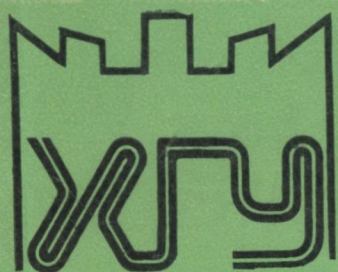


К-14038

П309303



ХАРЬКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

К-14038  
П309303

277'85

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
И МЕХАНИКИ  
СПЛОШНЫХ СРЕД

»ВИЦА ШКОЛА«

1 р. 10 к.

Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277, 1—112.



V.N. Karazin Kharkiv National University



00290059

5



58

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР



# ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

№ 277

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И МЕХАНИКИ  
СПЛОШНЫХ СРЕД

---

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ  
«ВИЩА ШКОЛА»

1985



Вестник Харьковского университета. — Х. Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985. — № 277. Проблемы управления и механики сплошных сред. 112 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов и механике сплошных сред, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1985 г.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), В. И. Коробов (зам. отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 4 от 20 апреля 1984 г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40

Редакция естественнонаучной литературы

В 1703040000-074  
М226 (04)-85

© Харьковский  
государственный  
университет,  
1985

Центральная Научная  
Библиотека ХДУ

Н. К. БАСАК, Г. А. ДОМБРОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

**ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ  
ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ**

Для предложенного в работе [1] закона фильтрации с предельным градиентом получено точное решение известной [2] задачи о плоском стационарном движении несжимаемой жидкости в канале с прямоугольным уступом. Отмечаются частные случаи решения.

Введем обозначения:  $x, y$  — прямоугольные декартовы координаты точки плоскости движения;  $z = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ );  $v$  — модуль вектора скорости фильтрации;  $\theta$  — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси  $x$ ;  $\varphi = -H + \text{const}$ , где  $H$  — напор;  $\psi$  — функция тока;  $\Phi(v)$  — функция, характеризующая закон фильтрации [3].

Задача решается в предположении, что функция  $\Phi(v)$  определена параметрически (параметр  $\sigma$ ,  $\sigma \geq 0$ ) формулами

$$\Phi = \frac{\lambda m e^{\sigma}}{m + \text{th } m\sigma}, \quad v = \frac{\lambda m}{a} \frac{e^{\sigma}}{m + \text{cth } m\sigma},$$

где  $\lambda, m, a$  — произвольные положительные постоянные.

Для  $\varphi(\sigma, \theta)$  и  $\psi(\sigma, \theta)$  имеем в этом случае представления

$$\varphi = -a \text{Re} [mF(\omega) - \text{cth } m\sigma F'(\omega)];$$

$$\psi = \text{Im} [mF(\omega) - \text{th } m\sigma F'(\omega)],$$

где  $F(\omega)$  — произвольная аналитическая функция комплексного переменного  $\omega = \sigma + i\theta$ .

Связь между координатами соответствующих точек плоскости  $\omega$  и физической плоскости  $z$  осуществляется по формуле перехода:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} \bar{z} = & \frac{e^{-2\sigma}}{\text{sh } 2m\sigma} \overline{e^{\omega} F'(\omega)} + \left( \frac{1}{m} + \text{cth } 2m\sigma \right) e^{-\omega} F'(\omega) - \\ & - \frac{m^2 - 1}{m} \int e^{-\omega} F'(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Рассматривается фильтрационное движение между прямой  $y = h$  ( $h = \text{const} > 0$ ) и ломаной, состоящей из полупрямой  $y = l, x \leq 0 \times$  ( $l = \text{const} > 0, l < h$ ), отрезка  $(0, l)$  оси  $y$  и полупрямой  $y = 0,$



$x \geq 0$ . Границы канала, в котором происходит движение, — непроницаемые. Модуль вектора скорости в бесконечности слева принимает значение  $v_1 = q/(h-l)$ , в бесконечности справа —  $v_2 = q/h$ . Соответствующие значения  $\sigma$  обозначим  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В окрестности начала координат образуется застойная зона.

Рассматриваемому потоку в плоскости  $\omega$  соответствует полуполоса  $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ , на границе которой имеем следующее условие для функции тока:

$$\psi(\sigma, -\pi/2) = 0 \quad (\sigma \geq 0); \quad \psi(0, \theta) = 0 \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq 0);$$

$$\psi(\sigma, 0) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_2); \quad \psi(\sigma, 0) = q \quad (\sigma_2 < \sigma < \sigma_1);$$

$$\psi(\sigma, 0) = 0 \quad (\sigma > \sigma_1).$$

С помощью преобразования  $\Omega = \omega + \pi i/2$  отобразим полуполосу  $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ ,  $\sigma \geq 0$  в плоскости  $\omega$  на полуполосу  $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ ,  $\sigma \geq 0$  в плоскости  $\Omega = \sigma + i\Theta$  ( $\Theta = \theta + \pi/2$ ).

На границе полуполосы  $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ ,  $\sigma \geq 0$  имеем

$$\psi(\sigma, 0) = 0 \quad (\sigma \geq 0); \quad \psi(0, \Theta) = 0 \quad (0 \leq \Theta \leq \pi/2); \quad \psi(\sigma, \pi/2) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_2); \quad \psi(\sigma, \pi/2) = q \quad (\sigma_2 < \sigma < \sigma_1); \quad \psi(\sigma, \pi/2) = 0 \quad (\sigma > \sigma_1).$$

Представим функцию  $\psi(\sigma, \Theta)$  в виде суммы функций  $\psi_1(\sigma, \Theta)$  и  $\psi_2(\sigma, \Theta)$  при следующих граничных условиях для  $\psi_1(\sigma, \Theta)$  и  $\psi_2(\sigma, \Theta)$ .

Граничное условие для  $\psi_1(\sigma, \Theta)$ :

$$\psi_1(\sigma, 0) = 0 \quad (\sigma \geq 0); \quad \psi_1(0, \Theta) = 0 \quad (0 \leq \Theta \leq \pi/2);$$

$$\psi_1(\sigma, \pi/2) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_1); \quad \psi_1(\sigma, \pi/2) = -q \quad (\sigma > \sigma_1).$$

Граничное условие для  $\psi_2(\sigma, \Theta)$ :

$$\psi_2(\sigma, 0) = 0 \quad (\sigma \geq 0); \quad \psi_2(0, \Theta) = 0 \quad (0 \leq \Theta \leq \pi/2);$$

$$\psi_2(\sigma, \pi/2) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_2); \quad \psi_2(\sigma, \pi/2) = q \quad (\sigma > \sigma_2).$$

В плоскости  $\Omega$  имеем краевые задачи, аналогичные рассмотренной в работе [1]. Пользуясь результатом работы [1], получаем

$$\psi(\sigma, \Theta) = \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 [mF_k(\Omega) - \text{th } m\sigma F'_k(\Omega)] \right\};$$

$$F_k(\Omega) = (-1)^k \frac{2q}{\pi} \int_0^{\Omega} \left[ \frac{1}{m} + I_{k1}(\Omega) + I_{k2}(\Omega) \right] d\Omega;$$

$$I_{k1}(\Omega) = \frac{1}{2 \text{sh } m\sigma_k} \int_{\sigma+\sigma_k}^{\Omega-\sigma_k} \frac{e^{m(\Omega-t)}}{1+e^{2t}} dt; \quad I_{k2}(\Omega) = \frac{1}{2 \text{sh } m\sigma_k} \int_{\sigma+\sigma_k}^{\Omega-\sigma_k} \frac{e^{m(t-\Omega)}}{1+e^{2t}} dt.$$

Фигурирующая в формуле перехода функция  $F'(\omega)$  будет иметь, следовательно, вид

$$F'(\omega) = \frac{2q}{\pi} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [P_{k1}(\omega) + P_{k2}(\omega)]; \quad P_{k1}(\omega) = \\ = \frac{1}{2 \operatorname{sh} m \sigma_k} \int_{\omega + \sigma_k}^{\omega - \sigma_k} \frac{e^{m(\omega - t)}}{1 - e^{2t}} dt; \quad P_{k2}(\omega) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} m \sigma_k} \int_{\omega + \sigma_k}^{\omega - \sigma_k} \frac{e^{m(t - \omega)}}{1 - e^{2t}} dt.$$

Заметим, что, если  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $P_{k1}(\omega) \rightarrow 0$  и  $P_{k2}(\omega) \rightarrow 0$ . По формуле перехода получаем

$$\bar{z} + il = \frac{2qa}{\pi \lambda m} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[ G_k(\sigma, \theta) e^{-\omega} + \frac{1}{2} (m + \operatorname{cth} m \sigma_k) e^{-\sigma_k} \ln \times \right. \\ \left. \times \left( \operatorname{cth} \frac{\omega - \sigma_k}{2} \right) + \frac{1}{2} (m - \operatorname{cth} m \sigma_k) e^{\sigma_k} \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\omega + \sigma_k}{2} \right) \right]; \\ G_k(\sigma, \theta) = \frac{m}{\operatorname{sh} 2m\sigma} [\overline{P_{k1}(\omega)} + \overline{P_{k2}(\omega)} + e^{-2m\sigma} P_{k1}(\omega) + \\ + e^{2m\sigma} P_{k2}(\omega) + \frac{2}{m} \operatorname{ch}^2 m\sigma].$$

Постоянная интегрирования определена из условия  $z = il$  при  $\sigma = \infty$ . Величины  $l$  и  $q$  связаны равенством

$$l = \frac{qa}{\lambda m} \sum_{k=1}^2 (-1)^k (m + \operatorname{cth} m \sigma_k) e^{-\sigma_k},$$

вытекающим из равенства  $l = q/v_2 - q/v_1$ . Уравнение границы застойной зоны определяем как уравнение линии, на которой  $\sigma = 0$ . Учитывая, что

$$G_k(0, \theta) = \frac{\operatorname{sh} 2\sigma_k}{\operatorname{th} m \sigma_k (\operatorname{ch} 2\sigma_k - \cos 2\theta)},$$

приходим к следующему уравнению границы застойной зоны:

$$\frac{\pi z}{2l} = \left[ \sum_{k=1}^2 (-1)^k (m + \operatorname{cth} m \sigma_k) e^{-\sigma_k} \right]^{-1} \times \\ \times \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[ \frac{1}{2} (m \operatorname{ch} \sigma_k - \operatorname{sh} \sigma_k \operatorname{cth} m \sigma_k) \ln \frac{\operatorname{ch} \sigma_k + \cos \theta}{\operatorname{ch} \sigma_k - \cos \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} 2\sigma_k \operatorname{cth} m \sigma_k}{\operatorname{ch} 2\sigma_k - \cos 2\theta} e^{i\theta} + i (m \operatorname{sh} \sigma_k - \operatorname{ch} \sigma_k \operatorname{cth} m \sigma_k) \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \sigma_k} \right].$$



В качестве параметров, от которых зависит вид границы застойной зоны, приняты величины

$$b_1 = \frac{av_1}{\lambda} = \frac{me^{\sigma_1}}{m + \operatorname{cth} m\sigma_1}, \quad b_2 = \frac{av_2}{\lambda} = \frac{me^{\sigma_2}}{m + \operatorname{cth} m\sigma_2}.$$

На рис. 1 показаны в координатах  $x^* = \pi x / (10l)$  и  $y^* = y/l$  границы застойных зон при  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 0,2$  и разных  $m$ . Частными случаями полученного решения являются решения задач об обтекании фильтрационным потоком стенки с прямоугольным уступом ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ,  $l \neq 0$ ) и о точечном источнике в полосе ( $\sigma_1 = \infty$ ,

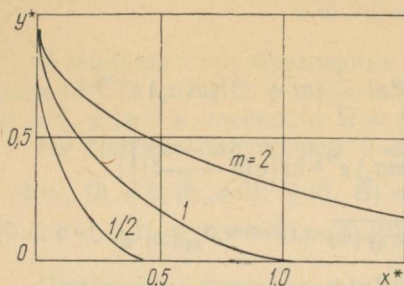


Рис. 1

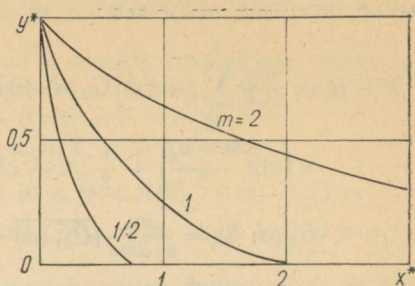


Рис. 2

$h = l$ ). Задача о точечном источнике в полосе для закона фильтрации рассматривалась ранее [1]. Приведенное выше уравнение границы застойной зоны в результате предельного перехода при  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$  и  $l = \text{const}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{z(\theta)}{l} = & \frac{e^{\sigma_1}}{\pi (m \operatorname{cth} m\sigma_1 + 1)} \left\{ (\operatorname{ch} \sigma_1 - m \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{cth} m\sigma_1) \ln \frac{\operatorname{ch} \sigma_1 + \cos \theta}{\operatorname{ch} \sigma_1 - \cos \theta} + \right. \\ & + \left[ \frac{1 - 3 \operatorname{ch} 2\sigma_1 + m \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{cth} m\sigma_1}{\operatorname{sh}^2 \sigma_1 + \sin^2 \theta} + \frac{\operatorname{sh}^2 2\sigma_1}{(\operatorname{sh}^2 \sigma_1 + \sin^2 \theta)^2} \right] e^{i\theta} - \\ & \left. - 2i \left[ \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh}^2 \sigma_1 + \sin^2 \theta} + (m \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{cth} m\sigma_1 - \operatorname{sh} \sigma_1) \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \sigma_1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

На рис. 2 представлены в координатах  $x^*$ ,  $y^*$  результаты расчета по этой формуле при  $b_1 = 0,2$  и разных  $m$ .

Список литературы: 1. Басак Н. К., Домбровский Г. А. О решении задач фильтрации с предельным градиентом. — Прикл. математика и механика, 1983, 47, вып. 6, с. 940 — 946. 2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М.: Наука, 1975. — 199 с. 3. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. — Прикл. математика и механика, 1940, 4, вып. 1, с. 33 — 52.

Поступила в редколлегию 04.02.84.

В. И. КОРОБОВ, д-р физ.-мат. наук,  
В. М. ГАВРИЛЯКО, канд. физ.-мат. наук

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим систему  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in E_n$ ,  $u \in \Omega \subset E_r$ . Функцию  $u: E_n \rightarrow \Omega \subset E_r$ , ставящую в соответствие вектору  $x$  величину  $u(x)$ , будем называть законом управления. Рассмотрим следующую задачу синтеза: выбрать управление  $u(x) \in \Omega$  таким образом, чтобы траектория системы  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , начинающаяся в произвольной точке  $x_0 \in E_n$  в момент времени  $t = 0$ , в некоторый конечный момент времени  $T(x_0)$  принимала значение  $x(T(x_0)) = 0$ .

Пусть  $J_{\rho, \rho_1}$  — кольцо в  $E_n$  вида  $J_{\rho, \rho_1} = \{x: 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1\}$ . Пусть также  $\tilde{f}: E_n \times \Omega \rightarrow E_n$ ,  $(x, u) \rightarrow \tilde{f}(x, u)$  в каждой области  $J_{\rho, \rho_1} \times \Omega$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  и  $u$ . Решение задачи синтеза управления методом функций управляемости заключается в построении функции  $\theta(x)$  — функции управляемости — и на основе этой функции — управления  $u(x) \in \Omega$  такого, что полная производная этой вспомогательной функции  $\theta(x)$  в силу системы  $\dot{x} = f(x, u(x))$  в каждом кольце  $J_{\rho, \rho_1}$  удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$\theta(x(t)) = (\nabla \theta(x), f(x, u(x))) \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  — некоторые постоянные.

В настоящей работе осуществляется дальнейшее развитие метода функций управляемости [1], основанное на использовании дифференциальных неравенств более общего вида, чем уравнение (1). Основные результаты работы будут получены с использованием теоремы сравнения, восходящей к работе С. А. Чаплыгина [2]. Эта теорема формулируется следующим образом.

**Теорема 1.** Пусть  $E^+ = [0, \infty)$  и  $\omega: E^+ \rightarrow E_1$ ,  $(v) \rightarrow \omega(v)$  непрерывна и такова, что уравнение

$$\dot{v} = \omega(v) \quad (2)$$

имеет единственное решение  $v(t, v_0)$ ,  $v(0) = v_0$ ,  $v_0 > 0$ . Обозначим через  $[0, \beta)$ ,  $\beta > 0$  максимальный интервал, на котором определено решение  $v(t, v_0)$ . Пусть функция  $\omega: [0, \beta) \rightarrow E_1$  такова, что 1)  $\omega(0) \leq v_0$ ; 2)  $\omega(t) \leq \omega(\omega(t))$  при  $t \in [0, \beta)$ . Тогда  $\omega(t) \leq v(t, v_0)$ .

Метод сравнения, основанный на теории дифференциальных неравенств, применялся при построении управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость движения замкнутой системы, в работах [3, 4]. Применение теорем сравнения для решения



задачи синтеза ограниченного управления рассматривалось ранее [5, 6].

Сформулируем общую теорему о решении задачи синтеза, используя дифференциальные неравенства более общего вида, чем (1).

**Теорема 2.** Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in E_n, \quad u \in \Omega \subset E_r. \quad (3)$$

Функция  $f: E_n \times \Omega \rightarrow E_n$ ,  $(x, u) \rightarrow f(x, u)$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, u)$ . Допустим, что существует функция  $\omega$  со свойствами, указанными в теореме 1, и функция  $\theta(x)$ , удовлетворяющая условиям

1)  $\theta(x) > 0$  для  $x \neq 0$  и  $\theta(0) = 0$ ;

2) существует  $c > 0$  такое, что множество  $Q = \{x: \theta(x) \leq c\}$  ограничено;

3)  $\theta(x)$  непрерывна в  $E_n$  и непрерывно дифференцируема в  $E_n \setminus \{0\}$ ;

4) задана функция  $u(x) \in \Omega$  такая, что для каждого  $x_0 \in \Omega$  существует на некотором интервале  $[0, \tau(x_0)]$ ,  $\tau(x_0) > 0$  решение уравнения  $\dot{x} = f(x, u(x))$ ;

5) для всех  $x \in Q$ ,  $x \neq 0$  справедливо дифференциальное неравенство:

$$(\nabla \theta(x), f(x, u(x))) \leq \omega(\theta(x)). \quad (4)$$

Тогда, если существует конечный момент времени  $t_* \in [0, \beta)$  (где  $[0, \beta)$  — максимальный интервал, на котором определено решение  $v(t, v_0)$  уравнения (2)) такой, что при  $t \in [0, t_*)$  справедливо  $0 < v(t, v_0) \leq c$  и  $v(t_*, v_0) = 0$ , то каждая траектория системы  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , начинающаяся в произвольной точке  $x_0 \in Q$  при  $t = 0$ , оканчивается в точке  $x = 0$  в некоторый момент  $T(x_0)$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0.$$

**Доказательство.** Будем считать, что  $\tau(x_0) > 0$  таково, что  $x(t) \neq 0$  при  $t \in [0, \tau(x_0)]$ . Тогда в силу компактности множества  $x(t)$  существует некоторое  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\theta(x(t)) \geq \varepsilon$  при  $t \in [0, \tau(x_0)]$ .

Решение  $x(t)$  может быть продолжено на отрезок  $[0, T_\varepsilon]$  такой, что для всех  $t \in [0, T_\varepsilon]$   $\theta(x(t)) \geq \varepsilon$ . Действительно, справедливы неравенства

$$0 < \varepsilon \leq \theta(x(t)) \leq v(t, v_0) \leq c,$$

т. е. решение  $x(t)$ , начинающееся в точке  $x_0 \in Q$ , остается в ограниченном замкнутом множестве  $Q \setminus \{x: \theta(x) < \varepsilon\}$ .

