

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯХ АЛГЕБР ЛИ

Л. Л. Ваксман

Рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства H и E вместе с линейным ограниченным оператором φ , действующим из H в E и метрикой μ , т. е. ограниченной эрмитово симметричной билинейной формой в E .

Говорят, что линейный ограниченный оператор A в H включен в локальный операторный узел, называют совокупность (A, H, φ, E, μ) операторным узлом [1], если

$$A + A^* = \varphi^+ \varphi, \quad (1)$$

где φ^+ оператор, сопряженный к φ относительно метрики, т. е.

$$(Ah_1, h_2) + (h_1, Ah_2) = \mu(\varphi h_1, \varphi h_2),$$

для любых h_1 и h_2 из H . Метрика μ представима в виде

$$\mu(v_1, v_2) = (\sigma v_1, v_2),$$

где σ — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда

$$\varphi^+ = \varphi^* \sigma. \quad (2)$$

Для изучения операторных узлов вводится характеристическая функция

$$W(\lambda) = I + \varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^*.$$

Значения этой аналитической функции — операторы в E .

Пусть теперь $A_1, A_2, \dots, A_n$ такие ограниченные операторы, что их линейные комбинации $\sum_{i=1}^n a_i A_i$ с действительными коэффициентами a_i образуют алгебру Ли G , т. е.

$$A_i A_j - A_j A_i = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k A_k$$

(c_{ij}^k — вещественные структурные константы).

Нетрудно понять [2], что операторы A_i могут быть включены в узлы вида $(A_i, H, \varphi, E, \mu_i)$ с общим оператором φ и внешним пространством E . Тогда совокупность $\left(\sum_{i=1}^n a_i A_i, H, \varphi, E, \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right)$ будем называть *локальным узлом над алгеброй Ли*.

Условия узла принимают вид:

$$\sum_{i=1}^n a_i A_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i \right)^* = \varphi^* \left(\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \right) \varphi,$$

где $(\sigma_i v_1, v_2) = \mu_i(v_1, v_2)$.

Характеристическая оператор-функция узла над алгеброй Ли вводится формулой

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda) = I_E + \varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i - I \right)^{-1} \varphi^* \sum_{i=1}^n a_i \tau_i.$$

2. Главным подпространством H_0 узла называется замкнутая линейная оболочка векторов вида

$$P(A_1, A_2, A_n) \varphi^* V,$$

где V принадлежит E , а $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — полином n некоммутирующих переменных.

Легко видеть, что и главное подпространство H_0 и избыточное (его ортогональное дополнение в H) инвариантны относительно любого из операторов алгебры, причем на избыточном подпространстве эти операторы косоэрмитовы.

Пусть $M = (m_1, \dots, m_n)$ упорядоченное множество целых $m_i \geq 0$. Считая $a_1, a_2, \dots, a_n$ неизвестными, рассмотрим коэффициент при $a_1^{m_1}, \dots, a_n^{m_n}$ в разложении

$$\frac{1}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Этот многочлен от n некоммутирующих переменных обозначим $X^*(M)$. Оказывается, что любой полином может быть приведен к виду $\sum_{i=1}^m b_i X^*(M_i)$ с вещественными b_i , если использовать соотношение

$$A_i A_j - A_j A_i = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k A_k.$$

Точнее, будем считать два полинома эквивалентными, когда их разность принадлежит идеалу, порожденному полиномами вида

$$A_i A_j - A_j A_i - \sum_{k=1}^n C_{ij}^k A_k.$$

Тогда легко доказывается [3], что в каждом классе эквивалентности существует полином вида

$$\sum_{i=1}^m b_i X^*(M_i).$$

Ясно, что в определении главного подпространства узла можно было ограничиться лишь такими полиномами.

Обозначим через A_0 и φ_0 сужения операторов A и φ на главное подпространство H_0 . Полученный узел $\sum_{i=1}^n a_i A_i$, H_0 , φ , E ,

$\sum_{i=1}^n a_i \tau_i$ называется главной компонентой исходного.

Локальные операторные узлы

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i A_i, H, \varphi, E, \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right); \left(\sum_{i=1}^n a_i A'_i H', \varphi', E, \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right)$$

с общим внешним пространством и метриками в нем называются унитарно-эквивалентными, если существует унитарный оператор U такой, что $\varphi = \varphi' U$, и для каждого $1 \leq i \leq n$

$$U A_{(i)} = A'_{(i)} U.$$

Легко видеть, что из унитарной эквивалентности главных компонент узлов следует равенство их характеристических функций. При каких условиях верно обратное утверждение?

Теорема. Пусть

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i A_i, H, \varphi, E, \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right); \left(\sum_{i=1}^n a_i A'_i, H', \varphi', E, \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right)$$

узлы над двумя алгебрами Ли такие, что

$$[A_i A_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k A_k; [A'_i A'_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k A'_k; \quad (3)$$

и пусть существует набор действительных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

для которого оператор $\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i$ обратим.

Тогда из равенства характеристических оператор-функций узлов над алгебрами Ли следует унитарная эквивалентность их главных компонент.

В случае коммутирующих операторов теорема доказана в [2].

Доказательство. Из

$$I + \varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i - \lambda I \right)^{-1} \varphi^* \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i = I + \varphi' \left(\sum_{i=1}^n a_i A'_i - \lambda I \right)^{-1} \varphi'^* \times \\ \times \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$$

и из существования $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ таких, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ обратим, следует:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i - \lambda I \right)^{-1} \varphi^* = \varphi' \left(\sum_{i=1}^n a_i A'_i - \lambda I \right)^{-1} \varphi'^*$$

верное при больших λ . Приравнявая коэффициенты рядов Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i \right)^m \varphi^* = \varphi' \left(\sum_{i=1}^n a_i A'_i \right)^m \varphi'^*; \quad m \geq 0. \quad (4)$$

Вновь рассмотрим (4) как равенство аналитических по параметрам a_i функций и приравняем коэффициенты в 0.

$$\varphi X^*(M)(A_1, A_2, \dots, A_n) \varphi^* = \varphi' X^*(M)(A'_1, \dots, A'_n) \varphi'^*.$$

Как уже отмечалось, для любого полинома $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует $P_1 = \sum_{i=1}^n b_i X^*(M_i)$ такой, что

$$\begin{aligned} P(A_1, A_2, \dots, A_n) &= P_1(A_1, A_2, \dots, A_n); \\ P(A'_1, A'_2, \dots, A'_n) &= P_1(A'_1, A'_2, \dots, A'_n), \end{aligned}$$

Откуда

$$\varphi P(A_1, \dots, A_n) \varphi^* = \varphi' P(A'_1, \dots, A'_n) \varphi'^*, \quad (5)$$

для любого полинома $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначим $B_j = \frac{A_j - A'_j}{2i}$ и докажем, что

$$\varphi P(B_1, \dots, B_n) \varphi^* = \varphi' P(B'_1, \dots, B'_n) \varphi'^* \quad (6)$$

для любого $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Докажем равенство (6) индукцией по степени одночлена.

Из формул (4) и (5) следует

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi \varphi^* &= \varphi' \varphi'^*, \\ \varphi A_i \varphi^* &= \varphi' A'_i \varphi'^*, \end{aligned}$$

откуда в силу (1)

$$\varphi \left(\frac{1}{2} \varphi^* \sigma_i \varphi + j B_i \right) \varphi^* = \varphi' \left(\frac{1}{2} \varphi'^* \sigma_i \varphi' + i B'_i \right) \varphi'^*,$$

и наконец $\varphi B_i \varphi^* = \varphi' B'_i \varphi'^*$.

2) Пусть равенство (6) доказано для одночленов степени меньшей N . Подставляя в (5)

$$A_j = \frac{1}{2} \varphi^* \sigma_j \varphi + i B_j,$$

$$A'_j = \frac{1}{2} \varphi'^* \sigma_j \varphi' + i B'_j$$

и используя предположение индукции, убеждаемся в справедливости равенства (6) в общем случае.

Рассмотрим оператор, заданный на линейной оболочке векторов вида $P(B_1, B_2, \dots, B_n)$ формулой

$$U \left[\sum_{i=1}^n P_i(B_1, B_2, \dots, B_n) \varphi^* v_i \right] = \sum_{i=1}^n P_i(B'_1, B'_2, \dots, B'_n) \varphi'^* v_i, \quad (7)$$

где v_i — вектор внешнего пространства E .

Используя (1) и (5), легко показать, что область определения U плотна в главном подпространстве узла.

Для проверки корректности определения U формулой (7) достаточно из

$$\sum_{k=1}^N P_k(B_1, B_2, \dots, B_n) \varphi^* v_k = 0$$

вывести

$$\sum_{k=1}^N P_k(B'_1, B'_2, \dots, B'_n) \varphi'^* v_k = 0,$$

а это следует из

$$\begin{aligned} & (P_1(B_1, B_2, \dots, B_n) \varphi^* v_1, P_2(B_1, B_2, \dots, B_n) \varphi^* v_2) = \\ & = (P_1(B'_1, B'_2, \dots, B'_n) \varphi'^* v_1, P_2(B_1, B_2, \dots, B_n) \varphi'^* v_2). \end{aligned}$$

Кстати, вместе с корректностью определения U мы доказали и его изометричность, что позволяет продолжить этот оператор до изометрии главных подпространств узлов.

Проверим, что продолженный оператор U' устанавливает унитарную эквивалентность главных компонент узлов: $\varphi_0 = \varphi' U'$, как и $U \varphi^* = \varphi'^*$, следует из самого определения U , а равенство

$$U' A_{i0} = A'_i U' \quad (8)$$

докажем порознь для действительной и мнимой частей A_i .

$$A_i = \frac{1}{2} \varphi^* \sigma_i \varphi + i B_i$$

$$1) U' \varphi^* \sigma_i \varphi_0 = \varphi'^* \sigma_i \varphi' U'$$

эквивалентно $U' \varphi^* \sigma_i \varphi U' = \varphi'^* \sigma_i \varphi'$, что в свою очередь следует из

$$U \varphi^* = \varphi'^*.$$

$$2) U B_{i0} = B'_i U'.$$

Достаточно проверить, что для каждого полинома $P(x_1, \dots, x_n)$ и v

$$U B_i P(B_1, \dots, B_n) \varphi^* v = B'_i U P(B_1, \dots, B_n) \varphi^* v,$$

но

$$B'_i U P(B_1, \dots, B_n) \varphi^* v = B'_i P(B'_1, \dots, B'_n) \varphi'^* v,$$

(по построению U), что и доказывает (8).

Автор выражает благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», М., 1969.
2. М. С. Лившиц и А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьковского госуниверситета, 1971.
3. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. «Мир», М., 1964.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Г. Михайленко

Рассмотрим в трехмерном пространстве R_3 эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad (1)$$

$$(x = (x_1, x_2, x_3)).$$

Предположим, что коэффициенты оператора (1) достаточно гладкие, $c(x) \leq 0$ и вне некоторой ограниченной области $c(x) < g < 0$.

Пусть область $D \subset R_3$ ограничена замкнутой поверхностью Ляпунова ∂D . Обозначим через K — область, которая получается из области D путем удаления из нее конечного числа тел T_i ($K = D \setminus \bigcup_i T_i$), а через ∂K границу области K ($\partial K = \partial D \cup \bigcup_i \partial T_i$).

Далее будем рассматривать последовательность областей $K^{(n)} = D \setminus \bigcup_i T_i^{(n)}$ с границами $\partial K^{(n)} = \partial D \cup \bigcup_i \partial T_i^{(n)}$.

В областях $K^{(n)}$ рассмотрим задачи Дирихле

$$Lu^{(n)}(x) = -\varphi(x) \quad x \in K^{(n)}$$

$$u^{(n)}(x) = 0 \quad x \in \partial K^{(n)}, \quad (2)$$

где L — оператор вида (1), а $\varphi(x) \in L_2(D)$.

Под решением задачи (2) будем понимать непрерывную функцию $u^{(n)}(x)$, которая имеет в области $K^{(n)}$ первые и вторые суммируемые с квадратом обобщенные производные, удовлетворяющие уравнению (2). Продолжая решение задач (2) нулем на тела $T_i^{(n)}$, получим последовательность функций $\{u^{(n)}(x)\}$, определенных во всей области D . Пусть при $n \rightarrow \infty$ диаметры тел равномерно стремятся к нулю, а число их неограниченно растет. Возникает вопрос: при каких условиях последовательность этих функций сходится и как установить предельную функцию?

Введем такие обозначения: $d_i^{(n)}$ — диаметр тела $T_i^{(n)}$, $r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между телами $T_i^{(n)}$ и $T_j^{(n)}$, $c_{F,i}^{(n)}$ — F -емкость тела $T_i^{(n)}$, $\sum_A c_{F,i}^{(n)}$ — сумма (при фиксированном n) F -емкостей тех тел $T_i^{(n)}$, которые лежат полностью внутри области A .

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$ выполнены следующие условия:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i d_i^{(n)} \right\} = 0;$$

$$2) \delta(\rho) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F,i}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} \right\} \rightarrow 0, \text{ когда } \rho \rightarrow 0;$$

3) для произвольного шара V

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_V c_{F,i}^{(n)} = \int_V f(x) dx,$$

где $f(x)$ — неотрицательная непрерывная в области D функция.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{\bar{u}^{(n)}(x)\}$ решений задач (2), продленных нулем на тела $T_i^{(n)}$, сходится в метрике пространства $L_2(D)$ к решению задачи

$$Lu(x) - f(x)u(x) = -\varphi(x) \quad x \in D,$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial D.$$

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ выполнены следующие условия:

1) диаметры тел $T_i^{(n)}$ и расстояния $r_i^{(n)}$ от них до некоторой поверхности Ляпунова Γ , которая находится строго внутри области D равномерно стремятся к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i d_i^{(n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i r_i^{(n)} \right\} = 0;$$

$$2) \delta(\rho) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F,i}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} \right\} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0;$$

3) для производного куска ω поверхности Γ , ограниченного кусочно-гладкими кривыми,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\omega} c_{F,i}^{(n)} = \int_{\omega} f_{\Gamma}(x) ds_x,$$

где $f_{\Gamma}(x)$ — положительная непрерывная на поверхности Γ функция, $\sum_{\omega} c_{F,i}^{(n)}$ — сумма F -емкостей тех тел $T_i^{(n)}$, которые при фиксированном n проектируются строго внутрь куска ω поверхности Γ .

Тогда при $n \rightarrow \infty$ существует предел последовательности $\{\bar{u}^{(n)}(x)\}$ и этот предел есть решение уравнения $Lu = -\varphi$ при нулевом граничном условии на поверхности ∂D и таких граничных условиях на поверхности Γ :

$$[u]^+ = [u]^- = u; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]^+ - \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]^- = \frac{f_{\Gamma}(x)}{a(x)} u(x),$$

где знаками $+$ и $-$ обозначены предельные значения функции в точке $x \in \Gamma$ по разные стороны от Γ , ν — конормаль к поверхности Γ , направленная со стороны, которой отвечает знак $-$, в сторону, которой отвечает знак $+$, $a(x)$ — нормирующий множитель конормали.

Причем, сходимость последовательности $\{\bar{u}^{(n)}(x)\}$ в этом случае равномерна по произвольному множеству x , которые лежат на положительном расстоянии от поверхности Γ .

Доказательство этих теорем проводится аналогично тому, как это сделано в случае самосопряженного оператора [1]. При этом главную роль играет следующая

Лемма. Пусть $F(x, y)$ — главное фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$, d и $c_F(T)$ — соответственно диаметр и F — емкость тела T , μ — некоторая мера, сосредоточенная на T , и такая, что $\mu(T) = \int_T d\mu < \infty$, а функция $\Phi(x) = \int_T F(x, y) d\mu(y)$ непрерывна на поверхности ∂T , которая ограничивает тело T .

Тогда на поверхности ∂T найдется такая точка x_0 , что

$$\frac{\mu(T)}{c_F(T)} [1 - \varepsilon(d)] \leq \Phi(x_0) \leq \frac{\mu(T)}{c_F(T)} [1 + \varepsilon(d)],$$

где $\varepsilon(d) \rightarrow 0$, когда $d \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Михайленко. Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

2. В. Г. Михайленко. Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 9. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

ТЕОРЕМА ХАНА—БАНАХА ДЛЯ РЕШЕТОЧНЫХ МНОГО-ОБРАЗИЙ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ M -ПРОСТРАНСТВАХ

И. П. Перепечай

Пусть E — векторная решетка, в которой существует элемент $e > 0$ такой, что для каждого $x \neq 0$ ($x \in E$) множество положительных чисел t , для которых $-te \leq x \leq te$, не пусто и имеет нижнюю грань, отличную от нуля. Эта нижняя грань (обозначим ее через $\|x\|_e$) удовлетворяет всем аксиомам нормы. Обозначим далее через E_e векторную решетку E , наделенную нормой $\|x\|_e$. М. Г. Крейн и С. Г. Крейн [1] показали, что если E_e полно, то оно изоморфно и изометрично пространству всех непрерывных функций на некотором компакте. Этот результат известен под названием теоремы Крейнов — Какутани. С. Какутани получил его, изучая абстрактные m -пространства [2], т. е. банаховские

пространства, являющиеся одновременно решетками, норма и порядок в которых связаны следующими условиями: (A), если $\inf(x, y) = 0$, то $\|x + y\| = \|x - y\|$; (M) $\|\sup(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$ для всех $x, y \geq 0$.

Он показал, что каждое такое пространство изометрично и изоморфно замкнутой линейной подрешетке пространства всех непрерывных функций, определенных на некотором компакте (теорема Какутани).

Естественным обобщением абстрактных m -пространств являются топологические M -пространства [3, 4]. В работе [4] получена теорема о представлении таких пространств, являющаяся обобщением теоремы Какутани. Там же доказаны некоторые теоремы об отделимости для решеточных гомоморфизмов. Основным результатом настоящей статьи является теорема типа Хана—Банаха для решеточных многообразий в топологических M -пространствах (§ 2). Из нее получается ряд следствий, в частности, доказана возможность продолжения непрерывных решеточных гомоморфизмов, заданных на произвольном идеале топологического M -пространства E , на все E ; рассмотрены также некоторые вопросы об отделиении множеств (§ 3). В § 4 результаты исследований применяются к изучению топологических M -пространств. Получены, в частности, теорема Джеймсона [4] и обобщение теоремы Крейнов — Какутани.

§ 1. Векторные решетки и топологические векторные решетки

В этом параграфе собраны используемые в статье определения и теоремы. В большинстве своем они являются хорошо известными.

Решеткой называется упорядоченное множество E , в котором любые два элемента x и y имеют верхнюю грань $\sup(x, y)$ и нижнюю грань $\inf(x, y)$. *Векторной решеткой* называется вещественное векторное пространство E , являющееся одновременно решеткой, в котором выполняются условия:

а) если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для любого $z \in E$;

б) если $x \leq y$, то $\lambda x \leq \lambda y$ для любого $\lambda \geq 0$.

Пусть $x \in E$. Принято обозначать $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$ и $|x| = \sup(x, -x)$. Все соотношения между элементами векторных решеток, используемые в статье, можно найти в [5, 6, 7].

Множество M в векторной решетке E называется *нормальным*, если из $x \in M$, $y \in E$ и $|y| \leq |x|$ следует $y \in M$. *Идеалом* в векторной решетке называется нормальное линейное подпространство. Если M — идеал в E и $a \in E$, то $a + M$ будем называть *решеточным многообразием*. Если, кроме того, M является гиперплоскостью в E , то M (соответственно $a + M$) будем называть

максимальным идеалом (соответственно максимальным решеточным многообразием).

Линейное отображение f векторной решетки E в другую векторную решетку называется *решеточным гомоморфизмом*, если $f(\sup(x, y)) = \sup(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in E$. Здесь мы будем использовать этот термин в значении «решеточный гомоморфизм в R ». Всякий решеточный гомоморфизм является положительным линейным функционалом. (Линейный функционал f на E называется *положительным*, если $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq 0$). Любое следующее условие является необходимым и достаточным, чтобы положительный линейный функционал f на E был решеточным гомоморфизмом [8—9]:

а) f — *неразложим*, т. е. если g и h такие положительные линейные функционалы, что $f = g + h$, то g и h являются скалярными кратными f ;

б) f — *минимальный*, т. е. если g — линейный функционал такой, что $0 < g \leq f$, то $g = \lambda f$.

Между максимальными решеточными многообразиями и решеточными гомоморфизмами существует тесная связь. Справедливо следующее предложение: для того, чтобы линейное многообразие $a + M$ было максимальным решеточным многообразием, необходимо и достаточно, чтобы существовал решеточный гомоморфизм f такой, что $a + M = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$, где $\alpha = f(a)$ [8].

Если H — идеал в E , то фактор — пространство E/H будет векторной решеткой относительно порядка, введенного с помощью множества положительных элементов $x \in E/H$, определяемых следующим образом: $x \geq 0$, если x содержит хотя бы один элемент $x \geq 0$ из E [10].

Векторная решетка E называется *архимедовой*, если из того, что для некоторого $x \geq 0$ множество $\{nx\}_{n=1,2,\dots}$ всех его кратных ограничено, вытекает равенство $x = 0$. Если архимедова векторная решетка является совершенно упорядоченным множеством, то она не может иметь размерности большей 1 [7]. (Упорядоченное множество является совершенно упорядоченным, если для любых $x, y \in E$ или $x \leq y$, или $y \leq x$).

Пусть T — топология в векторной решетке E . Будем говорить, что T согласуется со структурой векторной решетки, если она согласуется со структурой векторного пространства E , и, кроме того, в ней непрерывны отображения: $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$. В этом случае E называется *топологической векторной решеткой*. Имеет место следующее предложение.

Предложение 1*. Если H — идеал в топологической векторной решетке E , то его замыкание $\bar{H}$ тоже идеал в E .

* Предложение 1 есть в [11] (Указано Г. Я. Лозановским).

Доказательство. Известно, что $\bar{H}$ — линейное подпространство. Пусть теперь $z \in \bar{H}$, $w \in E$ и $|w| \leq |z|$. Покажем, что $w \in \bar{H}$. Для этого рассмотрим такие отображения $E \times E$ в E : $\psi: (x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $\varphi: (x, y) \rightarrow \inf(x, y)$. Поскольку E топологическая векторная решетка, то φ и ψ непрерывны. Далее, так как H идеал, то $\psi(H \times H) \subset H$, и, следовательно, в силу непрерывности $\psi \psi(\bar{H} \times \bar{H}) \subset \bar{H}$ (*). Пусть теперь $x \in H$ и $y \geq 0$. Тогда $-|x| = \inf(-|x|, y) \leq \inf(x, y) \leq |x|$, т. е. $\inf(x, y) \in H$. Таким образом, если обозначить конус положительных элементов векторной решетки E через E_+ , то $\varphi(H \times E_+) \subset H$, а в силу непрерывности φ и $\varphi(\bar{H} \times E_+) \subset \bar{H}$ (**). Теперь мы можем окончить доказательство так. Поскольку $z \in \bar{H}$, а $|z| = \sup(z, -z)$, то в силу (*) $|z| \in \bar{H}$. Далее, так как $0 \leq w^+ \leq |w| \leq |z|$, то в силу (**) $w^+ \in \bar{H}$, поскольку $w^+ = \inf(w^+, |z|)$. Таким же образом доказывается, что $w^- \in \bar{H}$. Но тогда и $w = w^+ - w^- \in \bar{H}$. Предложение доказано.

Топология в векторной решетке называется *монотонной*, если она согласуется со структурой векторного пространства и, кроме того, обладает фундаментальной системой окрестностей нуля (ф. с. о. н.), состоящей из нормальных множеств. Такая топология согласуется со структурой векторной решетки [12]. Если векторная решетка допускает введение отдельной монотонной топологии, то она архимедова [12].

Векторная решетка E с монотонной топологией называется *топологическим M -пространством*, если в E существует ф. с. о. н., состоящая из подрешеток [3, 4]. В [4] показано, что во всяком топологическом M -пространстве существует ф. с. о. н., состоящая из нормальных подрешеток. Так как каждая нормальная подрешетка является выпуклым множеством, то, следовательно, топологическое M -пространство является локально выпуклым. Его топология определяется семейством полунорм $\{p\}$, каждая из которых удовлетворяет следующим условиям:

1) если $|x| \leq |y|$, то $p(x) \leq p(y)$; 2) для любых $x, y \geq 0$ $p(\sup(x, y)) = \sup(p(x), p(y))$.

И наоборот, если топология в E определяется семейством полунорм, удовлетворяющих условиям 1), 2), то E является топологическим M -пространством [4].

