье — на  $4\bar{E}_t + 4\gamma\bar{E}$ . Предполагая, что  $\delta = \min\{\alpha/5, \lambda_1/(2\alpha)\}$  (более подробно см. [12]), нетрудно убедиться, что действительная часть суммы результатов будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(n(t), m(t), E(t)) + \theta V(n(t), m(t), E(t)) + \frac{\delta}{2}\|m\|_{-1}^2 + \frac{\delta}{2}\|n\|^2 \\ + \frac{3\delta\mu}{2}\|n\|_1^2 + 2\gamma\|E\|_1^2 \leq G(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\theta = \min\{\delta/2, 2\gamma\}$  и

$$V(n, m, E) = \|m\|_{-1}^2 + \|n\|^2 + \mu\|n\|_1^2 + 2\|E\|_1^2 + 4\Re(g, E) + 2(n, |E|^2) \quad (23)$$

и

$$G(t) = \frac{1}{\alpha}\|f\|_{-1}^2 + 2\beta(m, |E|^2)_{-1} - 2(2\gamma - \theta)(n, |E|^2) - 4(\gamma - \theta)\Re(g, E). \quad (24)$$

Для получения второй априорной оценки мы оценим слагаемое  $2(n, |E|^2)$  из (23) и (24). Учитывая вложения  $L_{4/3}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega)$  и  $H^{1/2}(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ , неравенство Гельдера для  $p = 3$  и  $q = 3/2$ , а также интерполяционное неравенство Соболева, мы получим, что

$$\begin{aligned} (n, |E|^2) &\leq \|n\|_{\frac{1}{2}}\|E \cdot \bar{E}\|_{-\frac{1}{2}} \leq C\|n\|_{\frac{1}{2}}\|E \cdot \bar{E}\|_{L_{4/3}(\Omega)} \\ &\leq C\|n\|_{\frac{1}{2}}\|E\|_{L_4}\|E\| \leq \kappa_1\|n\|_1\|E\|_1^{1/2}\|E\|^{3/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Принимая во внимание неравенство

$$(m, |E|^2)_{-1} \leq \|E\|\|A^{-1}m\|_{L_4}\|E\|_{L_4} \leq \kappa_2\|m\|_{-1}\|E\|_1^{1/2}\|E\|^{3/2}$$

и (25), нетрудно убедиться, что

$$G(t) \leq R_1^* + p(\|E_0\|e^{-\gamma t/2}) + \frac{\delta}{2}\|m\|_{-1}^2 + \frac{\delta}{2}\|n\|^2 + \frac{3\delta\mu}{2}\|n\|_1^2 + 2\gamma\|E\|_1^2,$$

где

$$R_1^* = \frac{\|f\|_{-1}^2}{\alpha} + 4\|g\|^2 + \frac{\|g\|^6}{2\gamma^7} \left( \frac{\beta^2\kappa_1^2}{\mu} + \frac{4\gamma^2\kappa_2^2}{3\delta} \right)^2, \quad (26)$$

а  $p(x)$  — некоторый полином шестой степени такой, что  $p(0) = 0$ . Таким образом, из (22) следует, что

$$V(n(t), m(t), E(t)) \leq R_1^*/\theta + p(\|E_0\|e^{-\gamma t/2}) + V(n_0, m_0, E_0)e^{-\theta t}.$$

А так как из определения  $V(n(t), m(t), E(t))$  и неравенства (25) следует, что

$$V(n(t), m(t), E(t)) \geq \|m\|_{-1}^2 + \|n\|^2 + \frac{\mu}{2}\|n\|_1^2 + \|E\|_1^2 - R_2^* - p_1(\|E_0\|e^{-\gamma t/2}),$$

где

$$R_2^* = \frac{4}{\gamma}\|g\|^2 + \frac{16\kappa_1^4}{9\gamma^6\mu^2}\|g\|^6, \quad (27)$$

а  $p_1(x)$  — некоторый полином шестой степени такой, что  $p_1(0) = 0$ , то мы получим вторую априорную оценку:

$$\begin{aligned} \|m\|_{-1}^2 + \|n\|^2 + \frac{\mu}{2}\|n\|_1^2 + \|E\|_1^2 \\ \leq R_1^*/\theta + R_2^* + V(n_0, m_0, E_0)e^{-\theta t} + (p + p_1)(\|E_0\|e^{-\gamma t/2}). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого ограниченного множества  $B$  выполнено

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ \sup \left\{ \|m(t)\|_{-1}^2 + \|n(t)\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla n(t)\|^2 + \|\nabla E(t)\|^2 : (n_1; n_0; E) \in B \right\} \right] \leq R_*. \quad (28)$$

Теперь мы приступим к доказательству основной априорной оценки, которая позволит доказать существование решения задачи (5) в пространстве  $\mathcal{F}$ .