С другой стороны, при  $t \in [0, T_\varepsilon]$  справедливо  $\varepsilon \leq v(t, v_0) \leq c$ . Следовательно,  $[0, T_\varepsilon] \subset [0, \beta)$ . Так как  $\varepsilon$  можно выбрать сколь угодно малым,  $\theta(x)$  непрерывна в  $Q$  и  $\theta(0) = 0$ , то  $x(t)$  может быть продолжено на отрезок  $[0, T)$  такой, что для всех  $t \in [0, T)$   $|x(t)| \neq 0$ , и при этом  $[0, T) \subset [0, \beta)$ . Поскольку справедливо



неравенство  $0 \leq \theta(x(t)) \leq v(t, v_0)$  и существует момент времени  $t_* \in [0, \beta)$  такой, что при  $t \in [0, t_*)$   $0 < v(t, v_0)$  и  $v(t_*, v_0) = 0$ , то существует конечный момент  $T(x_0)$  такой, что

$$\theta(x(T(x_0))) = 0; \quad T(x_0) \leq t_*(\theta(x_0)).$$

Воспользовавшись условием 1), получим  $x(T(x_0)) = 0$ .

Рассмотрим теперь более общую аналогичную задачу, возникающую в теории дифференциальных игр [7], которая формулируется следующим образом.

Пусть задана система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u, \varphi), \quad x \in E_n, \quad u \in \Omega_1 \subset E_r, \quad \varphi \in \Omega_2 \subset E_s. \quad (5)$$

Требуется построить управление  $u(x) \in \Omega_1$ , переводящее произвольную точку  $x_0 \in E_n$  согласно системе

$$\dot{x} = f(x, u(x), \varphi(t, x)) \quad (6)$$

в точку  $x_1 = 0$  при любой неизвестной функции  $\varphi(t, x) \in \Omega_2$ . Функция  $\varphi(t, x)$  может быть разрывной, даже неизмеримой. Поэтому может не быть функции  $x(t)$ , удовлетворяющей уравнению (6). Ставится задача отыскать управление  $u(x)$  такое, чтобы соответствующее движение  $\tilde{x}(t)$ , порожденное системой (6), удовлетворяло бы условиям  $\tilde{x}(0) = x_0$ ,  $\tilde{x}(T(x_0)) = 0$ .

Решение указанной задачи с помощью функции управляемости было дано ранее [8, 9]. В настоящей работе мы покажем применимость теории сравнения к решению этой задачи.

Будем предполагать, что  $f: E_n \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow E_n$ ,  $(x, u, \varphi) \rightarrow f(x, u, \varphi)$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, u, \varphi)$ , множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  компактны. Управлением  $U$  будем называть [7] функцию, которая любой точке  $x \in E_n$  ставит в соответствие компактное множество  $U(x) \in \Omega_1$ . Под движением (траекторией) системы (5) на отрезке  $[0, T]$ , начинающимся в точке  $x_0 \in E_n$ , будем понимать, следуя [10], любую абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , заданную на отрезке  $[0, T]$  и удовлетворяющую почти для всех  $t \in [0, T]$  соотношению

$$\dot{x}(t) \in \text{cof}(x, U(x), \Omega_2), \quad x(0) = x_0. \quad (7)$$

При достаточно общих требованиях на правую часть (5) такая функция существует [7, 11]. Под задачей синтеза для системы (5) будем понимать построение управления  $u(x)$  такого, что любое движение системы (5), начинающееся в произвольной точке  $x_0 \in E_n$ , в конечный момент времени  $T(x_0, \Omega_2)$  принимает значение  $x(T(x_0, \Omega_2)) = 0$ .

Докажем следующую теорему, являющуюся дальнейшим развитием результатов работы [9].

**Теорема 3.** *Рассмотрим систему (5). Пусть существует функция  $\omega(v)$  со свойствами, указанными в теореме 1, а также функция  $\theta(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям:*



1)  $\theta(x) \geq 0$  и  $\theta(x) = 0$  только при  $x = 0$ ;  
 2) существует  $c > 0$  такое, что множество  $Q = \{x: \theta(x) \leq c\}$  ограничено;

3)  $\theta(x)$  непрерывна в  $E_n$  и непрерывно дифференцируема в  $E_n \setminus \{0\}$ ;

4) задано полунепрерывное сверху по включению управление  $U(x) \in \Omega_1$  такое, что для всех  $x \in Q$ ,  $x \neq 0$  выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{u \in U(x) \\ \varphi \in \Omega_2}} (\nabla \theta(x), f(x, u, \varphi)) \leq \omega(\theta(x)).$$

Тогда, если существует конечный момент времени  $t_* \in [0, \beta)$  (где  $[0, \beta)$  — максимальный интервал, на котором определено решение  $v(t, v_0)$  уравнения (2)) такой, что при  $t \in [0, t_*)$  справедливо  $0 < v(t, v_0) \leq c$  и  $v(t_*, v_0) = 0$ , то, какова бы ни была функция  $\varphi(t, x) \in \Omega_2$ , произвольное движение  $x(t)$  системы (5), начинающееся в точке  $x_0 \in Q$  в момент  $t = 0$ , оканчивается в точке  $x = 0$  в некоторый момент времени  $T = T(x_0, \Omega_2)$ , т. е.  $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$ .

Доказательство. Так как множество  $U(x)$  полунепрерывно сверху по включению, то [11] существует некоторое  $\tau(x_0) > 0$  такое, что абсолютно непрерывная функция  $x(t)$  удовлетворяет почти для всех  $t \in [0, \tau(x_0)]$  соотношению (7). Тогда по теореме Каратеодори существуют для этих моментов  $t$

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}; \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) = 1; \quad u_i(x(t)) \in U(x(t)), \quad \varphi_i \in \Omega_2$$

такие, что

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) f(x(t), u_i(x(t)), \varphi_i), \quad t \in [0, \tau(x_0)]. \quad (8)$$

Будем считать, что  $\tau(x_0)$  таково, что  $x(t) \neq 0$  при  $t \in [0, \tau(x_0)]$ . Тогда в силу компактности множества  $x(t)$  существует некоторое  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\theta(x(t)) \geq \varepsilon$  при  $t \in [0, \tau(x_0)]$ . Покажем, что абсолютно непрерывную функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую (7) почти для всех  $t \in [0, \tau(x_0)]$ , можно продолжить на отрезок  $[0, T_\varepsilon]$  такой, что при всех  $t \in [0, T_\varepsilon]: \theta(x(t)) \geq \varepsilon$ .

Действительно, вычислим полную производную функцию  $\theta(x(t))$  вдоль решений уравнения (8). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(x(t)) &= (\nabla \theta(x(t)), \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) f(x, u_i(x(t)), \varphi_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) (\nabla \theta(x(t)), f(x, u_i(x(t)), \varphi_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) \omega(\theta(x(t))) = \omega(\theta(x(t))). \end{aligned}$$

Поэтому согласно [12] справедливы неравенства  $0 < \varepsilon \leq \theta(x(t)) \leq v(t, v_0) \leq c$ . Следовательно, решение  $x(t)$ , начинающееся в точке  $x_0 \in Q$ , остается при  $t \in [0, \tau(x_0)]$  в ограниченном замкнутом множестве  $Q \setminus \{x : \theta(x) < \varepsilon\}$  и поэтому может быть продолжено [11, 12] на отрезок  $[0, T_\varepsilon]$  такой, что при всех  $t \in [0, T_\varepsilon]$   $\theta(x(t)) \geq \varepsilon$ . С другой стороны, при  $t \in [0, T_\varepsilon]$  справедливо неравенство  $\varepsilon \leq v(t, v_0) \leq c$  и, следовательно,  $[0, T_\varepsilon] \subset [0, \beta]$ . Поэтому в силу того, что  $\varepsilon$  можно выбрать произвольно малым, решение  $x(t)$  можно продолжить на отрезок  $[0, T)$  такой, что для всех  $t \in [0, T)$   $x(t) \neq 0$  и при этом  $[0, T) \subset [0, \beta]$ .

Так как справедливо неравенство  $0 \leq \theta(x(t)) \leq v(t, v_0)$  и существует конечный момент времени  $t_* \in [0, \beta)$  такой, что при  $t \in [0, t_*)$   $v(t, v_0) > 0$  и  $v(t_*, v_0) = 0$ , то существует момент времени  $T(x_0, \Omega_2) \leq t_*$  такой, что  $x(T(x_0, \Omega_2)) = 0$ . Так как данные построения производились для произвольного элемента  $\varphi \in \Omega_2$ , то любое движение, начинающееся в точке  $x_0 \in Q$  в момент  $t = 0$ , принимает в момент времени  $T(x_0, \Omega_2)$  значение  $x(T(x_0, \Omega_2)) = 0$ .

Приведем в качестве примера уравнение вида (2), для которого существует конечный момент времени  $t_* = t_*(v_0)$  такой, что  $v(t_*, v_0) = 0$ . Покажем, что таким свойством обладает решение  $v(t, v_0)$  уравнения

$$\dot{v} = -c(v), \quad v(0) = v_0, \quad (9)$$

где функция  $c(v)$  непрерывна для всех  $v \geq 0$ ,  $c(v) > 0$  ( $v > 0$ ) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\varepsilon \frac{dv}{c(v)} \leq M(a) < \infty \quad \text{для любого конечного } a > 0. \quad \text{Действи-}$$

тельно, докажем вначале, что для любого  $\varepsilon > 0$  ( $0 < \varepsilon < v_0$ ) существует конечный момент времени  $T_\varepsilon$  такой, что решение  $v(t, v_0)$  уравнения (9) принимает значение  $v(T_\varepsilon, v_0) = \varepsilon$ . Так как функция  $c(v)$  непрерывна на сегменте  $[\varepsilon, v_0]$  и  $\dot{v} < 0$ , то решение, начинающееся в точке  $v_0$ , может быть продолжено на отрезок  $[0, T_1]$  такой, что при  $t \in [0, T_1]$  справедливо  $v(t, v_0) \geq \varepsilon$ . Пусть  $\gamma_\varepsilon = \min_{v \in [\varepsilon, v_0]} c(v)$ .

Тогда  $\dot{v} \leq -\gamma_\varepsilon < 0$  и, следовательно, существует конечный момент  $T_\varepsilon$ , при котором  $v(T_\varepsilon, v_0) = \varepsilon$ . При уменьшении  $\varepsilon$  время  $T_\varepsilon$  в силу непрерывности  $v(t, v_0)$  монотонно возрастает. Покажем, что существует некоторое  $T = T(v_0) < \infty$  такое, что для  $\forall \varepsilon > 0$   $T_\varepsilon \leq T(v_0)$ . Действительно,

$$\int_\varepsilon^{v_0} \frac{dv}{c(v)} = - \int_{T_\varepsilon}^0 dt = T_\varepsilon.$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^{v_0} \frac{dv}{c(v)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T_\varepsilon \leq M(v_0) < \infty,$$



то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T_\varepsilon = T(v_0); \quad \lim_{t \rightarrow T(v_0)} v(t, v_0) = 0.$$

*Замечание 1.* В частном случае уравнение (9) может принимать вид

$$\dot{v} = -\beta_1 v^{1-\frac{1}{\alpha_1}}, \quad (10)$$

где  $\beta_1 > 0$ ,  $\alpha_1 > 1$ . Действительно, функция  $\beta_1 v^{1-\frac{1}{\alpha_1}}$  непрерывна при всех  $v \geq 0$ ,  $\beta_1 v^{1-\frac{1}{\alpha_1}} > 0$  — при  $v > 0$  и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^a \frac{dv}{\beta_1 v^{1-\frac{1}{\alpha_1}}} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_1} a^{1/\alpha_1}.$$

*Замечание 2.* Такими же свойствами обладает уравнение

$$\dot{v} = -\beta_1 v^{1-\frac{1}{\alpha_1}} + \varphi(v), \quad \beta_1 > 0, \quad \alpha_1 > 1, \quad (11)$$

где непрерывная функция  $\varphi(v)$  такова, что уравнение (11) имеет единственное решение и  $\lim_{v \rightarrow +0} v^{\frac{1}{\alpha_1}-1} \varphi(v) = \gamma < \beta_1$ .

Действительно, для  $\varepsilon > 0$  существует отрезок  $[0, v_1]$ ,  $v_1 > 0$  такой, что для всех  $v \in [0, v_1]$  выполняется неравенство  $v^{\frac{1}{\alpha_1}-1} \varphi(v) \leq \gamma + \varepsilon$  ( $v_1 = v_1(\varepsilon)$ ). Поэтому при этих  $v$  справедливо

неравенство  $\dot{v} \leq (-\beta_1 + \gamma + \varepsilon) v^{1-\frac{1}{\alpha_1}}$  и, следовательно, существует конечный момент времени  $T(v_0)$ , при котором  $v(T(v_0), v_0) = 0$ .

*Замечание 3.* В задачах синтеза методом функций управляемости естественно рассматривать функции, имеющие лишь конечные правые производные Дини [13, 14]. В этом случае достаточно потребовать (вместо свойств дифференцируемости), чтобы функция  $\theta(x)$  была непрерывна всюду и удовлетворяла локальному условию Липшица всюду, за исключением, быть может, точки  $x = 0$ . Доказательство теорем о достаточных условиях синтеза тогда практически полностью совпадает с приведенными выше.

**Список литературы:** 1. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функций управляемости. — Докл. АН СССР, 1979, 248 № 5, с. 1051 — 1055. 2. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. — 102 с. 3. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова в системах с обратной связью. — Автоматика и телемеханика, 1972, № 9, с. 63 — 75. 4. Матросов В. М. Метод сравнения в динамике систем. I, II. — Дифференц. уравнения, 1974, № 9, с. 1547 — 1559; 1975, № 3, с. 403 — 417. 5. Коробов В. И., Гавриляко В. М. О связи метода функций управляемости и принципа Чаплыгина — Важевского в задаче управления движением твердого тела в условиях неопределенных помех — В кн.: Тез. докл. III Респ. совещ. по пробл. динамики твердого тела, Донецк, 1981, с. 30 — 32.



6. Гавриляко В. М. О синтезе ограниченного управления в задаче управляемости.— Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. математика и механика, вып. 45, с. 73—77. 7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.— 456 с. 8. Коробов В. И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений.— Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. математика и механика, вып. 45, с. 59—73. 9. Коробов В. И. Решение задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости.— Докл. АН СССР, 1982, 266, № 2, с. 269—273. 10. Батухтин В. Д., Красовский Н. Н. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре.— В кн.: Дифференц. игры и задачи упр.: Тр. ин-та математики и механики, Свердловск, 1975, вып. 15, с. 43—49. 11. Геллиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.— М.: Наука, 1978.— 400 с. 12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Мат. сб., 1960, 51, № 1, с. 99—128. 13. Пуш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с. 14. Wazewski T. Systèmes des equations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.— Ann. de la Soc. Pol. Math., 1950, 23, p. 112—166.

Поступила в редколлегию 14.03.84.

УДК 517.9

В. А. ЛЬВОВ, канд. физ.-мат. наук

#### ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ СУСПЕНЗИЙ

Суспензией принято называть смесь большого числа мелких твердых частиц и вязкой несжимаемой жидкости. Характерной чертой суспензии является то, что размеры твердых частиц намного меньше размеров занимаемой области. При этом если среднее расстояние между частицами намного больше размеров самих частиц, то говорят, что суспензия слабо концентрирована.

Развитие современных технологий химического производства, вопросы экологии стимулировали интерес к описанию движения таких смесей под влиянием приложенных внешних сил [1—5].

Чтобы описать движения совокупности мелких частиц в вязкой жидкости, различают два случая. В первом предполагается, что средняя скорость частиц отлична от скорости окружающей их жидкости. Следовательно, суспензия рассматривается как двухфазная система и основной подход, используемый для написания уравнений движения, состоит в том [3, 6], что для каждой из фаз вводятся некоторые осредненные характеристики, с помощью которых записываются осредненные уравнения движения взаимодействующих друг с другом фаз.

Во втором случае твердые частицы движутся со средней скоростью, совпадающей со скоростью окружающей их жидкости так, что возмущение несущей жидкости связано с чисто деформационным движением. Тогда осредненные уравнения движения суспен-



зии представляют собой одножидкостную модель движения сплошной среды. Наличие частиц в жидкости проявляется только в изменении реологических свойств среды, а именно, в увеличении эффективной вязкости суспензии по отношению к вязкости окружающей ее жидкости.

В настоящей работе исследуется одна математическая задача, относящаяся ко второму рассматриваемому случаю движения твердых частиц в вязкой жидкости.

Сначала сформулируем общую постановку задачи о совместном движении твердых частиц в окружающей их вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть ограниченная область  $\Omega \subset R_3$  заполнена смесью вязкой несжимаемой жидкости и большого числа  $s$  мелких твердых частиц  $F_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ). В дальнейшем для упрощения изложения будем считать, что частицы  $F_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) есть шары радиуса  $r_\alpha^{(s)}$  с плотностью материала  $\rho_0 = \text{const}$ . Область, в которой движется жидкость, изменяется со временем. Обозначим через  $F_\alpha^{(s)}(t)$  положение в области  $\Omega$  частицы  $F_\alpha^{(s)}$  и  $\partial F_\alpha^{(s)}(t)$  ее границу в момент времени  $t$ . Тогда в каждый момент времени  $t \in [0, T]$  жидкость заполняет объем  $\Omega^{(s)}(t) = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha=1}^s F_\alpha^{(s)}(t)$ . Обозначим через  $F_\alpha^{(s)}$  область в цилиндре  $\Omega \times [0, T]$ , «заметаемую» частицей  $F_\alpha^{(s)}$  за промежуток времени  $[0, T]$ .

При описании движения вязкой несжимаемой жидкости на интервале времени  $[0, T]$  вектор скорости  $\vec{u}(x, t)$  и давление  $p(x, t)$  удовлетворяют в области  $Q_T^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha=1}^s F_\alpha^{(s)}$  уравнениям Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}(x, t); \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0. \quad (2)$$

Учитывая характер движения твердых частиц и предположение о прилипании вязкой жидкости к поверхности частиц  $F_\alpha^{(s)}$ , получаем для скорости жидкости краевое условие:

$$\vec{u}(x, t) = \vec{a}_\alpha^{(s)}(t) + \vec{\omega}_\alpha^{(s)}(t) \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}], \quad x \in \partial F_\alpha^{(s)}(t), \quad (3)$$

$$(\alpha = 1, \dots, s),$$

где  $\vec{a}_\alpha^{(s)}(t)$  — скорость центра шара  $F_\alpha^{(s)}$ ;  $\vec{\omega}_\alpha^{(s)}(t)$  — мгновенная угловая скорость вращения  $F_\alpha^{(s)}$ ;  $\vec{r}(x)$ ,  $\vec{r}_\alpha^{(s)}$  — радиус-векторы произвольной точки  $x \in \partial F_\alpha^{(s)}(t)$  и центра шара  $F_\alpha^{(s)}(t)$  относительно фиксированного начала координат в момент времени  $t$ .



Множество точек  $F_\alpha^{(s)}(t)$  описывается следующим образом:

$$F_\alpha^{(s)}(t) = \{x \in \Omega : |\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}(t)| \leq r_\alpha^{(s)}\}, \quad t \in [0, T];$$

$$\vec{r}_\alpha^{(s)}(t) = \vec{r}_\alpha^{(s)}(0) + \int_0^t \vec{a}_\alpha^{(s)}(\tau) d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (4)$$

где  $\vec{r}_\alpha^{(s)}(0)$  — радиус-вектор центра  $F_\alpha^{(s)}$  в момент времени  $t = 0$ .

Для определения  $\vec{a}_\alpha^{(s)}(t)$  запишем закон сохранения импульса движения каждой частицы:

$$m_\alpha^{(s)} \frac{d\vec{a}_\alpha^{(s)}}{dt} \int_{F_\alpha^{(s)}(t)} \vec{t} [\vec{u}(x, t)] d\Gamma + \int_{F_\alpha^{(s)}(t)} \vec{g}(x, t) dx \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (5)$$

Здесь  $m_\alpha^{(s)}$  — масса шара  $F_\alpha^{(s)}$  радиуса  $r_\alpha^{(s)}$ ;  $\vec{t} [\vec{u}]$  — вектор напряжения вязкой несжимаемой жидкости;  $\vec{g}(x, t)$  — объемная плотность внешних сил, действующих на частицы.