В заключение этого параграфа приведем важный пример топологического M -пространства. Это пространство $C(S)$ всех непрерывных функций на некотором топологическом пространстве S (вообще говоря не обязательно компактном), упорядоченное естественным образом (т. е. $x \leq y$ ($x, y \in C(S)$)), если $x(s) \leq y(s)$ для всех $s \in S$) и наделенное топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности компактных множеств из S .

§ 2. Теорема типа Хана—Банаха для решеточных многообразий

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть E — топологическое M -пространство, B — непустая открытая нормальная подрешетка в E , $A = c + B$, где $c \in E$, и M — решеточное многообразие в E , не пересекающееся с A . Тогда существует замкнутое максимальное решеточное многообразие H в E , содержащее M и не пересекающееся с A .

Докажем предварительно следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть H — идеал в E , φ — отображение $x \rightarrow x + H$ в E/H и A — нормальная подрешетка в E . Тогда $\varphi(A)$ — нормальная подрешетка в E/H .

Доказательство. Пусть $\dot{x}, \dot{y} \in \varphi(A)$. Тогда $\dot{x} = \varphi(x)$, $\dot{y} = \varphi(y)$, где $x, y \in A$. Поскольку A подрешетка, то $\sup(x, y) \in A$, а поэтому $\sup(\dot{x}, \dot{y}) = \sup(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(\sup(x, y)) \in \varphi(A)$ [11]. Таким образом, осталось показать, что $\varphi(A)$ нормально. Пусть сначала $\dot{x} \in \varphi(A)$, $\dot{y} \in E/H$ и $0 \leq \dot{y} \leq \dot{x}$. Покажем, что $\dot{y} \in \varphi(A)$. Действительно, так как $\dot{x} \in \varphi(A)$ и $\dot{x} \geq 0$, то существует $x \in A$, $x \geq 0$ такой, что $\dot{x} = x + H$. Далее, существует $y \in \dot{y}$ такой, что $0 \leq y \leq x$ [11]. Так как A нормально, то $y \in A$, и, значит, $\dot{y} = y + H \in \varphi(A)$.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть $\dot{x} \in \varphi(A)$ произвольное, $\dot{y} \in E/H$ и $|\dot{y}| \leq |\dot{x}|$. Так как $\dot{x} \in \varphi(A)$, то $\dot{x} = x + H$, где $x \in A$, а потому $|x| = |x| + H \in \varphi(A)$, ибо в силу нормальности $A|x| \in A$.

Поскольку $0 \leq \dot{y}^+ \leq |\dot{y}| \leq |\dot{x}|$, то в силу показанного выше $\dot{y}^+ \in \varphi(A)$, и, следовательно, существует $z \in A$ такой, что $\dot{y}^+ = z + H$, причем можно считать, очевидно, что $z \geq 0$. Точно так же существует $w \in A$ ($w \geq 0$) такое, что $\dot{y}^- = w + H$. Но тогда и $\dot{y} = \dot{y}^+ - \dot{y}^- = (z - w) + H \in \varphi(A)$, так как поскольку A нормальная подрешетка, то $z - w \in A$, ибо из $z, w \geq 0$ следует $|z - w| \leq \sup(z, w) \in A$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть E — векторная решетка, B — нормальная подрешетка в E и $A = \bar{c} + B$ такое, что $0 \notin A$. Тогда для любых $a_1, a_2 \in A$ $\inf(|a_1|, |a_2|) > 0$.

Доказательство. Так как $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 = c + b_1$, $a_2 = c + b_2$, где $b_1, b_2 \in B$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \inf(|a_1|, |a_2|) &= \inf(|c + b_1|, |c + b_2|) = \inf[\sup(c + b_1, -c - b_1), \\ &\sup(c + b_2, -c - b_2)] = \sup[\inf(c + b_1, c + b_2), \\ &\inf(c + b_1, -c - b_2), \inf(-c - b_1, c + b_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\inf(-c - b_1, -c - b_2) &\geq \sup[\inf(c + b_1, c + b_2), \\
&\inf(-c - b_1, -c - b_2)] = \sup[c + \inf(b_1, b_2), \\
&-c + \inf(-b_1, -b_2)] = \sup[c + \inf(b_1, b_2), \\
&-c - \sup(b_1, b_2)] \geq \sup[c + \inf(-|b_1|, -|b_2|), \\
&-c - \sup(|b_1|, |b_2|)] = \sup[c - \sup(|b_1|, |b_2|), \\
&-c - \sup(|b_1|, |b_2|)] = \sup(c, -c) - \sup(|b_1|, |b_2|) = \\
&= |c| - \sup(|b_1|, |b_2|).
\end{aligned}$$

Так как B нормальная подрешетка, то $\sup(|b_1|, |b_2|) \in B$. Таким образом, $\inf(|a_1|, |a_2|) \geq |c| - b$, где $b = \sup(|b_1|, |b_2|) \in B$. Предположим, что $\inf(|a_1|, |a_2|) = 0$. Тогда $0 \geq |c| - b$ или $|c| \leq b$. Но это означает, что $c \in B$, а следовательно, и $-c \in B$. Отсюда следует, что $0 \in A = c + B$, что противоречит условию леммы. Итак, $\inf(|a_1|, |a_2|) > 0$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, будем считать, что M идеал. Обозначим через G множество всех идеалов M_1 в E таких, что $M_1 \cap A = \emptyset$. Ясно, что $G \neq \emptyset$, так как $M \in G$. Упорядочим G по включению, т. е. $M'_1 \leq M''_1$, если $M'_1 \subset M''_1$. Покажем, что относительно этого порядка G индуктивно. Пусть $(M_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ совершенно упорядоченное множество элементов из G . Тогда верхней гранью $(M_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ будет $\cup M_\alpha$, так как $(\cup M_\alpha) \cap A = \cup (M_\alpha \cap A)$. К индуктивному множеству применима лемма Цорна, т. е. в G существует максимальный элемент H . Поскольку A открытое и $H \subset CA$, то $\bar{H} \subset CA$, откуда $\bar{H} \cap A = \emptyset$. Далее, в силу предложения 1 $\bar{H}$ — идеал, поэтому из максимальнойности H следует, что $H = \bar{H}$, т. е. H замкнуто. Осталось показать, что $\dim E/H = 1$.

Рассмотрим отображение $\varphi: E \rightarrow E/H$. Тогда $\varphi(A) = \varphi(c) + \varphi(B)$, где $\varphi(B)$ в силу леммы 1 — нормальная подрешетка. Далее, так как $\varphi(H) = 0$, а $H \cap A = \emptyset$, то $0 \notin \varphi(A)$. Заметим теперь, что в E/H всякий $\neq \{0\}$ идеал пересекается с $\varphi(A)$. Действительно, пусть M_1 — идеал в E/H , отличный от нулевого. Предположим, что $M_1 \cap \varphi(A) = \emptyset$. Так как $\varphi(H) = 0 \subset M_1$, то $H \subset \varphi^{-1}(M_1)$, а поскольку $\varphi^{-1}(M_1)$ — идеал в E и H — максимальный идеал в E такой, что $H \cap A = \emptyset$, то $\varphi^{-1}(M_1) \cap A \neq \emptyset$. (То, что $\varphi^{-1}(M_1) = \{x \in E: \varphi(x) \in M_1\}$ является идеалом в E , следует из того, что если $x \in \varphi^{-1}(M_1)$ и $|y| \leq |x|$, то $|\varphi(y)| = \varphi(|y|) \leq \varphi(|x|) = |\varphi(x)| \in M_1$, и следовательно, $y \in \varphi^{-1}(M_1)$). Имеем $\emptyset = M_1 \cap \varphi(A) \supset \varphi(\varphi^{-1}(M_1) \cap A) \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $M_1 \cap \varphi(A) \neq \emptyset$.

Образуем теперь множество $K = \cup \lambda C$, где $C = \{x \in E/H : |a| \leq |x| \text{ для некоторого } a \in \varphi(A)\}$. Тогда возможны два случая:
а) $K \cup \{0\} \neq E/H$ или б) $K \cup \{0\} = E/H$.

В случае а) возьмем $x \neq 0$, $x \in K$, причем x можно считать большим нуля, ибо если $x \notin K$, то и $|x| \notin K$. Образуем множество $I = \{y \in E/H : |y| \leq \lambda x \text{ при некотором } \lambda > 0\}$. Тогда $I \cap K = \emptyset$. Действительно, если $y \in I \cap K$, то $|y| \leq \lambda x$ при некотором $\lambda > 0$, а так как $y \in K$, то и $\lambda x \in K$, но тогда и $x \in K$, в то время как мы брали $x \notin K$. Далее, поскольку $\varphi(A) \subset K$, то и по-прежнему $I \cap \varphi(A) = \emptyset$. Покажем, что I является идеалом. Для этого достаточно показать, что I есть линейное подпространство. Пусть $y, z \in I$. Тогда существуют $\lambda, \mu > 0$ такие, что $|y| \leq \lambda x$, $|z| \leq \mu x$. Так как $|y+z| \leq |y| + |z| \leq (\lambda + \mu)x$, то $y+z \in I$. Аналогично, если $y \in I$, то и $\lambda y \in I$ при любом λ . Итак, I идеал. Но тогда по ранее доказанному $I \cap \varphi(A) \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что случай а) невозможен.

Предположим теперь, что $K \cup \{0\} = E/H$ и $\dim E/H \geq 2$. Заметим сначала, что в случае $K \cup \{0\} = E/H$ для любого $x \in E/H$ и $x \neq 0$ существуют $a \in \varphi(A)$ и $\lambda > 0$ такие, что $|a| \leq \lambda |x|$. Возьмем теперь $x_1, x_2 \in E/H$ такие, что $x_1, x_2 > 0$ и $\inf(x_1, x_2) = 0$ (т. е. дизъюнктивные). Такие x_1, x_2 всегда найдутся, например, x^+ и x^- для любого $x \in E/H$ такого, что $x \not\geq 0$ и $x \not\leq 0$. Покажем, что такой $x \in E/H$ существует. Действительно, в противном случае E/H было бы совершенно упорядоченным. Кроме того, в силу леммы 1 фактор-топология в E/H будет монотонной, а так как H замкнуто, то и отделимой. Поэтому E/H архимедова. Но тогда $\dim E/H$ не может быть больше 1, что противоречит предположению. Пусть теперь $a, b \in \varphi(A)$ и $\lambda, \mu > 0$ такие, что $|a| \leq \lambda x_1$, $|b| \leq \mu x_2$. Поскольку из дизъюнктивности x_1 и x_2 вытекает дизъюнктивность λx_1 и μx_2 при любых λ и μ то $\inf(|a|, |b|) \leq \inf(\lambda x_1, \mu x_2) = 0$, что противоречит лемме 2, ибо множество $\varphi(A)$ удовлетворяет условиям этой леммы. Полученное противоречие показывает, что $\dim E/H = 1$. Теорема доказана.

Известно, что гиперплоскость H в топологическом векторном пространстве тогда и только тогда замкнута, когда линейная форма для H непрерывна. Поэтому теорема 1 допускает следующую формулировку:

Следствие 1. Пусть E — топологическое M -пространство B — непустая открытая нормальная подрешетка в E , $A = c + B$, где $c \in E$, и M — идеал в E , не пересекающийся с A . Тогда существует непрерывный решеточный гомоморфизм f на E такой, что $f(x) = 0$ на M , а на A — или $f(x) > 0$, или $f(x) < 0$.

Следствие 2. Каждый замкнутый идеал M в топологическом M — пространстве является пересечением содержащих его замкнутых максимальных идеалов.

Следствие 3. Пусть E — отделимое топологическое M — пространство. Тогда для любого $x \neq 0$ ($x \in E$) существует непрерывный решеточный гомоморфизм f на E такой, что $|f(x)| > 0$.

Следствие 4. Пусть E — векторная решетка, M — ее идеал, f — решеточный гомоморфизм на M и p — полунорма на E , удовлетворяющая условиям:

1) если $|x| \leq |y|$, то $p(x) \leq p(y)$, 2) для всех $x, y \geq 0$ $p(\sup(x, y)) = \sup(p(x), p(y))$.

Пусть, далее, $|f(x)| \leq p(x)$ для всех $x \in M$. Тогда существует на E решеточный гомоморфизм f такой, что сужение f на M совпадает с f и $|f(x)| \leq p(x)$ для всех $x \in E$.

Доказательства всех этих следствий подобны доказательствам аналогичных следствий из теоремы Хана — Банаха в теории топологических векторных пространств, поэтому мы их опускаем.

Из следствия 4 вытекает следующий результат.

Предложение 2. Пусть E — топологическое M — пространство и H — идеал в E , на котором задан непрерывный решеточный гомоморфизм f . Тогда существует непрерывный решеточный гомоморфизм f на E такой, что его сужение на H совпадает с f .

§ 3. Отделение множеств в топологических M -пространствах

В этом параграфе мы докажем другие полезные следствия теоремы I.

Лемма 3. Если A и B — нормальные подрешетки в векторной решетке E , то $A - B$ тоже нормальная подрешетка в E .

Докажем сначала такие утверждения.

1°. Если A — нормальная подрешетка в E , то $A = A^+ - A^+$, где A^+ — множество всех положительных элементов из A .

Доказательство. Пусть $x \in A$. Так как $0 \leq x^+ \leq |x|$, $0 \leq x^- \leq |x|$, то $x^+, x^- \in A^+$ и, следовательно, $x = x^+ - x^- \in A^+ - A^+$. Обратно, пусть $x \in A^+ - A^+$, т. е. $x = a - b$, где $a, b \in A^+$. Тогда $|x| = |a - b| = \sup(a - b, b - a) \leq \sup(a, b) \in A$, т. е. $x \in A$.

2°. Пусть A — множество положительных элементов из E , удовлетворяющее условиям:

1) если $x \in A$, $y \in E$ и $0 \leq y \leq x$, то $y \in A$;

2) если $x, y \in A$, то и $\sup(x, y) \in A$.

Тогда множество $A - A$ является нормальной подрешеткой.

Доказательство. Пусть $x \in A - A$, $y \in E$ и $|y| \leq |x|$. Покажем, что $y \in A - A$. Так как $x \in A - A$, то $x = a - b$, где $a, b \in A$. Имеем $0 \leq y^+ \leq |y| \leq |x| = |a - b| = \sup(a - b, b - a) \leq \sup(a, b) \in A$, т.е. $y^+ \in A$. Также показывается, что и $y^- \in A$. Отсюда $y = y^+ - y^- \in A - A$.

Пусть теперь $x, y \in A - A$. Тогда $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Имеем $\sup(x, y) = \sup(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \leq \sup(a_1 - \inf(a_2, b_2), b_1 - \inf(a_2, b_2)) = \sup(a, b_1) - \inf(a_2, b_2)$.

С другой стороны, $\sup(x, y) = \sup(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \geq \sup(a_1 - \sup(a_2, b_2), b_1 - \sup(a_2, b_2)) = \sup(a_1, b_1) - \sup(a_2, b_2)$.

Таким образом, $a - c \leq \sup(x, y) \leq a - b$, где $a, b, c \in A$. Но тогда $|\sup(x, y)| \leq \sup(|a - c|, |a - b|)$. Заметим теперь, что если $z \in A - A$ и $z \geq 0$, то $z \in A$. Действительно, поскольку $z = a - b$, где $a, b \in A$ и $z \geq 0$, то $0 \leq z = a - b \leq a \in A$, и, следовательно, $z \in A$. Итак, поскольку уже показано, что $A - A$ нормально, имеем $|a - c|, |a - b| \in A - A$, и, значит, в силу сделанного выше замечания $|a - c|, |a - b| \in A$. Но тогда и $\sup(|a - c|, |a - b|) \in A$. Отсюда следует, что $|\sup(x, y)| \in A \subset A - A$ и, следовательно, $\sup(x, y) \in A - A$, чем утверждение доказано.

Доказательство леммы 3. В силу 1° $A = A^+ - A^+$, $B = B^+ - B^+$. Поэтому $A - B = (A^+ + B^+) - (A^+ + B^+)$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что $A^+ + B^+$ удовлетворяет условиям 1), 2) из 2°. Ясно, что множества A^+ и B^+ удовлетворяют этим условиям. Покажем, что $A^+ + B^+$ тоже удовлетворяет этим условиям. Пусть $x \in A^+ + B^+$ и $0 \leq y \leq x$. Тогда $x = a + b$, где $a \in A^+$, $b \in B^+$. Далее имеем

$\inf(y, a) \leq y = \inf(y, x) = \inf(y, a + b) \leq \inf(y, a) + \inf(y, b)$. Отсюда следует, что $y = \inf(y, a) + c$, где $0 \leq c \leq \inf(y, b)$. Ясно, что $\inf(y, a) \in A^+$, а $c \in B^+$, т.е. $y \in A^+ + B^+$. Пусть теперь $x, y \in A^+ + B^+$, т.е. $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in A^+$, $b_1, b_2 \in B^+$. Тогда

$$0 \leq \sup(x, y) = \sup(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \leq \sup(a_1 + \sup(b_1, b_2), a_2 + \sup(b_1, b_2)) = \sup(a_1, a_2) + \sup(b_1, b_2).$$

Так как $\sup(a_1, a_2) \in A^+$, $\sup(b_1, b_2) \in B^+$, то, как показано выше, $\sup(x, y) \in A^+ + B^+$. Лемма доказана.

Предложение 3. Пусть E — топологическое M -пространство, а A_1, B_1 — нормальные подрешетки в E , из которых одна открыта. Пусть, далее, $A = a + A_1$, $B = b + B_1$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует непрерывный решеточный гомоморфизм f такой, что множества $f(A)$ и $f(B)$ не пересекаются.

Доказательство. Множество $A - B$ открыто, не содержит 0 и имеет вид $A - B = (a - b) + A_1 - B_1$, где $A_1 - B_1$ в силу леммы 3 нормальная подрешетка. По следствию I из теоремы I существует непрерывный решеточный гомоморфизм f такой, что или $f(A - B) > 0$, или $f(A - B) < 0$. Поэтому $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Следствие 1. Если E — топологическое M -пространство, $B = b + B_1$, где B_1 — нормальная подрешетка в E и $a \in \overline{B}$, то существует непрерывный решеточный гомоморфизм f такой, что $f(a) \in \overline{f(B)}$.

Доказательство. Так как $a \in \overline{B}$, то существует открытая окрестность нуля V , являющаяся нормальной подрешеткой, такая, что $(a + V) \cap B = \emptyset$. В силу предложения 3 существует непрерывный решеточный гомоморфизм f такой, что $f(a + U) \cap f(B) = \emptyset$. Но $f(a + U)$ открыто, и, значит, $f(a) \in \overline{f(B)}$.

Следствие 2. Если E — топологическое M -пространство, B — нормальная подрешетка в E и $a \in \overline{B}$, то существует непрерывный решеточный гомоморфизм f такой, что $|f(a)|, |f(x)| \leq 1$ для всех $x \in B$.

Доказательство. По следствию 1 существует непрерывный решеточный гомоморфизм g такой, что $g(a) \in \overline{g(B)}$. Так как $\overline{g(B)}$ уравновешено, то $\alpha = \sup \{|g(x)| : x \in B\} < |g(a)|$. Теперь, если $\alpha > 0$, положим $f = \frac{1}{\alpha} g$. Ясно, что $|f(a)|, |f(x)| \leq 1$ для всех $x \in B$. Если же $\alpha = 0$, то положим $f = \frac{2}{|g(a)|} g$. Тогда также $|f(a)| > 1$, а $|f(x)| = 0 < 1$ для всех $x \in B$.

§ 4. Конкретное представление топологических M -пространств

Пусть E — топологическое M -пространство и E' — множество всех непрерывных линейных форм на E . Слабой топологией в E' называется топология, ф.с.о.н. которой образуют поляры конечных множеств из E . Обозначим через L множество всех решеточных гомоморфизмов из E' . Легко показать, что L слабо-замкнуто в E' .

Теорема 2. Если E — топологическое M -пространство, то его топология является топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности σ слабо компактных множеств из L .

Замечание. В качестве σ можно взять совокупность множеств $U^\circ \cap L$, где U пробегает ф.с.о.н. в E .

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{U\}$ — ф.с.о.н. в E , состоящая из замкнутых нормальных подрешеток. В силу слабой компактности U° и слабой замкнутости L множество $U^\circ \cap L$ является слабокомпактным. Покажем, что $(U^\circ \cap L)^\circ = U$. Ясно, что $U = U^{\circ\circ} \subset (U^\circ \cap L)^\circ$. Поэтому надо показать обратное, т.е., что $(U^\circ \cap L)^\circ \subset U$. Пусть $x \in (U^\circ \cap L)^\circ$. По следствию 2 из предложения 3 существует $f \in L$ такой, что $|f(x)| > 1$ и $|f(y)| \leq 1$ для всех $y \in U$. Последнее неравенство означает, что $f \in U^\circ \cap L$, а поскольку $|f(x)| > 1$, то $x \notin (U^\circ \cap L)^\circ$. Таким образом, $(U^\circ \cap L)^\circ = U$. Теорема доказана.

Докажем замечание. Пусть $B' = \{V\}$ — произвольная ф. с. о. н. в E . Покажем, что множества $(V^\circ \cap L)^\circ$, где $V \in B'$, тоже образуют ф. с. о. н. в E . Достаточно показать, что для любой окрестности нуля W в E существует $V \in B'$ такая, что $(V^\circ \cap L)^\circ \subset W$. Для этого достаточно взять $V \in B'$ такую, что $V \subset U \subset W$, где $U \in B$. Действительно, в этом случае $(V^\circ \cap L)^\circ \subset (U^\circ \cap L)^\circ = U \subset W$.

Докажем теперь теорему Джеймсона [4], частным случаем которой является теорема Какутани.

Теорема 3. Всякое отделимое топологическое M -пространство изоморфно линейной подрешетке некоторого пространства $C(S)$ с топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности σ компактных множеств из S . В качестве S можно взять множество L , наделенное топологией, индуцируемой слабой топологией из E^1 , а в качестве σ — совокупность множеств $U^\circ \cap L$, где U — пробегает ф. с. о. н. в E .

Доказательство. Пусть $B = \{U\}$ — ф. с. о. н. в E . Наделим L топологией, индуцируемой слабой топологией из E^1 , и рассмотрим пространство $C(L)$, наделенное топологией равномерной сходимости на совокупности множеств $U^\circ \cap L$, где U пробегает B . Покажем, что E изоморфно некоторой линейной подрешетке из $C(L)$.

Пусть h — отображение $x \rightarrow \varphi_x E$ в $C(L)$, где $\varphi_x(f) = f(x)$ для каждого $f \in L$. Тогда h и осуществляет требуемый изоморфизм. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта в виду его простоты.

Замечание. Если в теореме 3 потребовать полноту E , то E изоморфно замкнутой линейной подрешетке пространства $C(L)$.

Достаточно показать, что пространство $C(L)$, наделенное топологией равномерной сходимости на множествах $U^\circ \cap L$, где $U \in B$, является отделимым. Действительно, пусть $x \in C(L)$ и $x \neq 0$. Тогда существует $f \in L$ такой, что $|f(x)| = \varepsilon > 0$. Но $E' = \bigcup_{U \in B} U^\circ$, поэтому f принадлежит некоторому $U^\circ \cap L$.

Множество $V_\varepsilon, U^\circ \cap L = \{x \in C(L) : |f(x)| < \varepsilon \text{ (} f \in U^\circ \cap L)\}$ является окрестностью нуля в $C(L)$ и не содержит x , т. е. $C(L)$ отделимо. Теперь справедливость замечания следует из того, что полное подпространство отделимого пространства замкнуто.

Пусть теперь E — векторная решетка, в которой существует элемент $e > 0$ такой, что для каждого $x \neq 0$ ($x \in E$) множество положительных чисел t , для которых $-te \leq x \leq te$, не пусто и имеет нижнюю грань, отличную от нуля. Эту нижнюю грань обозначим через $\|x\|_e$. Легко показать, что $\|x\|_e$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Обозначим через E_e векторную решетку E , наделенную этой нормой. Тогда, если E_e полно, то оно изоморфно и изометрично некоторому $C(S)$ с компактным S (теорема Крейнов — Какутани [1, 2]). Ниже мы получим обобщение этой теоремы.