Умножим скалярно в  $\mathcal{H}_1$  третье уравнение из (20) на  $4(E_t + \gamma E)$  и рассмотрим действительную часть произведения:

$$\frac{d}{dt} (2\|E\|_2^2 + 4\Re(g, E)_1) + 4\gamma\|E\|_2^2 + 4\Re(nE, E_t)_1 = R_1(t), \quad (29)$$

где

$$R_1(t) = -4\gamma\Re(g + nE, AE). \quad (30)$$

После этого, умножив скалярно в  $\mathcal{H}$  второе уравнение из (20) на  $2m$  и воспользовавшись определением  $\delta$ , мы получим:

$$\frac{d}{dt} (\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2) + \delta (\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2) + 2(m, |E|^2)_1 \leq R_2(t), \quad (31)$$

где

$$R_2(t) = \frac{\|f\|^2}{\alpha} + 2\beta(m, |E|^2). \quad (32)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & 2\Re(nE, AE_t) + (m, A|E|^2) \\ &= \frac{d}{dt} \{2\Re(nE, AE) + \|P_N(nE)\|^2\} - R_3(t), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} R_3(t) &= 2\Re(P_N(nE), mE) + 2(m, |\nabla E|^2) + \beta(m, |E|^2) \\ &+ 2\Im(n[g - i\gamma E], AE + P_N(nE)) - \delta(n, |E|^2)_1 \\ &- 2\delta\Re(P_N(nE), nE) - 2\delta(n, |\nabla E|^2) - 2\beta\delta(n, |E|^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть

$$H_0(t) = \|m\|^2 + \|n\|_1^2 + 2\|E\|_2^2 + \mu\|n\|_2^2 \quad (35)$$

и

$$H_1(t) = 4\Re(g, E)_1 + 4\Re(nE, E)_1 + 2\|P_N(nE)\|^2. \quad (36)$$

Сложив (29) с (31) и воспользовавшись (33) мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (H_0(t) + H_1(t)) + \theta (H_0 + H_1(t)) + \frac{\delta}{2} (\|m\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2) + 2\gamma\|E\|_2^2 \\ & \leq R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) + \theta H_1(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Из (28) следует, что  $\|n\|_{L^4} + \|E\|_{L^4} \leq C$ . Поэтому

$$2\|P_N(nE)\|^2 + |(nE, E)_1| \leq 2\|n\|_{L^4}^2 \|E\|_{L^4}^2 + \|n\|_{L^4} \|E\|_{L^4} \|E\|_2 \leq C\|E\|_2 + C. \quad (38)$$

Так как

$$|(g, E)_1| \leq \|g\| \|E\|_2,$$

то мы оценим  $H_1$  как

$$|H_1(t)| \leq C\|E\|_2 + C. \quad (39)$$

Аналогично доказывается, что

$$|R_i(t)| \leq C\|E\|_2 + C\|m\| + C, \quad i = 1, 2. \quad (40)$$

Теперь мы оценим  $R_3(t)$ . Из (28) следует, что

$$|(P_N(nE), mE)| \leq C\|m\|\|E\|_{L^4}\|n\|_{L^8}\|E\|_{L^8} \leq C\|m\|. \quad (41)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} |(n[g - i\gamma E], AE + P_N(nE))| + |(m, |E|^2)| + |(n, |E|^2)_1| + |(P_N(nE), nE)| \\ + |(n, |\nabla E|^2)| + |(n, |E|^2) \leq C\|E\|_2 + C\|m\| + C\|n\|_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Из Леммы 1 следует, что найдутся константы  $d_\Omega$  и  $C_\Omega$  такие, что

$$\|E_{x_1}\|_{L^4}^2 + \|E_{x_2}\|_{L^4}^2 \leq d_\Omega\|E\|_1 \cdot \|E\|_2 + C_\Omega\|E\|_1^2.$$