Соответственно закон сохранения момента импульса движения частиц приводит к равенству

$$-J_\alpha^{(s)} \frac{d\vec{\omega}_\alpha^{(s)}}{dt} = - \int_{F_\alpha^{(s)}(t)} \{\vec{t} [\vec{u}] \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]\} d\Gamma +$$

$$+ \int_{F_\alpha^{(s)}(t)} \{\vec{g}(x, t) \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]\} dx + \vec{M}_\alpha^{(s)}(t) \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (6)$$

где  $J_\alpha^{(s)}$  — момент инерции шара  $F_\alpha^{(s)}$  относительно мгновенной оси;  $\vec{M}_\alpha^{(s)}$  — некоторые заданные моменты.

Дополним уравнения (1) — (6) следующими начальными и краевыми условиями:

$$F_\alpha^{(s)}(t)/_{t=0} = F_\alpha^{(s)}(0) \quad (\alpha = 1, \dots, s); \quad (7)$$

$$\vec{u}(x, t)/_{t=0} = \vec{u}^0(x), \quad x \in \Omega^{(s)}(0); \quad (8)$$

$$\vec{a}_\alpha^{(s)}(t)/_{t=0} = \vec{a}_\alpha^{(s)}(0), \quad \vec{\omega}_\alpha^{(s)}(t)/_{t=0} = \vec{\omega}_\alpha^{(s)}(0) \quad (\alpha = 1, \dots, s); \quad (9)$$

$$\vec{u}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что начально-краевая задача (1) — (10), состоящая в нахождении неизвестных  $\vec{u}(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $\vec{a}_\alpha^{(s)}(t)$  и  $\vec{\omega}_\alpha^{(s)}(t)$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) в неизвестной области  $Q_T^{(s)}$ , образует замкнутую систему уравнений. Ее решение и будет описывать совместное движение системы вязкая жидкость — твердые частицы.



Однако если число частиц велико, получить решение задачи (1)–(10) практически невозможно. Поэтому естественной является попытка осредненного описания движения суспензии.

Далее будет рассмотрена одна краевая задача для линейной системы Навье — Стокса, естественным образом связанная с системой (1)–(10). Для этой задачи в § 1–6 приведем вывод осредненных уравнений.

В § 7 рассмотрен частный случай периодического расположения шаров  $F_\alpha^{(s)}$  в области  $\Omega$ . При этом вычисление коэффициентов осредненного уравнения сводится к решению некоторой краевой задачи для уравнений Навье — Стокса в ячейке, содержащей одну частицу  $F_\alpha^{(s)}$ .

1. *Постановка задачи.* В ограниченной области  $\Omega$  трехмерного пространства  $R_3$  рассмотрим замкнутые, непересекающиеся связные множества  $F_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ), ограниченные гладкими поверхностями  $\partial F_\alpha^{(s)}$ . В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что  $F_\alpha^{(s)}$  — шары радиуса  $r_\alpha^{(s)}$ .

В области  $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha=1}^s F_\alpha^{(s)}$  рассмотрим следующую краевую задачу для стационарной, линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса:

$$-\nu \Delta \vec{u}^{(s)} + \text{grad } p^{(s)} = \vec{f}^{(s)}(x), \quad x \in \Omega^{(s)}; \quad (1.1)$$

$$\text{div } \vec{u}^{(s)} = 0; \quad (1.2)$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{a}_\alpha^{(s)} + \vec{\omega}_\alpha^{(s)} \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}], \quad x \in \partial F_\alpha^{(s)} \quad (\alpha = 1, \dots, s); \quad (1.3)$$

$$\int_{\partial F_\alpha^{(s)}} \vec{t}[\vec{u}^{(s)}] d\Gamma = \int_{F_\alpha^{(s)}} \vec{g}^{(s)}(x) dx \quad (\alpha = 1, \dots, s); \quad (1.4)$$

$$\int_{\partial F_\alpha^{(s)}} \{\vec{t}[\vec{u}^{(s)}] \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]\} d\Gamma = \int_{F_\alpha^{(s)}} \{\vec{g}^{(s)}(x) \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]\} dx$$

$$(\alpha = 1, \dots, s); \quad (1.5)$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.6)$$

Здесь  $\vec{a}_\alpha^{(s)}, \vec{\omega}_\alpha^{(s)}$  — некоторые постоянные векторы;  $\vec{r}(x), \vec{r}_\alpha^{(s)}$  — радиус-векторы произвольной точки  $F_\alpha^{(s)}$  и центра  $x^\alpha = \{x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha\}$  шара  $F_\alpha^{(s)}$  относительно некоторого фиксированного начала координат.

Вектор напряжения вязкой несжимаемой жидкости  $\vec{t}[\vec{u}^{(s)}]$  определен, как обычно:

$$\vec{t}[\vec{u}^{(s)}] = -\vec{n}p^{(s)}(x) + 2\nu \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{u}^{(s)}) \cos(\vec{n}, x_i) \vec{e}^k,$$

где  $\vec{n}$  — внешняя по отношению к  $\Omega^{(s)}$  нормаль к  $\partial\Omega^{(s)}$ ;  $\vec{e}^k$  — единичный орт оси  $Ox_k$ ;  $\vec{\varepsilon}_{ik}(\vec{u}^{(s)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(s)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial x_i} \right)$  — тензор скоростей деформации.

Краевая задача (1.1) — (1.6) описывает в области  $\Omega^{(s)}$  мгновенное поле скоростей системы (1) — (10) в момент времени  $t = t_0$ .

Действительно, если в уравнении (1) положим

$$\vec{f}^{(s)}(x) = \vec{f}(x, t_0) - \frac{\partial \vec{u}^{(s)}(x, t_0)}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(s)}(x, t_0) \frac{\partial \vec{u}^{(s)}(x, t_0)}{\partial x_k},$$

а в (5) и (6) —

$$\vec{g}^{(s)}(x) = \rho_0 \frac{d \vec{u}^{(s)}(x, t_0)}{dt} - \vec{g}(x, t_0), \quad x \in F_\alpha^{(s)}$$

и  $\vec{M}_\alpha^{(s)}(t_0) = 0$ , очевидно, придем к задаче (1.1) — (1.6).

Определим [7] гильбертово пространство  $H(\Omega)$  как замыкание в  $\hat{W}_2^1(\Omega)$  достаточно гладких, финитных в  $\Omega$  соленоидальных векторов. Пусть  $M$  — множество векторов из  $H(\Omega)$ , удовлетворяющих на  $\partial F_\alpha^{(s)}$  условиям (1.3) и продолженных с сохранением соленоидальности на все  $F_\alpha^{(s)}$  этим же равенством.

Как обычно [8], можно показать, что функционал

$$J(\vec{u}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\nu}{4} \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{u}) - (\vec{f}^{(s)}, \vec{u}) \chi^{(s)} - (\vec{g}^{(s)}, \vec{u}) [1 - \chi^{(s)}] \right\} dx \quad (1.7)$$

на векторах  $\vec{u} \in M$ , где  $\chi^{(s)}$  — характеристическая функция области  $\Omega^{(s)}$ , т. е.  $\chi^{(s)}(x) = 1$ ,  $x \in \Omega^{(s)}$ ,  $\chi^{(s)}(x) = 0$ ,  $x \in \bigcup_{\alpha=1}^s F_\alpha^{(s)} \equiv F^{(s)}$ , достигает своего минимума и элемент, на котором  $J(\vec{u})$  достигает минимума, есть решение исходной задачи (1.1) — (1.6).

В дальнейшем мы будем изучать асимптотическое поведение последовательности решений  $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$  задач (1.1) — (1.6), когда число  $s$  частиц  $F_\alpha^{(s)}$  стремится к бесконечности и их радиусы  $r_\alpha^{(s)}$  и расстояние между ними так стремятся к нулю, что суммарный объем множеств  $F_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) имеет порядок объема  $\Omega$ .

**2. Основная теорема.** Прежде чем сформулировать основной результат, введем одну характеристику влияния множества  $F^{(s)}$  на движение вязкой жидкости в  $\Omega$ .

Пусть  $K_j = K(x^j, h)$  — куб с центром в точке  $x^j \in \Omega$  и ребрами длины  $h > 0$ , ориентированными по координатным осям. Пусть



также  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  — произвольно ориентированные единичные векторы, т. е.  $\vec{l} = \sum_{n=1}^3 l_n \vec{e}^n$ ,  $\vec{m} = \sum_{p=1}^3 m_p \vec{e}^p$ .

Рассмотрим область  $K_j \cap \Omega^{(s)}$ . Ее граница состоит, вообще говоря, из трех частей:  $\Gamma_1 = K_j \cap \partial F^{(s)}$ ;  $\Gamma_2 = \partial K_j \cap \Omega^{(s)}$ ;  $\Gamma_3 = K_j \cap \partial \Omega$ .

В области  $K_j \cap \Omega^{(s)}$  рассмотрим такую задачу:

$$-\Delta \vec{v}^{(s)} + h^{-2-\gamma} \vec{v}^{(s)} + \text{grad } p^{(s)} = h^{-2-\gamma} \sum_{n,p=1}^3 \vec{\psi}_{np}(x) l_n m_p; \quad (2.1)$$

$$\text{div } \vec{v}^{(s)} = 0; \quad 0 < \gamma < 2, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{np}(x) = & \frac{1}{2} [(x_n - x_n^j) \vec{e}^p + (x_p - x_p^j) \vec{l}^n] - \\ & - \frac{\delta_{np}}{3} \sum_{i=1}^3 (x_1 - x_1^j) \vec{l}^i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\delta_{np}$  — обычный символ Кронекера.

На части границы  $\Gamma_1$  потребуем выполнения граничных условий вида (1.3) — (1.5) с  $g^{(s)} = 0$ . На множестве  $\Gamma_2$  потребуем  $\vec{l}[\vec{v}^{(s)}] = 0$ , а на  $\Gamma_3$ , если оно не пусто,  $\vec{v}^{(s)} = 0$ .

Можно показать, что при фиксированном  $s$  существует единственное решение такой краевой задачи, доставляющее одновременно минимум функционалу

$$\begin{aligned} T(s, h, x^j, \vec{l}, \vec{m}) = & \int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{v}) + h^{-2-\gamma} |\vec{v}|^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{n,p=1}^3 \vec{\psi}_{np}(x) l_n m_p \right\} dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

в классе  $M'$  соленоидальных векторов из  $\mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^1(K_j)$ , принимающих на  $F_\alpha^{(s)}$ , попавших полностью или частично в  $K_j$ , значения  $\vec{a}_\alpha^{(s)} + \vec{\omega}_\alpha^{(s)} \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]$ .

Обозначим решение этой краевой задачи, когда  $\vec{l} = \vec{e}^n$  и  $\vec{m} = \vec{e}^p$  ( $n, p = 1, 2, 3$ ), через  $\vec{v}^{(s), np}(x)$ . Тогда в силу линейности задачи (2.1) — (2.2) имеем

$$\vec{v}^{(s)}(x) = \sum_{n,p=1}^3 \vec{v}^{(s), np}(x) l_n m_p.$$

Отсюда следует, что минимальное значение, которое функционал<sup>1</sup> (2.4) достигает на решении  $\vec{v}^{(s)}$ , будет

$$\inf_{M'} T(s, h, x^j, \vec{l}, \vec{m}) = \sum_{n, p, q, r=1}^3 a_{npqr}(s, h, x^j) l_n l_q m_p m_r, \quad (2.5)$$

где

$$a_{npqr}(s, h, x^j) = \int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i, k=2} \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s)}, np) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s)}, qr) + \right. \\ \left. + h^{-2-\gamma} (\vec{v}^{(s)}, np)(x) - \vec{\psi}_{np}(x) \vec{v}^{(s)}, qr(x) - \vec{\psi}_{qr}(x) \right\} dx. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что система чисел  $\{a_{npqr}, m, p, q, r=1, 2, 3\}$  есть тензор четвертого ранга в  $R_3$ . Из симметрии  $\vec{\psi}_{np}$  и (2.6) следует, что  $a_{npqr}$  обладает следующей симметрией:

$$a_{npqr}(s, h, x^j) = a_{qnrp}(s, h, x^j) = a_{pnrq}(s, h, x^j) = \\ = a_{pnrq}(s, h, x^j) = a_{pnrq}(s, h, x^j). \quad (2.7)$$

Тензор  $\{a_{npqr}(s, h, x^j)\}$ , а также лебегову меру  $\rho(s, h, x^j) = \text{mes}[K_j \cap \Omega^{(s)}]$  множества  $K_j \cap \Omega^{(s)}$  примем за основные характеристики влияния множества  $F^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^s F_{\alpha}^{(s)}$  в кубе  $K_j$ .

Будем говорить, что последовательность  $\vec{u}^{(s)}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$  сходится к  $\vec{u}(x) \in L_2(\Omega)$ , если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\vec{u}^{(s)}(x) - \vec{u}(x)|^2 \chi^{(s)}(x) dx = 0. \quad (2.8)$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

а) для произвольного  $s$  расстояния  $\rho_{\alpha}^{(s)}$  между  $F_{\alpha}^{(s)}$  и  $(\bigcup_{\beta \neq \alpha}^s F_{\beta}^{(s)}) \cup \partial \Omega$  удовлетворяет условию  $\rho_{\alpha}^{(s)} \leq \theta r_{\alpha}^{(s)}$ ,  $\theta > 0$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s, h, x)}{h^3} = \rho(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , где  $\rho(x)$  — некоторая непрерывная в  $\Omega$  функция;

в)  $\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{npqr}(s, h, x)}{h^3} = \lim_{n \rightarrow 0} \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{npqr}(s, h, x)}{h^3} = a_{npqr}(x)$ ,

$\forall x \in \Omega$ , где непрерывный в  $\Omega$  тензор  $a_{npqr}(x)$  удовлетворяет на квадратных матрицах из  $R_3$  условиям положительной определенности;

г) последовательности  $\vec{f}^{(s)}(x)$  и  $\vec{g}^{(s)}(x)$  сходятся в  $L_2(\Omega)$  к  $\vec{f}(x)$  и  $\vec{g}(x)$  соответственно.



Тогда последовательность решений  $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$  задачи (1.1) — (1.6) сходится в смысле (2.8) к решению  $\vec{u}(x)$  такой краевой задачи:

$$-\nu \sum_{n, p, q, r}^9 \frac{\partial}{\partial x_r} [a_{npqr}(x) \varepsilon_{np}(\vec{u})] e^q + \text{grad } p = \\ = \rho(x) \vec{f}(x) + [1 - \rho(x)] \vec{g}(x), \quad x \in \Omega; \quad (2.9)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0; \quad (2.10)$$

$$\vec{u}(x) = 0; \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.11)$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью методов, разработанных ранее [9, 10].

Если решение  $\vec{u}^{(s)}(x)$  задачи (1.1) — (1.6) продолжить естественным образом на все  $\Omega$  равенством (1.3), то справедлива следующая оценка в пространстве  $H(\Omega)$  для продолжаемой функции с константой  $C$ , не зависящей от  $s$ :

$$\|\vec{u}^{(s)}\|_{H(\Omega)} \leq C (\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{g}\|_{L_2(\Omega)}).$$

Это следует из эквивалентности решения исходной задачи (1.1) — (1.6) и задачи о нахождении минимума функционала (1.7) в классе векторов  $M$  и применения неравенства типа Корна для функций данного класса.

Отсюда последовательность продолженных на  $\Omega$  решений исходной задачи  $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$  будет слабо компактной в пространстве  $H(\Omega)$  и, значит, можно выделить подпоследовательность  $\{\vec{u}^{(s_k)}\}$ , слабо сходящуюся в  $H(\Omega)$  к некоторой  $\vec{u}(x) \in H(\Omega)$ .

В последующих параграфах будет показано, что, если выполнены условия теоремы 1,  $\vec{u}(x)$  есть решение краевой задачи (2.9) — (2.11) и поскольку она имеет единственное решение, вся последовательность  $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$  сходится слабо к  $\vec{u}(x)$  в  $H(\Omega)$  или сильно в  $L_2(\Omega)$  в смысле (2.8). Доказательство этого проводится в несколько этапов.

*Лемма 1.* В § 4 по некоторой произвольной дважды непрерывно дифференцируемой и финитной в  $\Omega$  вектор-функции  $\vec{w}(x)$  строится  $\vec{w}^{(s)}(x)$ , принадлежащая классу  $M$ .

Так как  $\vec{w}^{(s)}(x)$  — произвольная из класса  $M$ , а  $\vec{u}^{(s)}(x)$  минимизирует функционал (1.7) в классе  $M$ , то  $J(\vec{u}^{(s)}) \leq J(\vec{w}^{(s)})$ .

Из построения  $\vec{w}^{(s)}$  и условий теоремы 1 в § 5 показано, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} J(\vec{u}^{(s)}) \leq \tilde{J}(\vec{w}), \quad (2.12)$$

где функционал

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\vec{w}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\nu}{2} \sum_{npqr}^3 a_{npqr}(x) \varepsilon_{np}(\vec{w}) \varepsilon_{qr}(\vec{w}) - \right. \\ \left. - \rho(x) \langle \vec{f}, \vec{w} \rangle - [1 - \rho(x)] \langle \vec{g}, \vec{w} \rangle \right\} dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

рассматривается на функциях  $\vec{w}(x) \in H(\Omega)$ .

Этап 2. В § 6 показано, что если  $\vec{u}(x)$  — слабый предел в  $H(\Omega)$ , продолженных на все  $\Omega$  равенством (1.3) вектор-функций  $\vec{u}^{(s)}(x)$  по некоторой подпоследовательности  $s = s_k$ , то

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(\vec{u}^{(s)}) \geq \tilde{J}(\vec{u}).$$

Отсюда и из оценки (2.12) получим, что  $\tilde{J}(\vec{u}) = \tilde{J}(\vec{w})$  для произвольной  $\vec{w} \in H(\Omega)$ . Следовательно,  $\vec{u}(x) \in H(\Omega)$  минимизирует функционал (2.13), т. е.  $\vec{u}(x)$  — решение краевой задачи (2.9) — (2.11), что и доказывает теорему 1.

3. *Некоторые вспомогательные оценки.* Рассмотрим конечное покрытие ограниченной области  $\Omega$  кубами  $K_j = K(x^j, h)$  с ребрами достаточно малой длины  $h > 0$ , ориентированными по координатным осям, с центрами в точках  $x^j$ , образующими в  $R_3$  пространственную решетку с периодом  $h - \delta$  ( $0 < \delta < \frac{h}{2}$ ). Пусть также  $K'_j = K(x^j, h_1)$  — куб с центром в точке  $x^j$  и ребрами длины  $h_1 = h - 2\delta$ , т. е.  $K'_j = K_j \setminus \bigcup_{i \neq j} K_i$ .

Получим некоторые оценки  $\vec{v}^{(s), np}(x)$  в областях  $K_j \cap \Omega^{(s)}$  и  $(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}$ .