Пусть U — произвольная замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в локально выпуклом пространстве E и

$N(U) = \{x \in E : nx \in U \text{ при любом } n = 1, 2, \dots\}$. Будем обозначать через $\dot{x}$ элемент вектор-пространства $E(U) = E|_{N(U)}$, который соответствует элементу $x \in E$, и условимся наделять $E(U)$ топологией, которая определяется нормой $p_U(\dot{x}) = p_U(x)$, где $p_U(x) = \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$. Далее наделим векторное пространство $E'(U^0) = \{f \in E' : f \in \rho U^0 \text{ для некоторого } \rho > 0\}$ нормой $p_{U^0}(f) = \inf \{\lambda > 0 : f \in \lambda U^0\}$. Каждый $f \in E'(U^0)$ порождает на нормированном пространстве $E(U)$ непрерывный линейный функционал $\dot{f}$, который определяется формулой $\dot{f}(\dot{x}) = f(x)$ для всех $x \in E$ и имеет норму $p(\dot{f}) = \sup \{|\dot{f}(\dot{x})| : x \in U\} = p_{U^0}(f)$. Поскольку таким образом получаются все непрерывные линейные функционалы на $E(U)$, то сильное сопряженное $E(U)'$ отождествляется с пространством $E'(U^0)$. Так как $\dot{U} = \{\dot{x} : p_U(\dot{x}) \leq 1\}$ — единичный шар в $E(U)$, то $\dot{U}^0$ — единичный шар в сильном сопряженном $E(U)'$, поэтому U^0 отождествляется с $\dot{U}^0$. Далее ясно, что если U — нормально, то $N(U)$ является идеалом и, следовательно, $E(U) = E/N(U)$ будет векторной решеткой.

Теорема 4. Пусть E — векторная решетка с топологией T , удовлетворяющей следующему условию: существуют ф. с. о. н. $\mathcal{B} = \{U\}$, состоящая из замкнутых нормальных подрешеток, и элемент $e \in E$ такие, что при каждом $U \in \mathcal{B}$ элемент $\dot{e} = e + N(U)$ является внутренней точкой множества положительных элементов нормированного пространства $E(U)$. Тогда T является топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности σ слабокомпактных множеств из $N = \{f \in L : f(e) = 1\}$

Замечание. В качестве σ можно взять совокупность множеств $V^0 \cap N$, где V пробегает любую ф. с. о. н. в E .

Доказательству предположим следующую лемму.

Лемма 4. Пусть E — топологическое M -пространство и $U \neq E$ — замкнутая окрестность нуля в E , являющаяся нормальной подрешеткой, для которой существует элемент $e \in E$ такой, что $\dot{e} = e + N(U)$ является внутренней точкой множества положительных элементов нормированного пространства $E(U)$. Тогда множество $\partial U^0 \cap L = \{f \in L : \sup |f(U)| = 1\}$ не пусто и $\inf \{f(e) : f \in \partial U^0 \cap L\} > 0$.

Доказательство. Возьмем $x \in U$. Тогда в силу следствия 2 из предложения 3 существует $f \in L$ такой, что $|f(x)| > 1$ и $\sup |f(U)| \leq 1$. Поскольку, очевидно, $\sup |f(U)| > 0$, то умножением на положительный скаляр можно добиться, чтобы $\sup |f(U)| = 1$, что и означает, что $f \in \partial U^0 \cap L$. Покажем теперь, что $\inf \{f(e) : f \in \partial U^0 \cap L\} > 0$.

Множество $\partial U^0 \cap L$ совпадает с множеством $\partial \dot{U}^0 \cap L = \{f \in L \subset E(U)' : \sup |f(\dot{U})| = 1\}$ в $E(U)'$. Пусть $\dot{V} = \{\dot{x} \in E(U) : |\dot{x}| \leq \dot{e}\}$. Так как $\dot{U}$ — единичный шар в $E(U)$, являющийся

нормальным множеством (лемма 1), то существует $\rho > 0$ такое, что $\dot{V} \subset \rho \dot{U}$. Далее, так как $\dot{e}$ — внутренняя точка множества положительных элементов пространства $E(U)$, то существует шар радиуса δ с центром в $\dot{e}$, который состоит из положительных элементов. Следовательно, если $\rho_U(\dot{x}) \leq \frac{\delta}{2}$, то $\dot{e} \pm \dot{x} \geq 0$, т. е. $|\dot{x}| \leq \dot{e}$. Отсюда следует, что $\frac{\delta}{2} \dot{U} \subset \dot{V}$, поскольку $\dot{U} = \{\dot{x} : \rho_U(\dot{x}) \leq 1\}$. Таким образом, существуют $\alpha, \lambda > 0$ такие, что $\lambda \dot{V}^0 \subset \dot{U}^0$, а $\alpha \dot{U}^0 \subset \lambda \dot{V}^0$. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \partial(\lambda \dot{V}^0) \cap L &= \partial\left(\frac{1}{\lambda} \dot{V}\right)^0 \cap L = \{f \in L \subset E(U)' : \sup |f(\dot{V})| = \\ &= \lambda\} = \{f \in L \subset E(U)' : f(\dot{e}) = \lambda\}. \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь следует из монотонности f и вида самого $\dot{V}$. Пусть теперь $f \in \partial \dot{U}^0 \cap L$. Тогда $\alpha f \in \lambda \dot{V}^0 \cap L$. Возьмем $\beta > 0$ такое, что $\beta \alpha f \in \partial(\lambda \dot{V}^0) \cap L$. Ясно, что $\beta \leq \frac{1}{\alpha}$, так как в противном случае $\beta \alpha > 1$ и $\beta \alpha f \in \dot{U}^0$, что противоречит тому, что $f \in \partial \dot{U}^0$. Тогда $\beta \alpha f(\dot{e}) = \lambda$, а $f(\dot{e}) = \frac{\lambda}{\beta \alpha} \geq \lambda > 0$. Так как $f \in \partial \dot{U}^0 \cap L$ было произвольно, то $\inf \{f(\dot{e}) : f \in \partial \dot{U}^0 \cap L\} \geq \lambda > 0$, а значит, и $\inf \{f(\dot{e}) : f \in \partial \dot{U}^0 \cap L\} > 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $N = \{f \in L : f(\dot{e}) = 1\}$. Покажем, что множества $\lambda(U^0 \cap N)^0$, где $\lambda > 0$, а $U \in \mathcal{B}$, образуют ф. с. о. н. для T . Для этого достаточно показать, что для любого $U \in \mathcal{B}$ существуют $V \in \mathcal{B}$ и $\lambda > 0$ такие, что $\lambda(V^0 \cap N)^0 \subset U$. (Будем считать, что $U \neq E$, так как в случае $U = E$ утверждение тривиально). Итак, пусть $U \in \mathcal{B}$ ($U \neq E$). Возьмем $\lambda > 1$ такое, чтобы $e \in \lambda U$. Пусть далее $\alpha = \inf \{f(\dot{e}) : f \in \partial(\lambda U^0) \cap L\}$. В силу леммы 4 $\alpha > 0$.

Покажем теперь, что $\left(\frac{1}{\alpha} U^0 \cap N\right)^0 \subset \lambda U$. Действительно, пусть $x \in \lambda U$. Тогда в силу следствия 2 из предложения 3 существует $f \in L$ такой, что $|f(x)| > 1$, а $\sup |f(\lambda U)| \leq 1$. Так как $\sup |f(\lambda U)| > 0$, то умножением (если нужно) на положительный скаляр можно добиться того, чтобы $\sup |f(\lambda U)| = 1$, т. е. чтобы $f \in \partial(\lambda U^0) \cap L$. Пусть теперь $f(\dot{e}) = \beta$. Очевидно, что $\alpha \leq \beta \leq 1$. (Если бы $\beta > 1$, то, поскольку $e \in \lambda U$, имели бы $\sup |f(\lambda U)| > 1$). Имеем $\frac{1}{\beta} f \in N$ и $\left|\frac{1}{\beta} f(x)\right| > \frac{1}{\beta} \geq 1$. Далее, поскольку $f \in (\lambda U)^0$, то $\frac{1}{\beta} f \in \frac{1}{\beta \lambda} U^0 \subset \frac{1}{\beta} U^0 \subset \frac{1}{\alpha} U^0$, т. е. $\frac{1}{\beta} f \in (\alpha U)^0 \cap N$. А так как $\left|\frac{1}{\beta} f(x)\right| > 1$, то $x \in ((\alpha U)^0 \cap N)^0$. Итак, мы доказали, что $\frac{1}{\lambda} ((\alpha U)^0 \cap N)^0 \subset U$, т. е. множества вида $\mu(U^0 \cap N)^0$, где $\mu > 0$, а $U \in \mathcal{B}$, образуют ф. с. о. н. для T . Далее

множество N , очевидно, слабо замкнуто, и следовательно, множества $U^0 \cap N$ слабо компактны. Этим теорема доказана.

Замечание будет доказано, если мы покажем, что для произвольной ф. с. о. н. $B' = \{V\}$ множества вида $\lambda(V^0 \cap N)^0$, где $\lambda > 0$, будут образовывать ф. с. о. н. для T . Действительно, пусть W — произвольная окрестность нуля. Тогда существуют $U \in B$ и $\lambda > 0$ такие, что $\lambda(U^0 \cap N)^0 \subset W$. Взяв $V \subset U$, получим $\lambda(V^0 \cap N)^0 \subset W$, что и требовалось.

Следующая теорема является обобщением теоремы Крейнов-Какутани.

Теорема 5. Пусть E — векторная решетка с отделимой топологией, для которой выполняются условия теоремы 4. Тогда E изоморфна всюду плотной линейной подрешетке некоторого пространства $C(S)$, наделенного топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности σ компактных множеств из S .

Замечание 1. В качестве S можно взять множество $N = \{f \in L : f(e) = 1\}$, наделенное топологией, индуцируемой слабой топологией из E' , а в качестве σ — совокупность множеств $U^0 \cap N$, где U пробегает ф. с. о. н. в E .

Доказательство. Наделим $N = \{f \in L : f(e) = 1\}$ топологией, индуцируемой слабой топологией из E' , и покажем, что E изоморфно линейной подрешетке $M(N)$ пространства $C(L)$, наделенного топологией равномерной сходимости на множествах $U^0 \cap N$, где U пробегает ф. с. о. н. в E . Это делается таким же образом, как в доказательстве теоремы 3.

Заметим теперь, что $M(N)$ содержит ненулевую константу и отделяет точки из N . Действительно, элементу $e \in E$ соответствует $\varphi_e \in M(N)$, для которой $\varphi_e(f) = f(e) = 1$ для всех $f \in N$. Далее, пускай $f_1, f_2 \in N$ и $f_1 \neq f_2$. Тогда существует $x \in E$ такой, что $f_1(x) \neq f_2(x)$, а значит, для $\varphi_x \in M(N)$ $\varphi_x(f_1) \neq \varphi_x(f_2)$.

Покажем теперь, что $M(N)$ плотно в $C(N)$. Возьмем любую $x \in C(N)$ и покажем, что в любой ее окрестности $x + V_{\varepsilon, K}$, где $V_{\varepsilon, K} = \{z \in C(N) : |z(f)| < \varepsilon (f \in K = U^0 \cap N)\}$, имеется $y \in M(N)$. Рассмотрим пространство $C(K)$ всех непрерывных функций на компактном множестве K . Сужения функции x и всех функций из $M(N)$ на K принадлежат $C(K)$. Пусть $M(K)$ множество всех функций из $C(K)$, являющихся сужениями функций из $M(N)$. Ясно, что $M(K)$ отделяет точки из K , содержит ненулевую константу и является линейной подрешеткой пространства $C(K)$. По теореме Стоуна-Вейерштрасса существует $y \in M(K)$ такая, что $|x(f) - y(f)| < \varepsilon$ для всех $f \in K$. Но тогда функция $\bar{y} \in M(N)$, сужением которой является y , принадлежит окрестности точки $x + V_{\varepsilon, K}$, что и требовалось.

Замечание 2. Если в теореме 5 потребовать полноту E , то E изоморфно всему $C(S)$.

Доказательство этого замечания подобно доказательству замечания к теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, С. Г. Крейн. «Докл. АН СССР». 27 (1940) 427—431.
2. S. Kakutani. Ann. Math., (2), 42 (1941), 994—1024.
3. I. Jameson. Math. Z., 100, 29—35 (1967).
4. I. Jameson. Math. Z., 103, (2), 139—150 (1968).
5. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
6. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л., 1950.
7. Биркгоф. Теория структур, М., 1952.
8. H. Gordon. Duke Math. J., 27 № 4 (1960), 597.
9. М. Дэй. Нормированные линейные пространства, Изд-во иностр. лит., 1961.
10. А. И. Векслер. Уч. зап. Лен. Гос. Пединститута им. А. И. Герцена, т. 183, 107—128 (1958).
11. A. L. Peressini. Ordered topological vector spaces, New York, 1967.
12. G. T. Roberts. Proc. Cambr. Philos. Soc., 48, (1952), 533—546.

МЕРОМОРФНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Г. Б. Клебанова

Наряду с аналитическими в среднем квадратичном случайными процессами можно рассматривать мероморфные случайные процессы. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ в некоторой окрестности фиксированной точки t_0 имеет разложение (в среднем квадратичном) вида

$$\xi(t) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \quad (1)$$

где c_k — вещественные случайные величины, причем $Mc_k^2 < \infty$.

Если $c_{-n} \neq 0$, то точку t_0 назовем фиксированным полюсом кратности n процесса $\xi(t)$.

Случайный процесс

$$r(t, t_0) = \sum_{k=-n}^{-1} c_k (t - t_0)^k$$

назовем главной частью процесса $\xi(t)$ в полюсе t_0 .

Рассмотрим разностное уравнение

$$\sum_{k=1}^m A_k \xi(t + \alpha_k) = 0 \quad (2)$$

со случайными коэффициентами A_k и неслучайными сдвигами $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$.

Если задана последовательность точек t_i , $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ в полосе начальных данных уравнения (2) [1] и последовательность случайных процессов

$$r(t, t_i) = \sum_{k=-n_i}^{-1} c_{ki} (t - t_i)^k,$$

то можно построить мероморфный в комплексной плоскости случайный процесс $\xi(t)$, являющийся решением уравнения (2), имеющий в полосе начальных данных полюсы в точках t_i и только в них, с главными частями $r(t, t_i)$, причем полюсы и соответствующие им главные части процесса $\xi(t)$ вне полосы начальных данных определены однозначно.

Мероморфные случайные процессы появляются при изучении стохастических дифференциально-разностных уравнений вида

$$A_1(t) \xi(t + \alpha_1) + A_n(t) \xi(t + \alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^m A_{kl}(t) \xi^l(t + \alpha_k) = G(t),$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ — неслучайные сдвиги, $A_1(t)$, $A_{kl}(t)$, $A_n(t)$ — аналитические случайные процессы, $G(t)$ — аналитический или мероморфный случайный процесс [1–3].

Пусть в точке t_0 случайный процесс $\xi(t)$ имеет полюс кратности n . Если $Mc_{-n} \neq 0$, то почти все реализации процесса $\xi(t)$ имеют в точке t_0 полюс кратности n . Ковариация процесса

$$B(t, s) = \sum_{k, l=-n}^{\infty} Mc_{kl} (t - t_0)^k (s - t_0)^l$$

имеет в точке (t_0, t_0) полюс кратности $2n$. Если бы она имела полюс кратности $2n - 2$, то $Mc_{-n}^2 = 0$, и функция

$$\hat{B}(t, s) = B(t, s) (t - t_0)^{n-1} (s - t_0)^{n-1}$$

была бы аналитической в точке (t_0, t_0) ковариацией случайного процесса $\hat{\xi}(t) = \xi(t) (t - t_0)^{n-1}$ и, следовательно, [4] почти все реализации процесса $\hat{\xi}(t)$ были бы аналитическими в точке t_0 . Но это возможно только при $c_{-n} = 0$, что противоречит предположению.

Лемма. Мероморфный случайный процесс $\xi(t)$ имеет в окрестности полюса ортогональное разложение* (1), только если этот полюс есть точка нуль, а ковариация процесса $B(t, s)$ является функцией произведения своих аргументов ts .

Доказательство. В самом деле, пусть разложение ортогонально, т. е. $Mc_{kl} = Mc_{kl}^2$. Ковариация процесса имеет вид

$$B(t, s) = \sum_{k=-n}^{\infty} Mc_k^2 (t - t_0)^k (s - t_0)^k.$$

Аналитическая функция

$$\hat{B}(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} Mc_{k-n}^2 (t - t_0)^k (s - t_0)^k$$

* Будем считать, что разложение (1) имеет более одного члена.

является ковариацией аналитического случайного процесса $\xi^\Lambda(t) = \xi(t)(t - t_0)^n$, имеющего ортогональное разложение. Поэтому [5] она является функцией произведения своих аргументов и, следовательно, $t_0 = 0$ и $B(t, s) = B(ts)$.

Можно рассматривать мероморфные случайные процессы со случайным полюсом t_0 , не зависящим от коэффициентов c_k . Тогда распределение случайной величины t_0 должно быть в некотором смысле близким к нулевому, а именно, если t_0 — полюс кратности n , то $Mt_0^k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Легко показать, что процесс, ковариация которого в окрестности точки $(0, 0)$ имеет вид $B(t, s) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k(ts)^k$, представим в окрестности нуля в виде ортогонального разложения.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, ковариация которого представима в виде

$$B(t, s) = \iint_{\Lambda \times \Lambda} f(t, \lambda) f(s, \mu) F(d\lambda, d\mu),$$

где Λ — некоторое множество вещественных параметров λ , $F(D, D')$, $D, D' \subset \Lambda$ спектральная мера, $\iint_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty$, а $f(t, \lambda)$ такова, что при всех $\lambda \in \Lambda$ функция

$$f_1(t, \lambda) = f(t, \lambda)(t - a_0) \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{t}{a_k}\right),$$

где $a_k \neq a_j$, $k \neq j$, относительно t может быть доопределена в комплексной плоскости до целой функции конечной степени $\sigma(\lambda)$, такой, что $\sup_{\Lambda} \sup_{-\infty < t < \infty} |f_1(t, \lambda)| = L < \infty$.

Предположим, что $\sup_{\Lambda} \sigma(\lambda) = \sigma < \infty$. Пусть задана вещественная последовательность $\{b_n\}_{-\infty}^{\infty}$, точки которой отличны от точек $a_0, a_1, \dots, a_r$ и такая, что $|b_n - n| \leq N_1$, $|b_n - b_m| \geq 2\delta_1$, $m \neq n$. Из точек $\{b_n\}$ и $a_0, a_1, \dots, a_r$ составим новую последовательность $\{\tau_n\}_{-\infty}^{\infty}$, перенумеруем ее члены так, чтобы $\tau_n > 0$ при $n > 0$ и $\tau_n < 0$ при $n < 0$.

Очевидно, что

$$|\tau_n - n| \leq N, \quad N = \frac{N_1}{2\delta_1} + N_1 + r + 1,$$

$$|\tau_n - \tau_m| \geq 2\delta, \quad m \neq n.$$

Введем следующие обозначения:

$$\psi(t) = (t - b_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod'_{-N} \left(1 - \frac{t}{b_k}\right),$$

$$\varphi(t) = (t - \tau_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod'_{-N} \left(1 - \frac{t}{\tau_k}\right),$$

штрих означает, что в произведении $k \neq 0$.

В дальнейшем понадобятся следующие оценки для функции $\varphi(t)$

$$|\varphi(x + iy)| > c_1 e^{\pi|y|} \left| \frac{y}{t^2} \right|^{2N} \text{ при } |y| > N; \quad (3)$$

$$|\varphi(x + iy)| > c_2 |x|^{-c_3}$$

при $|y| < N$ и всех x , таких, что

$$\tau_n + \frac{\delta}{2} \leq x \leq \tau_n + \delta \quad (4)$$

$$|\varphi'(\tau_n)| > c_4 |\tau_n|^{-(4N+1)}, \quad (5)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — константы, зависящие только от N и δ .

Оценки (3) и (5) имеются в [6], оценка (4) следует из (5) [7].

Теорема I. При всех $\lambda \in \Lambda$ для функции $f_1(t, \lambda)$ имеет место представление

$$f_1(t, \lambda) = \varphi(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\tau_k, \lambda) \omega(t - \tau_k)}{\varphi'(\tau_k)(t - \tau_k)}, \quad (6)$$

где

$$\omega(t) = \left(\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t} \right)^p, \quad p > \max(c_3, 4N),$$

а ε выбрано так, что

$$0 < \varepsilon p < \pi - \sigma,$$

причем для достаточно больших n

$$\left| f_1(t, \lambda) - \varphi(t) \sum_{-n}^n \frac{f_1(\tau_k, \lambda) \omega(t - \tau_k)}{\varphi'(\tau_k)(t - \tau_k)} \right| \leq \frac{|\varphi(t)| C(L, \sigma, N, \delta)}{n^{1+s}}, \quad (7)$$

где $C(L, \sigma, N, \delta)$ — некоторая константа, а $s > 0$.

Доказательство. Представление (6) функции $f_1(t, \lambda)$ вытекает из результатов работы [7], причем, как представление (6), так и оценка (7) получаются, если применить теорему Коши о вычетах к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{nR}} \frac{f_1(\zeta, \lambda) \omega(\zeta - t)}{\varphi'(\zeta)(\zeta - t)} d\zeta,$$

где C_{nR} контур, образованный прямыми $x = \lambda_n + \delta$, $x = \lambda_{-n} - \delta$, $y = iR$, $y = -iR$, а затем, используя (3), (4), (5), оценить этот интеграл.

Теорема II. Для почти всех выборочных функций случайного процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t) = \psi(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(b_k) \omega(t - b_k)}{\psi'(b_k)(t - b_k)} + \psi(t) \sum_{k=0}^r \frac{\eta_k \omega(t - a_k)}{\psi(a_k)(t - a_k)} \quad (8)$$

где η_k некоторые константы.

Доказательство. Построим вспомогательный случайный процесс

$$\hat{\xi}(t) = \xi(t) P(t),$$

где

$$P(t) = (t - a_0) \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{t}{a_k}\right).$$

Очевидно, что почти все реализации $\xi(t)$ — аналитические функции. По теореме Карунена о спектральном представлении случайный процесс $\hat{\xi}(t)$ имеет вид

$$\hat{\xi}(t) = \int_{\Lambda} f_1(t, \lambda) Z(d\lambda),$$

где $Z(D)$, $D \in \Lambda$ случайная спектральная мера, такая, что

$$MZ(D)Z(D') = F(D, D').$$

Рассмотрим также случайный процесс

$$\hat{\xi}_n = \varphi(t) \sum_{-n}^n \frac{\hat{\xi}(\tau_k) \omega(t - \tau_k)}{\varphi'(\tau_k)(t - \tau_k)}.$$

Используя оценку (7), получим

$$\begin{aligned} \sum_{(n)} M |\hat{\xi}(t) - \hat{\xi}_n(t)|^2 &\leq \\ &\leq |\varphi(t)|^2 C^2(L, \sigma, N, \delta) \iint_{\Lambda \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| \sum_{(n)} \frac{1}{n^{2(1+s)}} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{\xi}(t) = \varphi(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\xi}(\tau_k) \omega(t - \tau_k)}{\varphi'(\tau_k)(t - \tau_k)}, \quad (9)$$

и ряд в (9) сходится почти наверное при любом фиксированном t , причем равномерно, когда t меняется на ограниченном множестве. Почти все реализации процесса $\hat{\xi}(t)$ непрерывны, и поэтому представление (9) справедливо для почти всех реализаций $\hat{\xi}(t)$ при любом t . Так как $\varphi'(b_k) = P(b_k)\psi'(b_k)$, $\varphi(a_k) = P'(a_k)\psi(a_k)$, то почти для всех реализаций случайного процесса $\xi(t)$ справедливо представление

$$\xi(t) = \psi(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(b_k) \omega(t - b_k)}{\psi'(b_k)(t - b_k)} + \psi(t) \sum_{k=0}^r \frac{\eta_k \omega(t - a_k)}{\psi(a_k)(t - a_k)},$$

где η_k — реализации случайной величины $\eta_k = \int g_k(\lambda) Z(d\lambda)$, а $g_k(\lambda)$ — вычет функции $f(t, \lambda)$ в точке a_k .

Автор пользуется случаем поблагодарить А. А. Янцевича за постановку задачи и ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Нафтаlevич. О мероморфных решениях разностного уравнения. «УМН», 14:4, 1959.
2. А. Г. Нафтаlevич. О мероморфных решениях дифференциально-разностного уравнения, «УМН», 16:3, 1961.
3. А. Г. Нафтаlevич. О применении метода итераций для решения разностного уравнения. «Математический сборник», 57(99), № 2, 1962.
4. Ю. К. Беляев. Аналитические случайные процессы. «Теория вероятностей и ее применения», IV, № 4, 1959.
5. М. Лозе. Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.
6. Б. Я. Левин. О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек. «ДАН СССР», 65, 1949.
7. Q. I. Rahman. Interpolation of Entire Functions. American Journal of Mathematics 87, N 4, 1965.

О КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ КВАЗИМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

1. Основная задача работы состоит в изложении некоторых методов конструктивной теории случайных процессов.