Так как

$$2(m, |\nabla E|^2) = 2(m, |E_{x_1}|^2 + |E_{x_2}|^2) \leq 2\|m\| (\|E_{x_1}\|_{L^4}^2 + \|E_{x_2}\|_{L^4}^2),$$

то из (41), (42) и (28) мы получили

$$|R_3(t)| \leq 2d_\Omega\sqrt{R^*}(1 + \eta)\|m\|\|E\|_2 + C\|E\|_2 + C\|m\| + C\|n\|_2, \quad (43)$$

для произвольного  $\eta > 0$ . Поэтому из (39), (40) и (43) следует, что

$$|R_1(t)| + |R_2(t)| + |R_3(t)| + \theta|H_1(t)| \leq C_1H_0(t) + C_2$$

и

$$H_0(t) \leq C_1 \int_0^t H_0(\tau) d\tau + C_2, \quad t \in [0, T].$$

С помощью леммы Гронуолла мы получим

$$\|m\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2 + 2\|E\|_2^2 \leq C, \quad t \in [0, T]. \quad (44)$$

Это неравенство и (21) позволяют нам перейти к пределу  $N \rightarrow \infty$  и дают существование полусильного решения на  $[0, T]$ .

Более того из (37), (39)-(42) и (43), следует, что если выполнено условие (17), то найдутся такие  $\eta > 0$  и  $\omega > 0$  что

$$\frac{d}{dt}(H_0(t) + H_1(t)) + \omega(H_0(t) + H_1(t)) \leq C. \quad (45)$$

Воспользовавшись этим неравенством и леммой Гронуолла мы очевидным образом получим диссипативность динамической системы  $(\mathcal{F}, S_t)$ .

## Доказательство единственности решения

Докажем, что система (5) не может иметь более одного полусильного решения на интервале  $[0, T]$  в пространстве  $L_\infty(0, T; \mathcal{F})$ . Предположим противное. Пусть  $(n_t^{(i)}, n^{(i)}, E^{(i)})$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — два различных решения (5) и  $E = E^{(1)} - E^{(2)}$ ,  $n = n^{(1)} - n^{(2)}$ . Тогда пара  $(n, E)$  является решением системы

$$\begin{cases} n_{tt} + \alpha n_t + An + \mu A^2 n + A(E^{(1)}\overline{E} + \overline{E^{(2)}}E) = \beta(E^{(1)}\overline{E} + \overline{E^{(2)}}E) \\ iE_t + AE + i\gamma E - (n^{(1)}E + nE^{(2)}) = 0. \end{cases} \quad (46)$$

с нулевыми начальными условиями. Так как  $(n_t^{(i)}, n^{(i)}, E^{(i)})$  из  $L_\infty(0, T; \mathcal{F})$ , то и  $(n_t, n, E)$  принадлежит этому классу. Учитывая, что для всех  $u \in \mathcal{H}_2$  и  $u \in \overline{\mathcal{H}}_2$  выполнено  $\|u\|_{L_\infty} \leq C\|u\|_2$ , то из второго уравнения в (46) мы получим, что существует такая константа  $C_1$ , что

$$\|E\|_2 \leq C_2 (\|n\| + \|E\| + \|E_t\|). \quad (47)$$

Продифференцировав второе уравнение по  $t$  мы найдем, что

$$iE_{tt} + AE_t + i\gamma E_t = n_t^{(1)}E + n_tE^{(2)} + n^{(1)}E_t + nE_t^{(2)}.$$

Так как правая часть этого равенства из  $L_2$ , то и левая часть принадлежит  $L_2$ . Следовательно, если мы умножим это равенство на  $E_t$  и проинтегрируем мнимую часть результата по  $\Omega$  и воспользуемся (47), то мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|E_t\|^2 &\leq 2\|E_t\| \left( \|E\|_{L_\infty} \|n_t^{(1)}\| + \|E^{(2)}\|_{L_\infty} \|n_t\| + \|n\|_{L_\infty} \|E_t^{(2)}\| \right) \\ &\leq C (\|E_t\|^2 + \|n_t\|^2 + \|E\|^2 + \|n\|^2 + \|n\|_2^2). \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь мы умножим первое уравнение из (46) в  $\mathcal{H}$  скалярно на  $n_t$  и воспользуемся (47) и тем, что  $\mathcal{H}_2$  — алгебра:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2) &\leq 2\|n_t\| \left\| \left( E^{(1)}\overline{E} + \overline{E^{(2)}}E \right) \right\|_2 \\ &\leq C (\|E_t\|^2 + \|E\|^2 + \|n\|^2 + \|n_t\|^2). \end{aligned} \quad (49)$$