Из определения  $a_{npqr}(s, h, x^j)$  и условий (б) теоремы 1 следует, что при достаточно больших  $s$  и малых  $h$

$$\int_{K_j \cap \Omega^{(s)}} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{v}^{(s), np}) dx = O(h^3); \quad (3.1)$$

$$\int_{K_j \cap \Omega^{(s)}} |\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)|^2 dx = O(h^{5+\tau}). \quad (3.2)$$



Пусть  $\delta = o(h)$ , например,  $\delta = h^{1+\frac{\gamma}{2}}$  ( $0 < \gamma < 2$ ). Тогда при достаточно больших  $s$  и малых  $h$

$$\begin{aligned} & \int_{(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^{(s)}, np) dx + h^{-2-\gamma} \int_{(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}} |\vec{v}^{(s)}, np(x) - \\ & - \vec{\psi}_{np}(x)|^2 dx = \int_{K_j \cap \Omega^{(s)}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^{(s)}, np) + h^{-2-\gamma} |\vec{v}^{(s)}, np - \right. \\ & - \vec{\psi}_{np}|^2 \Big\} dx - \int_{K'_j \cap \Omega^{(s)}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^{(s)}, np) + h_1^{-2-\gamma} |\vec{v}^{(s)}, np - \right. \\ & - \vec{\psi}_{np}|^2 \Big\} dx + (h_1^{-2-\gamma} - h^{-2-\gamma}) \int_{K'_j \cap \Omega^{(s)}} |\vec{v}^{(s)}, np - \vec{\psi}_{np}|^2 dx. \end{aligned}$$

Из (2.6) следует, что первое слагаемое в правой части есть  $a_{npnp}(s, h, x^I)$ , а второе — не меньше  $a_{npnp}(s, h_1, x^I)$ . Соответственно из (3.1) следует, что третье слагаемое есть величина порядка  $O(\delta h^2)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}} \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^{(s)}, np) dx + h^{-2-\gamma} \int_{K_j \setminus K'_j \cap \Omega^{(s)}} |\vec{v}^{(s)}, np - \\ & - \vec{\psi}_{np}|^2 dx \leq a_{npnp}(s, h, x^I) - a_{npnp}(s, h_1, x^I) + O(\delta h^2). \end{aligned}$$

Отсюда при выполнении условия в) теоремы 1 аналогично получению оценок (3.1), (3.2) имеем

$$\int_{(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^{(s)}, np) dx = o(h^3); \quad (3.3)$$

$$\int_{(K_j \setminus K'_j) \cap \Omega^{(s)}} |\vec{v}^{(s)}, np(x) - \vec{\psi}_{np}(x)|^2 dx = o(h^{5+\gamma}). \quad (3.4)$$

Покрытию  $\Omega$  кубами  $K_j$  сопоставим разбиение единицы  $\{\varphi_j^{(s)}(x)\}$  области  $\Omega^{(s)}$ , т. е. набор бесконечно дифференцируемых в  $R_3$  функций  $\varphi_j^{(s)}(x)$ , удовлетворяющих условиям

$$1) \quad 0 \leq \varphi_j^{(s)}(x) \leq 1, \quad x \in \Omega;$$

$$2) \quad \varphi_j^{(s)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin K_j; \\ C_\alpha^{(s)}, & x \in F_\alpha^{(s)} \cap (K_j \setminus K'_j); \\ 1, & x \in K_j, \end{cases}$$

где  $0 \leq C_\alpha^{(s)} \leq 1$ ;

$$3) \sum_j \varphi_j^{(s)}(x) = 1, \quad x \in \Omega;$$

$$4) \left| \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{C}{\delta} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $C$  не зависит от  $s$ .

Не сложно показать, что при достаточно больших  $s$  такое разбиение единицы существует. Это следует из выполнения условия а) теоремы 1.

4. Построение  $\vec{w}^{(s)}$  из класса  $M$ . Пусть  $\vec{w}(x)$  — произвольный, достаточно гладкий, финитный в области  $\Omega$  соленоидальный вектор. Построим вспомогательную вектор-функцию

$$\vec{q}_{np}(x) = \frac{1}{2} [\omega_{np}(\vec{w}(x^j))(x_n - x_n^j) \vec{l}^p + \omega_{pn}(\vec{w}(x^j))(x_p - x_p^j) \vec{l}^n], \quad (4.1)$$

$$\text{где } \omega_{np}(\vec{w}(x^j)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w_n(x^j)}{\partial x_p} - \frac{\partial w_p(x^j)}{\partial x_n} \right].$$

Так как  $\omega_{np}(\vec{w}) = -\omega_{pn}(\vec{w})$ , то в силу антисимметрии  $\vec{q}_{np}$  имеем

$$\operatorname{div} \vec{q}_{np}(x) = 0 \quad (n, p = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

Нетрудно видеть, что для любых  $n, p = 1, 2, 3$  вектор  $\vec{q}_{np}(x)$  представим в виде

$$\vec{q}_{np}(x) = \vec{\omega} \times [\vec{r}(x) - \vec{r}(x^j)], \quad (4.3)$$

где  $\vec{\omega}$  — некоторый постоянный вектор, компоненты которого выражаются через  $\frac{\partial w_k(x^j)}{\partial x_i}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{ik}(\vec{q}_{np}(x)) = 0 \quad (i, k, n, p = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

Функцию  $\vec{w}^{(s)}(x)$  из класса  $M$  будем искать в виде

$$\vec{w}^{(s)}(x) = \sum_{(j)} \{ \vec{w}(x^j) + \sum_{np=1}^3 [\varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{q}_{np}(x)] \} \varphi_j^{(s)}(x) - \vec{\zeta}^{(s)}(x) = \vec{z}^{(s)}(x) - \vec{\zeta}^{(s)}(x), \quad (4.5)$$

где  $\vec{v}^{(s), np}$  — вектор-функция, на которой функционал (2.4) достигает минимума при  $\vec{l} = \vec{e}^n$  и  $\vec{m} = \vec{e}^p$ ; вектор-функция  $\vec{\zeta}^{(s)} \in W_2^1(\Omega)$  равна  $\vec{a}_\alpha^{(s)} + \vec{\omega}_\alpha^{(s)} \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}]$  на каждом  $F_\alpha^{(s)}$  из  $\alpha = 1, \dots, s$  и удовлетворяет в  $\Omega$  условию  $\operatorname{div} \vec{\zeta}^{(s)} = \operatorname{div} \vec{z}^{(s)}$ .

Суммирование в уравнении (4.5) распространяется на все индексы  $j$ , для которых  $x^j$  есть центры кубов конечного покрытия  $\Omega$ . Отметим, что в силу ограниченности  $\Omega$  число слагаемых  $N$  в (4.5) имеет порядок  $O(h^{-3})$ .



В силу свойств функций  $\varphi_j^{(s)}(x)$ ,  $\vec{v}^{(s), np}(x)$  равенств (4.1)–(4.3), а также требований, налагаемых на  $\vec{\zeta}^{(s)}$ , получаем, что вектор-функция  $\vec{w}^{(s)}$ , определяемая формулой (4.5), принадлежит классу  $M$ .

Остается доказать существование такой  $\vec{\zeta}^{(s)}$ , обладающей перечисленными выше свойствами. Существование  $\vec{\zeta}^{(s)}$  вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.** При фиксированном  $s$  в гладкой области  $\Omega^{(s)}$  всегда можно построить вектор-функцию  $\vec{\zeta}^{(s)} \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  с заданной дивергенцией в  $\Omega$ , т. е.  $\operatorname{div} \vec{\zeta}^{(s)} = y(x) \in L_2(\Omega)$ , и такую, что

$$\vec{\zeta}^{(s)}(x) = \vec{a}_\alpha^{(s)} + \vec{\omega}_\alpha^{(s)} \times [\vec{r}(x) - \vec{r}_\alpha^{(s)}], \quad x \in F_\alpha^{(s)} \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (4.6)$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|\vec{\zeta}^{(s)}\|_{\overset{0}{W}_2^1(\Omega)} \leq C \|y\|_{L_2(\Omega)} \quad (4.7)$$

с константой  $C$ , не зависящей от  $s$ .

Функция  $y(x)$  согласована с условием (4.6) равенством  $y(x) = 0$ ,  $x \in F_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ).

**Доказательство.** Сначала построим вектор-функцию  $\zeta(x) \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  с заданной дивергенцией, т. е.  $\operatorname{div} \vec{\zeta}(x) = y(x)$ , но не удовлетворяющей вообще условию (4.6). Положим

$$\vec{\zeta}(x) = \operatorname{grad} \xi(x) - \operatorname{rot} \vec{\eta}(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.8)$$

Здесь первое слагаемое — градиентное векторное поле с заданной дивергенцией, второе — соленоидальное векторное поле.

Функцию  $\xi(x)$  определим в  $\Omega$  с точностью до постоянного слагаемого как решение такой задачи:

$$\Delta \xi(x) = y(x); \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0; \quad x \in \partial\Omega.$$

Задавая, например,  $\xi(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$ , определяем  $\xi(x)$  единственным образом.

Известно [10], что при достаточно гладкой  $\partial\Omega$  решение такой задачи существует и справедливы оценки

$$\|\xi(x)\|_{\overset{0}{W}_2^1(\Omega)} \leq C \|y(x)\|_{L_2(\Omega)}; \quad (4.9)$$

$$\|\xi(x)\|_{\overset{0}{W}_2^{3/2}(\partial\Omega)} \leq C \|y(x)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.10)$$

Построение соленоидальной в  $\Omega$  функции  $\operatorname{rot} \vec{\eta}(x)$ , нормальная составляющая которой равна нулю на  $\partial\Omega$ , а касательная

составляющая равна касательной составляющей  $\text{grad } \xi(x)$  на  $\partial\Omega$ , можно провести по схеме, изложенной в работе [7]. Из этого построения следует, что для гладкой  $\partial\Omega$

$$\|\text{rot } \vec{\eta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\nabla \xi\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Используя (4.10), получаем  $\|\text{rot } \vec{\eta}\|_{W_2^{1/2}(\Omega)} \leq C \|y(x)\|_{L_2(\Omega)}$ . Отсюда, из равенства (4.8) и оценки (4.9) следует

$$\|\vec{\zeta}(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|y(x)\|_{L_2(\Omega)} \quad (4.11)$$

с константой  $C$ , не зависящей от  $s$ .

Перейдем к построению  $\vec{\zeta}^{(s)}$ . В силу условия а) теоремы 1 в области  $\Omega$  можно выделить множество непересекающихся шаров  $T_\alpha^{(s)}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) радиуса  $\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) r_\alpha^{(s)}$ , центры которых совпадают с центрами шаров  $F_\alpha^{(s)}$ .

Функцию  $\vec{\zeta}^{(s)}(x)$  определим в  $\Omega$  равенством

$$\vec{\zeta}^{(s)}(x) = \vec{\zeta}(x) - \sum_{\alpha=1}^s \vec{\mu}_\alpha(x), \quad (4.12)$$

где надлежащие определению  $\vec{\mu}_\alpha \in W_2^1(\Omega)$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) имеют финитные носители, совпадающие с  $T_\alpha^{(s)}$ .

Преобразованием подобия с центром в точке  $x^\alpha$  растянем шар  $F_\alpha^{(s)}$  в  $(r_\alpha^{(s)})^{-1}$  раз. Получим шар единичного радиуса  $F$ . Рассмотрим в нем функцию  $\vec{\zeta}(\xi) = \vec{\zeta}(r_\alpha^{(s)} \cdot \xi)$ . Очевидно, что  $\vec{\zeta}(\xi) \in W_2^1(F)$  и справедливы равенства

$$\|\vec{\zeta}(x)\|_{L_2(F_\alpha^{(s)})} = (r_\alpha^{(s)})^{3/2} \|\vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)}; \quad (4.13)$$

$$\|\nabla \vec{\zeta}(x)\|_{L_2(F_\alpha^{(s)})} = (r_\alpha^{(s)})^{1/2} \|\nabla \vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)}, \quad (4.14)$$

получаемые из соображений подобия.

Рассмотрим функцию

$$\vec{\lambda}(\xi) = \vec{\zeta}(\xi) - \frac{3}{4\pi} \int_F \vec{\zeta}(\xi) d\xi. \quad (4.15)$$

Так как второе слагаемое есть среднее  $\vec{\zeta}(\xi)$  по шару единичного радиуса  $F$ , то, воспользовавшись неравенством Пуанкаре, получим

$$\|\vec{\lambda}(\xi)\|_{L_2(F)} \leq C \|\nabla \vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)}.$$



В силу  $\|\nabla \vec{\lambda}(\xi)\|_{L_2(F)} = \|\nabla \vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)}$  имеем

$$\|\vec{\lambda}(\xi)\|_{W_2^1(F)} \leq C \|\nabla \vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)}. \quad (4.16)$$

Функция  $\vec{\lambda}(\xi)$  соленоидальна в  $F$ . Действительно,  $\operatorname{div} \vec{\lambda}(\xi) = \operatorname{div} \vec{\zeta}(\xi) = y(x) = 0$ , когда  $x \in F_\alpha^{(s)}$ . Поэтому [12] функция  $\vec{\lambda}(\xi)$  в  $F$  представима в виде  $\vec{\lambda}(\xi) = \operatorname{rot} \vec{\tilde{\lambda}}(\xi)$ , где  $\vec{\tilde{\lambda}}(\xi) \in W_2^2(F)$ ,  $\operatorname{div} \vec{\tilde{\lambda}}(\xi) = 0$ ,  $x \in F$  и

$$\|\vec{\tilde{\lambda}}(\xi)\|_{W_2^2(F)} \leq C \|\vec{\lambda}(\xi)\|_{W_2^1(F)}. \quad (4.17)$$

Продолжим функцию  $\vec{\tilde{\lambda}}(\xi)$  с  $F$  на  $T$  — шар радиуса  $1 + \frac{\theta}{2}$  — так, чтобы продолженная функция  $\vec{\mu}(\xi)$  удовлетворяла неравенству

$$\|\vec{\mu}(\xi)\|_{W_2^2(T)} \leq C \|\vec{\tilde{\lambda}}(\xi)\|_{W_2^1(F)}. \quad (4.18)$$

Умножая это продолжение на гладкую функцию  $\varphi(\xi)$ , равную единице в шаре  $F$  и нулю вне шара  $T$ , образуем

$$\vec{\mu}(\xi) = \operatorname{rot} [\vec{\mu}(\xi) \cdot \varphi(\xi)], \quad \xi \in T.$$

Положив  $\vec{\mu}_\alpha(x) = \vec{\mu}\left(\frac{x}{r_\alpha^{(s)}}\right)$  для  $x \in T_\alpha^{(s)}$ , мы завершаем построение функции  $\vec{\zeta}^{(s)}$ , определяемой равенством (4.12). Из равенства (4.12) и построения  $\vec{\mu}_\alpha(x)$  следует равенство (4.6).

Получим оценку  $\vec{\zeta}^{(s)}$  в пространстве  $W_2^1(\Omega)$ . Из оценок (4.16) — (4.18), равенства (4.14) и гладкости  $\varphi(\xi)$  следует

$$\|\vec{\mu}(\xi)\|_{W_2^1(T)} \leq C \|\nabla \vec{\zeta}(\xi)\|_{L_2(F)} \leq C_1 \frac{1}{\sqrt{r_\alpha^{(s)}}} \|\nabla \vec{\zeta}(x)\|_{L_2(F_\alpha^{(s)})}. \quad (4.19)$$

Очевидно, для  $\vec{\mu}_\alpha(x)$  в шаре  $T_\alpha^{(s)}$  и  $\vec{\mu}(\xi)$  в шаре  $T$  справедливы равенства, аналогичные (4.13), (4.14). Отсюда и из оценки (4.19) получим

$$\|\vec{\mu}_\alpha(x)\|_{W_2^1(T_\alpha^{(s)})} \leq C \|\nabla \vec{\zeta}(x)\|_{L_2(F_\alpha^{(s)})},$$

что совместно с оценкой (4.11) и равенством (4.12) дает (4.7).

В дальнейшем нам понадобится оценка  $\vec{\zeta}^{(s)}$  в норме пространства  $W_2^1(\Omega)$ . Из леммы 1 следует, что такая оценка будет полу-

цена, как только мы оценим дивергенцию  $\vec{\zeta}^{(s)}$  в норме пространства  $L_2(\Omega)$ .

Так как  $\operatorname{div} \vec{\zeta}^{(s)} = \operatorname{div} \vec{z}^{(s)}$ , оценим  $\operatorname{div} \vec{z}^{(s)}$  в норме  $L_2(\Omega)$  при малых  $h$ .

Преобразуем выражение (4.5). В силу гладкости  $\vec{w}(x)$  для  $x \in K(x^j, h)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) = \vec{w}(x^j) + \frac{1}{2} \sum_{np=1}^3 \left[ \frac{\partial w_n(x^j)}{\partial x_p} (x_p - x_p^j) \vec{e}^n + \right. \\ \left. + \frac{\partial w_p(x^j)}{\partial x_n} (x_n - x_n^j) \vec{e}^p \right] - \vec{\sigma}(x), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $\vec{\sigma}(x)$  имеет оценки

$$\max_{x \in K_j} |\vec{\sigma}(x)| \leq Ch^2: \max_{x \in K_j} |\nabla \vec{\sigma}(x)| \leq Ch. \quad (4.21)$$

Нетрудно видеть, что из уравнений (2.3), (4.1) и соленоидальности  $\vec{w}$  следует

$$\begin{aligned} \sum_{np=1}^3 [\varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x) - \vec{q}_{np}(x)] = \frac{1}{2} \sum_{np=1}^3 \left[ \frac{\partial w_n(x^j)}{\partial x_p} (x_p - x_p^j) \vec{e}^n + \right. \\ \left. + \frac{\partial w_p(x^j)}{\partial x_n} (x_n - x_n^j) \vec{e}^p \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Тогда из уравнений (4.5), (4.20) и (4.22), используя свойства  $\Phi_j^{(s)}(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \vec{z}^{(s)}(x) = \sum_{(j)} \{ \vec{w}(x^j) + \sum_{np=1}^3 [\varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x) - \vec{q}_{np}(x)] + \\ + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \} \Phi_j^{(s)}(x) = \\ = \vec{w}(x) + \sum_{(j)} \{ \vec{\sigma}(x) + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \} \Phi_j^{(s)}(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

В силу соленоидальности функций  $\vec{w}(x)$ ,  $\vec{v}^{(s), np}(x)$  и  $\vec{\psi}_{np}(x)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{z}^{(s)} = \sum_{(j)} \{ (\vec{\sigma}(x) + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \}, \Delta \Phi_j(x) \} + \\ + \sum_{(j)} \Phi_j^{(s)}(x) \operatorname{div} \vec{\sigma}(x) \quad (4.24), \text{ где } (, ) \text{ — скалярное произведение в } R_3. \end{aligned}$$



Отсюда при малых  $h$  с учетом свойств  $\varphi_j^{(s)}(x)$ , оценок (3.4) и (4.21) получаем

$$\|\operatorname{div} \vec{z}^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} = o(1).$$

Учитывая это, а также оценку (4.7) леммы 1, получаем

$$\|\vec{\xi}^{(s)}\|_{W_1^1(\Omega)} = o(1) \quad (4.25)$$

при фиксированном  $s$  и  $h$ , стремящемся к нулю.

5. Оценка функционала  $J(\vec{u})$  сверху. В предыдущем параграфе была построена некоторая функция  $\vec{w}^{(s)} \in M$ . Так как  $\vec{u}^{(s)}$  минимизирует функционал (2.7) в классе  $M$ , то  $J(\vec{u}^{(s)}) \leq J(\vec{w}^{(s)})$ .

Оценим  $J(\vec{w}^{(s)})$  при малых  $h$ . Сначала вычислим  $\varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s)})$ . Из определения  $\vec{w}^{(s)}$  и равенства (4.23) получим

$$\begin{aligned} \vec{w}^{(s)}(x) = \vec{w}(x) + \sum_{(j)} \{ \vec{\sigma}(x) + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \} \times \\ \times \varphi_j^{(s)}(x) - \vec{\xi}^{(s)}(x). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s)}) = \sum_{(j)} \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}(x)) \varphi_j^{(s)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{ik}(\vec{\xi}^{(s)}),$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_{ik}(\vec{w}) - \sum_{(j)} \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \varepsilon_{ik}(\vec{\psi}_{np}(x)) \varphi_j^{(s)}(x); \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \sum_{(j)} \left\{ \frac{\partial \varphi_j^{(s)}}{\partial x_i} \left[ \vec{\sigma}(x) + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \right]_k + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_j^{(s)}}{\partial x_k} \left[ \vec{\sigma}(x) + \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) [\vec{v}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)] \right]_i \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь  $[\cdot]_i$  обозначает  $i$ -ю компоненту вектора, стоящего в квадратных скобках.

Покажем, что  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_{ik}(\vec{\xi}^{(s)})$  при малых  $h$  есть величины малые.

Действительно, в силу свойств  $\varphi_j^{(s)}$  и равенства (4.4)

$$\varepsilon_1 = \sum_{(j)} \{ \varepsilon_{ik}[\vec{w}(x)] + \sum_{np} \vec{q}_{np}(x) - \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x) \} \varphi_j^{(s)}(x).$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами (4.20) и (4.23), получим

$$\varepsilon_1 = \sum_{(j)} \{ \varepsilon_{ik}[\vec{w}(x^j) - \vec{\sigma}(x)] \varphi_j^{(s)}(x). \}$$

Из оценки (4.21) следует, что при малых  $h$

$$\varepsilon_1 = O(h). \quad (5.3)$$

Используя свойства функции  $\varphi_j^{(s)}$ , оценки (3.2) и (4.21), получаем

$$\|\varepsilon_2\|_{L_2(\Omega)} = o(1) \quad (5.4)$$

при малых  $h$  и  $\delta = h^{1+\frac{\gamma}{2}}$  ( $0 < \gamma < 2$ ).