При решении прикладных задач требуется определить статистические характеристики случайного процесса $x(t)$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению высокого порядка по времени. В частности, одними из важнейших характеристик являются совместные плотности распределения вероятностей координат, скоростей и ускорений всех порядков $W(x, t)$, $W(x, \dot{x}, t)$, $W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, $W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, t)$, согласованных между собой [1]:

$$\left. \begin{aligned} W(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x}, t) d\dot{x}, \\ W(x, \dot{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) d\ddot{x}, \\ W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, t) d\ddot{\ddot{x}}. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В свою очередь для координатного пространства $[x]$:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x}, x, t) dx d\dot{x}, \\ W(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t) dx d\dot{x} d\ddot{x} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, без некоторых дополнительных предположений нельзя заранее оборвать «цепочку» связей между законами распределений (1), (2).

Известно [1], что плотности распределения вероятностей удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W(x, \dot{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W(x, \dot{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} [\ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)] &= 0, \\ \frac{\partial W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)] + \\ + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} [\ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} [\ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t)] &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Интегрируя соотношения (3), получаем законы сохранения для плотностей распределения вероятностей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} W(x, \dot{x}, t) d\dot{x} &= 0 \\ \frac{\partial W(x, \dot{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W(x, \dot{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) d\ddot{x} &= 0 \\ \frac{\partial W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)] + \\ + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} [\ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}, t) d\ddot{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как видно из (4), цепочка уравнений является незамкнутой и без дополнительных предположений невозможно замкнуть эту систему уравнений.

Широким классом случайных процессов, для некоторых удается замкнуть систему (4) естественным образом, являются процессы, представляющие собой решения стохастических дифференциальных уравнений, так как эти уравнения как раз и являются теми дополнительными связями, которые приводят к замыканию. Однако возможен и другой путь, в некотором смысле обратный только

что указанному: постулирование дополнительных соотношений между плотностями распределения вероятностей, а затем составление (в общем случае, конечно, неоднозначное) соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. Такой путь нам кажется естественным, так как постулируются связи не между неизвестными функциями, а между интегралами от этих функций, представляющих собой какие-то средние значения. Например, оборвем цепочку уравнений (4) на первом уравнении:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\langle \dot{x} \rangle W(x, t)] = 0, \quad (5)$$

где

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} W(x, \dot{x}, t) d\dot{x}}{W(x, t)}. \quad (6)$$

Известно, что «поток» вероятности определяется следующим образом [1], [2]:

$$G(x, t) = \langle \dot{x} \rangle W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} W(x, \dot{x}, t) d\dot{x}. \quad (7)$$

Как видно из (7), для определения $G(x, t)$ и тем самым получения уравнения только для $W(x, t)$, требуется найти среднюю локальную скорость $\langle \dot{x} \rangle$. Если в соотношении (7) для нахождения средней локальной скорости привлекаются дополнительные гипотезы, не вытекающие из законов сохранения, то $\langle \dot{x} \rangle$ можно рассматривать как некоторый оператор, задаваемый конструктивно.

Например, предположим, что

$$\begin{aligned} G(x, t) = \langle \dot{x} \rangle W(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} W(x, \dot{x}, t) d\dot{x} = \\ &= A_1(x) W(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [A_2(x) W(x, t)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_1(x) W(x, t)$ — систематическая часть потока,

$\frac{\partial}{\partial x} [A_2(x) W(x, t)]$ — диффузионная часть потока.

Из (8) следует, что оператор, соответствующий средней локальной скорости $\langle \dot{x} \rangle$, имеет вид

$$L_x = \langle \dot{x} \rangle = A_1(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [A_2(x)].$$

Используя (5) и (8), получаем уравнение для $W(x, t)$:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [A_1(x) W(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x) W(x, t)] = 0; \quad (9)$$

Теперь можно построить стохастическое дифференциальное уравнение среды (системы), решение которого имеет заданные локальные характеристики $A_1(x)$ и $A_2(x)$ [3]. Умножая (9) на x и интегрируя по x в пределах $\pm\infty$, находим

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} - \langle A_1(x) \rangle = 0. \quad (10)$$

Из (10) видно, что в качестве модельного стохастического дифференциального уравнения можно взять уравнение:

$$\frac{dx}{dt} - A_1(x) = F(x, t), \quad (11)$$

где случайная часть $F(x, t)$ такова, что $\langle F(x, t) \rangle = 0$, а вычисленный по уравнению (11) коэффициент «диффузии» совпадает с $A_2(x)$. Например, если в качестве модельного стохастического дифференциального уравнения взять уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} + x = \xi(t), \quad (12)$$

где $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi \xi_\tau \rangle = S_\xi \delta(\tau)$, то по необходимости

$$A_1(x) = -x.$$

Для определения $A_2(x)$ умножим (9) на x и проинтегрируем по x в пределах $\pm\infty$. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} - \langle A_1(x) x \rangle = \langle A_2(x) \rangle. \quad (13)$$

Умножая (11) на x и усредняя, находим

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} + \langle x^2 \rangle = \langle x \cdot \xi(t) \rangle. \quad (14)$$

Так как $\langle x \cdot \xi \rangle = S_\xi$, то из (13) и (14) по необходимости вытекает, что

$$A_2(x) = S_\xi. \quad (15)$$

Следовательно, предложенная схема привела в точности к уравнению ФПК:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xW] + \frac{S_\xi}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Указанный выше подход для некоторых задач диффузии и теплопроводности, связанный с учетом конечной скорости, предложили И. М. Лифшиц и Г. Я. Любарский, а для вероятностного описания динамических систем второго порядка и выше этот подход был развит в работах [4], [5].

2. В случае динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями n -го порядка уравнение для одномерного потока $G(x, t)$ постулируется в виде:

$$L_t [G(x, t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} [A_k(x) W(x, t)]. \quad (17)$$

Если

$$L_t = a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1, \quad (18)$$

а $A_k \equiv 0$, при $k > 3$, то уравнение для потока следующее:

$$a_n \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{\partial G}{\partial t} + a_1 G = A_1(x) W(x, t) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} [A_2(x) W(x, t)], \quad (19)$$

где

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int G(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) dx d\dot{x} \dots dx^{(n-1)},$$

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) dx d\dot{x} \dots dx^{(n-1)}.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности

$$\frac{\partial W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) + \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\ddot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)] + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} [\dot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} [x^{(4)} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)] + \dots +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^{(n-1)}} [x^{(n)} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}, t)] = 0.$$

Интегрируя по $x^{(n)}$, находим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W] + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} [\ddot{x} W] + \frac{\partial}{\partial x} [\dot{x} W] + \dots + \\ + \frac{\partial}{\partial x^{(n-2)}} [x^{(n-1)} W] + \frac{e}{\partial x^{(n-1)}} [\langle x^{(n)} \rangle W] = 0, \quad (21)$$

где

$$W = W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t).$$

Умножим (21) на произвольную функцию $\varphi(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots, x^{(n-1)})$ и проинтегрируем по $\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots, x^{(n-1)}$ в пределах $\pm\infty$, тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \dot{x} \varphi W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ddot{x} W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ddot{\ddot{x}} W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} x^{(4)} W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} - \dots - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n-2)}} x^{(n-1)} W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} - \\ & - \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n-1)}} \langle x^n \rangle W d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Пусть $\varphi(\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \equiv 1$. Тогда из (22) следует

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\langle \dot{x} \rangle W(x, t)] = 0, \quad (23)$$

где учтено, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} = W(x, t),$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int \dot{x} W(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) d\dot{x} d\ddot{x} \dots dx^{(n-1)} = \langle \dot{x} \rangle W(x, t).$$

Запишем уравнение для $W(x, t)$. Используя уравнения (23), (19) и исключая поток $G(x, t) = \langle \dot{x} \rangle W(x, t)$, получаем:

$$\begin{aligned} a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A_1(x) W] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x) W]. \end{aligned} \quad (24)$$

Найдем теперь соответствующее (24) модельное стохастическое дифференциальное уравнение. Для этого умножим (24) на x и проинтегрируем по x в пределах $\pm\infty$, тогда получим:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} - \langle A_1(x) \rangle = 0. \quad (25)$$

Очевидно, что (25) по виду может отличаться от стохастического дифференциального уравнения аддитивным случайным слагаемым, среднее от которого равно нулю. Рассмотрим некоторые частные случаи.

3. Пусть модельное стохастическое уравнение имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + x = \xi(t), \quad (26)$$

причем

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = S_\xi \delta(\tau).$$

Определим, чему равно $A_1(x)$ в этом случае. Усредняя (26) и сопоставляя с (25), находим

$$\langle A_1(x) \rangle = -\langle x \rangle, \quad (27)$$

или

$$A_1(x) = -x.$$

Определим $\langle A_2(x) \rangle$. Для этого умножим (24) на x^2 и проинтегрируем по x в пределах $\pm \infty$:

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \langle x A_1(x) \rangle + \langle A_2(x) \rangle. \quad (28)$$

Умножим (26) на x и усредним:

$$a_n \left\langle x \frac{d^n x}{dt^n} \right\rangle + \dots + a_2 \left\langle x \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle + a_1 \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle + \langle x^2 \rangle = \langle \xi x \rangle. \quad (29)$$

Учтем, что

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d x^2}{dt}; \quad x \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - F_2(\dot{x}); \\ x \frac{d^3 x}{dt^3} &= \frac{1}{2} \frac{d^3 x^2}{dt^3} - F_3(\dot{x}, \ddot{x}); \\ x \frac{d^4 x}{dt^4} &= \frac{1}{2} \frac{d^4 x^2}{dt^4} - F_4(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}), \\ &\dots \dots \dots \\ x \frac{d^n x}{dt^n} &= \frac{1}{2} \frac{d^n x^2}{dt^n} - F_n(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_2(\dot{x}) &= \left(\frac{dx}{dt} \right)^2; \quad F_3(\dot{x}, \ddot{x}) = 3 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ F_4(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) &= 3 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^3 x}{dt^3} \right); \\ F_5(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots) &= 5 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^4 x}{dt^4} \right) - 10 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{d^3 x}{dt^3} \right); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подставляя (30), (31) в (29) и усредняя, получаем:

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x^2 \rangle = \\ = 2 \langle \xi x \rangle + \langle F(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots) \rangle. \quad (32)$$

Так как $\langle \xi x \rangle = 0$, то

$$\frac{1}{2} \langle A_2(x) \rangle = \langle F(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots, x^{(n-1)}) \rangle.$$

Таким образом, в рассматриваемом (гауссовском) случае

$$\frac{1}{2} \langle A_2(x) \rangle = S_\xi I_2, \quad (33)$$

где I_2 — интегральная квадратичная оценка процесса $x(t)$, определяемая из уравнения (25):

$$I_2 = \int_0^\infty G^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(p) G(-p) dp, \quad (34)$$

где $G(t)$ — соответствующая функция веса.

Уравнение для плотности распределения вероятностей $W(x, t)$ в этом случае принимает вид

$$a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot W] + \sigma_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (35)$$

где $\sigma^2(x) = S_\xi I_2$ — дисперсия процесса $x(t)$.

4. Рассмотрим модельное стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + f(x) = \sqrt{B(x)} \xi(t), \quad (36)$$

где

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = \delta(\tau).$$

Определим $A_1(x)$ и $A_2(x)$ в случае (36). Для этого умножим (24) вначале на x и, интегрируя по x в пределах $\pm \infty$, получим уравнение:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} - \langle A_1(x) \rangle = 0. \quad (37)$$

Усреднив (36), найдем, что

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + \langle f(x) \rangle = 0. \quad (38)$$

Сравнивая (37) и (38), получаем

$$\langle A_1(x) \rangle = - \langle f(x) \rangle,$$

или

$$A_1(x) = -f(x). \quad (39)$$

Для определения $A_2(x)$ умножим (24) на x^2 и проинтегрируем по x в пределах $\pm \infty$:

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \langle x A_1(x) \rangle - \langle A_2(x) \rangle. \quad (40)$$

Умножая (36) на x и усредняя, имеем:

$$a_n \left\langle x \frac{d^n x}{dt^n} \right\rangle + \dots + a_2 \left\langle x \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle + a_1 \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle + \langle x f(x) \rangle = \langle \xi x \sqrt{B(x)} \rangle. \quad (41)$$

Подставляя (30), (31) с учетом усреднения в (41), находим:

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x f(x) \rangle = 2 \langle \xi x \sqrt{B(x)} \rangle + \langle F(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}} \dots) \rangle, \quad (42)$$

где

$$\langle \xi x \sqrt{B(x)} \rangle = 0.$$

Сравнивая коэффициенты в (40) и (42), имеем

$$\frac{1}{2} \langle A_2(x) \rangle = \langle F(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}} \dots) \rangle. \quad (43)$$

Таким образом, уравнение для $W(x, t)$ в рассматриваемом случае принимает вид

$$a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\langle F(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}} \dots) \rangle W]. \quad (44)$$

В частности, когда $f(x) = x$, и $B(x) = B_0 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \dots$, коэффициент «диффузии» симметричен и $\langle \dot{x} \ddot{x} \rangle = 0$, $\langle \dot{x} \ddot{\ddot{x}} \rangle = -\langle \ddot{x}^2 \rangle$; $\langle \ddot{\ddot{x}} \ddot{\ddot{x}} \rangle = 0$; $\langle \dot{x} x^{(4)} \rangle = 0$ и т. д.

Тогда

$$\frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = \langle F_0(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}} \dots) \rangle = B(x) I_2. \quad (45)$$

Так, например, для уравнения (42) при $n = 2$

$$\frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = \frac{B(x)}{2a_1} = \sigma^2(x). \quad (46)$$

Следовательно, уравнение для $W(x, t)$ принимает вид

$$a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xW] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x) W] \quad (47)$$

Для $n=3$ имеем:

$$\sigma^2(x) = \frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = \frac{a_2 B(x)}{2(a_1 a_2 - a_3)} = 3a_3 \langle \dot{x} \ddot{x} \rangle - a_2 \langle \dot{x}^2 \rangle. \quad (48)$$

Тогда

$$a_3 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xW] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x) W]. \quad (49)$$

В случае $n=4$, уравнение для $W(x, t)$ имеет вид:

$$a_4 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + a_3 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [xW] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x) W], \quad (50)$$

где

$$\sigma^2(x) = \frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = 3a_4 \langle \ddot{x}^2 \rangle + 4a_4 \langle \dot{x} \dddot{x} \rangle + 3a_3 \langle \dot{x} \ddot{x} \rangle + a_2 \langle \dot{x}^2 \rangle,$$

причем, для случая четной симметрии

$$\sigma^2(x) = \frac{B(x)(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{2(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)}. \quad (51)$$

При $n=5$, имеем:

$$a_5 \frac{\partial^5 W}{\partial t^5} + a_4 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + a_3 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{d}{dx} [xW] + \frac{d^2}{dx^2} [\sigma^2(x) W], \quad (52)$$

где дисперсия $\sigma^2(x)$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) = \frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = & 5a_5 \langle \dot{x} x^{(4)} \rangle + 10a_5 \langle \ddot{x} \dddot{x} \rangle + \\ & + 3a_4 \langle \ddot{x}^2 \rangle + 4a_4 \langle \dot{x} \dddot{x} \rangle + 3a_3 \langle \dot{x} \ddot{x} \rangle + a_2 \langle \dot{x}^2 \rangle. \end{aligned}$$

В случае четной симметрии коэффициента «диффузии»

$$\langle \dot{x} \ddot{x} \rangle = 0; \quad \langle \dot{x} \dddot{x} \rangle = -\langle \dot{x}^2 \rangle; \quad \langle \ddot{x} \dddot{x} \rangle = 0; \quad \langle \dot{x} x^{(4)} \rangle = 0, \quad (53)$$

тогда

$$\sigma^2(x) = \frac{\langle A_2(x) \rangle}{2} = -a_4 \langle \ddot{x}^2 \rangle + a_2 \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{B(x)}{2\Delta_5} m_4, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= -a_3 + a_1 a_2, \quad m_2 = a_1 a_4 - a_5, \\ m_3 &= a_2 m_2 - a_4 m_1, \quad m_4 = a_2 m_3 - a_4 m_2, \quad \Delta_5 = a_1 m_4 - a_3 m_3 - a_5 m_2. \end{aligned}$$

Интересно заметить, что в случае линейного модельного уравнения с постоянными коэффициентами требованию положительности дисперсии соответствуют условия известной теоремы Гурвица.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Власов Статистические функции распределения. «Наука», М., 1966.
2. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. «Сов. радио», М., 1961.
3. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. «Наука», М., 1966.
4. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием. «Вестник ХГУ, серия мех.-мат.», № 53, вып. 34, 1970.
5. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Уравнения для одномерных плотностей распределения вероятностей в случае линейных динамических систем второго порядка. «Вестник ХГУ, серия мех.-мат.», № 53, вып. 34, 1970.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОСТАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

1. При рассмотрении случайных последовательностей и процессов для восстановления симметрии между прошлым и будущим С. Н. Бернштейн [1] предложил рассматривать такие последовательности случайных величин x_k , что закон вероятностей $p_{ikl}(x_{k-i}, x_k, x_{k+l})$ станет определенным только после того, как известно одно из предшествующих значений x_{k-i} и одно последующее значение x_{k+l} , причем эта вероятность не изменяется, если дополнительно задаются значения x_i , предшествующие x_{k-1} , или следующие за x_{k+1} . Такие последовательности С. Н. Бернштейн называет стохастическими мостами или возвратными цепями. Все промежуточные звенья стохастического моста могут быть определены после того, как заданы первое x_1 и последнее x_n звенья. Как известно, в обычной марковской цепи все звенья x_k можно определить, если задано первое звено x_1 . Дополнительное задание x_n лишь изменяет соответствующие законы распределения x_k .

С. Н. Бернштейн предложил следующую схему образования стохастических мостов. Рассмотрим две независимые случайные переменные x' и x'' , которые образуют две марковских цепи противоположного направления с вероятностями перехода $p(x', t'/x'_0, t'_0)$ и $p(x'', t''/x'', t'')$. Предполагается, что лишь тогда, когда величины x' и x'' равны, интересующие нас величины x становятся доступными измерению, причем $x' = x'' = x$. В этом случае $W(x_0, t_0)$ и $W(x_1, t_1)$ имеют вид:

$$W(x_0, t_0) = \psi(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x_0, t_0) \varphi(x_1) dx_1, \quad (1)$$

$$W(x_1, t_1) = \varphi(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x_0, t_0) \psi(x_0) dx_0, \quad (2)$$

где

$$p(x_1, t_1/x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x, t) p(x, t/x_0, t_0) dx. \quad (3)$$

Функции $\psi(x'_0)$ и $\varphi(x''_0)$ являются начальными плотностями распределения вероятностей сопряженных величин x' и x'' , которые в дальнейшем будем называть компонентами стохастического моста, а плотность распределения вероятностей $W(x, t)$ представляется формулой:

$$\left. \begin{aligned} W(x, t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) dx_0 dx_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x, \\ &t) p(x, t/x_0, t_0) \psi(x_0) \varphi(x_1) dx_0 dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t/x_0, t_0) \psi(x_0) \times \\ &\times dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x, t) \varphi(x_1) dx_1 = \Psi(x, t) \Phi(x, t), \\ &(t_0 \leq t \leq t_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следует отметить, что с другой точки зрения стохастические мосты были рассмотрены Шредингером [2], причем, в его работе

$$p(x, t/x_0, t_0) = (V 4\pi D (t - t_0))^{-1} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{4D(t - t_0)} \right\}, \quad (5)$$

и

$$p(x_1, t_1/x, t) = (V 4\pi D (t_1 - t))^{-1} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - x)^2}{4D(t_1 - t)} \right\}, \quad (6)$$

Следовательно, функции $\Psi(x, t)$ и $\Phi(x, t)$ удовлетворяют сопряженным уравнениям вида:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (8)$$

2. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы установить связь между стохастическими мостами и стохастическими дифференциальными уравнениями. Если, например,

$$W(x_0, t_0) = \delta(x_0),$$

$$W(x_1, t_1) = (V 4h_1^2 \pi)^{-1} \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{4h_1^2} \right\},$$

то в случае Бернштейна-Шредингера имеем:

$$\begin{aligned} W(x, t) = \Psi(x, t) \Phi(x, t) &= \frac{t_1 - t_0}{V \pi A} \exp \left\{ -\frac{(t_1 - t_0)^2 x^2}{A} \right\}, \\ &(t_0 \leq t \leq t_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$A = 4(t - t_0)[(t - t_0)h_1^2 + D(t_1 - t)(t_1 - t_0)].$$

Уравнениям (7), (8) соответствуют сопряженные дифференциальные [см. 4].

$$\frac{dx'}{dt} = \sqrt{D}\xi(t); \quad \frac{dx''}{dt} = -\sqrt{D}\eta(t),$$

где

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \langle \eta \rangle = 0; \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = \delta(\tau); \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = \delta(\tau); \\ \langle \xi \eta_\tau \rangle &= \langle \eta \xi_\tau \rangle = 0. \end{aligned}$$

3. Продолжим рассмотрение некоторых частных случаев. Пусть

$$p(x, t/x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0R)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\},$$

где

$$\begin{aligned} R(t-t_0) &= \exp\{-\beta(t-t_0)\}, \\ D &= \sigma^2(1-R^2), \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$p(x_1, t_1/x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-xR)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\},$$

где

$$R(t_1-t) = \exp\{-\beta(t_1-t)\}, \quad D = \sigma^2(1-R^2).$$

В этом случае функции $\Psi(x, t)$ и $\Phi(x, t)$ удовлетворяют уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) + \frac{B}{x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Уравнениям (10), (11) соответствуют стохастические дифференциальные уравнения

$$\frac{dx'}{dt} + \beta x' = \sqrt{B}\xi(t)$$

и

$$-\frac{dx''}{dt} + \beta x'' = \sqrt{B}\eta(t),$$

причем,

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= 0; \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = \delta(\tau); \quad \langle \eta \rangle = 0; \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = \delta(\tau); \quad \langle \xi \eta_\tau \rangle = 0 \\ \sigma^2 &= \frac{B}{2\beta}; \quad R(\tau) = e^{-\beta(\tau)}; \quad K(\tau) = \sigma^2 R(\tau); \quad D(t) = \sigma^2 [1 - R^2(t)]. \end{aligned}$$

Плотность распределения вероятностей для стохастического моста $W(x, t) = \Psi(x, t) \Phi(x, t)$ может быть определена по решениям уравнений (10), (11).

Для стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx'}{dt} + A(x') = \sqrt{B(x')} \xi(t)$$

и

$$-\frac{dx}{dt} + A(x'') = \sqrt{B(x'')} \eta(t),$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= ax + b; \quad B(x) = cx^2 + dx + q; \quad a, b, c, d, q > 0; \\ \langle \xi \rangle &= \langle \eta \rangle = 0; \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = \delta(\tau); \quad \langle \xi \eta_\tau \rangle = \langle \eta \xi_\tau \rangle = 0, \\ \langle \eta \eta_\tau \rangle &= \delta(\tau) \end{aligned}$$

функции $\Phi(x, t)$ и $\Psi(x, t)$ удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x) \Psi] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) \Psi]$$

и

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{B(x)}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

4. Пусть компоненты x' , x'' стохастического моста являются квазимарковскими процессами. Тогда

$$W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) = p(x_1, t_1/x, t; x_0, t_0) W_2(x_0, t_0; x, t).$$

Так как

$$W_2(x_0, t_0; x, t) = p(x, t/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0),$$

то

$$\begin{aligned} W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) &= p(x_1, t_1/x, t; x_0, t_0) p(x, \\ &\quad t/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0). \end{aligned}$$

В этом случае [4]

$$W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) = (L_t)^{-1} p(x_1, t_1/x, t) p(x, t/x_0, t_0) W_1(x_0, t_0),$$

где $(L_t)^{-1}$ — оператор, учитывающий последствие. Если L_t не зависит от t_0 , то

$$\begin{aligned} W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) &= W_1(x_0, t_0) \int_{t_0}^{t_1} p(x_1, t_1/x, t - \Theta) p(x, \\ &\quad t - \Theta/x_0, t_0) K(\Theta) d\Theta, \end{aligned}$$

где $K(\Theta)$ — функция веса.