Умножим второе уравнение из (46) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $E$  и возьмем мнимую часть:

$$\frac{d}{dt} \|E\|^2 \leq C (\|n\|^2 + \|E\|^2)$$

Сложив это неравенство с (48) и (49) мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2 + \|E\|^2 + \|E_t\|^2) \\ \leq C (\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu\|n\|_2^2 + \|E\|^2 + \|E_t\|^2). \end{aligned}$$

Из этой оценки с помощью леммы Гронуолла легко получить, что  $n \equiv E \equiv 0$ , а следовательно, и единственность решения.

### 3 Существование аттрактора

Для доказательства существования аттрактора нам осталось доказать, что динамическая система  $(B_r^*, S_t)$  является асимптотически компактной. То есть мы докажем, что для любой ограниченной последовательности  $\{U_j\}$  и для любой последовательности  $t_j \rightarrow +\infty$  множество  $\{S_{t_j}U_j\}$  является предкомпактом в  $\mathcal{F}$  (см. [8] или [2]).

Для доказательства асимптотической компактности мы будем использовать метод Болла [1]. Нам понадобится следующая

**Лемма 2** Пусть  $\{U_k\} \subset B_r^*$  и  $U_k \rightarrow U$  слабо в  $\mathcal{F}$ . Тогда

(1) Для произвольного  $T > 0$

$$U_k(t) \rightarrow U(t) \quad * \text{ слабо в } L_\infty(0, T; \mathcal{F}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (50)$$

где  $U_k(t) = S_t U_k$  и  $U(t) = S_t U$ . Более того

$$U_k(t) \rightarrow U(t) \quad \text{сильно в } C(0, T; \mathcal{H}_{-\sigma} \times \mathcal{H}_{2-\sigma} \times \overline{\mathcal{H}}_{2-\sigma}) \quad (51)$$

для любого  $\sigma > 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

(2) Если для некоторого  $t > 0$  выполнено  $S_t U_k \rightarrow V$  слабо в  $\mathcal{F}$ , то  $V = S_t U$ , то есть полугруппа  $S_t$  слабо замкнута.

Доказательство этой Леммы можно найти в [3].

На траекториях  $(n_t; n; E)$  рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$W(t) = W_0(t) - (f, n) + \varepsilon \left[ (n, n_t) + \frac{\alpha}{2} \|n\|^2 \right], \quad (52)$$

где

$$W_0(t) = \frac{1}{2} [\|n_t\|^2 + \|n\|_1^2 + \mu \|n\|_2^2] + \|E_t\|^2.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left[ (n, n_t) + \frac{\alpha}{2} \|n\|^2 \right] = \|n_t\|^2 - \|n\|_1^2 - \mu \|n\|_2^2 - (n, |E|^2)_1 + (n, f + \beta |E|^2),$$

то

$$\frac{d}{dt} W(t) = -(\alpha - \varepsilon) \|n_t\|^2 - \varepsilon \|n\|_1^2 - \varepsilon \mu \|n\|_2^2 - 2\gamma \|E_t\|^2 + \tilde{Q}(t), \quad (53)$$

где

$$\tilde{Q}(t) = 2(n_t, |\nabla E|^2) + 2(n_t, n|E|^2 + 2\Re\{g\bar{E}\}) - \beta(n, n_t) - \varepsilon(n, |E|^2)_1 + \varepsilon(n, f + \beta |E|^2).$$

Пусть  $0 < \varepsilon \leq \min\{\frac{\alpha}{2}, \gamma\}$  и обозначим

$$L(U) \equiv L(n_t, E_t) = (\alpha - 2\varepsilon) \|n_t\|^2 + 2(\gamma - \varepsilon) \|E_t\|^2$$

и

$$K(U) \equiv K(n_t; n; E) = 2(n_t, |\nabla E|^2 + n|E|^2 + \Re\{g\bar{E}\}) + \beta(|E|^2, n) + \varepsilon(n, A|E|^2 + f) + 2\varepsilon^2(n, n_t) + \alpha\varepsilon^2 \|n\|^2.$$

Пусть  $W(U) \equiv W(n_t; n; E_t) = W(t)$ , где  $W(t)$  задано (52). Тогда из (53) следует, что

$$W(S_t U) + \int_\sigma^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} L(S_\tau U) d\tau = e^{-2\varepsilon(t-\sigma)} W(S_\sigma U) + \int_\sigma^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} K(S_\tau U) d\tau \quad (54)$$

для любых  $t \geq \sigma \geq 0$ . Теперь мы воспользуемся идеей Теоремы 3.1 из [11].