Из полученной ранее оценки (4.25) следует

$$\|\varepsilon_{ik}(\vec{\xi}^{(s)})\|_{L_2(\Omega)} = o(1). \quad (5.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J(\vec{w}^{(s)}) = & \frac{\nu}{4} \sum_{(j,l)} \sum_{ik=1}^3 \sum_{npqr=1}^3 \int_{\Omega} \varepsilon_{np}(\vec{w}) \varepsilon_{qr}(\vec{w}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) \times \\ & \times \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_l^{(s)}(x) dx - \int_{\Omega} \{(\vec{f}^{(s)}(x), \vec{w}(x)) \chi^{(s)}(x) + (\vec{g}^{(s)}(x), \vec{w}(x)) \times \\ & \times [1 - \chi^{(s)}(x)]\} dx + E(s, h, \delta, \vec{w}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $E(s, h, \delta, \vec{w})$  содержит оставшиеся слагаемые, подынтегральные выражения которых есть линейные и квадратичные комбинации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{ik}(\vec{\xi}^{(s)})$  и  $\vec{v}^{(s), np} - \vec{\psi}_{np}$  с коэффициентами, ограниченными в  $L_2(\Omega)$ .

Так как  $\varphi_j^{(s)}$  имеет компактные носители, предыдущее равенство можно переписать так:

$$\begin{aligned} J(\vec{w}^{(s)}) = & \frac{\nu}{4} \sum_{(j)} \sum_{i,k=1}^3 \sum_{npqr=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}) \varepsilon_{pr}(\vec{w}) \int_{K_j} \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) dx - \\ & - \int_{\Omega} \{(\vec{f}^{(s)}, \vec{w}) \chi^{(s)}(x) + (\vec{g}^{(s)}, \vec{w}) [1 - \chi^{(s)}(x)]\} dx + I_1 + I_2 + \\ & + E(s, h, \delta, \vec{w}), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{\nu}{4} \sum_{(j)} \sum_{ik=1}^3 \sum_{npqr=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}) \varepsilon_{qr}(\vec{w}) \int_{K_j} \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) \times \\ & \times [(\varphi_j^{(s)})^2 - 1] dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\nu}{4} \sum_{(j \neq l)} \sum_{ik=1}^3 \sum_{npqr=1}^3 \int_{\Omega} \varepsilon_{np}(\vec{w}) \varepsilon_{qr}(\vec{w}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) \times \\ & \times \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_l^{(s)}(x) dx. \end{aligned}$$



Учитывая вид  $E(s, h, \delta, \vec{w})$ , свойства функций  $\varphi_j^{(s)}$ , а также оценки (3.1)—(3.4) и (5.3)—(5.5), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} E(s, h, \delta, \vec{w}) = 0.$$

Аналогичные равенства имеют место и для  $I_1$  и  $I_2$ . Из определения  $a_{npqr}(s, h, x^j)$  следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{npqr=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \varepsilon_{qr}(\vec{w}(x^j)) \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) dx \leq \\ & \leq \sum_{npqr=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \varepsilon_{qr}(\vec{w}(x^j)) \int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{v}^{(s), qr}) + \right. \\ & \left. + h^{-2-\gamma} (\vec{v}^{(s), np} - \vec{\psi}_{np}, \vec{v}^{(s), qr} - \vec{\psi}_{qr}) \right\} dx = \sum_{npqr=1}^3 a_{npqr}(s, h, x^j) \times \\ & \times \varepsilon_{np}(\vec{w}(x^j)) \varepsilon_{qr}(\vec{w}(x^j)). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.7) и используя гладкость  $\vec{w}$ , оценки для  $E, I_1, I_2$  и условия б), в), г) теоремы 1, получаем для любой  $\vec{w}$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} J(\vec{w}^{(s)}) \leq \tilde{J}(\vec{w}),$$

где функционал  $\tilde{J}$  определен равенствами (2.13).

Отсюда и из  $J(\vec{u}^{(s)}) \leq J(\vec{w}^{(s)})$  следует  $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} J(\vec{u}^{(s)}) \leq \tilde{J}(\vec{w})$ , т. е. получили требуемую оценку (2.12).

6. Оценка функционала  $J(\vec{u})$  снизу. Пусть  $\vec{u}(x)$  слабый в  $H(\Omega)$  предел по некоторой подпоследовательности  $s = s_k$ , последовательности продолженных на  $\Omega$  решений исходной задачи (1.1)—(1.6)  $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ .

Покажем, что в этом случае справедливо неравенство

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(\vec{u}^{(s)}) \geq \tilde{J}(\vec{u}).$$

Воспользуемся следующим утверждением:

**Лемма 2.** Пусть  $\vec{w}(x) \in H(\Omega)$ . Если выполнено условие а) теоремы 1, то существует последовательность  $\vec{w}^{(s)} \in M$ , сходящаяся к  $\vec{w}$  в  $L_2(\Omega)$ , и такая, что при больших  $s$

$$\|\vec{w}^{(s)}\|_{H(\Omega)} \leq C \|\vec{w}\|_{H(\Omega)}. \quad (6.1)$$

Доказательство следует из результатов § 4.

Действительно, так как множество всех достаточно гладких финитных в  $\Omega$  соленоидальных векторов  $\vec{J}(\Omega)$  плотно в  $H(\Omega)$ , достаточно доказать лемму для  $\vec{w} \in \vec{J}(\Omega)$ . Согласно (4.5) последовательность  $\vec{w}^{(s)} \in M$  определим равенством

$$\vec{w}^{(s)}(x) = \vec{z}^{(s)}(x) - \vec{\zeta}^{(s)}(x). \quad (6.2)$$

Отсюда из равенства (4.23) и оценки (4.25) следует, что  $\vec{w}^{(s)}$  сходится в  $L_2(\Omega)$  к  $\vec{w}$ .

Из равенства (4.12) и (6.2), оценок (4.11) и (4.19) имеем

$$\|\vec{w}^{(s)}\|_{H(\Omega)} \leq \|\vec{z}^{(s)}\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\operatorname{div} \vec{z}^{(s)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, используя явный вид  $\vec{z}^{(s)}$ , получаем требуемую оценку (6.1). Лемма доказана.

Пусть  $\vec{u}_\varepsilon \in \vec{J}(\Omega)$  и такая, что для произвольного  $\varepsilon > 0$

$$\|\vec{u}(x) - \vec{u}_\varepsilon(x)\|_{H(\Omega)} < \varepsilon, \quad (6.3)$$

а  $\vec{w}_\varepsilon^{(s)} \in M$  — последовательность функций, сходящаяся согласно лемме 2 к функции  $\vec{u} - \vec{u}_\varepsilon = \vec{w}_\varepsilon$ . Обозначим  $\vec{u}_\varepsilon^{(s)} = \vec{u}^{(s)} + \vec{w}_\varepsilon^{(s)}$ . Из оценки (6.1), леммы 2 и неравенства (6.3) следует, что

$$\|\vec{u}_\varepsilon^{(s)} - \vec{u}^{(s)}\|_{H(\Omega)} < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Рассмотрим конечное покрытие области  $\Omega$  непересекающимися кубами  $K_j = K(x^j, h)$  с ребрами длины  $h > 0$ , ориентированными по координатным осям, с центрами в точках  $x^j$ . В каждом  $K_j$  определим функцию  $\vec{v}_\varepsilon^{(s)}(x) = \vec{u}_\varepsilon^{(s)}(x) - \vec{u}_\varepsilon(x^j) + \sum_{np=1}^3 \vec{q}_{np}(x)$ . Очевидно, что  $\vec{v}_\varepsilon^{(s)} \in M$ . Отсюда, из равенства (4.20) и оценки (4.21) для гладкой  $\vec{u}_\varepsilon(x)$  следует, что

$$\begin{aligned} \int_{K_j \cap \Omega} |\vec{v}_\varepsilon^{(s)}(x) - \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x)|^2 dx &\leq \int_{K_j \cap \Omega} |\vec{u}_\varepsilon^{(s)} - \vec{u}_\varepsilon|^2 dx + \\ &+ \int_{K_j \cap \Omega} \sum_{np=1}^3 \{\vec{q}_{np}(x) - \varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x)\} dx + O(h^7). \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части в силу оценок (6.3), (6.4) может быть сделан при малых  $\varepsilon$  и больших  $s$  как угодно малым, а второй интеграл в силу равенства (4.22) тождественно равен нулю.



Если в (2.4) в качестве  $l_n m_p$  возьмем  $\varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j))$ , то для некоторой  $\vec{v}_\varepsilon^{(s)} \in M$  получим

$$\int_{K_j \cap \Omega} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{v}_\varepsilon^{(s)}) + h^{-2-\gamma} \left| \vec{v}_\varepsilon^{(s)}(x) - \sum_{np=1}^3 \varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) \vec{\psi}_{np}(x) \right|^2 \right\} dx \geq \\ \geq T(s, h, x^j).$$

Отсюда из предыдущих оценок равенств (2.5), (2.6) и равенства  $\varepsilon_{ik}(\vec{v}_\varepsilon^{(s)}) = \varepsilon_{ik}(\vec{u}_\varepsilon^{(s)})$

$$\int_{K_j \cap \Omega} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{u}_\varepsilon^{(s)}) dx \geq \sum_{npqr=1}^3 a_{npqr}(s, h, x^j) \varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) \varepsilon_{qr} \times \\ \times (\vec{u}_\varepsilon(x^j)) - O(h^{5-\gamma}).$$

Далее имеем

$$\sum_{(j) \in K_j \cap \Omega} \int \left\{ \frac{\nu}{4} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{u}_\varepsilon^{(s)}) - (\vec{f}^{(s)}, \vec{u}_\varepsilon^{(s)}) \chi^{(s)}(x) - (\vec{g}^{(s)}, \vec{u}_\varepsilon^{(s)}) [1 - \chi^{(s)}(x)] \right\} \times \\ \times dx \geq \sum_{(j)} \left\{ \frac{\nu}{2} \sum_{npqr=1}^3 a_{npqr}(s, h, x^j) \varepsilon_{np}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) \varepsilon_{qr}(\vec{u}_\varepsilon(x^j)) - \right. \\ \left. - \int_{K_j \cap \Omega} \{ (\vec{f}^{(s)}, \vec{u}_\varepsilon^{(s)}) \chi^{(s)}(x) + (\vec{g}^{(s)}, \vec{u}_\varepsilon^{(s)}) [1 - \chi^{(s)}(x)] \} dx - O(h^{+2-\gamma}) \right\}.$$

При фиксированном  $\varepsilon > 0$  перейдем в этом неравенстве к пределу по  $s = s_k \rightarrow \infty$ , а затем — по  $h \rightarrow 0$ . Тогда, используя условия б), в), г) теоремы 1, оценку (6.4), непрерывность  $a_{npqr}(x)$ ,  $\rho(x)$  и гладкость  $\vec{u}_\varepsilon(x)$ , получаем

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(\vec{u}_\varepsilon^{(s)}) \geq \tilde{J}(\vec{u}_\varepsilon).$$

Учитывая (6.3) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в этом неравенстве, находим требуемую оценку  $\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(\vec{u}_\varepsilon^{(s)}) \geq \tilde{J}(\vec{u})$ . Тем

самым завершается доказательство теоремы 1.

7. *Случай периодического расположения в области  $\Omega$  шаров  $F_\alpha^{(s)}$ .* Предположим, что  $x^\alpha$  — центры шаров  $F_\alpha^{(s)}$  радиуса  $r$  — расположены в узлах периодической решетки с периодами по координатным осям, равными  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Пусть также при  $s \rightarrow \infty$   $r = O(s^{-1/3})$ ,  $\delta_i = O(s^{-1/3})$  и  $\frac{\delta_i}{r} = C_i$ , где постоянная  $C_i$  не зависит от  $s$ .

Тем самым, в области  $\Omega$  выделены параллелепипеды  $\Pi_\alpha^{(s)}$  с длиной ребер  $\delta_i$ , содержащие шары  $F_\alpha^{(s)}$ , центры которых совпадают с центрами параллелепипедов. Преобразованием подобия с центром в точке  $x^\alpha$  растянем  $\Pi_\alpha^{(s)}$  в параллелепипед  $\Pi = \{x \in R_3: |x_i| < \frac{C_i}{2} (i = 1, 2, 3)\}$ . Соответственно после растяжения шар  $F_\alpha^{(s)}$  перейдет в шар  $F = \{x \in R_3: \sum_{i=1}^3 x_i^2 \leq 1\}$ .

В области  $\Pi \setminus F$  рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\Delta \vec{u}^{np} + \text{grad } p^{np} = 0, \quad x \in \Pi \setminus F; \quad (7.1)$$

$$\text{div } \vec{u}^{np} = 0; \quad (7.2)$$

$$\vec{u}^{np}(x) = \vec{a}^{np} + \vec{\omega}^{np} \times \vec{r}(x), \quad x \in \partial F; \quad (7.3)$$

$$\int_{\partial F} \vec{t} [\vec{u}^{np}] d\Gamma = \int_{\partial F} \{\vec{t} [\vec{u}^{np}] \times \vec{r}(x)\} d\Gamma = 0. \quad (7.4)$$

На противоположных гранях параллелепипеда  $\Pi$  вектор  $\vec{u}^{np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)$  и вектор  $\vec{t} [\vec{u}^{np} - \vec{\psi}_{np}]$  подчиним условиям периодичности, т. е.

$$\vec{u}^{np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x) /_{x \in \partial \Pi \cap \{x \in R_3: x_i = \frac{C_i}{2}\}} = \vec{u}^{np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x) /_{x \in \partial \Pi \cap \{x \in R_3: x_i = -\frac{C_i}{2}\}}; \quad (7.5)$$

$$\vec{t} [\vec{u}^{np} - \vec{\psi}_{np}] /_{x \in \partial \Pi \cap \{x \in R_3: x_i = \frac{C_i}{2}\}} = \vec{t} [\vec{u}^{np} - \vec{\psi}_{np}] /_{x \in \partial \Pi \cap \{x \in R_3: x_i = -\frac{C_i}{2}\}}, \quad (7.6)$$

где  $i = 1, 2, 3$ , а  $\vec{\psi}_{np}(x)$  определено формулой (2.3).

Соответствующая вариационная постановка задачи о нахождении  $\vec{u}^{np}(x)$  заключается в том, что в классе  $N$ , состоящем из векторов пространства  $H(\Pi)$ , удовлетворяющим на  $\partial F$  условиям (7.3), а на  $\partial \Pi$  — условиям (7.5) и (7.6), следует найти минимум функционала

$$J(\vec{u}) = \int_{\Pi} \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{u}) dx. \quad (7.7)$$

Обычным способом [8] нетрудно показать существование  $\vec{u}^{np} \in N$ , на котором функционал (7.7) достигает минимума.

Пусть, как и прежде,  $K_j = K(x^j, h)$  — куб с центром в точке  $x^j$  и ребрами длины  $h$ , ориентированными по координатным осям. Будем считать, что  $h$  кратно  $\delta_i$ , т. е.  $h = N_i \delta_i$ . Таким образом,



$K_j$  состоит из конечного числа параллелепипедов  $\Pi_\alpha^{(s)}$ , каждый из которых содержит шар  $F_\alpha^{(s)}$  с центром в точке  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N_1 N_2 N_3$ ).

Покажем, что в случае периодического расположения шаров основной вклад при вычислении характеристики  $a_{npqr}(s, h, x^i)$  по формуле (2.6) вносит решение задачи (7.1)—(7.6).

Вектор  $\vec{v}^{(s), np}(x)$ , доставляющий в классе  $M'$  минимум функционалу (2.4), когда  $\vec{l} = \vec{e}^n$ ,  $\vec{m} = \vec{e}^p$  ( $n, p = 1, 2, 3$ ), будем искать в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(s), np}(x) &= \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(s)}(x) \left[ r \vec{u}^{np} \left( \frac{x - x^\alpha}{r} \right) + \vec{\psi}_{np}(x^\alpha) \right] + \vec{z}^{(s), np}(x) = \\ &= \vec{w}^{(s), np}(x) + \vec{z}^{(s), np}(x), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $\chi_{\alpha}^{(s)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{\alpha}^{(s)} \\ 0, & x \notin \Pi_{\alpha}^{(s)} \end{cases}$ ,  $\vec{u}^{np}(x)$  — решение задачи (7.1)—(7.6),

а  $\vec{z}^{(s), np}(x)$  — некоторый вектор из класса  $M^1$ .

Действительно, используя условия (7.5), (7.6), нетрудно проверить, что вектор  $\vec{w}^{(s), np}$  непрерывен вместе с  $t [\vec{w}^{(s), np}]$  на стыках областей  $\Pi_{\alpha}^{(s)}$ , кроме того,  $\vec{w}^{(s), np}$  принимает на  $\partial F_{\alpha}^{(s)}$  значения вида (7.3). Следовательно, вектор  $\vec{w}^{(s), np}$  принадлежит классу  $M'$ .

Отсюда из равенств (2.4) и (7.8) получаем, что  $\vec{z}^{(s), np}$  доставляет в классе  $M'$  минимум функционалу

$$\begin{aligned} J(\vec{z}^{(s), np}) &= \int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) + h^{-2-\gamma} |\vec{z}^{(s), np}|^2 \right\} dx + \\ &+ 2h^{-2-\gamma} \int_{K_j} (\vec{w}^{(s), np} - \vec{\psi}_{np}, \vec{z}^{(s), np}) dx + 2 \int_{\partial K_j} (t [\vec{w}^{(s), np}], \vec{z}^{(s), np}) d\Gamma. \end{aligned}$$

Так как  $J(0) = 0$ , то  $J(\vec{z}^{(s), np}) \leq 0$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) + h^{-2-\gamma} |\vec{z}^{(s), np}|^2 \right\} dx &\leq 2h^{-2-\gamma} \int_{K_j} |\vec{w}^{(s), np} - \\ &- \vec{\psi}_{np}| |\vec{z}^{(s), np}| dx + 2 \int_{\partial K_j} |t [\vec{w}^{(s), np}]| |\vec{z}^{(s), np}| d\Gamma. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Оценим правую часть этого неравенства. Воспользовавшись равенствами (2.2) и (7.8), получим

$$\int_{K_j} |\vec{w}^{(s), np}(x) - \vec{\psi}_{np}(x)|^2 dx = \sum_{\alpha} r^2 \int_{\Pi_{\alpha}^{(s)}} \left| \vec{u}^{np} \left( \frac{x - x^{\alpha}}{r} \right) - \vec{\psi}_{np} \left( \frac{x - x^{\alpha}}{r} \right) \right|^2 dx \leq \\ \leq C \frac{r^5 h^3}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} \int_{\Pi} |\vec{u}^{np}(\xi) - \vec{\psi}_{np}(\xi)|^2 d\xi; \quad (7.10)$$

$$\int_{\partial K_j} |\vec{t}[\vec{w}^{(s), np}]|^2 d\Gamma = \sum_{\alpha} r^2 \int_{\partial \Pi_{\alpha}^{(s)}} \left| \vec{t} \left[ \vec{u}^{np} \left( \frac{x - x^{\alpha}}{r} \right) \right] \right|^2 d\Gamma \leq \\ \leq C r^2 h^2 \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} \max \int |\vec{t}[\vec{u}^{np}(\xi)]|^2 d\Gamma_{\xi}, \quad (7.11)$$

где константа  $C$  не зависит от  $s$  и  $h$ , а максимальное значение поверхностного интеграла рассматривается на гранях параллелепипеда  $\Pi$ .