Для интервалов $t_0 - t_1$, которые превышают интервал корреляции процесса $x(t)$, имеем:

$$W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) = W_1(x_0, t_0) \left[\int_{t_0}^{t_1} p(x_1, t_1/x, t - \Theta) K(\Theta) d\Theta \right] \times \\ \times p(x, t/x_0, t_0),$$

или

$$W_3(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) = W_1(x_0, t_0) \left[\int_{t_0}^{t_1} p(x, t - \Theta/x_0, t_0) K(\Theta) d\Theta \right] \times \\ \times p(x_1, t_1/x, t),$$

в зависимости от выбора точки t на интервале t_0, t_1 . В общем случае имеем

$$W_{n+1}(x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \\ = W_1(x_0, t_0) \prod_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(x_k, t_k/x_{k-1}, t_{k-1} - \Theta_{k-1}) K(\Theta_{k-1}) d\Theta_{k-1}.$$

Получим уравнение для плотности распределения вероятностей стохастического моста в рассматриваемом случае. Для этого предположим, что величины x_0, x, x_1 образуют квазимарковскую цепь, определяемую вероятностями переходов

$$p(x, t/x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_0}^t p(x, t/x', t' - \tau) p(x', t' - \tau/x_0, t_0) K(\tau) d\tau \right] dx'$$

и

$$p(x_1, t_1/x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_t^{t_1} p(x_1, t_1/x'', t'' - \Theta) p(x'', t'' - \Theta/x, t) K(\Theta) d\Theta \right] dx''.$$

Пусть

$$W(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0; x', t'; x, t; x'', t''); \\ x_1, t_1) dx' dx'' = p(x, t/x_0, t_0) p(x_1, t_1/x, t) \psi(x_0) \varphi(x_1).$$

Тогда плотность распределения вероятностей процесса будет определяться выражением:

$$W(x, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x_0, t_0; x, t; x_1, t_1) dx_0 dx_1 = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_0}^t p(x, t/x', t' - \Theta) p(x', t' - \Theta/x_0, t_0) K(\Theta) d\Theta \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int_0^{t_1} p(x_1, t_1/x'', t'' - \tau) p(x'', t'' - \tau/x, t) K(\tau) d\tau \right] \times \\ & \times \psi(x_0) \varphi(x_1) dx_0 dx' dx'' dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t/x_0, t_0) \psi(x_0) dx_0 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x, t) \varphi(x_1) dx_1 = \Psi(x, t) \Phi(x, t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1). \end{aligned}$$

Начальные плотности распределения $\psi(x_0)$ и $\varphi(x_1)$ находятся из интегральных уравнений

$$\begin{aligned} W(x_0, t_0) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^t p(x, t/x', t' - \tau) p(x', t' - \tau/x_0, t_0) K(\tau) d\tau \times \right. \\ & \times \left. \int_0^{t_1} p(x_1, t_1/x'', t'' - \Theta) p(x'', t'' - \Theta/x, t) K(\Theta) d\Theta \right\} \times \\ & \times \psi(x_0) \varphi(x_1) dx dx_1 dx' dx'' = \psi(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x_0, t_0) \varphi(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W(x_1, t_1) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^t p(x, t/x', t' - \tau) p(x', t' - \tau/x_0, t_0) \times \right. \\ & \times K(\tau) d\tau \int_0^{t_1} p(x_1, t_1/x'', t'' - \Theta) p(x'', t'' - \Theta/x, t) K(\Theta) d\Theta \left. \right\} \times \\ & \times \psi(x_0) \varphi(x_1) dx dx_0 dx' dx'' = \varphi(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1/x_0, t_0) \psi(x_0) dx_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1/x_0, t_0) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^t p(x, t/x', t' - \tau) p(x', t' - \tau/x_0, t_0) \times \right. \\ & \times K(\tau) d\tau \int_0^{t_1} p(x_1, t_1/x'', t'' - \Theta) p(x'', t'' - \Theta/x, t) K(\Theta) d\Theta \left. \right\} dx' dx''. \end{aligned}$$

Так как закон $W(x, t)$ становится определенным только тогда, когда обе плотности, начальная $W(x_0, t_0)$ и конечная $W(x_1, t_1)$ заданы, то вместо квазимарковской цепи получим возвратную цепь — квазимарковский стохастический мост. В этом случае функции $\Psi(x, t)$ и $\Phi(x, t)$ удовлетворяют сопряженным уравнениям [4]:

$$a_n \frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) \Psi] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) \Psi]$$

и

$$(-1)^n a_n \frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} + \dots + a_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

обращаясь, соответственно, в $\psi(x_0, t_0)$ при $t=t_0$ и $\varphi(x_1, t_1)$ при $t=t_1$.

5. По аналогии с одномерными мостами можно ввести многомерные стохастические мосты. В этом случае необходимо рассматривать последовательность векторных случайных величин $\bar{x}_k$ такого рода, чтобы закон вероятностей $p_{ikl}(\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+l})$ стал определенным только после того, как задано одно из предшествующих значений $\bar{x}_{k-i}$ и одно последующее значение $\bar{x}_{k+i}$. В таком случае можно говорить, что значения $\bar{x}_k$ образуют многомерный стохастический мост, который характеризуется тем, что все его промежуточные значения могут быть определены, когда заданы первое $\bar{x}_1$ и последнее $\bar{x}_n$ звенья. Как и в одномерном случае, если

$$W(\bar{x}_0, t_0; \bar{x}, t; \bar{x}_1, t_1) = p(\bar{x}, t/\bar{x}_0, t_0) p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}, t) \psi(\bar{x}_0) \varphi(\bar{x}_1),$$

то закон распределения величины x определится выражением:

$$\begin{aligned} W(\bar{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\bar{x}_0, t_0; \bar{x}, t; \bar{x}_1, t_1) d\bar{x}_0 d\bar{x}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}_1, \\ t_1/\bar{x}, t) p(\bar{x}, t/\bar{x}_0, t_0) \psi(\bar{x}_0) \varphi(\bar{x}_1) d\bar{x}_0 d\bar{x}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}, t/\bar{x}_0, t_0) \times \\ \times \psi(\bar{x}_0) d\bar{x}_0 \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}, t) \varphi(\bar{x}_1) d\bar{x}_1 &= \Psi(\bar{x}, t) \Phi(\bar{x}, t), \\ (t_0 \leq t \leq t_1). \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) начальные плотности распределения $\psi(\bar{x}_0)$ и $\varphi(\bar{x}_1)$ находятся из интегральных уравнений

$$W(\bar{x}_0, t_0) = \psi(\bar{x}_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}_0, t_0) \varphi(\bar{x}_1) d\bar{x}_1$$

и

$$W(\bar{x}_1, t_1) = \varphi(\bar{x}_1) \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}_0, t_0) \psi(\bar{x}_0) d\bar{x}_0,$$

где

$$p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}_1, t_1/\bar{x}, t) p(\bar{x}, t/\bar{x}_0, t_0) d\bar{x}.$$

Закон распределения (12) станет определенным только тогда, когда заданы начальная $W(\bar{x}_0, t_0)$ и конечная $W(\bar{x}_1, t_1)$ плотности распределения.

Для многомерного марковского процесса функции $\Psi(\bar{x}, t)$ и $\Phi(\bar{x}, t)$ удовлетворяют сопряженным уравнениям:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A(x_i) \Psi] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(x_i x_j) \Psi]$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_i A(x_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{ij}(x_i x_j) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}.$$

Так, например, если стохастические дифференциальные уравнения системы имеют вид

$$a_2 \frac{d^2 x'}{dt^2} + a_1 \frac{dx'}{dt} + x' = \sqrt{B} \xi(t)$$

и

$$a_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} - a_1 \frac{dx''}{dt} + x'' = \sqrt{B} \eta(t),$$

где

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \langle \eta \rangle = 0; \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = \delta(\tau); \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = \delta(\tau); \\ \langle \xi \eta_\tau \rangle &= \langle \xi \eta_\tau \rangle = 0, \end{aligned}$$

то уравнения для функций Ψ и Φ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 \Psi] + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial}{\partial x_2} [x_2 \Psi] + \frac{1}{a_2} \frac{\partial}{\partial x_2} [x_1 \Psi] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{a_1}{a_2} x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{x_1}{a_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2},$$

где

$$\Psi = \Psi(x_1, x_2, t); \quad \Phi = \Phi(x_1, x_2, t).$$

Если процессы $x'(t)$ и $x''(t)$ удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям

$$a_n \frac{d^n x'}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x'}{dt^2} + a_1 \frac{dx'}{dt} + x' = \sqrt{B} \xi(t)$$

и

$$(-1)^n a_n \frac{d^n x''}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x''}{dt^2} - a_1 \frac{dx''}{dt} + x'' = \sqrt{B} \eta(t),$$

то для функций Ψ и Φ уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 \Psi] - \frac{\partial}{\partial x_2} [x_3 \Psi] + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} [x_n \Psi] + \\ &+ \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} [x_{n-1} \Psi] + \dots + \frac{a_2}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} [x_3 \Psi] + \frac{a_1}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} [x_2 \Psi] + \\ &+ \frac{1}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} [x_1 \Psi] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_n^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} -$$

$$- \dots - \frac{a_2}{a_n} x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{a_1}{a_n} x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{1}{a_n} x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2}.$$

Таким образом, существенным обстоятельством при построении стохастических мостов и их исследовании является конечность времени. Следовательно, стохастические мосты аналогичны траекториям динамических систем, рассматриваемых с точки зрения вариационных принципов [1].

Можно указать на другой способ образования стохастических мостов, который состоит в рассмотрении стохастических задач Штурма-Лиувилля.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Современное состояние теории вероятностей. ГТТИ, 1933 г., (21÷41).
2. E. Schrödinger. Über die Umkehrung der Naturgesetze. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1931, Physikalisch — Mathematische Klasse, (144÷153).
3. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О конструктивных методах в теории квазимарковских процессов. (Настоящий вып.)
4. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием. «Вестник ХГУ, серия мех.-мат.», вып. 34, № 53, 1970 г.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

И. Е. Тарапов

Рассматривается установившееся движение вязкой проводящей жидкости в радиальном магнитном поле между вращающимися соосными цилиндрами. Если жидкость несжимаема, а длина цилиндров бесконечна, то такое движение может быть описано точным решением вида

$$\vec{V} = (0, V_\varphi(r), 0), \quad \vec{B} = \left(B_0 \frac{R_1}{r}, B_\varphi(r), 0 \right), \quad p = p(r) \quad (1)$$

основной системы уравнений магнитной гидродинамики

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0,$$

$$\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p = \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\mu_e \mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{\mu_e \mu_0} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \quad (2)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu_m \Delta \vec{B}.$$

Здесь и в дальнейшем: (r, φ, z) — цилиндрическая система координат; μ — вязкость, σ — проводимость жидкости; $\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu_e\mu_0}$; $R_1, \omega_1, R_2, \omega_2$ — радиусы и постоянные угловые скорости внутреннего и внешнего цилиндров соответственно; B_0 — заданная магнитная индукция.

Таким образом, внешним (заданным) магнитным полем является радиальное поле вида $B_r = B_0 \frac{R_1}{r}$.

В движущейся между цилиндрами жидкости возникает индуцированное магнитное поле $B_\varphi = B_\varphi(r)$ и индуцированный ток $j = \frac{1}{\mu_e\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$, имеющий единственную отличную от нуля компоненту, направленную по оси цилиндров

$$j_z = \frac{1}{\mu_e\mu_0} \text{rot}_z \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_e\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\varphi). \quad (3)$$

Мы считаем, что поверхности цилиндров являются идеальными изоляторами.

Для определения $V_\varphi(r)$, $B_\varphi(r)$ и $p(r)$ из (2) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \frac{\rho V_\varphi^2}{r} - \frac{B_\varphi^2}{r\mu_e\mu_0} - \frac{B_\varphi}{\mu_e\mu_0} \cdot \frac{dB_\varphi}{dr}, \\ \Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} &= -\frac{B_0 R_1}{r\mu_e\mu_0} \left(\frac{dB_\varphi}{dr} + \frac{B_\varphi}{r} \right), \\ \Delta B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} &= -\frac{B_0 R_1}{r\nu_m} \left(\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r} \right), \\ \Delta &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \end{aligned} \quad (4)$$

Все остальные скалярные уравнения, следующие из системы (2), тождественно удовлетворяются функциями вида (1).

При этом последние два уравнения (4) служат для нахождения V_φ и B_φ , а после этого определяется изменение давления по радиусу $p = p(r)$.

Вводя в рассмотрение безразмерные величины согласно формулам

$$x = \frac{r}{R_1}; \quad V(x) = \frac{V_\varphi}{\omega_1 R_1^2}; \quad B(x) = \frac{B_\varphi \nu_m}{B_0 \omega_1 R_1^2}; \quad R = \frac{R_2}{R_1};$$

$$\text{Ha} = B_0 (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{2}{\mu}}; \quad \alpha^2 = 1 + \frac{\text{Ha}^2}{(R-1)^2}; \quad \Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

из (3) получаем

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV}{dx} - \frac{V}{x^2} = (1 - \alpha^2) \frac{1}{x} \left(\frac{dB}{dx} + \frac{B}{x} \right),$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dB}{dx} - \frac{B}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{V}{x} - \frac{dV}{dx} \right).$$

Эта система имеет решение

$$V = C_1 x + C_2 x^\alpha + C_3 x^{-\alpha}, \quad (5)$$

$$B = \frac{C_4}{x} - C_2 \frac{x^\alpha}{\alpha + 1} - C_3 \frac{x^{-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Это решение позволяет теперь определить все остальные электромагнитные и (поскольку мы приняли, что вязкость и проводимость суть постоянные величинные) тепловые характеристики потока.

Так, плотность индуцированного тока согласно (3) равна

$$j_z = -B_0 \omega_1 R_1 \sigma (C_2 x^{\alpha-1} + C_3 x^{-\alpha-1}).$$

Используя закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

определяем единственную, отличную от нуля компоненту индуцированного электрического поля

$$E_z = \frac{j_z}{\sigma} + B_z V_\varphi = B_0 \omega_1 R_1 C_1.$$

Из общего уравнения переноса тепла

$$\rho c_p = \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \Phi + D, \quad (6)$$

где $\Phi = 2\mu V_{ik} V_{ik}$ — диссипативная функция, $D = \frac{\tilde{r}^2}{\sigma}$ — джоулево тепло, в нашем случае имеем

$$\lambda \Delta T + \mu \omega_1^2 \left(\frac{dV}{dx} - \frac{V}{x} \right)^2 + (B_0 \omega_1 R_1 \sigma)^2 \left(\frac{dB}{dx} + \frac{B}{x} \right)^2 = 0.$$

Подставляя сюда решение (5) и интегрируя, получаем выражение для распределения температуры в жидкости

$$-\frac{2\lambda\alpha}{\mu\omega_1^2(\mu^2-1)} T = \frac{C_2^2}{\alpha+1} x^{2\alpha} + \frac{C_3^2}{\alpha-1} x^{-2\alpha} + C_5 \ln x + C_6. \quad (7)$$

При этом энергия, диссипируемая в жидкости в виде тепла, имеет следующее выражение

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} (\Phi + D) r dr = 2\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 (\alpha^2 - 1) \left[\frac{C_2^2 (R^{2\alpha} - 1)}{\alpha + 1} + \frac{C_3^2 (1 - R^{2\alpha})}{\alpha - 1} \right].$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий для скорости и магнитного поля, а C_5, C_6 — для температуры.

Поскольку $V_\varphi(R_1) = \omega_1 R_1$ и $V_\varphi(R_2) = \omega_2 R_2$, то для $V(x)$ имеем

$$V(1) = 1, V(R) = \Omega R. \quad (8)$$

Рассматривая проводник кольцевого сечения, по которому течет осевой ток плотности j_z , можно получить, что магнитное поле этого тока на внутренней поверхности проводника равно нулю, а на наружной поверхности выражается по закону Био — Савара через полный ток I , протекающий по проводнику.

Отсюда имеем для $B(x)$ граничные условия

$$B(1) = 0 \quad (9)$$

$$B(R) = \frac{I \gamma_m}{2\pi R_2 B_0 \omega_1 R_1^2}.$$

Полный ток I , используя закон Ома, запишем в виде

$$I = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(E_z - B_0 \frac{R_1}{r} V_\varphi \right) r dr. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение коэффициент нагрузки K , который и будем считать заданным [1]. При этом мы предполагаем, что некоторые кольцевые электроды расположены вдоль оси цилиндров и соединены внешней цепью, имеющей сопротивление R , и, следовательно, имеется возможность либо отводить индуцированный ток от жидкости (режим генератора), либо сообщать ей дополнительную электромагнитную энергию (режим ускорителя или тормоза), либо разорвать внешнюю цепь (режим расхода). Все эти виды режимов определяются значением K .

В выражении (10) можно выделить:

$$U = \frac{1}{R_1} \int_{R_1}^{R_2} E_z r dr = \frac{E_z R_1 (R^2 - 1)}{2} \quad \text{— напряжение на электродах,}$$

отстоящих друг от друга
на расстоянии в единицу
длины;

$$E = \frac{1}{R_1} \int_{R_1}^{R_2} B_r V_\varphi r dr = B_0 \omega_1 R_1^2 \int_1^R V(x) dx \quad \text{— электродвижущая сила.}$$

Тогда коэффициент нагрузки определяется следующим образом:

$$K = \frac{U}{E} = \frac{E_z R_1 (R^2 - 1)}{2E}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$I = -2\pi R_1 \sigma E (1 - K). \quad (12)$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом лишь режима МГД — генератора, когда $0 < K < 1$. При этом, записав закон Ома для внешней цепи

$$IR = -E_z, \quad (13)$$

удобно выразить K через внешнюю нагрузку R . Учитывая (11) и (12), из (13) имеем

$$K = \frac{\sigma SR}{1 + \sigma SR}, \quad (14)$$

где S — площадь зазора между цилиндрами.

Значения $K = 0$ ($R = 0$) соответствует случаю короткого замыкания, а $K = 1$ ($R = \infty$) — случаю расхождения.

Таким образом, вводя K согласно (12), условия (9) можно записать в виде

$$B(1) = 0 \quad (15)$$

$$RB(R) = (K - 1) \int_1^R V(x) dx.$$

Определяя постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из (8) и (15), получаем

$$C_2 = \frac{b_a(1-K) - a_{-a}(1-\Omega)}{a_a b_a - a_{-a} b_{-a}}; \quad C_1 = 1 - C_2 - C_3;$$

$$C_3 = \frac{a_a(1-\Omega) - b_{-a}(1-K)}{a_a b_a - a_{-a} b_{-a}}; \quad C_4 = \frac{C_2}{a+1} + \frac{C_3}{a-1};$$

где

$$u_a = \frac{R^{1+\alpha} - 1}{1 + \alpha}; \quad \alpha_a = \left(\frac{u_a}{u_1} - 1 \right) K - 1;$$

$$b_a = \frac{R^{1+\alpha} - 1}{R^{1+\alpha}}.$$

Интерес представляют мощность N , которую можно отвести от объема жидкости между цилиндрами (с единицы их длины) в режиме генератора ($0 < K < 1$), и мощность N' , затрачиваемая на вращение цилиндров, т.е. на создание механического движения проводящей жидкости в заданном магнитном поле.

Используя ранее полученные выражения, нетрудно найти

$$N = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} (j \cdot E) r dr = 4\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 K (1-K) \frac{\alpha^2 - 1}{R^2 - 1} \bar{E}^2; \quad (16)$$

$$N' = -2\pi \omega_1 R_1^2 \tau_{r\varphi}^{(1)} - 2\pi \omega_2 R_2^2 \tau_{r\varphi}^{(2)} = -\frac{2\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 (\alpha^2 - 1)}{a_a b_a - a_{-a} b_{-a}} \left[(1-\Omega)^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{a_a}{a-1} + \frac{a_{-a}}{a+1} \right) + (1-K) (2\Omega^2 (u_a - u_{-a}) - \frac{b_a}{a+1} - \frac{b_{-a}}{a-1}) \right], \quad (17)$$

где

$$\bar{E} = \int_1^R V(x) dx = c_1 u_1 + C_2 u_a + C_3 u_{-a},$$

$$\tau_{r\varphi}^{(1)} = \mu \left(\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r} \right)_{r=R_1}; \quad \tau_{r\varphi}^{(2)} = - \left[\mu \left(\frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r} \right) - \frac{B_r B_\varphi}{\mu \varepsilon \mu_0} \right]_{r=R_2}.$$

Коэффициент $\eta = \frac{N}{N'}$ может служить характеристикой эффективности преобразования механической энергии в электрическую. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим несколько предельных случаев.

1. Малые числа Гартмана ($Ha \ll 1$)

Тогда из полученных выражений с точностью до $\left(\frac{Ha}{R-1}\right)^2$, получаем

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{R^2\Omega - 1}{R^2 - 1}x + \frac{R^2(1 - \Omega)}{(R^2 - 1)x}, \\ B(x) &= C_2 \frac{1 - x^2}{2x} - \frac{R^2(1 - \Omega)}{(R^2 - 1)x} \ln x, \\ E &= B_0 \omega_1 R_1^2 \frac{R - 1}{2} [f_1(R) + \Omega f_2(R)], \\ I &= -\pi B_0 \omega_1 R_1^3 \sigma (1 - K)(R - 1)(f_1 + \Omega f_2) \\ N &= \pi \mu a_1^2 R_1^2 K (1 - K)(f_1 + \Omega f_2)^2 \frac{Ha^2}{R^2 - 1}, \\ N' &= 4\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{R^2}{R^2 - 1} (1 - \Omega)^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{R^2\Omega - 1}{R^2 - 1} + K \left[\frac{f_2(R)}{R + 1} (1 - \Omega) - 1 \right], \\ f_1(R) &= \frac{1}{R - 1} \left(\frac{R^2 \ln R^2}{R^2 - 1} - 1 \right) \geq 0, \\ f_2(R) &= \frac{R^2}{R - 1} \left(1 - \frac{\ln R^2}{R^2 - 1} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае, когда распределение скорости $V_\varphi(r)$ не отличается от распределения для нейтральной жидкости, можно получить мощность, равную

$$N = \pi \sigma B_0^2 \omega_1^2 R_1^4 \frac{R - 1}{R + 1} K (1 - K)(f_1 + \Omega f_2)^2.$$

По сравнению с твердым проводником ($\Omega = 1$), от жидкости можно отвести большую мощность при ($\Omega > 1$).

2. Большие числа Гартмана ($Ha \gg 1$)

В этом случае, как это следует из (5), у поверхностей цилиндров образуются пограничные слои, в которых распределение скорости и поля следует степенному закону. Так, у внутреннего цилиндра ($x \approx 1$) имеем

$$\begin{aligned} B(x) &\approx 0, \\ V(x) &\approx x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

а у наружного ($x \approx R$)

$$B(x) \approx -\frac{1}{\alpha} \left[\Omega R \left(\frac{x}{R} \right)^{\alpha} + \frac{1}{R} \right],$$

$$V(x) \approx \Omega R \left(\frac{x}{R} \right)^{\alpha}; \left(\alpha \sim \frac{\text{Ha}}{R-1} \gg 1 \right).$$

Если K не близко к единице, то

$$E = B_0 \omega_1 R_1^2 \frac{\Omega R^2 + 1}{\alpha},$$

$$I = -2\pi B_0 \omega_1 R_1^3 \sigma \frac{\Omega R + 1}{\alpha} (1 - K),$$

$$N = 4\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 K (1 - K) \frac{(\Omega R^2 + 1)^2}{R^2 - 1},$$

$$N' = 2\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \alpha (1 + 2\Omega^2 R^2)$$

и, следовательно, $\eta = \frac{N}{N'} \sim \frac{1}{\text{Ha}} \rightarrow 0$ при $\text{Ha} \rightarrow \infty$.