Пусть  $\{U_j\}$  – ограниченная последовательность в  $\mathcal{B}_r^*$  и пусть  $\{t_j\}$  – последовательность положительных чисел, которая стремится к бесконечности при  $j \rightarrow \infty$ . Так как динамическая система  $(\mathcal{B}_r^*, S_t)$  является диссипативной, то мы можем выбрать подпоследовательности  $\{U_{j_k}\}$  и  $\{t_{j_k}\}$ , константу  $T > 0$ , и элементы  $V_m \in \mathcal{B}_r^*$  таким образом, что

$$S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k} \rightarrow V_m \text{ слабо в } \mathcal{F}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (55)$$

Из второго условия Леммы 2 следует, что  $S_{mT}V_m = V_0$ . Из (54) мы получим, что

$$\begin{aligned} W(S_{t_{j_k}}U_{j_k}) + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} L(S_\tau S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k})d\tau \\ = e^{-2\varepsilon mT}W(S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k}) + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} K(S_\tau S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k})d\tau \end{aligned} \quad (56)$$

для каждого  $m$  и  $t_{j_k} \geq mT$ . Из первого условия Леммы 2 и (55) следует, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} L(S_\tau S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k})d\tau \geq \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} L(S_\tau V_m)d\tau$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} K(S_\tau S_{t_{j_k}-mT}U_{j_k})d\tau = \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} K(S_\tau V_m)d\tau.$$

Поэтому (56) нам дает, что

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} W(S_{t_{j_k}}U_{j_k}) + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} L(S_\tau V_m)d\tau \\ \leq C \cdot e^{-2\varepsilon mT} + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} K(S_\tau V_m)d\tau. \end{aligned} \quad (57)$$

С другой стороны, так как  $V_0 = S_{mT}V_m$ , то из (54) мы получим, что

$$\begin{aligned} W(V_0) + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} L(S_\tau V_m)d\tau \\ = e^{-2\varepsilon mT}W(V_m) + \int_0^{mT} e^{-2\varepsilon(mT-\tau)} K(S_\tau V_m)d\tau. \end{aligned} \quad (58)$$

Сопоставив (57) и (58) легко убедиться, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(S_{t_{j_k}}U_{j_k}) \leq W(V_0) + C \cdot e^{-2\varepsilon mT}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом слабая сходимость  $S_{t_{j_k}}U_{j_k} \rightarrow V_0$  в  $\mathcal{F}$  влечет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W(S_{t_{j_k}}U_{j_k}) = W(V_0).$$

Учитывая структуру  $W$  это равенство означает, что  $S_{t_{j_k}}U_{j_k} \rightarrow V_0$  сильно в  $\mathcal{F}$ . Следовательно, динамическая система  $(\mathcal{B}_r^*, S_t)$  является асимптотически компактной. Вторая часть Теоремы 2 очевидно следует из принципа сведения (см. [2, Теорема I.7.4]) и (21). Таким образом Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 аналогично доказательству [3, Теоремы 2] и, поэтому, мы не будем приводить его. Оценка (18) остается верной и для системы Захарова ( $\mu = 0$ ) (более подробно см. [3, Леммы 4 и 5]).