Из принадлежности вектора  $\vec{z}^{(s), np}$  классу  $M'$  нетрудно получить следующее неравенство:

$$\int_{\partial K_j} |\vec{z}^{(s), np}(x)|^2 d\Gamma \leq C \left\{ \tau \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) dx + \frac{1}{\tau} \int_{K_j} |\vec{z}^{(s), np}(x)|^2 dx \right\},$$

где  $C$  не зависит от  $s$  и  $h$ , а  $\tau$  — произвольное положительное число. Полагая  $\tau = h^{1+\frac{\gamma}{2}}$ , имеем

$$\int_{\partial K_j} |\vec{z}^{(s), np}(x)|^2 d\Gamma \leq C h^{1+\frac{\gamma}{2}} \left\{ \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) dx + h^{-2-\gamma} \times \right. \\ \left. \times \int_{K_j} |\vec{z}^{(s), np}(x)|^2 dx \right\}.$$

Отсюда из оценок (7.10), (7.11), свойств  $\vec{u}^{np}(x)$  и неравенства Шварца следует, что правая часть (7.9) не превосходит

$$C \left( r h^{\frac{1-\gamma}{2}} + h^{3/2+\gamma/4} \right) \left\{ \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) dx + h^{-2-\gamma} \int_{K_j} |\vec{z}^{(s), np}|^2 dx \right\}.$$

Таким образом, при достаточно больших  $s \geq s(h)$  ( $r = O(h^{1+3/4\gamma})$ ,  $\gamma > 0$ ) неравенство (7.9) преобразуется в

$$\int_{K_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}^2(\vec{z}^{(s), np}) + h^{-2-\gamma} |\vec{z}^{(s), np}|^2 \right\} dx \leq C h^{3+\gamma/2}. \quad (7.12)$$



Подставим в (2.6) выражение (7.8). После несложных преобразований с учетом симметрии  $a_{npqr}$  получим

$$\begin{aligned} a_{npqr}(s, h, x^i) = & \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s), qp}) dx + \\ & + \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{z}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{z}^{(s), qr}) dx + 2 \int_{\partial K_j} (\vec{t}[\vec{w}^{(s), np}], \vec{z}^{(s), qr}) d\Gamma + \\ & + h^{-2-\gamma} \int_{K_j} \{ (\vec{w}^{(s), np} - \vec{\psi}_{np}, \vec{w}^{(s), qr} - \vec{\psi}_{qr}) + 2(\vec{w}^{(s), np} - \vec{\psi}_{np}, \vec{z}^{(s), qr}) + \\ & + (\vec{z}^{(s), np}, \vec{z}^{(s), qr}) \} dx. \end{aligned}$$

В силу оценок (7.10)–(7.12) предыдущее равенство примет следующий вид:

$$a_{npqr}(s, h, x^i) = \int_{K_j} \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s), np}) \varepsilon_{ik}(\vec{w}^{(s), qr}) dx + O\left(h^{3+\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись условием в) теоремы 1 и представлением (7.8) для  $\vec{w}^{(s), np}$ , получим

$$a_{npqr}(x) = \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \int_{\Pi} \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{ik}(\vec{u}^{np}) \varepsilon_{ik}(\vec{u}^{qr}) dx, \quad (7.13)$$

где  $C_i = \frac{r}{\delta_i} (n, p, q, r = 1, 2, 3)$ .

Таким образом, в случае периодического расположения шаров  $F_\alpha^{(s)}$  в области  $\Omega$  компоненты тензора  $\{a_{npqr}(x)\}$  есть постоянные числа, вычисляемые по формулам (7.13) посредством вектора  $\vec{u}^{np}(x)$ , являющегося решением так называемой «ячеечной задачи» (7.1)–(7.6).

**Список литературы:** 1. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.— 630 с. 2. Соу С. Гидродинамика многофазных систем.— М.: Мир, 1971.— 536 с. 3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.— 140 с. 4. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях: Сб. переводов под ред. Ю. А. Бувича.— М.: Мир, 1980.— 243 с. 5. Бэтчелор Дж. Успехи микрогидродинамики.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Международ. конгр. IUTAM, М., 1979, с. 136–187. 6. Luov V. A., Chruslow E. Y. Über die Störung zaher inkompressibler Flüssigkeiten durch einen Strom kleiner Teilchen.— Z. Angew. Math. und Mech., 1978, 58, S. 1289–1290. 7. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.— 288 с. 8. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала.— М.: Гостехтеориздат, 1952.— 150 с. 9. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— К.: Наук. думка, 1974.— 278 с. 10. Хруслов Е. Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области.— Мат. сб.,

1978, 106, № 4, с. 604—621. 11. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.— 576 с. 12. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1960, 59, с. 5—36.

Поступила в редколлегию 27.02.84.

УДК 517.946

А. А. БОСОВ, канд. физ.-мат. наук

# О ЗАДАЧЕ ШТУРМАНА

Пусть  $r(s)$  — параметрическое задание кривой в трехмерном пространстве,  $s$  — длина дуги этой кривой. Рассмотрим три вектора  $e_1(s)$ ,  $e_2(s)$ ,  $e_3(s)$ , где  $e_1(s) = dr/ds$  — касательный вектор;  $e_2(s)$  — главная нормаль;  $e_3(s)$  — бинормаль к данной кривой в точке, соответствующей параметру  $s$ .

Эти вектора связаны между собой формулами Френе [1]:

$$\frac{de_1}{ds} = k_1(s) e_2(s); \quad \frac{de_2}{ds} = -(k_1(s) e_1 + k_2(s) e_3); \quad \frac{de_3}{ds} = k_2(s) e_2, \quad (1)$$

где  $k_1(s) \geq 0$  является кривизной,  $k_2(s)$  — кручением кривой в точке  $s$ .

Как известно [1], любое решение системы (1) определяет кривую в пространстве с точностью до положения, т. е.

$$r(s) = \int_0^s e_1(t) dt + r_0. \quad (2)$$

Следовательно, задание кривой в пространстве в силу уравнений (1), (2) определяется кривизной  $k_1(s)$  и кручением  $k_2(s)$ .

Пусть при  $s = 0$   $r(0) = r_0 = 0$ . В этой точке 0 задано начальное положение трех векторов  $e_1(0)$ ,  $e_2(0)$ ,  $e_3(0)$ . Не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что

$$e_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Требуется определить такую кривизну и кручение, чтобы точка 0 перешла в точку  $O'$ , а вектора  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  в этой точке были бы параллельны соответственно векторам  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$ . Это требование запишем в виде  $\langle e_i(s_k), e'_i \rangle = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $r(s_k) = r_0$ . (4), где  $s_k$  — значение длины дуги кривой в точке  $O'$ ;  $r_0$  — радиус-вектор точки  $O'$ .



На значения кривизны и кручения накладываем ограничения следующего типа:

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_1(s) \leq \bar{k}_1; \\ |k_2(s)| &\leq \bar{k}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Насколько удачно выбраны кривизна и кручение, будем оценивать длиной дуги кривой от точки 0 до точки 0', т. е. в качестве критерия оптимальности принимаем  $I[k_1, k_2] = s_k \rightarrow \inf$  (6). Рассматривая  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$  как управляющие параметры, из класса измеримых функций приходим к известной задаче о быстрой реакции [2].

Определение  $k_1(s)$ ,  $k_2(s)$ , удовлетворяющих условиям (5), минимизирующих функционал (6) и силу уравнений (1) при условиях (3), (4), будем называть основной задачей штурмана (ОЗШ).

*Задача штурмана и принцип максимума Понтрягина.*

Уравнения Френе (1) можно рассматривать как уравнения «движения», тогда, введя три вектора  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , построим функцию Гамильтона—Понтрягина:  $H = k_1 \langle \psi_1, e_2 \rangle - \langle \psi_2, k_1 e_1 + k_2 e_3 \rangle + k_2 \langle \psi_3, e_2 \rangle$ . Сопряженная система для векторов  $\psi_i, i = \overline{1, 3}$  будет следующей:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{ds} &= k_1 \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{ds} &= -(k_1 \psi_1 + k_2 \psi_3); \\ \frac{d\psi_3}{ds} &= k_2 \psi_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая эту систему с системой (1), приходим к выводу, что если нам известно решение системы (1), то соответствующим линейным преобразованием можем получить и решение системы (7).

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [2] кривизна и кручение определяются по формулам

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \langle \psi_1, e_2 \rangle - \langle \psi_2, e_1 \rangle < 0; \\ \bar{k}_1, & \text{если } \langle \psi_1, e_2 \rangle - \langle \psi_2, e_1 \rangle > 0; \end{cases} \\ k_2(s) &= \begin{cases} -\bar{k}_2, & \text{если } \langle \psi_3, e_2 \rangle - \langle \psi_2, e_3 \rangle < 0; \\ \bar{k}_2, & \text{если } \langle \psi_3, e_2 \rangle - \langle \psi_2, e_3 \rangle > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть  $\psi_i(0), i = \overline{1, 3}$  — начальные условия для системы уравнений (7), тогда их можно выразить через векторы  $e_i(0), i = \overline{1, 3}$  с помощью трех углов Эйлера или самолетных углов [3]. Так, для самолетных углов матрица преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} A(\psi, \vartheta, \varphi) &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\psi$  — угол рыскания;  $\vartheta$  — угол тангажа;  $\varphi$  — угол крена.

Пределы изменения этих углов следующие:

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Следовательно, взяв три соответствующих угла, получим  $\psi_i(0) = A(\psi, \vartheta, \varphi) \cdot e_i(0)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Эти соотношения выполняются и для произвольного значения  $s$ , т. е. решение системы (7) можно представить в виде  $\psi_i(s) = A(\psi, \vartheta, \varphi) e_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , где  $e_i(s)$  — решение системы (1) при начальных условиях (3). С учетом этих соотношений кривизну и кручение можно выразить через матрицу  $A(\psi, \vartheta, \varphi)$  и векторы  $e_i(s)$  по таким формулам:

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \langle Ae_1, e_2 \rangle - \langle Ae_2, e_1 \rangle < 0; \\ \bar{k}_1, & \text{если } \langle Ae_1, e_2 \rangle - \langle Ae_2, e_1 \rangle > 0, \end{cases} \\ k_2(s) &= \begin{cases} -\bar{k}_2, & \text{если } \langle Ae_3, e_2 \rangle - \langle Ae_2, e_3 \rangle < 0; \\ \bar{k}_2, & \text{если } \langle Ae_3, e_2 \rangle - \langle Ae_2, e_3 \rangle > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (9) можно рассматривать как параметрический синтез управления. Проинтегрировав систему (1) с учетом начальных данных (3) и синтеза (9), получим  $e_i = e_i(s, \psi, \vartheta, \varphi)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $r = r(s, \psi, \vartheta, \varphi)$ . Исходная основная задача штурмана сводится к поиску таких  $(\psi_*, \vartheta_*, \varphi_*) \in \Lambda$ , чтобы выполнялись соотношения (4), а функционал (6) принимал бы минимальное значение, т. е. приходим к обычной задаче поиска минимума функции трех переменных на ограниченной замкнутой области  $\Lambda$  при ограничениях (4).

*Алгоритм численного решения ОЗШ.*

Пусть на отрезке  $[s, s + \Delta s]$  кривизна и кручение постоянны, тогда систему дифференциальных уравнений (1) можно проинтегрировать, и решение будет следующим:

$$\begin{aligned} e_1(s + \Delta s) &= k_1(s) \left( \frac{A_1}{a} \sin a \Delta s + \frac{A_2}{a} (1 - \cos a \Delta s) \right) + e_1(s); \\ e_2(s + \Delta s) &= A_1 \cos a \Delta s + A_2 \sin a \Delta s; \\ e_3(s + \Delta s) &= k_2(s) \left( \frac{A_1}{a} \sin a \Delta s + \frac{A_2}{a} (1 - \cos a \Delta s) \right) + e_3(s), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$ ;

$$A_1 = e_2(s); \quad A_2 = -\frac{k_1(s) e_1(s) + k_2(s) e_3(s)}{a}.$$

Значение радиуса-вектора определится по формуле

$$\begin{aligned} r(s + \Delta s) &= r(s) + k_1(s) \left( \frac{A_1}{a^2} (1 - \cos a \Delta s) - \frac{A_2}{a^2} \sin a \Delta s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2}{a} \Delta s \right) + e_1(s) \Delta s. \end{aligned} \quad (11)$$



Эти формулы позволяют избежать ошибок численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1).

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(s, \psi, \vartheta, \varphi) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (e_{ij}(s, \psi, \vartheta, \varphi) - e'_{ij})^2 + \sum_{i=1}^3 (r_i(s, \psi, \vartheta, \varphi) - r_{i0'})^2, \quad (12)$$

где  $e_{ij}(s, \psi, \vartheta, \varphi)$  —  $j$ -я компонента вектора  $e_i$ ;  $r_i(s, \psi, \vartheta, \varphi)$  —  $i$ -я компонента вектора  $r(s, \psi, \vartheta, \varphi)$ , получаемые в силу синтеза (9) с помощью формул (10), (11);  $e'_{ij}$  —  $j$ -я компонента вектора  $e'_i$ ,  $r_{i0'}$  —  $i$ -я компонента вектора  $r_{0'}$ .

Относительно функции  $\Phi(s, \psi, \vartheta, \varphi)$  можно утверждать, что она неотрицательна, а минимальное значение равно нулю. Тогда если  $\Phi = 0$ , то выполняются условия (4), т. е. мы приходим в точку  $0'$  с соответствующей ориентацией триэдра. Множество точек, в которых функция  $\Phi(s, \psi, \vartheta, \varphi)$  равна нулю в общем случае, может содержать несколько точек, удовлетворяющих условию (8) и  $s \geq 0$ . Следовательно, среди всех нулей функции  $\Phi$  необходимо выбрать тот, у которого  $s$  минимально, это и будет решением основной задачи штурмана.

Основные элементы алгоритма решения ОЗШ следующие:

Принимаем некоторый шаг  $\Delta s$  построения кривой перехода из точки  $0$  в точку  $0'$ . В соответствии с принятым методом оптимизации определяем углы  $(\psi, \vartheta, \varphi) \in \Lambda$  и вычисляем матрицу  $A$ . Полагая  $s = 0$ , по формулам (9) вычисляем кривизну и кручение. По формулам (10), (11) и (12) вычисляем  $e_i(s + \Delta s)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $r(s + \Delta s)$  и  $\Phi(s + \Delta s, \psi, \vartheta, \varphi)$ .

Если  $\Phi(s + \Delta s, \psi, \vartheta, \varphi) \leq \varepsilon$ , то переходим к пункту 2, где соответствующий метод оптимизации принимает решение об окончании вычисления или назначает новые углы. В противном случае вычисляем  $s = s + \Delta s$  и переходим к пункту 6.

Если  $s < L$ , то переходим к пункту 7, в противном случае назначенные углы — недопустимые и переходим к пункту 2 для выбора новых углов.

Вычисляем по формулам (9) кривизну и кручение и переходим к пункту 4.

В данном алгоритме  $\varepsilon$ ,  $L$  являются параметрами настройки. Величину  $L$  принимают равной порядка десяти значений расстояния от точки  $0$  до точки  $0'$ . Значение  $\varepsilon$  характеризует точность попадания в точку  $0'$ .

**Список литературы:** 1. Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. — Х.: Изд-во при Харьк. ун-те, 1955. — 147 с. 2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с. 3. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

Поступила в редколлегию 15.12.83.

# ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В работе будет показано, что в задаче минимизации функционала

$$\int_D F(x, u(x), z(x)) dx \quad (1); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n,$$

$$u = (u_1, \dots, u_m) \in E_m; \quad z = z(x_1, \dots, x_n) \in E_1, \quad D \subset E_n,$$

когда «состояние системы»  $z(x)$  есть решение эллиптической краевой задачи

$Mz(x) = f(x, u(x), z(x)), \quad x \in D \quad (2); \quad z(x) = 0, \quad x \in \partial D \quad (3),$   
 а управление  $u(x)$  подчинено ограничению  $u(x) \in \Omega \subset E_m \quad (4)$  для почти всех  $x \in D$ , принцип максимума имеет стандартную форму:

$$H(x, z(x), u(x), \psi(x)) = \max_{v \in \Omega} H(x, z(x), v, \psi(x)) \quad (5)$$

для почти всех  $x \in D$ , где  $H = -F + \psi \cdot f \quad (6); \quad u, z$  — оптимальный процесс;  $\psi(x)$  — решение краевой задачи

$$M\psi(x) = \frac{\partial H(x, z(x), u(x), \psi(x))}{\partial z}, \quad x \in D, \quad (7)$$

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \partial D.$$

Отметим, что близкие результаты содержатся в работах [1, 2, 3]. Мы установим эти результаты при следующих предположениях:  $D$  — ограниченная область с границей  $\partial D$ , являющейся поверхностью Ляпунова с показателем Ляпунова, равным единице;  $M$  — эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, определяемый равенством

$$Mz(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) + c(x)z(x),$$

причем мы предполагаем, что  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $c(x)$  принадлежат классам:  $a_{ik} \in C^{(3)}(D)$ ,  $c(x) \in C^{(1)}(D)$ , дискриминант формы  $\sum a_{ik} \xi_i \xi_k$  ограничен снизу положительным числом,  $c(x) < 0$  в  $D$ ;  $F(x, u, z)$ ,  $f(x, u, z)$  и их частные производные по  $z$  непрерывны по совокупности аргументов;  $\Omega \subset E_m$  — заданное ограниченное множество.

Функцию  $u(x)$ , определенную в  $D$ , назовем допустимым управлением в задаче (1)–(4), если она измерима в  $D$  и  $u(x) \in \Omega$  для почти всех  $x$  из  $D$ . Множество всех допустимых управлений в задаче (1)–(4) будем обозначать  $U$ .



Пусть  $\mu$  и  $L$  — два таких положительных числа, что выполнены неравенства  $|f(x, u, z)| \leq \mu$ ,  $|f_z(x, u, z)| \leq \mu$  (8) для всех  $x \in D \cup \partial D$ ,  $u \in \Omega$ ,  $z: |z| \leq L$ . Если мера области  $D$  достаточно мала, а именно, если

$$\max_{x \in \bar{D}} \int_D G(x, y) dy \leq \frac{L}{\mu},$$

где  $G(x, y)$  — функция Грина краевой задачи (2)–(3), допускающая, как известно, оценку

$$0 \leq G(x, y) \leq c \|x - y\|^{-n+2}, \quad c = \text{const}, \quad (9)$$

то последовательность

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \int_D G(x, y) f(y, u(y), z_n(y)) dy, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

будет, очевидно, обладать свойством  $|z| \leq L$ , и, если

$$\max_{x \in \bar{D}} \int_D G(x, y) dy \leq \min \left\{ \frac{L}{\mu}, \frac{\vartheta}{\mu} \right\}, \quad 0 < \vartheta < 1, \quad (10)$$

то и свойством

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \vartheta |z_n - z_{n-1}| \quad n = 1, 2, \dots$$

Из этих неравенств следует, что последовательность непрерывных в  $D$  функций  $z_n(x)$  равномерно в  $D$  сходится к непрерывной функции  $z(x)$ , удовлетворяющей уравнению

$$z(x) = \int_D G(x, y) f(y, u(y), z(y)) dy, \quad x \in D, \quad (11)$$

которое, как нетрудно видеть, в указанном классе единственно. Из хорошо известных свойств функции Грина  $G(x, y)$ , ограниченности  $u$  и  $z$  вытекает, что функция  $z$  принадлежит классу  $C^{(1)}(D)$ , имеет обобщенные производные второго порядка, суммируемые с квадратом в  $D$ , удовлетворяет краевому условию (3) и уравнению (2), где производные понимаются в обобщенном смысле. Таким образом, любому допустимому управлению  $u$  отвечает единственное решение  $z$ , удовлетворяющее уравнению (11). Будем называть такую пару  $u, z$  допустимым процессом. Для любого допустимого процесса, как нетрудно видеть, будет

$$|z| \leq L, \quad \|\nabla z\| \leq L_2 \mu \quad \forall x \in D, \quad \forall u(\cdot) \in U, \quad (12)$$

где

$$L_2 = \max_{x \in \bar{D}} \int_D \|\nabla G(x, y)\| dy.$$

В дальнейшем мы будем требовать кроме малости области  $D$ , обеспечивающей существование и единственность решения краевой

задачи (2), (3) в указанном смысле при любом допустимом управлении  $u$ , еще и ее малость, обеспечивающую существование и единственность решения краевой задачи:  $M\psi(x) = -F_z(x, u(x), z(x)) + \psi(x)f_z(x, u(x), z(x))$ ,  $x \in D$  (13);  $\psi(x) = 0$ ,  $x \in \partial D$  (14), где  $u, z$  некоторый фиксированный процесс. Аналогично указанному выше можно установить, что для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|\psi| \leq L_1, \quad |-F_z(x, u(x), z(x)) + \psi f_z(x, u(x), z(x))| \leq \mu_1, \\ |f_z(x, u(x), z(x))| \leq \mu_1 \quad \forall x \in D, \quad (15)$$

$$\max_{x \in \bar{D}} \int_D G(x, y) dy \leq \min \left\{ \frac{L_1}{\mu_1}, \frac{\vartheta}{\mu_1} \right\}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Приведенные соображения в случае  $M = \Delta$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа, по существу содержатся в работах [4] (дополнения к гл. 4 § 2.6) и в [5] (§ 24 второй главы).