В случае больших нагрузок, т.е. когда K близко к единице, получаем

$$N = 4\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{1}{R^2 - 1} \frac{(1 + \Omega R^2)^2 K (1 - K)}{1 - K + K \frac{R^2 + 1}{\alpha u_1}}.$$

При $K = K^* = \frac{\alpha u_1}{\alpha u_1 + R^2 + 1}$ величина N приобретает максимум. В этом, наиболее интересном с точки зрения приложений, случае, получаем

$$N^* \equiv N_{\max} = \frac{\pi}{2} \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{(1 + \Omega R^2)^2 \text{Ha}}{(R^2 + 1)(R - 1)},$$

$$E^* = B_0 \omega_1 R_1^2 \frac{(1 + \Omega R^2)(R^2 - 1)}{4(R^2 + 1)},$$

$$I^* = -\pi R_1^3 B_0 \omega_1 \sigma \frac{1 + \Omega R^2}{\alpha},$$

$$N'^* = \pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \left[\frac{R^2}{R^2 + 1} (1 - \Omega)^2 + 2\Omega R^2 - 1 \right] \frac{\text{Ha}}{R - 1},$$

$$\eta^* = \frac{(1 + \Omega R^2)^2}{2[R^2(1 - \Omega)^2 + (R^2 + 1)(1 + 2\Omega^2 R^2)]}.$$

При $\Omega = \frac{2}{3}$ величина η^* имеет максимум, равный

$$\eta_{\max}^* = \frac{(3 + 2R^2)^2}{2(8R^4 + 18R^2 + 9)} \leq \frac{5}{14}.$$

3. Малый зазор между цилиндрами ($R - 1 \equiv \delta \ll 1$)

С точностью до $\delta = \frac{R_2 - R_1}{R_1}$ из полученных для общего случая выражений, имеем

$$V = \frac{1}{D} \left\{ (1 - K) [\Omega \operatorname{Sh} Ha y + \operatorname{Sh} Ha (1 - y)] + \right. \\ \left. + \frac{4K \operatorname{Sh} \frac{Ha}{2}}{Ha} \left[\operatorname{Ch} \frac{Ha y}{2} \operatorname{Sh} \frac{Ha}{2} (1 - y) + \Omega \operatorname{Sh} \frac{Ha y}{2} \operatorname{Ch} \frac{Ha}{2} (1 - y) \right] \right\} \\ B = \frac{2\delta}{D Ha} \left\{ (1 - K) \left[\operatorname{Ch} Ha (1 - y) - \operatorname{Ch} Ha - 2\Omega \operatorname{Sh}^2 \frac{Ha y}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{K}{Ha} (1 - \Omega) \left[\operatorname{Sh} Ha (1 - y) - \operatorname{Sh} Ha + \operatorname{Sh} Ha y \right] \right\},$$

где

$$D = \left[1 + K \left(\frac{2 \operatorname{th} \frac{Ha}{2}}{Ha} - 1 \right) \right] \operatorname{Sh} Ha,$$

$$y = \frac{x-1}{R-1} = \frac{r-R_1}{R_2-R_1}; \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$E = B_0 \omega_1 R_1^2 \frac{2\delta (1 + \Omega) \operatorname{Sh}^2 \frac{Ha}{2}}{D Ha},$$

$$I = -2\pi B_0 \omega_1 \sigma R_1^3 (1 - K) \frac{2\delta (1 + \Omega) \operatorname{Sh}^2 \frac{Ha}{2}}{D Ha},$$

$$N = 2\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{(1 + \Omega)^2}{\delta} K (1 - K) \frac{4 \operatorname{Sh}^4 \frac{Ha}{2}}{D^2}$$

$$N' = 2\pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{\operatorname{Sh} Ha}{\delta D} \left\{ K(1 - \Omega)^2 + (1 - K) \left[(1 - \Omega)^2 \frac{Ha}{\operatorname{Sh} Ha} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2\Omega^2 + 1) Ha \operatorname{th} \frac{Ha}{2} \right] \right\}.$$

Отдаваемая мощность N имеет максимальное значение N^* при

$$K = K^* = \frac{Ha}{Ha + 2 \operatorname{th} \frac{Ha}{2}}.$$

При этом значении коэффициента нагрузки получаем

$$N^* \equiv N_{\max} = \frac{\pi}{4} \mu \omega_1^2 R_1^2 (1 + \Omega)^2 \frac{Ha}{\delta} \operatorname{th} \frac{Ha}{2}, \quad (18)$$

$$E^* = B_0 \omega_1 R_1^2 \frac{\delta (1 + \Omega)}{4} \left(1 + \frac{2 \operatorname{th} \frac{Ha}{2}}{Ha} \right),$$

$$I^* = -\pi \varepsilon B_0 R_1^3 \omega_1 (1 + \Omega) \frac{\delta \operatorname{th} \frac{Ha}{2}}{Ha} \left(1 + \frac{2}{Ha} \operatorname{th} \frac{Ha}{2} \right),$$

$$N'^* = \pi \mu \omega_1^2 R_1^2 \frac{Ha}{2\delta \operatorname{th} \frac{Ha}{2}} \left[(1 - \Omega)^2 \left(2 - \operatorname{th}^2 \frac{Ha}{2} \right) + (2\Omega^2 + 1) 2 \operatorname{th}^2 \frac{Ha}{2} \right],$$

$$\eta^* = \frac{(1 + \Omega)^2}{2 \left[(1 - \Omega)^2 \left(2 \operatorname{cth} \frac{Ha}{2} - 1 \right) + 2(1 + 2\Omega^2) \right]}.$$

Коэффициент эффективности преобразования энергии η^* имеет максимальное значение при

$$\Omega = \frac{2}{2 + \operatorname{th}^2 \frac{Ha}{2}}.$$

При этом

$$\eta_{\max}^* = \frac{4 + \operatorname{th} \frac{Ha}{2}}{2 \operatorname{th}^2 \frac{Ha}{2} + 12} \leq \frac{5}{14}.$$

Таким образом, если между цилиндрами помещен жидкий металл типа натрия с характеристиками

$$\mu = 10^{-3} \text{ нсекм}^{-2}, \quad \sigma = 10^6 \text{ ом}^{-1} \text{ м}^{-1},$$

а заданная магнитная индукция и цилиндры характеризуются величинами

$$B_0 = 10^{-1} \text{ тл}; \quad \omega_1 R_1 = 10^2 \text{ мсек}^{-1};$$

$$R_1 = 10^{-1} \text{ м}; \quad R_2 - R_1 = 10^{-3} \sqrt{10} \text{ м},$$

так что

$$Ha = 10; \quad K_* = \frac{5}{6}; \quad \delta = 10^{-2} \sqrt{10},$$

то согласно (18) имеем

$$N^* = 2,5 \cdot 10^3 (1 + \Omega)^2 \text{ вт/м}, \quad E^* = 9,5 \cdot 10^{-3} (1 + \Omega) \text{ в/м},$$

$$I^* = -1,2 \cdot 10^3 (1 + \Omega) \text{ а/м}, \quad \eta^* = \frac{(1 + \Omega)^2}{2(5\Omega^2 - 2\Omega + 3)}.$$

При

$$\Omega = 1: \quad N^* = 10 \text{ квт/м}; \quad E^* = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ в/м};$$

$$I^* = -2,4 \cdot 10^3 \text{ а/м}; \quad \eta^* = 0,33.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Магнито-гидродинамические течения в каналах. «Наука», М., 1970.

ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КОНУСЕ ПРИ НАЛИЧИИ СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Е. А. Косачевская

В работе [1] анализировалась задача о вязко-пластическом пограничном слое при степенном распределении скорости вдоль внешней границы.

Ниже рассматривается аналогичная задача для электропроводящего вязко-пластического пограничного слоя при наличии электрического и магнитного полей. Показано, что автомодельное решение может быть найдено в случае, когда скорость во внешнем идеально пластическом потоке пропорциональна x_1^{-2} , что соответствует случаю движения в конусе.

1. Определяющее уравнение вязко-пластической среды имеет вид [2]

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(2\mu + \frac{k}{\sqrt{V_{(2)}}}\right)V_{ij}, \quad (1.1)$$

где p_{ij} — тензор напряжения, p — давление, δ_{ij} — единичный тензор, μ — коэффициент вязкости, k — предел текучести, V_{ij} и $V_{(2)}$ — соответственно тензор скоростей деформации и его второй основной инвариант.

Для плоского течения несжимаемого материала

$$V_{(2)} = V_{11}^2 + V_{12}^2.$$

Предел текучести предполагается достаточно большим, так что имеет место неравенство

$$Bi \gg Re^{3/2} \quad (Bi = kL/\mu U), \quad (1.2)$$

Bi — число Бингама, Re — число Рейнольдса, L и U — характерные линейный размер и скорость соответственно.

Будем предполагать, что электрическое поле неоднородно и изменяется по закону

$$E_0 = \frac{e}{x_1^2}.$$

Магнитное поле B_0 однородно. Направления векторов E_0 и B_0 указаны на рис. 1.

Предполагая среду несжимаемой, имеем следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \Delta v_1 + k \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{V_{11}}{\sqrt{V_{(2)}}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{V_{12}}{\sqrt{V_{(2)}}} \right) \right] - \sigma (E_0 + v_1 B_0) B_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \Delta v_2 + \\ + k \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{V_{21}}{\sqrt{V_{(2)}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{V_{22}}{\sqrt{V_{(2)}}} \right) \right], \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Обозначив толщину пограничного слоя через δ , запишем граничные условия

$$v_1(x_1, \delta) = - \frac{UL^2}{x_1^2}, \quad v_1(x_1, 0) = 0,$$

$$p(x_1, \delta) = p_0 = \text{const}, \quad p_{12}(x_1, \delta) = -k. \quad (1.4)$$

Переходя к безразмерным переменным

$$x_1^* = \frac{x_1}{L}, \quad x_2^* = \frac{x_2}{\varepsilon L}, \quad v_1^* = \frac{v_1}{U},$$

$$v_2^* = \frac{v_2}{\varepsilon U}, \quad p^* = \frac{p - \varepsilon k}{\varepsilon k}, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon = \text{Bi}^{-1/3},$$

приводим систему (1.3) к виду [2, 3] (звездочки в обозначениях безразмерных величин опускаем):

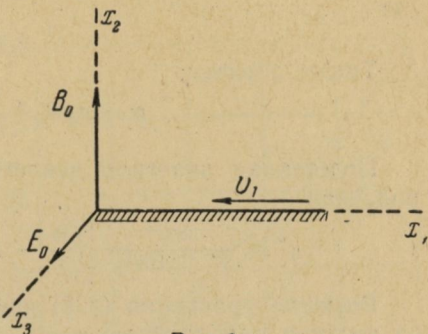


Рис. 1

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta^2}{\partial x_2} \right) - \frac{N}{x_1^2} - M v_1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2}.$$

Здесь

$$\eta = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|,$$

$$N = \frac{\sigma B_0 e}{\varepsilon k}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2 UL}{\varepsilon k}.$$

Из (1.1) находим выражение для касательного напряжения с точностью до членов порядка $k\varepsilon^4$:

$$p_{21} = -k \left[1 + \varepsilon^2 \left(\left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right| - 2\eta^2 \right) \right]. \quad (1.7)$$

Граничные условия в безразмерных переменных принимают вид

$$v_1(x_1, 0) = 0, \quad v_1(x_1, \delta) = -x_1^{-2}; \quad (1.8)$$

$$p(x_1, \delta) = p_0, \quad \left(\left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right| - 2\eta^2 \right)_{x_2=\delta} = 0.$$

2. Скорость в пограничном слое ищем в виде

$$v_1 = -x_1^{-2} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x_2}{\delta}, \quad (2.1)$$

$$\delta = \text{const.}$$

Из второго уравнения (1.6) и (2.1) получаем

$$p = -4 \frac{\delta}{x_1} \frac{\varphi}{\varphi'} + f(x_1) + p_0. \quad (2.2)$$

Функцию $f(x_1)$ находим из условия $p = p_0$ при $\xi = 1$:

$$f(x_1) = 4 \frac{\delta}{x_1 \beta}, \quad (2.3)$$

где

$$\beta = \varphi'(1).$$

Таким образом,

$$p = p_0 + 4 \frac{\delta}{x_1} \left[\frac{1}{\beta} - \frac{\varphi}{\varphi'} \right]. \quad (2.4)$$

Подставляя значение давления p в первое уравнение (1.6), получаем

$$\varphi'' = \frac{\delta^2 \varphi'^2}{\varphi'^3 + 16\delta^3 \varphi^2} \left[\left(\frac{4\delta}{\beta} - N \right) \varphi' + (8\delta + M\varphi') \varphi \right]. \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) ищем методом Швеца [4]. Принимая за нулевое приближение $\varphi = \xi$, двукратным интегрированием находим приближенное решение:

$$\varphi'' = \frac{\delta^2}{1 + 16\delta^3 \xi^2} (a\xi + b), \quad (2.6)$$

$$\varphi' = \frac{a}{32\delta} \ln(1 + 16\delta^3 \xi^2) + \frac{b\delta^{1/2}}{4} \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2} \xi + c, \quad (2.7)$$

$$\varphi = \frac{1}{32\delta} (a\xi - b) \ln(1 + 16\delta^3 \xi^2) + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{\delta^{1/2}}{4} \left(b\xi + \frac{a}{16\delta^3} \right) \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2} \xi + \left(c - \frac{a}{16\delta} \right) \xi + D,$$

$$a = 8\delta + M, \quad b = \frac{4\delta}{\beta} - N.$$

Из условий $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$, получаем $D = 0$,

$$c = \frac{a}{16\delta} + \frac{1}{32\delta} (b - a) \ln(1 + 16\delta^3) - \frac{\delta^{1/2}}{4} \left(b + \frac{a}{16\delta^3} \right) \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2} + 1. \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.7) при $\xi = 1$ имеем

$$c = \beta - \frac{a}{32\delta} \ln(1 + 16\delta^3) - \frac{b\delta^{1/2}}{4} \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2}. \quad (2.10)$$

Последнее условие (1.8) дает

$$\beta = 2\delta. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.9)—(2.11) служат для определения постоянных c , β , δ . Из этих уравнений следует

$$c = 2\delta - \frac{8\delta + M}{32\delta} \ln(1 + 16\delta^3) - \frac{(2-N)}{4} \delta^{1/2} \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2-N}{32\delta} \ln(1 + 16\delta^3) - 2\delta + 1 + \\ & + \frac{8\delta + M}{16\delta} \left(1 - \frac{1}{4\delta^{3/2}} \operatorname{arctg} 4\delta^{3/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таблица

ξ	$N=0$ $M=0$	$N=0$ $M=2$	$N=2$ $M=2$	$N=2$ $M=1$
	φ	φ	φ	φ
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,050	0,029	0,073	0,062
0,2	0,113	0,073	0,150	0,135
0,3	0,188	0,111	0,232	0,214
0,4	0,276	0,171	0,322	0,289
0,5	0,375	0,234	0,420	0,384
0,6	0,484	0,309	0,519	0,489
0,7	0,602	0,394	0,629	0,604
0,8	0,728	0,508	0,747	0,728
0,9	0,861	0,670	0,870	0,860
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000

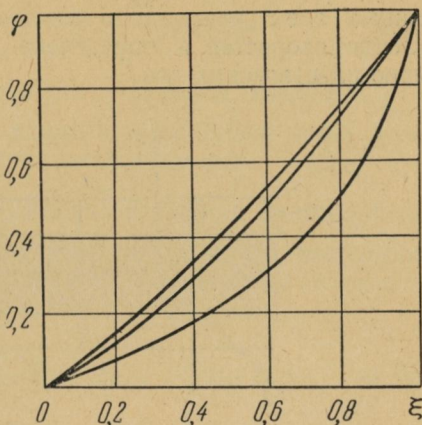


Рис. 2

Рассмотрим численный пример с $N=0$. При этом толщина пограничного слоя $\delta=0,721$ при $M=0$ и $\delta \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

В таблице приведены значения функции φ при различных N и M ; на рис. 2. построены графики этой функции.

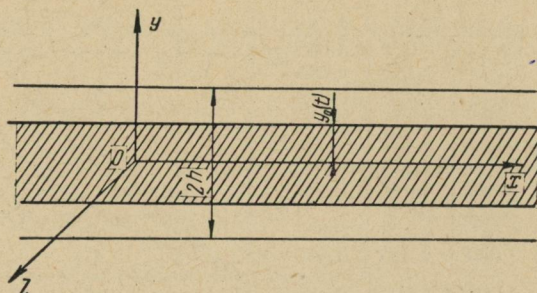
ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Я. Косачевский, И. А. Строчков. Вязко-пластический пограничный слой при степенном распределении скорости вдоль внешней границы. «ПММ», 1969, т. 33, вып. 5.
2. В. Прагер. Введение в механику сплошных сред. М., изд-во ИЛ, 1963.
3. J. G. Oldroyd. Two-dimensional plastic flow of a bingham solid. A plastic boundary—layer theory for slow motion. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, vol. 43, № 3, p. 383.
4. М. Е. Шве́ц. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. «ПММ», 1949, т. 13, вып. 3.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Е. А. Косачевская, Э. Н. Татарченко

В работе [1] с помощью метода аналитического продолжения [2], [3] получено точное решение задачи нестационарного движения вязко-пластической среды между двумя бесконечными пластинами. Ниже этим методом решается аналогичная задача движения проводящей вязко-пластической среды при наличии скрещенных электрического и магнитного полей. Получено распределение скоростей и определена подвижная граница жесткой и вязко-пластических зон.



§ 1. Движение между двумя бесконечными параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $2h$ одна от другой, происходит в направлении оси x под действием зависящего от времени перепада давления. Плоскость xz совпадает с плоскостью симметрии потока, а ось y перпендикулярна к ней.

Жидкость считается проводящей. Внешнее поле с индукцией $B_y = B_0$ приложено перпендикулярно непроводящим пластинам ($y = \pm h$), а постоянное электрическое поле E_0 направлено вдоль оси z (рисунок).

Рассматриваемое течение однородно относительно координат x и z . Реологическое уравнение вязко-пластической среды или пластика Бингама — Шведова, связывающее касательное напряжение τ_{xy} со скоростью деформации имеет вид

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad (1.1)$$

где $\mu = \text{sgn} \frac{\partial V_x}{\partial y}$, μ — коэффициент динамической вязкости, τ_0 — предел текучести.

При $\tau_0 = 0$ имеет случай обычной вязкой жидкости. Вязко-пластическая среда обладает тем свойством, что при $\tau_{xy} > \tau_0$ она ведет себя как вязкая жидкость с касательным напряжением $\tau_{xy} - \tau_0$, а при $\tau_{xy} \leq \tau_0$ как твердое тело. Появление в центре течения жесткой зоны, т. е. области, в которой среда ведет себя как твердое тело, существенно отличает это течение от течения вязкой жидкости. Ширина жесткой зоны $2y_0$ для нестационарного движения зависит от времени и подлежит определению как часть решения. На границе жесткой зоны $\tau_{xy} = \tau_0$ и $\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$.

Уравнения движения среды в вязко-пластической области $|y| > y_0(t)$ записывается следующим образом:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \sigma (E_0 - V_x B_0) B_0. \quad (1.2)$$

Здесь ρ — плотность, σ — проводимость, перепад давления $\frac{\partial p}{\partial x} = -P(t)$ — заданная функция времени. Последний член этого равенства есть результат действия силы Лоренца.

В жесткой зоне $\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$. Уравнение движения жесткой зоны, движущейся поступательно, получается из теоремы импульсов, примененной к элементу объема высоты $2y_0$, длины Δx и единичной толщины (см. рисунок)

$$2y_0 \Delta x \frac{dV_x^{(0)}}{dt} = -2y_0 \Delta p - 2\tau_0 \Delta x + 2y_0 \sigma (E_0 - V_x^{(0)} B_0) B_0 \Delta x, \quad (1.3a)$$

где $V_x^{(0)}(t)$ — скорость жесткой зоны.

После упрощений из (1.3a) получаем:

$$\rho \frac{dV_x^{(0)}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_0}{y_0(t)} + \sigma (E_0 - V_x^{(0)} B_0) B_0. \quad (1.3)$$

Начальное распределение скоростей задается в виде

$$v_x(0, y) = F(y) \quad \text{при } y_0(0) < y < h; \quad -h < y < -y_0(0), \quad (1.4)$$

$$v_x^{(0)}(0, y) = F(y_0(0)) \quad \text{при } -y_0(0) \leq y \leq y_0(0).$$

Граничные условия получаются из условия прилипания частиц жидкости на пластинах и условий непрерывности v_x и равенства $\tau_{xy} = \tau_0$ на границе жесткой зоны и записываются в виде:

$$v_x(t, \pm h) = 0, \quad v_x(t, \pm y_0(t)) = v_x^{(0)}, \quad \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=\pm y_0(t)} = 0. \quad (1.5)$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \frac{\mu}{\rho h^2}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad u(\tau, \eta) = \frac{\mu}{h^2 p_0} v_x(t, y), \quad (1.6)$$

где p_0 — характерный перепад давления на единицу длины, уравнения движения (1.2) и (1.3) принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - M^2 u + P_*(\tau), \quad (1.7)$$

$$\frac{du_0}{d\tau} = -M^2 u_0 + P_*(\tau) - \frac{S}{\delta(\tau)}, \quad (1.8)$$

где

$$S = \frac{\tau_0}{h p_0}, \quad \delta(\tau) = \frac{y_0(t)}{h}$$

$M^2 = \frac{\sigma B_0^2 h^2}{\mu}$ — квадрат числа Гартмана,

$P_*(\tau) = \frac{1}{p_0} [\sigma E_0 B_0 + P(t)]$ — безразмерный эффективный перепад давления, учитывающий действие электромагнитных сил.

Начальные и граничные условия в безразмерных переменных преобразуются к виду

$$u(0, \eta) = \begin{cases} \Phi(\eta), & \delta_0 < \eta < 1, \quad -1 < \eta < -\delta_0, \\ \Phi(\delta_0), & -\delta_0 \leq \eta \leq \delta_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

где

$$\Phi(\eta) = \frac{\mu}{h^2 p_0} F(y) \text{ и } \delta_0 = \delta(0)$$

$$u(\tau, \pm 1) = 0, \quad u(\tau, \pm \delta) = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=\pm\delta} = 0. \quad (1.10)$$

Интегрируя уравнение (1.8), находим скорость жесткой зоны

$$u_0(\tau) = \left\{ u_0(0) + \int_0^\tau \left[P_*(\xi) - \frac{S}{\delta(\xi)} \right] e^{M^2 \xi} d\xi \right\} e^{-M^2 \tau}. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) можно рассматривать как дополнительное краевое условие на неизвестной подвижной границе.

Так как поток имеет плоскость симметрии, то можно решать задачу только для одной области, например ($\delta < \eta < 1, \tau > 0$), решение в другой области получается заменой знака y переменной η и $y \rightarrow \delta(\tau)$.

§ 2. Полагая $u(\tau, \eta) = e^{-M^2 \tau} \psi(\tau, \eta)$, получим из (1.7) для функции ψ уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + e^{M^2 \tau} P_*(\tau). \quad (2.2)$$

Начальные, граничные и дополнительное условия на подвижной границе, записанные в предельной форме для функции ψ , получаются из (1.9), (1.10), (1.11) в виде

$$\lim \psi(\tau, \eta) = \Phi(\eta) \quad \text{при } \tau \rightarrow +0 \quad (\delta_0 < \eta < 1); \quad (2.3)$$

$$\lim \psi(\tau, \eta) = 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 1-0 \quad (\tau > 0); \quad (2.4)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \delta(\tau) + 0 \quad (\tau > 0); \quad (2.5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi(\tau, \eta) = \Phi_0 + \int_0^{\tau} \left[P_*(\xi) - \frac{S}{\sigma(\xi)} \right] e^{M\xi} d\xi \quad (2.6)$$

при

$$\eta \rightarrow \delta(\tau) + 0, \quad (\tau > 0).$$

Здесь

$$\Phi_0 = \Phi(\delta_0) = u_0(0).$$

Сформулированная краевая задача является задачей с искомой границей для уравнения параболического типа и является усложненным вариантом классической задачи Стефана [4]. Эффективным методом решения таких задач является метод аналитического продолжения [1], [2], [3], который позволяет найти уравнение для границы жесткой зоны без знания профиля скоростей всего течения.

Полученная краевая задача для функции $\psi(\tau, \eta)$ совпадает с краевой задачей для распределения скоростей течения, исследованной в работе [1]. В этой работе показано, что решение такой задачи, полученное методом аналитического продолжения [2] для конечного τ , существует и единственно.

Функция $\psi(\tau, \eta)$ ищется в виде

$$\begin{aligned} \psi(\tau, \eta) = & \lambda(\tau, \eta) + \int_0^{\tau} e^{M\xi} P_*(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^1 \Gamma(\xi) \exp\left\{-\frac{(\eta-\xi)^2}{4\tau}\right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\tau}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\Gamma(\eta) = \begin{cases} \Phi(\eta) & \delta_0 < \eta \leq 1 \\ \Phi(\delta_0) & -\infty < \eta \leq \delta_0. \end{cases}$$

Для функции $\lambda(\tau, \eta)$ получается следующая краевая задача с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2} \quad (\delta(\tau) < \eta < 1, \quad \tau > 0), \quad (2.8)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \lambda(\tau, \eta) = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 1-0} \lambda(\tau, \eta) = & - \int_0^{\tau} e^{M\xi} P_*(\xi) d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^1 \Gamma(\xi) \exp\left\{-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}\right\} \times \\ & \times \frac{d\xi}{\sqrt{\tau}} = f(\tau), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \delta-0} \lambda(\tau, \eta) = & \Phi_0 - S \int_0^{\tau} e^{M\xi} \frac{d\xi}{\delta(\xi)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^1 \Gamma(\xi) \exp \times \\ & \times \left\{ -\frac{(\delta(\tau)-\xi)^2}{4\tau} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\tau}} = \varphi(\tau), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \delta + 0} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^1 \Gamma(\xi) \frac{\delta(\tau) - \xi}{\tau^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\delta(\tau) - \xi)^2}{4\tau} \right\} d\xi = \Theta(\tau). \quad (2.12)$$

Решение для ограниченных τ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda(\tau, \eta) = & \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{f(\xi)(1-\eta)}{(\tau-\xi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(1-\eta)^2}{4(\tau-\xi)} \right\} d\xi + \\ & + \frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\varphi(\xi)}{(\tau-\xi)^{3/2}} \left[(\eta - \delta(\xi)) \exp \left\{ -\frac{(\eta - \delta(\xi))^2}{4(\tau-\xi)} \right\} - \right. \\ & \left. - (2 - \eta - \delta(\xi)) \exp \left\{ -\frac{(2 - \eta - \delta(\xi))^2}{4(\tau-\xi)} \right\} \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\theta(\xi) + \varphi(\xi) \delta'(\xi)}{\sqrt{\tau-\xi}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\eta - \delta(\xi))^2}{4(\tau-\xi)} \right] - \right. \\ & \left. - \exp \left\{ -\frac{(2 - \eta - \delta(\xi))^2}{4(\tau-\xi)} \right\} \right\} d\xi \end{aligned} \quad (2.13)$$

при $\eta < \delta(\tau)$ и $\lambda \equiv 0$ при $\eta \geq \delta(\tau)$.