#### 4 Близость аттракторов

Из (18) и инвариантности аттрактора следует, что для любой полной траектории  $(n_t^\mu(t), n^\mu(t), E^\mu(t))$ , лежащей в аттракторе  $\mathcal{A}_\mu$ , будет выполнено

$$\|n_t^\mu(t)\|^2 + \|n^\mu(t)\|_1^2 + \mu \|n^\mu(t)\|_2^2 + 2\|E^\mu(t)\|_2^2 \leq C_r \quad t \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Докажем (19). Пусть  $y^\mu$  — такой элемент из  $\mathcal{A}_\mu$ , что

$$\text{dist}_\sigma(y^\mu, \mathcal{A}) = \sup \{ \text{dist}_\sigma(y, \mathcal{A}), y \in \mathcal{A}_\mu \}. \quad (60)$$

Рассмотрим траекторию  $y^\mu(t) \subset \mathcal{A}_\mu$ , проходящую через  $y^\mu$ . Из (59) следует, что найдется последовательность  $y^{\mu_k}(t)$ , которая сходится \*-слабо в  $L_\infty(a, b; \mathcal{F})$  к некоторому  $y(t)$  для любых  $a < b$  при  $\mu_k \rightarrow 0$ . Из теоремы вложения Обэна (см [13, Следствие 4]) следует, что  $y^{\mu_k}$  сильно сходится к  $y(t)$  в  $C(0, T; \mathcal{H}_{-\sigma} \times \mathcal{H}_{2-\sigma} \times \overline{\mathcal{H}}_{2-\sigma})$ . Этой сходимости достаточно для того, чтобы перейти к пределу в нелинейных слагаемых системы (5) при  $\mu_k \rightarrow 0$ . А т. к. для любой функции  $v \in H_1((a, b), \mathcal{H}_2(\Omega))$ , удовлетворяющей (6), в силу (59) верно

$$\mu \int_a^b \int_\Omega A^2 n^\mu \cdot v \, dx dt = \mu \int_a^b \int_\Omega A n^\mu A v \, dx dt \leq (b-a) \sqrt{\mu C_r} \|\Delta v\| \rightarrow 0$$

при  $\mu \rightarrow 0$ , то в силу теоремы единственности (см. [3, Теорема 1])  $y(t)$  является полусильным ограниченным на всей оси решением задачи (2). Следовательно,  $y(t) \subset \mathcal{A}$ , а так как  $y^{\mu_k}$  сильно сходится к  $y(t)$  в  $C(0, T; \mathcal{H}_{-\sigma} \times \mathcal{H}_{2-\sigma} \times \overline{\mathcal{H}}_{2-\sigma})$ , то соотношение (19) доказано.

*Автор признателен профессору И. Д. Чуешову за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ball J. Global attractors for semilinear wave equations. // *Discr. Cont. Dyn. Sys.* - 2004. - V. 10. - P. 31-52.
2. Chueshov I.D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. - Kharkov, Acta, 1999.
3. Chueshov I. D. and Shcherbina A S. On 2D Zakharov system in a bounded domain. // *Differential and Integral Equations.* - 2005. - V. 18. - P. 781-812.
4. Ginibre J., Tsutsumi Y. and Velo G. On the Cauchy problem for the Zakharov system. // *Journal of Functional Analysis.* - 1997. - V. 151, - P. 384-436.
5. Goubet O. and Moise I. Attractor for dissipative Zakharov system. // *Nonlinear Analysis.* - 1998. - V. 7. - P. 823-847.
6. Guo B. and Du X. The behaviour of attractors for damped Schrödinger-Boussinesq equation. // *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation.* - 2001. - V. 6. - P. 54-60.
7. Guo B. and Chen F. Finite dimensional behavior of global attractors for weakly damped nonlinear Schrödinger-Boussinesq equations. // *Physica D.* - 1996. - V. 93. - P. 101-118.

8. Ladyzhenskaya O. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations.* – Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
9. Li Yongsheng and Chen Qingyi. Finite Dimensional Global Attractor for Dissipative Schrödinger–Boussinesq Equations. // *Journal of mathematical analysis and applications.* – 1997, V. 205, P. 107–132.
10. J.L. Lions and E. Magenes, *Problemes aux Limites Non Homogenes et Applications.* – Paris, Dunod, 1968.
11. Moise I., Rosa R. and Wang X. Attractors for non-compact semigroups via energy equations. // *Nonlinearity.* – 1998. – V. 11. – P. 1369–1393.
12. Shcherbina A. S. Gevrey regularity of the global attractor for the dissipative Zakharov system. // *Dynamical Systems.* – 2003. – V. 18. – P. 201–225.
13. Simon J. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . // *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* – 1987. – Ser.4 V.148, P. 65–96.
14. Zakharov V.E. Collapse of Langmuir waves. // *Sov. Phys. JETP.* 1972, V. – 35, P. 908–912.