Пусть  $u(\cdot)$ ,  $z(\cdot)$  — процесс, дающий решение поставленной задачи оптимального управления (1)–(5). Назовем вариацией  $u$ , отвечающей выбранной точке  $x_0 \in D$ , выбранному вектору  $V \in \Omega$ , выбранному числу  $\varepsilon > 0$ , допустимое управление  $u_\varepsilon$ , определяемое равенством

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} v, & \text{если } \|x - x_0\| \leq \varepsilon, \\ u(x), & \text{если } \|x - x_0\| > \varepsilon. \end{cases} \quad (16)$$

Решение краевой задачи (2), (3), отвечающее управлению  $u_\varepsilon$ , обозначим через  $z_\varepsilon$ .

Так как  $u$  — оптимальное, а  $u_\varepsilon$  — допустимое управление, то

$$\int_D [F(x, u_\varepsilon(x), z_\varepsilon(x)) - F(x, u(x), z(x))] dx \geq 0. \quad (17)$$

Представим это неравенство в виде

$$\int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} [F(x, v, z_\varepsilon) - F(x, u, z)] dx + \int_D [F(x, u, z_\varepsilon) - \\ - F(x, u, z)] dx + \int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} [F(x, u, z) - F(x, u, z_\varepsilon)] dx \geq 0, \quad (18)$$

где

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x: \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

При анализе соотношения (18) нам понадобятся следующие две леммы.

**Лемма 1.**  $z_\varepsilon(x) \rightarrow z(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно относительно  $x_0 \in D$ ,  $x \in D$ ,  $v \in \Omega$ .

**Доказательство.** Так как в силу (16), (11)

$$z_\varepsilon(x) - z(x) = \int_D G(x, y) [f(y, u_\varepsilon(y), z_\varepsilon(y)) - f(y, u(y), z(y))] dy,$$



то, очевидно,

$$z_\varepsilon - z = \int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} G(x, y) [f(y, v, z_\varepsilon) - f(y, u, z)] dy + \\ + \int_{D \setminus S(x_0, \varepsilon)} G(x, y) [f(y, u, z_\varepsilon) - f(y, u, z)] dy.$$

Первое слагаемое в этом равенстве в силу (9) и (12) равномерно стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$z_\varepsilon - z = \alpha + \int_{D \setminus S(x_0, \varepsilon)} G(x, y) f_z(y, u(y), \bar{z}(y)) (z_\varepsilon - z) dy,$$

где  $\bar{z} = z + \lambda(z_\varepsilon - z)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha = 0$  равномерно. Из (8), (9), (10) теперь очевидным образом выводим

$$\max_{x \in \bar{D}} |z_\varepsilon - z| \leq \max_{x \in \bar{D}} |\alpha| + \vartheta \max_{x \in \bar{D}} |z_\varepsilon - z|, \quad 0 \leq \vartheta < 1,$$

т. е.

$$\max_{x \in \bar{D}} |z_\varepsilon - z| \leq \frac{1}{1 - \vartheta} \max_{x \in \bar{D}} |\alpha| \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно. Лемма доказана.

Аналогичным образом устанавливается и следующая

**Лемма 2.** Имеет место оценка

$$\int_D |z_\varepsilon(x) - z(x)| dx \leq c \operatorname{mes} S(x_0, \varepsilon),$$

где  $c$  — постоянная.

Возвращаясь к исследованию неравенства (18), заметим, что из леммы 1, непрерывности  $F$  и ограниченности ее аргументов вытекает, что

$$\int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} [F(x, u, z) - F(x, u, z_\varepsilon)] dx = \alpha_1, \quad (19)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_1}{\operatorname{mes} S(x_0, \varepsilon)} = 0. \quad (20)$$

Второе слагаемое в (18) представим в форме

$$\int_D [F(x, u, z_\varepsilon) - F(x, u, z)] dx = \int_D F_z(x, u, z) (z_\varepsilon - z) dx + \alpha_2, \quad (21)$$

где  $\alpha_2$ , очевидно, выражается по формуле

$$\alpha_2 = \int_D [F_z(x, u, \bar{z}) - F_z(x, u, z)] (z_\varepsilon - z) dx, \\ \bar{z} = z + \lambda(z_\varepsilon - z), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Из леммы 1 и 2 и равномерной непрерывности  $F_z$  теперь следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_2}{\text{mes } S(x_0, \varepsilon)} = 0. \quad (22)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\psi$ , являющуюся решением краевой задачи:

$$M\psi(x) = -F_z(x, u(x), z(x)) + \psi(x)f_z(x, u(x), z(x)), \quad x \in D, \quad (23)$$

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \partial D, \quad (24)$$

которая в силу предположений (15) имеет единственное решение в классе  $C^{(1)}(D) \cap W_2^2$  (лок). Обозначая интеграл в правой части равенства (21) через  $a$ , используя функцию  $\psi$  и формулы Грина, после простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} a &= \int_D [\psi(x)f_z(x, u, z) - M\psi(x)](z_\varepsilon - z) dx = \\ &= \int_D \psi(x)f_z(x, u, z)(z_\varepsilon - z) dx - \int_D [f(x, u_\varepsilon, z_\varepsilon) - f(x, u, z)]\psi(x) dx, \end{aligned}$$

откуда аналогично предыдущему выводим:

$$a = - \int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} \psi(x)[f(x, v, z(x)) - f(x, u(x), z(x))] dx + \alpha_3, \quad (25)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_3}{\text{mes } S(x_0, \varepsilon)} = 0. \quad (26)$$

Таким образом, неравенство (18) с учетом (19), (21), (25) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{S(x_0, \varepsilon) \cap D} [F(x, v, z_\varepsilon(x)) - F(x, u(x), z(x)) - \psi(x)(f(x, v, z_\varepsilon(x)) - \\ - f(x, u(x), z(x)))] dx + \alpha, \end{aligned} \quad (27)$$

причем  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  и в силу (20), (22), (26)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\text{mes } S(x_0, \varepsilon)} = 0 \quad (28)$$

равномерно.

Пусть в (27)  $x_0$  точка Лебега суммируемой функции

$$\varphi(x) = -F(x, u(x), z(x)) + \psi(x)f(x, u(x), z(x)),$$

т. е. точка, в которой

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{mes } S(x_0, \varepsilon)} \int_{S(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| dx = 0. \quad (29)$$

Так как  $v$  — постоянный вектор,  $z_\varepsilon(x)$  — непрерывная функция, равномерно сходящаяся к  $z(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $F$ ,  $f$ ,  $\psi$  — непрерывны,



а функция  $\varphi$  суммируема, то, деля (27) на  $\text{mes } S(x_0, \varepsilon)$ , устремляя  $\varepsilon$  к нулю и учитывая (28), (29), имеем  $F(x_0, v, z(x_0)) - F(x_0, u(x_0), z(x_0)) - \psi(x_0)[f(x_0, v, z(x_0)) - f(x_0, u(x_0), z(x_0))] \geq 0$ , что может быть записано еще и так:  $-F(x_0, u(x_0), z(x_0)) + \psi(x_0)f(x_0, u(x_0), z(x_0)) \geq -F(x_0, v, z(x_0)) + \psi(x_0)f(x_0, v, z(x_0))$  (30).

Соотношение (30) установлено нами для произвольной точки  $x_0 \in D$ , являющейся точкой Лебега суммируемой функции  $\varphi(x)$ . Так как у множества точек, не являющихся точками Лебега такой функции, — мера нуль, то неравенство (30) имеет место для почти всех  $x_0 \in D$ . Учитывая, что в выражении (30)  $v$  — произвольный вектор из  $\Omega$  и (6), получаем

$$H(x, z(x), u(x), \psi(x)) = \max_{v \in \Omega} H(x, z(x), v, \psi(x)).$$

Тем самым доказана следующая

**Теорема.** *Оптимальный процесс  $u(x)$ ,  $z(x)$  удовлетворяет принципу максимума (5), (6), (7).*

**Список литературы:** 1. Егоров А. И. Об одной вариационной задаче в теории уравнений эллиптического типа. — Сиб. мат. журн., 1964, 5, № 3, с. 12—37. 2. Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — К.: Наук. думка, 1978, с. 57—59. 3. Сузилов Г. В. Одна задача оптимального управления с помощью коэффициента излучения. — Вестн. Харьк. ун-та, 1984, № 134. Математика и механика, с. 25—32. 4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.: ГИИТЛ, 1945. — 620 с. 5. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. — М.: ГИИТЛ, 1953. — 415 с.

Поступила в редакцию 25.01.84.

УДК 517.934

А. В. ЛУЦЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Л. А. ВЛАСЕНКО

### О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В настоящей работе на основе метода усреднения [1, 2] получены достаточные условия полной управляемости линейной нестационарной системы с малым параметром. Аналогичный вопрос рассматривался ранее в работе [3].

Рассмотрим систему  $\dot{x} = \varepsilon(A(t)x + B(t)u)$  (1), где  $x \in E_n$ ,  $u \in E_r$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр;  $A(t)$ ,  $B(t)$  — матрицы соответствующих размерностей.

Мы покажем, что для малых  $\varepsilon$  полная управляемость системы (1) следует при определенных условиях из полной управляемости усредненной системы.

**Теорема.** Пусть выполняются условия:

1. Матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  кусочно-непрерывны и ограничены на  $[0, \infty)$ .
2. Существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = A_0.$$

3. Существует постоянная  $n \otimes r$ -матрица  $B_0$  такая, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|B(t) - B_0\| dt = 0.$$

4. Система

$$\dot{y} = \varepsilon (A_0 y + B_0 v), \quad (2)$$

где  $v \in E_r$ , является полностью управляемой при каком-нибудь  $\varepsilon > 0$ . Тогда для любого  $T > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  система (1) полностью управляема на  $[0, T\varepsilon^{-1}]$ .

Доказательству теоремы предположим один вспомогательный результат. Рассмотрим две задачи Коши:

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x, \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$\dot{y} = \varepsilon A_0 y, \quad y(0) = x_0 \quad (4)$$

их решения будем обозначать через  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$ .

**Лемма.** Если существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = A_0, \quad (5)$$

где  $n \otimes n$ -матрица  $A(t)$  является кусочно-непрерывной и ограниченной на  $[0, \infty)$ , то для произвольных чисел  $\eta > 0$ ,  $T > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и при всех  $t \in [0, T\varepsilon^{-1}]$  будет выполняться неравенство  $\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| < \eta$ .

Доказательство леммы. В задачах (3), (4) выполним замену переменных  $\tau = \varepsilon t$  и введем обозначения:

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right); \quad \psi(\tau, \varepsilon) = y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right); \quad A_1(\tau, \varepsilon) = A\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right).$$

Тогда задачи (3), (4) примут вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = A_1(\tau, \varepsilon)\varphi, \quad \varphi(0) = x_0; \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = A_0\psi, \quad \psi(0) = x_0. \quad (7)$$

Доопределим матрицу  $A_1(\tau, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  равенством  $A_1(\tau, 0) = A_0$



и покажем, что вектор-функция  $A_1(\tau, \varepsilon)x$  является интегрально-непрерывной [4] по  $\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$ . Действительно, в силу (5)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\tau A_1(t, \varepsilon)x \, dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\tau A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} A(s)x \, ds = \\ &= \tau A_0 x = \int_0^\tau A_0 x \, dt = \int_0^\tau A_1(t, 0)x \, dt. \end{aligned}$$

Заменим задачи Коши (6), (7) эквивалентными интегральными уравнениями:

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = x_0 + \int_0^\tau A_1(t, \varepsilon)\varphi(t, \varepsilon) \, dt; \quad (8)$$

$$\psi(\tau, \varepsilon) = x_0 + \int_0^\tau A_0\psi(t, \varepsilon) \, dt. \quad (9)$$

Множество  $\{\varphi(\cdot, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$  решений уравнения (8) равномерно ограничено на  $[0, T]$ . Действительно, из оценки

$$\begin{aligned} \|\varphi(\tau, \varepsilon)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^\tau \|A_1(t, \varepsilon)\| \|\varphi(t, \varepsilon)\| \, dt \leq \\ &\leq \|x_0\| + M \int_0^\tau \|\varphi(t, \varepsilon)\| \, dt \end{aligned}$$

в силу неравенства Гронуолла — Беллмана [5] получаем  $\|\varphi(\tau, \varepsilon)\| \leq \|x_0\| \exp(MT)$ . Это же множество равномерно-непрерывно на  $[0, T]$ , так как из оценки

$$\left\| \frac{d\varphi(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq \|A_1(\tau, \varepsilon)\| \|\varphi(\tau, \varepsilon)\| \leq M \|x_0\| \exp(MT)$$

следует, что  $\|\varphi(\tau_1, \varepsilon) - \varphi(\tau_2, \varepsilon)\| \leq m|\tau_1 - \tau_2|$ , где  $m$  — число.

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел  $\varepsilon_k$  таких, что  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . В силу теоремы Арцела — Асколи существует подпоследовательность  $\varepsilon_{p_k}$  такая, что  $\varphi(\tau, \varepsilon_{p_k})$  равномерно на  $[0, T]$  сходится к функции  $\varphi^0(\tau)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Легко проверить, что, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , в равенстве

$$\varphi(\tau, \varepsilon_{p_k}) = x_0 + \int_0^\tau A_1(t, \varepsilon_{p_k})\varphi(t, \varepsilon_{p_k}) \, dt$$

получим на основании теоремы Красносельского — Крейна [4]

$$\varphi^0(\tau) = x_0 + \int_0^\tau A_1(t, 0)\varphi^0(t) \, dt = x_0 + \int_0^\tau A_0\varphi^0(t) \, dt.$$

Последнее равенство означает, что функция  $\psi(\tau, \varepsilon) = \varphi^0(\tau)$  есть решение уравнения (9). Так как уравнение (9) имеет единственное решение, то все сходящиеся подпоследовательности множества  $\{\varphi(\cdot, \varepsilon_k)\}_{k=1}^{\infty}$  имеют один и тот же предел  $\varphi^0(\tau)$ , следовательно,  $\varphi(\tau, \varepsilon)$  равномерно на  $[0, T]$  сходится к  $\psi(\tau, \varepsilon) = \varphi^0(\tau)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и для всех  $\tau \in [0, T]$  будет  $\|\varphi(\tau, \varepsilon) - \psi(\tau, \varepsilon)\| < \eta$ . Возвращаясь к старому аргументу, получим  $\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| < \eta$ ,  $t \in [0, T\varepsilon^{-1}]$ .

Доказательство теоремы. Осуществив в системах (1), (2) замену  $\tau = \varepsilon t$  и введя обозначения

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right); \quad \psi(\tau, \varepsilon) = y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right);$$

$$A_1(\tau, \varepsilon) = A\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right); \quad B_1(\tau, \varepsilon) = B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right),$$

где  $x(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  — решения уравнений (1), (2) соответственно, получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = A_1(\tau, \varepsilon)\varphi + B_1(\tau, \varepsilon)u; \quad (10)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = A_0\psi + B_0v, \quad (11)$$

причем матрицы  $A_1(\tau, \varepsilon)$ ,  $B_1(\tau, \varepsilon)$  удовлетворяют условиям  $\|A_1(\tau, \varepsilon)\| \leq M$ ,  $\|B_1(\tau, \varepsilon)\| \leq M$ . Обозначим

$$R(T, \varepsilon) = \int_0^T \Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) B_1(\tau, \varepsilon) B_1^*(\tau, \varepsilon) (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* d\tau;$$

$$R_0(T) = \int_0^T \Phi_0^{-1}(\tau) B_0 B_0^* (\Phi_0^{-1}(\tau))^* d\tau.$$

Здесь  $\Phi(\tau, \varepsilon)$ ,  $\Phi_0(\tau)$  — фундаментальные матрицы систем (6), (7), удовлетворяющие условию  $\Phi(0, \varepsilon) = \Phi_0(0) = I$ , где  $I$  — единичная матрица.

Теорема будет доказана, если мы установим существование такого  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$   $\det R(T, \varepsilon) \neq 0$  (12), ибо условие (12) эквивалентно [6] полной управляемости системы (10) на  $[0, T]$  или системы (1) на  $[0, T\varepsilon^{-1}]$ .

Покажем, что для любого  $\eta > 0$  найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\|R(T, \varepsilon) - R_0(T)\| < \eta. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что матрицы  $(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*$ ,  $(\Phi_0^{-1}(\tau))^*$  являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = -A_1^*(\tau, \varepsilon) X(\tau), \quad X(0) = I; \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\tau} X_0(\tau) = -A_0^* X_0(\tau), \quad X_0(0) = I,$$



поэтому в силу доказанной леммы найдется  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  и любого  $\tau \in [0, T]$

$$\|\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) - \Phi_0^{-1}(\tau)\| < \eta. \quad (15)$$

Кроме того, заменяя задачу (14) эквивалентным интегральным уравнением, можно получить неравенство

$$\|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| \leq 1 + \int_0^\tau \|A_1(t, \varepsilon)\| \|(\Phi^{-1}(t, \varepsilon))^*\| dt,$$

откуда

$$\|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| \leq \exp(MT), \quad \tau \in [0, T], \quad \varepsilon > 0. \quad (16)$$

Аналогично, учитывая равенство  $\Phi_0(\tau) = \exp(A_0\tau)$ , будем иметь

$$\|(\Phi_0^{-1}(\tau))^*\| \leq \exp(\|A_0\|T), \quad \tau \in [0, T]. \quad (17)$$

Рассмотрим разность  $R(T, \varepsilon) - R_0(T)$  и покажем, что выбором  $\varepsilon$  ее можно сделать достаточно малой. Действительно,

$$\begin{aligned} \|R(T, \varepsilon) - R_0(T)\| &= \left\| \int_0^T (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) B_1(\tau, \varepsilon) B_1^*(\tau, \varepsilon) \times \right. \\ &\quad \times (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* - \Phi_0^{-1}(\tau) B_0 B_0^* (\Phi_0^{-1}(\tau))^*) d\tau \| = \\ &= \left\| \int_0^T (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) B_1 B_1^* (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* - \Phi_0^{-1}(\tau) B_1 B_1^* (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* + \right. \\ &\quad + \Phi_0^{-1}(\tau) B_1 B_1^* (\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* - \Phi_0^{-1}(\tau) B_1 B_1^* (\Phi_0^{-1}(\tau))^* + \\ &\quad + \Phi_0^{-1}(\tau) B_1 B_1^* (\Phi_0^{-1}(\tau))^* - \Phi_0^{-1}(\tau) B_0 B_0^* (\Phi_0^{-1}(\tau))^*) d\tau \| \leq \\ &\leq \int_0^T \|\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) - \Phi_0^{-1}(\tau)\| \|B_1\| \|B_1^*\| \|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| d\tau + \\ &\quad + \int_0^T \|\Phi_0^{-1}(\tau)\| \|B_1\| \|B_1^*\| \|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^* - (\Phi_0^{-1}(\tau))^*\| d\tau + \\ &\quad + \int_0^T \|\Phi_0^{-1}(\tau)\| \|B_1 B_1^* - B_0 B_0^*\| \|\Phi_0^{-1}(\tau)\|^* d\tau = \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Произведем теперь оценки интегралов  $I_k$ . В силу (16), (17) получаем для  $I_1, I_2$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \|\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) - \exp(-A_0\tau)\| \|B_1\| \|B_1^*\| \|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| d\tau \leq \\ &\leq M^2 \exp(MT) \int_0^T \|\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon) - \exp(-A_0\tau)\| d\tau; \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^T \|\exp(-A_0 \tau)\| \|B_1\| \|B_1^*\| \|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| - \\ - \exp(-A_0^* \tau) \|d\tau \leq M^2 \exp(\|A_0\| T) \int_0^T \|(\Phi^{-1}(\tau, \varepsilon))^*\| - \\ - \exp(-A_0^* \tau) \|d\tau.$$

Из соотношения (15) следует, что найдется такое  $\varepsilon_2 > 0$ , что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  будет  $I_1 < \frac{1}{3} \eta$ ,  $I_2 < \frac{1}{3} \eta$ . Для интеграла  $I_3$  получим

$$I_3 = \int_0^T \|\exp(-A_0 \tau)\| \|B_1 B_1^* - B_0 B_0^*\| \|\exp(-A_0^* \tau)\| d\tau \leq \\ \leq \exp(2\|A_0\| T) \int_0^T \|B_1 B_1^* - B_0 B_0^*\| d\tau \leq \\ \leq \exp(2\|A_0\| T) \int_0^T \|B_1 B_1^* - B_1 B_0^*\| d\tau + \\ + \exp(2\|A_0\| T) \int_0^T \|B_1 B_0^* - B_0 B_0^*\| d\tau \leq \\ \leq \exp(2\|A_0\| T) (M \int_0^T \|B_1^* - B_0^*\| d\tau + \\ + \|B_0\| \int_0^T \|B_1(\tau, \varepsilon) - B_0\| d\tau) = \exp(2\|A_0\| T) (M + \\ + \|B_0\|) \varepsilon \int_0^{T\varepsilon^{-1}} \|B(t) - B_0\| dt.$$

Так как  $T^{-1} \int_0^T \|B(t) - B_0\| dt \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ , то  $I_3 \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Следовательно, существует  $\varepsilon_3 > 0$  такое, что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$   $I_3 < \frac{1}{3} \eta$ . Если положить  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ , то для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$   $\|R(T, \varepsilon) - R_0(T)\| < \eta$ . Система (2) полностью управляема, поэтому  $\det R_0(T) \neq 0$ . Значит, и  $\det R(T, \varepsilon) \neq 0$  для достаточно малых  $\varepsilon$ .