В (2.13) входит произвольная функция $\delta(\tau)$. Если потребовать, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \delta(\tau)+0} \lambda(\tau, \eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \delta(\tau)+0} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0, \quad (2.14)$$

то будут выполнены условия (2.11) и (2.12), и $\lambda(\tau, \eta)$ справа от кривой $\eta = \delta(\tau)$ будет давать искомое решение. Условия (2.14) можно рассматривать как уравнения для определения искомой границы жесткой зоны $\delta(\tau)$, если хотя бы одно из этих уравнений имеет единственное решение.

Формулы (2.14) в развернутом виде приведены в работе [1].

§ 3. Рассмотрим течение при постоянном перепаде давления.

Пусть к вязко-пластическому проводящему материалу, находящемуся в покое, в момент $\tau = 0$ приложен перепад давления $-\frac{\partial p}{\partial x} = p_0$ и поддерживается постоянным все последующее время.

Тогда $\delta_0 = 1$, $\Phi_0 = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$ и

$$P_* = 1 + \frac{\sigma E_0 B_0}{P_0} = \text{const.}$$

Очевидно, что течение возникнет только при $\sigma E_0 B_0 + p_0 > \frac{\tau_0}{h}$,

а при $\sigma E_0 B_0 + p_0 \leq \frac{\tau_0}{h}$ материал ведет себя как твердое тело.

Тогда $\frac{\sigma E_0 B_0 + p_0}{p_0} > S$, или $0 < S < P_*$.

Для функций f , φ , θ получаем

$$f(\tau) = -\frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{\sigma E_0 B_0}{\rho_0} \right) (e^{M^2 \tau} - 1), \quad (3.1)$$

$$\varphi(\tau) = -S \int_0^\tau e^{M^2 \xi} \frac{d\xi}{\delta(\xi)}, \quad (3.2)$$

$$\theta(\tau) = 0. \quad (3.3)$$

Используя второе условие (2.14) для определения искомой границы, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\sigma E_0 B_0}{\rho_0} \right) \int_0^\tau \frac{e^{M^2 \xi}}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp \left\{ -\frac{(1 - \delta(\tau))^2}{4(\tau - \xi)} \right\} d\xi = \\ & = \frac{S}{2} \int_0^\tau \frac{e^{M^2 \xi}}{\delta(\xi) \sqrt{\tau - \xi}} \left[\exp \left\{ -\frac{(\delta(\tau) - \delta(\xi))^2}{4(\tau - \sigma)} \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \exp \left\{ -\frac{(2 - \delta(\tau) - \delta(\xi))^2}{4(\tau - \xi)} \right\} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приближенное решение этого уравнения можно получить для τ близких к начальному. В этом случае в правой части (3.4) можем считать $\delta(\tau) \approx \delta_0 = 1$. Тогда, после соответствующих преобразований, получается

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\sigma E_0 B_0}{\rho_0} \right) \int_0^\tau \frac{e^{-M^2(\tau - \xi)}}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp \left\{ -\frac{(1 - \delta(\tau))^2}{4(\tau - \xi)} \right\} d\xi = \\ & = S \int_0^\tau \frac{e^{-M^2(\tau - \xi)}}{\sqrt{\tau - \xi}} d\xi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Предполагая M^2 малым и разлагая $e^{-M^2(\tau - \xi)}$ в ряд, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \exp \left\{ -\frac{(1 - \delta(\tau))^2}{4(\tau - \xi)} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\tau - \xi}} - M^2 \int_0^\tau \sqrt{\tau - \xi} \exp \left\{ -\frac{(1 - \delta(\xi))^2}{4(\tau - \xi)} \right\} d\xi = \\ & = \frac{2S\rho_0 \sqrt{\tau}}{\rho_0 + \sigma E_0 B_0} \left(1 - M^2 \frac{\tau}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя подстановку

$$\alpha(\xi, \tau) = \frac{1 - \delta(\tau)}{2\sqrt{\tau - \xi}} \quad (3.7)$$

и интегрируя по частям (3.6), после соответствующих преобразований получаем уравнение для определения $\alpha(0, \tau)$

$$e^{-\alpha^2(0, \tau)} - 2\alpha(0, \tau) \int_{\alpha(0, \tau)}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \frac{1}{3} M^2 \tau \left[e^{-\alpha^2(0, \tau)} (1 - 2\alpha^2(0, \tau)) + 4\alpha^3(0, \tau) \int_{\alpha(0, \tau)}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right] = \frac{S\rho_0}{\rho_0 + \sigma E_0 B_0} \left(1 - \frac{M^2 \tau}{3} \right). \quad (3.8)$$

Из (38) следует, что $\alpha(0, \tau)$ есть функция $\frac{M^2 \tau}{3}$.

Решение для α , учитывающее члены линейные относительно M^2 , имеет вид

$$\alpha(0, \tau) = \alpha_1 + a \frac{M^2 \tau}{3}. \quad (3.9)$$

Здесь α_1 является решением уравнения

$$e^{-\alpha_1^2} - 2\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{S}{P} = S_*, \quad (3.10)$$

а коэффициент a определяется формулой

$$a = -\alpha_1 \left[\frac{2\alpha_1^2 S_*}{e^{-\alpha_1^2} - S_*} \right]. \quad (3.11)$$

Уравнение границы жесткой зоны будет

$$\delta(\tau) = 1 - 2 \left(\alpha_1 + \frac{a M^2 \tau}{3} \right) \sqrt{\tau}. \quad (3.12)$$

Формула справедлива для моментов времени, близких к начальному, и таких, что $\delta(\tau) > 0$.

Движение происходит тогда, когда $0 < S_* \leq 1$. Зависимость α_1 и a от S_* в указанном интервале приводится в таблице:

S_*	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α_1	0,95	0,72	0,56	0,44	0,35	0,26	0,19	0,12	0,06	0
$-a$	0,38	0,34	0,31	0,28	0,24	0,20	0,15	0,11	0,06	0

Заметим, что коэффициент a , учитывающий влияние электромагнитного поля на границу жесткой зоны, отрицателен. Это означает, что электромагнитное поле увеличивает ширину жесткой зоны.

Осуществляя переход к старым переменным, получим

$$y_0(t) = h - 2\sqrt{vt} \left(\alpha_1 + \frac{\sigma B_0}{\rho} \frac{a}{3} t \right); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} v_x^{(0)} = & \frac{p_0 + \sigma E_0 B_0}{\rho} \left(t - \frac{\sigma B_0^2}{2\nu\rho^2} t^2 \right) + \frac{\tau_0}{\rho\alpha_1} \exp \left(-\frac{\sigma B_0^2}{\nu\rho^2} t \right) \times \\ & \times \left\{ \left[\sqrt{\frac{t}{\nu}} + \frac{h}{2\nu\alpha_1} \ln \left(1 - \frac{2\alpha_1}{h} \sqrt{vt} \right) \right] \left(1 - \frac{4a - 3\alpha_1}{12\alpha_1^3} \frac{\sigma B_0^2 h^2}{\nu\rho} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{h\sigma B_0^2}{3\nu^2\rho^2} \left[\frac{4a - 3\alpha_1}{4\alpha_1^2} \left(t + \frac{4\alpha_1}{3h} t \sqrt{vt} \right) + \frac{2\alpha_1 t}{h(h - 2\alpha_1 \sqrt{vt})} \right] \right\}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Формула распределения скоростей может быть получена подстановкой (3.12) в (2.13), (2.7), (2.1), но в силу ее громоздкости не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Сафрончик. Неустановившееся течение вязко-пластического материала между параллельными стенками. ПММ, т. 23, 1959, вып. 5.
2. Kolodner J. J. Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. Communications on pure and applied Mathematics, IX, N 1, 1956.
3. Л. И. Рубинштейн. Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана. «ДАН СССР (новая серия)», т. 58, № 2, 1947.
4. Л. И. Рубинштейн. Проблема Стефана. «Звайгзне», Рига, 1967.

О ПОХГАММЕРОВСКИХ ВОЛНАХ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Б. Г. Колодяжный

Рассмотрим распространение упругих волн в зазоре между бесконечными цилиндрами радиусов $r = a$, $r = b$, заполненном однородной изотропной средой. Поверхность цилиндров свободна от напряжений. Воспользуемся уравнениями колебаний изотропной среды в цилиндрической системе координат [1, 2]

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \\ 2\omega_\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2\omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right], \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Нормальные компоненты напряжений

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right], \\ \sigma_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \end{cases} \quad (5)$$

равны нулю на поверхности цилиндров $r = a$, $r = b$.

Как видно из (1) — (5), компоненты вектора смещения можно искать в виде

$$\begin{cases} u_r = U(r, \varphi) e^{i(\gamma z + \rho t)}, \\ u_\varphi = V(r, \varphi) e^{i(\gamma z + \rho t)}, \\ u_z = W(r, \varphi) e^{i(\gamma z + \rho t)}. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим крутильные, продольные и поперечные колебания однородной изотропной среды в зазоре между бесконечными коаксиальными цилиндрами радиусов $r = a$, $r = b$. В случае крутильных колебаний движение симметрично относительно оси цилиндра. Продольное и поперечное движения отсутствуют, т. е. составляющие вектора смещения имеют вид

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\varphi = V(r) e^{i(\gamma z + \rho t)}.$$

При подстановке этих значений составляющих первое и третье уравнения (1) удовлетворяются тождественно. Из второго получаем

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) V = 0, \quad (7)$$

где

$$k^2 = \frac{\rho \rho^2}{\mu} - \gamma^2.$$

Общим решением уравнения (7) является функция

$$V(r) = C_1 I_1(kr) + C_2 Y_1(kr).$$

На поверхности цилиндра компоненты напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} должны равняться нулю. σ_{rr} и σ_{rz} равны нулю везде, из $\sigma_{r\varphi}|_{r=a} = 0$ получаем систему уравнений относительно постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ka)}{a} \right) + C_2 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ka)}{a} \right) = 0, \\ C_1 \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(kb)}{b} \right) + C_2 \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(kb)}{b} \right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Условие существования нетривиального решения приводит к равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ka)}{a} \right) & \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ka)}{a} \right) \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(kb)}{b} \right) & \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(kb)}{b} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Ограничимся теперь двумя крайними случаями

$$ka, kb \ll 1, \quad (9')$$

$$ya, kb \gg 1, \quad (9'')$$

В случае (9') имеем [3]

$$I_1(ka) = \frac{ka}{2} - \frac{k^3 a^3}{16} + \dots$$

$$Y_1(ka) = -\frac{2}{ka} + ka \ln \frac{ka}{2} - \frac{ka}{2} + \dots$$

Раскрывая определитель (9), с учетом членов малости не выше $\sim ka$ и отбрасывая тривиальное решение $k^2 = 0$, описывающее распространение волн искажения в бесконечной изотропной среде со скоростью $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, получаем для k^2 характеристическое уравнение

$$k^4 + k^2 \cdot 2 \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{b^4} - \frac{b^2}{a^4} \right) - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}{\frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}} + \frac{8 \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right)}{\frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}} = 0. \quad (10)$$

Так как $\frac{\rho}{\gamma}$ есть скорость распространения волн в зазоре между бесконечными коаксиальными цилиндрами, а $\gamma = \frac{2\pi}{\Lambda}$, Λ — длина волны, с учетом положительности k^2 получаем безразмерное соотношение

$$\frac{c^2}{c_2^2} = 1 + \Lambda^2 \frac{D}{4\pi^2}, \quad (11)$$

где

$$D = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}} \left\{ \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{a^2}{b^4} - \frac{b^2}{a^4} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{a^2}{b^4} - \frac{b^2}{a^4} \right) \right]^2 + 8 \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4} \right) \times} \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right] \right\}. \quad (12)$$

В случае (9") имеем

$$I_1(ka) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \sin \left(ka - \frac{\pi}{4} \right), \quad Y_1(ka) \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{ka}} \cos \left(ka - \frac{\pi}{4} \right).$$

Подставляя эти значения $I_1(ka)$ и $Y_1(ka)$ в определитель (9) и раскрывая его, получаем для k характеристическое уравнение

$$\sin k(a-b) = 0, \quad (13)$$

откуда следует соотношение

$$\frac{c^2}{c_2^2} = 1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{4(a-b)^2}, \quad (14)$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Из (11) и (14) видно, что для всех крутильных колебаний существует дисперсия, с ростом Λ фазовая скорость неограниченно возрастает, для $\Lambda \rightarrow 0$ фазовая скорость стремится к c_2 — значению скорости распространения волн искажения. Для групповой скорости волн кручения получаем

$$c_g = \frac{c_2^2}{c}.$$

Для больших Λ c_g уменьшается до нуля, для $\Lambda \rightarrow 0$ — растет, асимптотически приближаясь к c_2 .

В случае продольных волн $u_\varphi = 0$, т. е. существует лишь колебательное движение в плоскости rz . Рассматриваем симметричные относительно оси z колебания, т. е. u_r и u_z не зависят от φ . Из (3) получаем $\omega_r = \omega_z = 0$, а первое и третье уравнения (1) преобразуются к виду

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v \omega_\varphi). \quad (16)$$

Полагая

$$u_r = u e^{i(\gamma z + \rho t)}, \quad u_z = W e^{i(\gamma z + \rho t)},$$

с учетом

$$\begin{aligned} 2\omega_{\varphi} &= \left(i\gamma U - \frac{dW}{dr} \right) e^{i(\gamma z + \rho t)}, \\ \Delta &= \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + i\gamma W \right) e^{i(\gamma z + \rho t)} \end{aligned} \quad (17)$$

получим из (15) и (16), исключая, соответственно, ω_{φ} и Δ , уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\Delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Delta}{dr} + h^2\Delta = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2\omega_{\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{\varphi}}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \omega_{\varphi} = 0, \quad (19)$$

где

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2, \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2.$$

Общими решениями и будут, соответственно, функции

$$\Delta = -[A_1 I_0(hr) + A_2 Y_0(hr)] \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} e^{i(\gamma z + \rho t)} \quad (20)$$

$$\omega_{\varphi} = \frac{i\rho p^2}{\mu} [B_1 I_1(kr) + B_2 Y_1(kr)] e^{i(\gamma z + \rho t)}, \quad (21)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, $I_0(hr), Y_0(hr)$ — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, $I_1(kr), Y_1(kr)$ — функции Бесселя первого и второго рода первого порядка. Для $U(r)$ и $W(r)$ получаем

$$\begin{cases} U(r) = A_1 \frac{\partial I_0(hr)}{\partial r} + A_2 \frac{\partial Y_0(hr)}{\partial r} + B_1 \gamma I_1(kr) + B_2 \gamma Y_1(kr), \\ W(r) = A_1 i\gamma I_0(hr) + A_2 i\gamma Y_0(hr) + \\ + B_1 \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r I_1(kr)] + B_2 \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r Y_1(kr)]. \end{cases} \quad (22)$$

Граничные условия

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=a} = 0$$

приводят к выражениям

$$\begin{aligned} &\left\{ A_1 \left[2\mu \frac{\partial^2 I_0(hr)}{\partial r^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} I_0(hr) \right] + A_2 \left[2\mu \frac{\partial^2 Y_0(hr)}{\partial r^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} Y_0(hr) \right] + \right. \\ &\quad \left. + B_1 2\mu \gamma \frac{\partial I_1(kr)}{\partial r} + B_2 2\mu \gamma \frac{\partial Y_1(kr)}{\partial r} \right\} \Big|_{r=a} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ A_1 2\gamma \frac{\partial I_0(hr)}{\partial r} + A_2 2\gamma \frac{\partial Y_0(hr)}{\partial r} + B_1 \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right] I_1(kr) + \right. \\ &\quad \left. + B_2 \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right] Y_1(kr) \right\} \Big|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений (23), (24) является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 I_0(ha)}{\partial a^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} I_0(ha) & 2\mu \frac{\partial^2 Y_0(ha)}{\partial a^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} Y_0(ha) \\ 2\gamma \frac{\partial I_0(ha)}{\partial a} & 2\gamma \frac{\partial Y_0(ha)}{\partial a} \\ 2\mu \frac{\partial^2 I_0(hb)}{\partial b^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} I_0(hb) & 2\mu \frac{\partial^2 Y_0(hb)}{\partial b^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} Y_0(hb) \\ 2\gamma \frac{\partial I_0(hb)}{\partial b} & 2\gamma \frac{\partial Y_0(hb)}{\partial b} \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{vmatrix} 2\mu \gamma \frac{\partial I_1(ka)}{\partial a} & 2\mu \gamma \frac{\partial Y_1(ka)}{\partial a} \\ \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right] I_1(ka) & \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right] Y_1(ka) \\ 2\mu \gamma \frac{\partial I_1(kb)}{\partial b} & 2\mu \gamma \frac{\partial Y_1(kb)}{\partial b} \\ \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right] I_1(kb) & \left[2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right] Y_1(kb) \end{vmatrix}$$

При $ka, kb, ha, hb \ll 1$, раскрывая определитель и учитывая при этом лишь первые члены представления функций $I_0(ha)$, $Y_0(ha)$, $I_1(ka)$, $Y_1(ka)$ в виде ряда, получаем безразмерное соотношение

$$\frac{c^2}{c_2^2} = A + \sqrt{A^2 - B}, \quad (26)$$

где

$$A = \frac{\frac{\Lambda^2}{4\pi} \frac{8}{ab} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\lambda^2 + 3\lambda\mu + 2\mu^2) + \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) \times}{2\rho \left[\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) - \right.} \quad (27)$$

$$\left. \times (6\lambda^2 + 21\lambda\mu + 14\mu^2) - 4(2\lambda^2 + 9\lambda\mu + 6\mu^2) \ln \frac{a}{b} - 4(\lambda\mu + \mu^2) \ln \frac{a}{b} \right]},$$

$$B = \frac{\frac{\Lambda^2}{4\pi} \frac{8}{ab} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2) + 2 \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) \times}{\rho^2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) - \right.} \quad (28)$$

$$\left. \times (3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2) - 8(3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2) \ln \frac{a}{b} - 4(\lambda\mu + \mu^2) \ln \frac{a}{b} \right]}.$$

Когда $ka, kb, ha, hb \gg 1$, используя асимптотическое представление функций $I_0(z), Y_0(z), I_1(z), Y_1(z)$ для $z \gg 1$ [3], из (25) получаем характеристические уравнения для h и k

$$\begin{aligned}\cos h(a-b) &= 1, \quad \sin h(a-b) = 0, \\ \cos k(a-b) &= 1, \quad \sin k(a-b) = 0, \\ \cos[(h+k)(a-b)] &= 1\end{aligned}\quad (29)$$

из которых получаем соотношения

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{c_1^2} &= 1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{(a-b)^2}, \quad \frac{c^2}{c_1^2} = 1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{4(a-b)^2} \\ \frac{c^2}{c_2^2} &= 1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{(a-b)^2}, \quad \frac{c^2}{c_1^2} = 1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{4(a-b)^2} \\ \frac{c^2}{c_2^2} &= \frac{\left(1 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) \left[1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{(a-b)^2}\right]}{1 + \frac{c_1^4}{c_2^4}} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right)^2 \left[1 + \Lambda^2 \frac{n^2}{(a-b)^2}\right]^2}{\left(1 + \frac{c_1^4}{c_2^4}\right)^2} + \frac{2 - \left[2 + \Lambda^2 \frac{n^2}{(a-b)^2}\right]^2}{1 + \frac{c_1^4}{c_2^4}}} \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (30)$$

Как и в случае крутильных колебаний имеем дисперсию, как при $ka, kb, ha, hb \gg 1$, так и при $ka, kb, ha, hb \ll 1$. В случае поперечных колебаний ищем составляющие вектора смещения в виде

$$\begin{cases} u_r = U \cos \varphi e^{i(\gamma z + pt)} \\ u_\varphi = V \sin \varphi e^{i(\gamma z + pt)} \\ u_z = W \cos \varphi e^{i(\gamma z + pt)} \end{cases}\quad (31)$$

Тогда решением уравнений (1) являются функции

$$\begin{cases} U(r) = A_1 \frac{\partial I_1(hr)}{\partial r} + B_1 \gamma \frac{\partial I_1(kr)}{\partial r} + C_1 \frac{I_1(kr)}{r} + A_2 \frac{\partial Y_1(hr)}{\partial r} + \\ + B_2 \gamma \frac{\partial Y_1(kr)}{\partial r} + C_2 \frac{Y_1(kr)}{r}, \\ V(r) = A_1 \frac{I_1(hr)}{r} - B_1 \gamma \frac{I_1(kr)}{r} - C_1 \frac{\partial I_1(kr)}{\partial r} + A_2 \frac{Y_1(hr)}{r} - \\ - B_2 \gamma \frac{Y_1(kr)}{r} - C_2 \frac{\partial Y_1(kr)}{\partial r}, \\ W(r) = A_1 i \gamma I_1(hr) - B_1 i k^2 I_1(kr) + A_2 i \gamma Y_1(hr) - \\ - B_2 i k^2 Y_1(kr) \end{cases}\quad (32)$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ — произвольные постоянные и

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2, \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2.$$

Граничные условия

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=a} = 0$$

приводят к системе уравнений относительно постоянных $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Условием существования нетривиального решения системы является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 I_1(ha)}{\partial a^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} I_1(ha) & 2\mu \frac{\partial^2 Y_1(ha)}{\partial a^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} Y_1(ha) \\ 2\mu \frac{\partial^2 I_1(hb)}{\partial b^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} I_1(hb) & 2\mu \frac{\partial^2 Y_1(hb)}{\partial b^2} - \frac{\lambda \rho p^2}{\lambda + 2\mu} Y_1(hb) \\ 2 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ha)}{a} \right) & 2 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ha)}{a} \right) \\ 2 \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(hb)}{b} \right) & 2 \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(hb)}{b} \right) \\ 2\gamma \frac{\partial I_1(ha)}{\partial a} & 2\gamma \frac{\partial Y_1(ha)}{\partial a} \\ 2\gamma \frac{\partial I_1(hb)}{\partial b} & \gamma \frac{\partial Y_1(hb)}{\partial b} \\ 2\mu \gamma \frac{\partial^2 I_1(ka)}{\partial a^2} & 2\mu \gamma \frac{\partial^2 Y_1(ka)}{\partial a^2} \\ 2\mu \gamma \frac{\partial^2 I_1(kb)}{\partial b^2} & 2\mu \gamma \frac{\partial^2 Y_1(kb)}{\partial b^2} \\ 2\gamma \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ka)}{a} \right) & 2\gamma \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ka)}{a} \right) \\ 2\gamma \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(kb)}{b} \right) & 2\gamma \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(kb)}{b} \right) \\ \left(2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right) \frac{\partial I_1(ka)}{\partial a} & \left(2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right) \frac{\partial Y_1(ka)}{\partial a} \\ \left(2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right) \frac{\partial I_1(kb)}{\partial b} & \left(2\gamma^2 - \frac{\rho p^2}{\mu} \right) \frac{\partial Y_1(kb)}{\partial b} \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ka)}{a} \right) & 2\mu \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ka)}{a} \right) \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(kb)}{b} \right) & 2\mu \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(kb)}{b} \right) \\ \frac{\partial^2 I_1(ka)}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{I_1(ka)}{a} \right) & \frac{\partial^2 Y_1(ka)}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Y_1(ka)}{a} \right) \\ \frac{\partial^2 I_1(kb)}{\partial b^2} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{I_1(kb)}{b} \right) & \frac{\partial^2 Y_1(kb)}{\partial b^2} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{Y_1(kb)}{b} \right) \\ \gamma \frac{I_1(ka)}{a} & \gamma \frac{Y_1(ka)}{a} \\ \gamma \frac{I_1(kb)}{b} & \gamma \frac{Y_1(kb)}{b} \end{vmatrix} \quad (33)$$

Рассмотрение случаев, когда $ka, kb, ha, hb \ll 1$ и $ka, kb, ha, hb \gg 1$ приводит к выражениям, указывающим на наличие дисперсии как в первом, так и во втором случае. Ввиду их громоздкости, в данной работе эти результаты не приводятся.

Автор приносит благодарность А. А. Янцевичу за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, 1935.
2. Г. Кольский. Волны напряжений в твердых телах. ИЛ, М., 1955.
3. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I. ИЛ, М., 1949.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ НАПРАВЛЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

А. С. Брюховецкий

Проблема переноса излучения направленного точечного источника в рассеивающей среде в общем случае не допускает точного решения. Поэтому важное практическое значение имеют приближенные методы. Для прожекторного луча подобная задача достаточно подробно рассмотрена Е. М. Фейгельсон [1] в рамках однократного рассеяния.

В данной работе для учета многократного рассеяния излучения используется приближенный метод В. В. Соболева, который нашел достаточно успешное применение в работах по теории переноса излучения в сферической атмосфере [2, 3].

Пусть точечный источник помещен в начале координат. Диаграмма излучения по мощности $Q(\theta)$ обладает симметрией вращения вокруг оси oz . Точка наблюдения r характеризуется сферическими координатами r, θ, φ (θ — зенитное расстояние от оси oz). Направление

излучения $\vec{l}$ в данной точке будем характеризовать углами β и γ , которые в отличие от [2, 3] отсчитываем не в местной системе координат, связанной с точкой наблюдения, а в системе, связанной с источником. Интенсивность источника в вакууме — $AQ(\theta)/4\pi r^2$, объемный коэффициент поглощения — α , вероятность «выживания» кванта при элементарном акте рассеяния — λ , индикатриса рассеяния — $x(\delta)$, (δ — угол между направлением падающего на данный объем излучения и направлением излучения, рассеянного этим объемом). Тогда уравнение переноса излучения для рассматриваемой задачи, как известно, можно записать следующим образом:

$$(\vec{l} \nabla) I = l_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{l_\theta}{r} \cdot \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{l_\varphi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial I}{\partial \varphi} = -\alpha I +$$

$$+ \frac{\alpha \lambda A}{4\pi r^2} Q(0) l^{-\sigma r} x(\delta_1) + \frac{\alpha \lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma^1 \int_0^\pi d\beta^1 I(r, \theta, \varphi; \beta^1, \gamma^1) x(\delta) \sin \beta^1, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} l_r &= \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta \cos(\varphi - \gamma) \\ l_\theta &= -\cos \beta \sin \theta + \sin \beta \cos \theta \cos(\varphi - \gamma) \\ l_\varphi &= \sin \beta \sin(\gamma - \varphi) \end{aligned}$$

$$\cos \delta_1 = l_r, \quad \cos \delta = \cos \beta \cos \beta^1 + \sin \beta \sin \beta^1 \cos(\gamma - \gamma^1).$$

Поскольку $\gamma - \gamma^1 = \gamma - \varphi - (\gamma^1 - \varphi)$, то нетрудно видеть, что в коэффициенты и правую часть уравнения (1) зависимость от φ и γ входит лишь через разность $\varphi - \gamma$. Отсюда следует, что

$$I(r, \theta, \varphi; \beta, \gamma) = I(r, \theta, \varphi - \gamma, \beta). \quad (2)$$

К уравнению (1) следует добавить условие обращения в нуль излучения при $r \rightarrow \infty$.

Согласно методу В. В. Соболева [2, 3] уравнение (1) следует решить для индикатрисы

$$x(\delta_1) = 1 + x_1 \cos \delta_1, \quad (3)$$

где x_1 — первый коэффициент разложения заданной индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра; затем в члене полученного решения, учитывающем рассеяния первого порядка, необходимо заменить индикатрису рассеяния (3) на заданную. Вопрос о границах применимости данного метода рассмотрен в работах [4, 5]. Для индикатрисы рассеяния (3) уравнение переноса (1) принимает вид

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}) I &= -\alpha I + \alpha \lambda J + \alpha \lambda x_1 H \cos \beta + \alpha \lambda x_1 \\ &G \sin \beta \cos(\gamma - \varphi) + \frac{\alpha \lambda A}{4\pi r^2} Q(0) l^{-\sigma r} \\ &\{1 + x_1 [\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta \cos(\gamma - \varphi)]\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} J &= \int I \frac{d\omega^1}{4\pi}, \quad H = \int I \cos \beta' \frac{d\omega^1}{4\pi}, \\ G &= \int I \sin \beta^1 d\beta^1 d\gamma^1. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы получить уравнения, определяющие функции J , H и G , уравнение (1) умножаем последовательно на $\frac{d\omega}{4\pi}$, $\cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} \sin \theta \cos \times$ $\times (\gamma - \varphi) \frac{d\omega}{4\pi}$ и проинтегрируем. Используя соотношения, аналогичные соотношению Эддингтона [2], приходим к следующей системе уравнений:

$$\Delta J(r, \theta) - k^2 J(r, \theta) = \alpha \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2\alpha \lambda x_1}{r} f - \alpha^2 \lambda (3 - \lambda x_1) f, \quad (5)$$

$$H = \frac{1}{3 - \lambda x_1} \left\{ \lambda x_1 f \cos \theta - \frac{1}{a} \left(\cos \theta \frac{\partial J}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$G = \frac{1}{3 - \lambda x_1} \left\{ \lambda x_1 f \sin \theta - \frac{1}{a} \left(\sin \theta \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (7)$$

Здесь $k^2 = \alpha^2 (1 - \lambda) (3 - \lambda x_1)$ — оператор Лапласа, а $f(r, \theta) = \frac{A}{4\pi r^2} l^{-\alpha r} Q(\theta)$. После замены $\tau = \alpha r$ и подстановки $f(r, \theta)$ в правую часть уравнения (5) получим

$$\Delta_1 J(\tau, \theta) - k_1^2 J(\tau_1 \theta) = F(\tau \theta), \quad (5)$$

где

$$k_1^2 = (1 - \lambda) (3 - \lambda x_1), \quad F(\tau, \theta) = -DF_1(\tau) Q(\theta), \\ D = \alpha^2 \lambda A [3 + x_1 (1 - \lambda)] / 4\pi, \quad F_1(\tau) = l^{-\tau/\tau^2}.$$

Решение уравнения (5) при нулевом условии на бесконечности, как известно, имеет вид

$$J(\tau_1 \theta) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{e^{-k_1 |\vec{\tau} - \vec{\tau}_1|}}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}_1|} F(\vec{\tau}) dV_1. \quad (8)$$

Если

$$\vec{\tau} = (\tau, \theta, \varphi), \quad \vec{\tau}_1 = (\tau_1 \theta_1^1 \varphi^1),$$

то

$$|\vec{\tau} - \vec{\tau}_1| = (\tau^2 + \tau_1^2 - 2\tau\tau_1 \cos \mu)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\cos \mu = \cos \theta \cos \theta^1 + \sin \theta \sin \theta^1 \cos(\varphi - \varphi').$$

Поскольку в $F(\vec{\tau}_1)$ переменные τ_1 и θ^1 разделяются, то выражение для функции Грина следует взять в виде разложения

$$\frac{e^{-k_1 |\vec{\tau} - \vec{\tau}_1|}}{|\vec{\tau} - \vec{\tau}_1|} = \frac{1}{V^{\tau\tau_1}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) p_n(\cos \mu) \begin{cases} I_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau_1) K_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau), & \tau > \tau_1 \\ I_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau) K_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau_1), & \tau < \tau_1 \end{cases}. \quad (9)$$

Если воспользоваться теоремой сложения для полиномов Лежандра, то при подстановке (9) в (8) и интегрировании получим

$$J(\tau, \theta) = \frac{D}{2\pi V^{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) \left\{ K_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau) R_n(\tau) + \right. \\ \left. + I_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau) \tilde{R}_n(\tau) \right\}, \quad (10)$$

где

$$c_n = (2n + 1) \int_0^\pi P_n(\cos \theta^1) Q(\theta^1) \sin \theta^1 d\theta^1;$$

$$R_n(\tau) = \int_0^\tau \tau_1^{\frac{3}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau_1) F_1(\tau_1) d\tau_1; \quad (11)$$

$$\tilde{R}_n(\tau) = \int_\tau^\infty \tau_1^{\frac{3}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(k_1 \tau_1) F_1(\tau_1) d\tau_1. \quad (12)$$

Введем систему функций

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad \xi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} K_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

Исходя из свойств модифицированных функций Бесселя, легко показать, что имеют место рекуррентные соотношения

$$\frac{d\psi_n}{dz} = \frac{n}{2n+1} \psi_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} \psi_{n+1}, \quad \frac{d\xi_n}{dz} = -\frac{n}{2n+1} \xi_{n-1} - \frac{n+1}{2n+1} \xi_{n+1}.$$

Эти соотношения позволяют получить рекуррентные формулы для вычисления интегралов (11) и (12):

$$R_{n+1}(\tau) = \frac{2n+1}{(n+1)k_1} R_n(\tau) - \frac{n}{n+1} R_{n-1}(\tau) + \frac{2n+1}{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} \times \\ \times \left[e^{-\tau} \psi_n(k_1 \tau) - \psi_n(0) \right], \quad (13)$$

$$\tilde{R}_{n+1}(\tau) = -\frac{2n+1}{(n+1)k_1} \tilde{R}_n(\tau) - \frac{n}{n+1} \tilde{R}_{n-1}(\tau) + \\ + \frac{2n+1}{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} I_{n+\frac{1}{2}}^{-\tau} \xi_n(k_1 \tau). \quad (14)$$

Итак, усредненная по всем направлениям интенсивность излучения $J(\tau, \theta)$ вычисляется по формуле (10). Для нахождения интенсивности излучения в направлении $\vec{l}$, необходимо определить H и G по формулам (6) и (7) и подставить в уравнение (1), предварительно заменив в последнем слагаемом правой части (1') $1 + x_1 \cos \delta_1$ на заданную индикатрису рассеяния $x(\delta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n \times (\cos \delta_1)$. Уравнение (1') при этом будет выглядеть так:

$$(\vec{l} \nabla) I = -\alpha I + \alpha B, \quad (15)$$

где B теперь является известной функцией

$$\alpha B = \frac{3\alpha\lambda x_1 l_r + \alpha\lambda(3 - \lambda x_1) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n p_n(l_r) \right]}{3 - \lambda x_1} -$$

$$- \frac{\alpha\lambda x_1 l_r}{3 - \lambda x_1} \cdot \frac{Dk_1}{\pi \sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta) \left\{ \xi'_n(k\tau) \tilde{R}_n(\tau) + \Psi'_n(k_1\tau) \tilde{R}_n(\tau) \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha\lambda x_1 l_0}{3 - \lambda x_1} \frac{D \sin \theta}{\pi \sqrt{2\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P'_n(\cos \theta) \left\{ \xi_n(k_1\tau) R_n(\tau) + \Psi_n(k_1\tau) \tilde{R}_n(\tau) \right\} +$$

$$+ \alpha\lambda \frac{D}{\pi \sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta) \left\{ \xi_n(k_1\tau) R_n(\tau) + \Psi_n(k_1\tau) \tilde{R}_n(\tau) \right\}.$$

Поскольку характеристикой для уравнения (15) является прямая линия, то решение его, как известно, можно записать в виде:

$$I(s) = \alpha \int_{-\infty}^s B(s') e^{-\alpha(s-s')} ds'. \quad (16)$$

Здесь s — координата точки наблюдения (r, θ, φ) на характеристике. Формула (16) не дает аналитического выражения для интенсивности, однако, принимая во внимание рекуррентные соотношения (13) и (14), позволяет произвести численные расчеты.

В заключение автор выражает благодарность Э. А. Канеру за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прожекторный луч в атмосфере. Под ред. Г. В. Розенберга, Изд-во АН СССР, 1960.
2. В. В. Соболев, И. Н. Минин. Искусственные спутники земли, вып. 14, М., 1962.
3. О. И. Смоктий. «Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана», т. 3, № 3, 245, 1967.
4. С. Г. Слюсарев. «Уч. зап. ЛГУ, труды астрономической обсерватории», т. 22, № 39, 72, 1965.
5. С. А. Каплан. «Астроном. ж.», т. 29, вып. 3, 1952.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ИСПРАВЛЕНИЯ

1

В моей книге «Лекции по теории аппроксимации» (изд. 2-е, М., 1965) обнаружено несколько недосмотров и погрешностей.

1. На стр. 159 в формулировке леммы 1 слова «Если также $\varphi''(t) \in L^*$, то» должны быть заменены на «В таком случае».

2. На стр. 159, строка 14 сн., вместо ρ должно быть 2ρ .

3. На стр. 159, строка 6 и 2 сн., вместо $\Phi^{(k)}[\varphi(t)]$ должно быть $\Phi^{(k)}[\varphi(t)] - \Phi^{(k)}(0)$.

4. На стр. 160, строки 5 и 6 св., формула должна иметь вид

$$\begin{aligned} \|\psi_k\| &\leq \frac{\|f^* - \varphi\|^k}{k!} \left[|\Phi^{(k)}(0)| + \|\Phi^{(k)}[\varphi(t)] - \Phi^{(k)}(0)\| \right] \leq \\ &\leq \frac{M}{2^k} + \frac{1}{k!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^k \frac{N}{2} M [\max |\varphi''(t)| + \max |\varphi'(t)|^2 + 2] \times \end{aligned}$$

5. На стр. 160, строка 9 сн. должна быть заменена одним словом «Поэтому».

6. На стр. 166, строка 6 св., вместо слова «закончено» должно быть «закончено, если принять $\Gamma_u = [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$, $\omega_u(t) = g^*(t) \mu^*\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right)$ и воспользоваться леммой 2».

7. На стр. 258, строка 19 сн., правая часть неравенства должна иметь вид

$$\left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + C + 1\right) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)^r}.$$

8. Кроме того, я хотел бы добавить следующее подстрочное примечание к строке 4 св. на стр. 183:

** Вот пример: функция

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u} du = z \int_0^1 \cos zt \ln \frac{1}{t} dt$$

принадлежит B_1 , функция же

$$\tilde{f}(z) = -z \int_0^1 \sin zt \ln \frac{1}{t} dt = \int_0^z \frac{\cos u - 1}{u} du$$

не принадлежит B_1 .

На необходимость части сделанных здесь исправлений меня натолкнули вопросы некоторых читателей книги. Пользуюсь случаем их поблагодарить.

Н. И. АХИЕЗЕР

По недосмотру авторов в статье «Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Оптимальное обнаружение, фильтрация и управление. II», помещенной в «Вестнике ХГУ. Математика и механика», вып. 35 при получении соотношений (11); (16)÷(18); (27); (28); (36); (37); (70)÷(72); (77)÷(79); (85)÷(87); (90)÷(92); (101)÷(103); (106)÷(108); (111)÷(113); (116)÷(118); (149)÷(153); ошибочно использованы выражения, связывающие моменты различных порядков, справедливые только для центральных моментов (формула (16)). Переход к начальным моментам осуществляется по известным формулам и приводит к очевидным изменениям в указанных выше соотношениях.

Например, при получении уравнения (11) необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle &= 4 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 3 \langle x^2 \rangle^2 - 12 \langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle + 6 \langle x \rangle^4 = \\ &= F_1(\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle) = F_1. \end{aligned}$$

Тогда (11) принимает вид

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x^2 \rangle &= B - \frac{1}{2N} L_t [\langle x^2 \rangle^2 + \\ &+ F_1(\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle)], \end{aligned}$$

и т. д.

Ю. А. АЛЕКСАНДРОВ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

РЕФЕРАТЫ

- УДК 517. 535. 4 Об одной теореме Валирона — Титчмарша. Логвиненко В. Н. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 3—13.

Доказаны обобщения известной теоремы Титчмарша о целых функциях с нулями на луче на случай целого уточненного порядка и колеблющегося порядка (т. е. такого уточненного порядка, для которого верхний и нижний пределы от бесконечности не обязательно равны).

Библиографических ссылок 6.

- УДК 517. 97 Антиунитарные преобразования линейных операторов. Асади Ш., Луценко И. Е., «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 13—20.

В работе доказывается: 1) если нормальный оператор T связан с антиунитарным оператором K одним из условий $КТК^{-1} = \pm T$, $КТК^{-1} = \pm T^*$, то существует инволюция, связанная с T тем же условием; 2) для того, чтобы унитарный оператор U был квадратом антиунитарного оператора, необходимо и достаточно, чтобы а) существовал антиунитарный оператор, перестановочный с U и б) размерность подпространства $H_{-1} = \{f; Uf = -f\}$ была четной.

Библиографических ссылок 15.

- УДК 517. 97 Антиунитарные преобразования операторных узлов. Асади Ш., Луценко И. Е., «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 21—27.

В работе изучаются квазиэрмитовы и квазиунитарные узлы, введенные М. С. Лившицем и М. С. Бродским. Выясняется структура этих узлов и их характеристических функций для внутренних операторов T , связанных с некоторым антиунитарным оператором K одним из четырех условий:

$$КТК^{-1} = \pm T, \quad КТК^{-1} = \pm T^*.$$

Библиографических ссылок 8.

- УДК 517. 97 Симметрия спектральной функции нормального оператора. Асади Ш., «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 27—30.

В работе рассматриваются нормальные, в частности самосопряженные и унитарные операторы T , связанные с антиунитарным оператором K одним из условий

$$КТК^{-1} = T, \quad КТК^{-1} = -T, \quad КТК^{-1} = -T^*.$$

Доказывается, что необходимым и достаточным условием существования такого оператора K является симметрия спектральной функции (разложения единицы) оператора T относительно вещественной оси (мнимой оси, начала координат).

Библиографических ссылок 2.

УДК 517. 97

Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов. Дубовой В. К. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 30—40.

В работе изучаются свойства характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517. 97

О характеристических оператор-функциях алгебр Ли. Ваксман Л. Л., 4 «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 41—45.

В работе доказывается унитарная эквивалентность главных компонент операторных узлов над двумя алгебрами Ли в том случае, когда существует изоморфизм алгебр, устанавливающий равенство характеристических функций этих узлов, и самосопряженный оператор, отвечающий одной из метрик внешнего пространства, обратим.

Библиографических ссылок 3.

УДК 517. 944

Первая краевая задача с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. Михайленко В. Г., «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 46—48.

Рассматривается первая краевая задача для несамосопряженных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в областях, границы которых состоят из большого числа мелких связных компонент. Показано, как приближенно, а в пределе точно заменить решение такой задачи решением некоторой краевой задачи с более простой границей.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513. 832/835

Теорема Хана-Банаха для решетчатых многообразий в топологических M -пространствах. Перепечай И. П. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 48—62.

Доказывается теорема Хана-Банаха для решетчатых многообразий в топологических M -пространствах и рассматривается ряд следствий.

Библиографических ссылок 12.

УДК 519. 2

Мероморфные случайные процессы. Клебанова Г. Б. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 62—67.

Изучаются корреляционные функции мероморфных случайных процессов. Построены интерполяционные формулы для мероморфных случайных процессов.

Библиографических ссылок 7.

УДК 519. 2. 004. 14 **О конструктивных методах в теории квазимарковских процессов.** Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 67—77.

При изучении стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) высокого порядка часто используется метод параболических уравнений. Однако этот метод основан на расширении фазового пространства и сведении соответствующей задачи к марковскому случаю. Но такой путь не всегда целесообразен, если нас интересуют плотности распределения вероятностей (ПРВ) решения исходного СДУ, а не совместные ПРВ решения и его производных. Из уравнения ФПК для соответствующей системы СДУ первого порядка в общем случае невозможно получить в замкнутом виде уравнение для ПРВ решения исходного СДУ.

В реферируемой работе рассматривается «обратная» задача: постулируются связи между потоком «вероятности» и ПРВ, а затем уже восстанавливается соответствующее СДУ по уравнениям для одномерной ПРВ, используя соответствующие модельные уравнения. Хотя эта задача разрешается неоднозначно, она оказывается весьма полезной при изучении динамических систем, описываемых СДУ высоких порядков.

Библиографических ссылок 5.

УДК 519. 2. 004. 14 **О стохастических мостах** С. Н. Бернштейна. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 77—85.

В докладе на международном конгрессе в Цюрихе («О зависимостях между случайными величинами», 1932), С. Н. Бернштейн ввел новый класс случайных процессов — стохастические мосты (возвратные цепи), являющиеся обобщением марковских процессов.

При нахождении законов распределения вероятностей для стохастических мостов необходимо задавать не только начальное, а и конечное распределение.

В настоящей работе устанавливаются связи между стохастическими мостами, стохастическими дифференциальными уравнениями и соответствующими уравнениями для плотностей распределения вероятностей, а также рассматривается ряд примеров.

Библиографических ссылок 4.

УДК 538. 4 **Об одном точном решении в магнитной гидродинамике.** Тарапов И. Е. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 85—93.

Найдено точное решение уравнений магнитной гидродинамики в случае движения вязкой проводящей несжимаемой жидкости в радиальном магнитном поле между вращающимися соосными бесконечными цилиндрами.

Библиографических ссылок 1.

УДК 538. 4 **Вязко-пластический пограничный слой в конусе при наличии скрещенных электрического и магнитного полей.** Косачевская Е. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 94—97.

Найдены автомодельные решения уравнений вязко-пластического пограничного слоя с учетом электрического и магнитного поля в случае, когда скорость во внешнем идеально пластическом потоке пропорциональна x^{-2} .

Таблиц 1. Рисунков 2. Библиографических ссылок 4.

Нестационарное движение проводящей вязко-пластической среды между двумя бесконечными пластинами при наличии скрещенных электрического и магнитного полей. Косачевская Е. А., Татарченко Э. Н. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 98—105.

В работе с помощью метода аналитического продолжения Колоднера получено точное решение задачи неустановившегося движения вязко-пластической среды между двумя бесконечными пластинами при наличии скрещенных электрического и магнитного полей. Получено распределение скоростей и определена подвижная граница жесткой и вязко-пластической зон.

Таблиц 1. Рисунков 1. Библиографических ссылок 4.

О похгаммеровских волнах для одного вида упругих колебаний. Колод я ж н ы й Б. Г. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 105—113.

В работе изучаются типы упругих волн, распространяющихся в зазоре между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами.

Библиографических ссылок 3.

Приближенное решение уравнения переноса излучения направленного точечного источника. Брюховецкий А. С. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 37, Изд-во ХГУ, Харьков, 1972, стр. 113—117.

В работе получено приближенное решение уравнения переноса при помощи метода В. В. Соболева. Это решение позволяет провести численные расчеты.

Библиографических ссылок 5.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. Н. Логвиненко. Об одной теореме Валирона — Титчмарша .	3
Ш. Асади, И. Е. Луценко. Антиунитарные преобразования линейных операторов	13
Ш. Асади, И. Е. Луценко. Антиунитарные преобразования операторных узлов	21
Ш. Асади. Симметрия спектральной функции нормального опера- тора	27
В. К. Дубовой. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов	30
Л. Л. Ваксман. О характеристических оператор-функциях алгебр Ли	41
В. Г. Михайленко. Первая краевая задача с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка	46
И. П. Перепечай. Теорема Хана-Банаха для решеточных много- образий в топологических M -пространствах	48
Г. Б. Клебанова. Мероморфные случайные процессы	62
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О конструктивных методах в теории квазимарковских процессов	67
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О стохастических мостах С. Н. Бернштейна	77
И. Е. Тарапов. Об одном точном решении в магнитной гидро- динамике	85
Е. А. Косачевская. Вязко-пластический пограничный слой в конусе при наличии скрещенных электрического и магнитного полей . .	94
Е. А. Косачевская, Э. Н. Татарченко. Нестационарное движение проводящей вязко-пластической среды между двумя бесконеч- ными пластинами при наличии скрещенных электрического и магнит- ного полей	98
Б. Г. Колодяжный. О похгаммеровских волнах для одного вида упругих колебаний	105
А. С. Брюховецкий. Приближенное решение уравнения пере- носа излучения направленного точечного источника	113
Рефераты	120

Редактор С. Д. Суло
Техредактор Л. Т. Момот
Корректор Л. П. Пипенко

Сдано в набор 17/XI 1971 г. Подписано к печати 5/IV 1972 г. БЦ 50123.
Формат 60 × 90^{1/16}. Объем: 7,75 физ. печ. л., 7,75 усл. печ. л., 8,5 уч.-изд. л.
Заказ 1-2269. Тираж 1000. Цена 85 коп.

Типоофсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете
Министров УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11.