Список литературы: 1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963. — 503 с. 2. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. — Ташкент: Фан, 1971. — 280 с. 3. Плотицкий В. А., Смирнова Н. А. Некоторое достаточное условие управляемости линейных нестационарных систем. — Деп. в ВИНТИ, № 1289—78, 6 с. 4. Красносельский М. А., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике. —



Усп. мат. наук, 1955, 10: 3(65), с. 147—152. 5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 215 с. 6. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 336 с.

Поступила в редколлегию 01.02.84.

УДК 517 : 934

А. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

# **О МИНИМАЛЬНОСТИ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОМУ ВЫХОДУ**

Рассмотрим линейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$y = Hx; \quad x \in R^n = X, \quad y \in R^m = Y, \quad u \in R^p = U.$$

Управление  $u(t)$  рассматривается в классе кусочно-непрерывных на  $[0, T]$  функций. Необходимо по известному выходу  $y(t)$  однозначно восстанавливать управление  $u(t)$  на  $[0, T]$ . Исследуется вопрос о минимальном количестве информации, необходимом для восстановления управления. Минимальное количество информации, необходимое для наблюдаемости, управляемости, идентифицируемости, определялось, в частности, в работах [1, 2, 3]. Сформулируем полученную нами ранее теорему [4], на основании которой получены результаты. Мы будем использовать матрицу  $H_{\max}$ , которая представляет собой максимально возможное расширение матрицы  $H$ . Строится она следующим образом. Дифференцируем  $y(t)$ :

$$\dot{y}(t) = H\dot{x} = HAx + HBu.$$

Исключим управление, умножая это соотношение на матрицу  $M$  максимального ранга, удовлетворяющую уравнению

$$MHB = 0.$$

Получим

$$M\dot{y} = MHAx,$$

где слева — известная вектор-функция. Таким образом, мы расширили матрицу  $H$  до матрицы  $H_1$ :

$$H_1 = \begin{pmatrix} H \\ MHA \end{pmatrix}.$$

Если  $\text{rg } H_1 = \text{rg } H$ , то  $H_{\max} = H$ , в противном случае с матрицей  $H_1$  проводим аналогичные действия, рассматривая в качестве нового  $y(t)$  вектор  $H_1x$ .

Процесс расширения матрицы  $H$  конечен, так как  $\operatorname{rg} H_k \leq n$ , и заканчивается, когда  $\operatorname{rg} H_{k_0+1} = \operatorname{rg} H_{k_0}$ . Обозначаем  $H_{k_0} = H_{\max}$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы по известным  $Rx_0$  и  $y(t)$  на  $[0, T]$  при  $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} H_{\max} \\ R \end{pmatrix} = n$  можно было однозначно восстановить управление  $u(t)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{rg} H_{\max} B = p$ , где  $p$  — размерность управления;  $n$  — размерность фазового вектора.

Пусть начальный вектор  $x_0$  известен полностью. Определим минимальное число выходов (т. е. размерность вектора  $y(t)$ ), по которым можно восстановить управление. Предполагаем, что  $\operatorname{rg} B = p$ .

**Теорема 2.** Минимальное число выходов, по которым при известном  $x_0$  можно однозначно восстановить управление, равен  $p$  (размерности управления).

**Доказательство.** Пусть  $m = p$ , тогда подбираем матрицу  $H$  так, чтобы  $\operatorname{rg} HB = p$  (например, строки  $H$  состоят из  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где индекс  $i$  пробегает номера линейно независимых строк матрицы  $B$ ), тогда применима теорема 1, так как  $p \geq \operatorname{rg} H_{\max} B \geq \operatorname{rg} HB = p$ . Значит, управление однозначно восстанавливается.

Предложим теперь, что  $m < p$ . Рассмотрим управление

$$u(t) = \sum_{i=0}^k c_i \frac{t^i}{i!}.$$

Очевидно, что  $x(t)$ ,  $y(t)$  являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости  $t$ . Величину  $k$  выбираем из условия  $(k+1)(p-m) > n$ . Далее дифференцируем:

$$\dot{y}(0) = HAx_0 + HBc_0;$$

$$\ddot{y}(0) = HA^2x_0 + HABc_0 + Hvc_1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(k+1)}(0) = HA^{k+1}x_0 + \dots + HABc_{k-1} + Hvc_k;$$

$$x^{(k+1)}(0) = A^{k+1}x_0 + \dots + ABc_{k-1} + vc_k.$$

Полагаем  $x_0$  и левые части соотношений равными нулю. Получили систему из  $(k+1)m + n$  уравнений с  $(k+1)p$  неизвестными  $c_0, c_1, \dots, c_k$ . Величина  $k$  выбирается так, чтобы  $(k+1)m + n < (k+1)p$ , т. е. число уравнений в системе меньше числа неизвестных. Значит, система имеет нетривиальное решение, т. е. нашли  $c_i$ ,

такие, что  $\sum_{i=0}^k \|c_i\|^2 \neq 0$ . Рассмотрим последующие производные

$x(t)$ . Ясно, что  $x^{(k+j+1)}(0) = Ax^{(k+j)}(0)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Отсюда имеем  $x^{(k+2)}(0) = x^{(k+3)}(0) = \dots = x^{(k+j)}(0) = \dots = 0$ . А это в свою очередь означает, что  $Hx^{(k+j)} = 0 \forall j \geq 1$ , т. е.  $y^{(k+j)}(0) = 0 \forall j \geq 1$ . Значит,  $y(t)$  и все производные  $y(t)$  в нуле равны



нулю, откуда следует, что  $y(t) \equiv 0$ . Таким образом, построили ненулевое управление, которое обращает выход в нуль при  $x_0 = 0$ . Но  $u(t) \equiv 0$  также обращает выход в тождественный нуль при  $x_0 = 0$ . Значит, однозначной восстановимости нет. Теорема доказана.

Исследуем возможность восстановления управления, если уменьшить до минимума информацию о системе. Пусть имеем только измерения  $y(t)$  на  $[0, T]$ . Начальное состояние неизвестно. Обозначим  $L\{C\}$  линейную оболочку строк матрицы  $C$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы однозначно восстановить управление  $u(t)$  по известному на  $[0, T]$  выходу  $y(t)$ , необходимо и достаточно

1.  $\text{rg } H_{\max} B = p$ .
2.  $L\{H_{\max} A\} \subsetneq L\{H_{\max}\}$ .

**Доказательство.**

**Достаточность.** Рассмотрим соотношение

$$H_{\max} \dot{x} = H_{\max} Ax + H_{\max} Bu.$$

Слева по построению известная вектор-функция в силу условия 2  $H_{\max} Ax(t)$  известна. Теперь, применяя условие 1, однозначно определяем  $u(t)$ .

**Необходимость.** От противного. Пусть управление восстанавливается однозначно. Если не выполнено условие 1, то даже при известном  $x_0$  в силу теоремы 1 управление не восстанавливается.

Пусть теперь выполнено условие 1, но не выполнено условие 2, т. е.  $L\{H_{\max} A\} \not\subsetneq L\{H_{\max}\}$ . Покажем, что однозначно восстановить управление невозможно. Для этого необходимо построить  $x_0^1 \neq x_0^2$ :  $H_{\max} x_0^1 = H_{\max} x_0^2$ ,  $y(t)$  один и тот же, но  $u_1(t) \neq u_2(t)$ . Построим  $\tilde{x}_0 \neq 0$ :  $H_{\max} \tilde{x}_0 = 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ ,  $u(t) \neq 0$ . Так как

$$L\{H_{\max} A\} \not\subsetneq L\{H_{\max}\},$$

то

$$[L\{H_{\max} A\}]^\perp \not\subset [L\{H_{\max}\}]^\perp = G.$$

Это означает, что  $\exists \tilde{x}_0 \in G$ :  $H_{\max} \tilde{x}_0 = 0$  и в то же время  $H_{\max} A \tilde{x}_0 \neq 0$ .

Далее рассмотрим

$$H_{\max} \dot{x} = H_{\max} Ax + H_{\max} Bu,$$

приравняем нулю:

$$0 \equiv H_{\max} \dot{x} = H_{\max} Ax + H_{\max} Bu.$$

Отсюда в силу условия 1 управление однозначно выражается, т. е. существует матрица  $D$  такая, что

$$u = D(H_{\max} Ax).$$

Рассмотрим  $t = 0$  и начальное условие  $x(0) = \tilde{x}_0$ :

$$\tilde{u}(0) = D(H_{\max} A \tilde{x}_0).$$



Таким образом,  $\exists x_0^1 = 0$ ,  $\tilde{x}_0 \neq 0$  ( $\tilde{x}_0 \in G$ ) такие, что

$$H_{\max} x_0^1 = H_{\max} \tilde{x}_0 = 0,$$

выход для них один и тот же  $y(t) \equiv 0$ , а управления соответствующие разные:  $u^1 \equiv 0$ ,  $\tilde{u} \neq 0$ . Это доказывает необходимость условий 1 и 2 теорем.

Список литературы: 1. Габасов Р., Кирилова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.— 120 с. 2. Белозеров В. Е., Можжаев Г. В. О минимально возможном числе управлений в линейной стационарной управляемой системе.— Диф. уравн., 1981, 17, № 4, с. 589—597. 3. Коробов В. И., Маринич А. П. Общий метод решения задачи синтеза. Вестн. Харьк. ун-та, 1976, № 134. Математика и механика, вып. 41, с. 31—41. 4. Костенко Ю. Т., Подольский А. Е. Восстановление управляющего воздействия по известному выходу.— Сб. науч. тр.: Управление распределенными системами с подвижным воздействием, 1983, с. 22—33.

Поступила в редколлегию 14.01.84.

УДК 517.934.1

С. И. ВОВНА, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

#### АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОДНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Изучение автоколебаний, возникающих при автоматическом вождении самоходных машин [1, 2], приводит к следующей более общей математической задаче.

Управляемая система описывается уравнением

$$\ddot{y} = u, \quad (1)$$

где управление  $u(t)$  может принимать только три значения:  $-c$ ,  $0$ ,  $+c$ . Переключения управления определяются функцией  $\xi(t)$ , линейно зависящей от фазовых координат:

$$\xi = 6(y + ay + b\dot{y}), \quad (2)$$

$a, b$  — заданные константы; множитель 6 вводится для удобства выкладок.

Переключение управления с нулевого значения на значение  $-c$  (начало «правого поворота») происходит с запаздыванием  $\tau_1$  после достижения величиной  $\xi(t)$  значения  $\delta_1$ ; переключение  $u(t)$  со значения  $-c$  на нулевое (конец правого поворота) происходит с запаздыванием  $\tau_2$  после достижения  $\xi(t)$  значения  $\delta_2$  ( $\delta_2 < \delta_1$ ). Аналогично (с заменой  $-c$  на  $c$  и  $\delta_1, \delta_2$  на  $-\delta_1, -\delta_2$ ) происходит «левый поворот».

Мы рассмотрим режимы движения, состоящие в поочередных правых и левых поворотах, отыщем периодический режим и докажем его устойчивость. Это и будет искомый режим автоколебаний.



Необходимо различать два возможных случая: 1) в момент окончания поворотов  $\xi(t)$  лежит в интервале  $(-\delta_1, \delta_1)$ ; 2) в момент окончания поворотов  $\xi(t)$  выходит из этого интервала, т. е. уже во время поворота возникает сигнал начала следующего поворота в противоположную сторону.

Все рассмотрения в конечном счете будут проведены в предельном случае  $c \rightarrow \infty$ , т. е. повороты фактически будут происходить скачком.

Пусть для определенности в момент  $\tilde{t}_n$  заканчивается предыдущий (левый) поворот, в момент  $t_n$  возникает сигнал правого поворота:  $\xi(t_n) = \delta_1$  (заметим, что в случае 1)  $t_n > \tilde{t}_n$ , а в случае 2) выполняется противоположное неравенство). Обозначим

$$\dot{y}(\tilde{t}_n) = -z_n, \quad y(\tilde{t}_n) = w_n.$$

В момент  $\tilde{t}_{n+1}$  заканчивается правый поворот; обозначим  $\dot{y}(\tilde{t}_{n+1}) = z_{n+1}$ ,  $\dot{y}(\tilde{t}_{n+1}) = -w_{n+1}$  (нетрудно проверить, что при правильном чередовании поворотов величины  $z_n$ ,  $w_n$ ,  $z_{n+1}$ ,  $w_{n+1}$  должны быть положительны).

Выведем два уравнения, связывающие  $(z_{n+1}, w_{n+1})$  с  $(z_n, w_n)$ . На интервале  $[\tilde{t}_n, t_n + \tau_1]$  управление  $u(t) \equiv 0$ . Интегрируя (1) и подставляя в (2), получим

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_n + \tau_1) &= -z_n + w_n(t_n + \tau_1 - \tilde{t}_n), \quad \xi(t_n + \tau_1) = \\ &= \xi(\tilde{t}_n) + 6(-z_n + aw_n)(t_n + \tau_1 - \tilde{t}_n) + 3w_n(t_n + \tau_1 - \tilde{t}_n)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

На интервале  $[t_n + \tau_1, \tilde{t}_{n+1}]$   $u(t) \equiv -c$ . Из уравнения (1) при условиях на правом конце этого интервала получим

$$\dot{y}(t_n + \tau_1) = z_{n+1} + \frac{1}{2c}(w_{n+1}^2 - w_n^2); \quad (4)$$

$$t_n + \tau_1 - \tilde{t}_n = \frac{1}{w_n} \left[ z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(w_{n+1}^2 - w_n^2) \right]. \quad (5)$$

Теперь из (1) на промежутке  $[t_n + \tau_1, \tilde{t}_{n+1} - \tau_2]$  будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_2 = \xi(\tilde{t}_{n+1} - \tau_2) &= \xi(t_n + \tau_1) + 6 \left[ z_{n+1} + \frac{1}{2c}(w_{n+1}^2 - w_n^2) + \right. \\ &+ aw_n - bc \left. \right] \left( \frac{w_n + w_{n+1}}{c} - \tau_2 \right) + 3(w_n - ac) \left( \frac{w_n + w_{n+1}}{c} - \tau_2 \right)^2 - \\ &- c \left( \frac{w_n + w_{n+1}}{c} - \tau_2 \right)^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Остается найти  $\xi(\tilde{t}_n)$ , интегрируя (1) на промежутке  $[\tilde{t}_n - \tau_2, \tilde{t}_n]$  при  $u(t) \equiv c$ :

$$\begin{aligned} -\delta_2 = \xi(\tilde{t}_n - \tau_2) &= \xi(\tilde{t}_n) - 6(-z_n + aw_n + \\ &+ bc)\tau_2 + 3(w_n + ac)\tau_2^2 - c\tau_2^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6), (3), (7) получим окончательно уравнение

$$\begin{aligned} \delta_2 = & -\delta_2 + 6(-z_n + a\omega_n + bc)\tau_2 - 3(\omega_n + ac)\tau_2^2 + \\ & + c\tau_2^3 + 6(-z_n + a\omega_n) \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} + \\ & + 3\omega_n \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} \right]^2 + 6 \left[ z_{n+1} + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2) + \right. \\ & \left. + a\omega_n - bc \right] \left( \frac{\omega_n + \omega_{n+1}}{c} - \tau_2 \right) + 3(\omega_n - ac) \left( \frac{\omega_n + \omega_{n+1}}{c} - \tau_2 \right)^2 - \\ & - c \left( \frac{\omega_n + \omega_{n+1}}{c} - \tau_2 \right)^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Выведем второе уравнение. Это делается отдельно для случаев 1) и 2). В случае 1) на  $[\tilde{t}_n, t_n]$  управление  $u(t) \equiv 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \delta_1 = \xi(t_n) = \xi(\tilde{t}_1) + 6(-z_n + a\omega_n) \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} - \right. \\ \left. - \tau_1 \right] + 3\omega_n \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} - \tau_1 \right]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае 2) на  $[t_n, \tilde{t}_n]$   $u(t) \equiv c$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_1 = \xi(t_n) = \xi(\tilde{t}_n) + 6(-z_n + a\omega_n + bc) \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} - \right. \\ \left. - \tau_1 \right] + 3(\omega_n + ac) \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} - \tau_1 \right]^2 + \\ + c \left[ \frac{z_{n+1} + z_n + \frac{1}{2c}(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)}{\omega_n} - \tau_1 \right]^3. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнение (9) (соответственно (10)) нужно подставить значение  $\xi(\tilde{t}_n)$  из (7).

Пусть  $c \rightarrow \infty$ , при этом  $\tau_2 \rightarrow 0$  так, что

$$6bc\tau_2 \rightarrow \omega_0. \quad (11)$$

Обозначая пределы величин  $z_n, z_{n+1}, \omega_n, \omega_{n+1}$  при  $c \rightarrow \infty$  теми же символами, получим в случае 1), т. е. при  $\delta_2 - \omega_0 > -\delta_1$ ,

$$\begin{cases} \delta_2 = -\delta_2 + 2\omega_0 + 6(-z_n + a\omega_n) \frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} + \\ + 3\omega_n \left( \frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} \right)^2 - 6b(\omega_{n+1} + \omega_n), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \delta_1 = -\delta_2 + \omega_0 + 6(-z_n + a\omega_n) \left( \frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} - \tau_1 \right) + \\ + 3\omega_n \left( \frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} - \tau_1 \right)^2, \end{cases} \quad (13)$$



а в случае 2), т. е. при  $\delta_2 - \omega_0 \leq -\delta_1$

$$\frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} - \tau_1 = 0, \quad (14)$$

$$2\delta_2 = 2\omega_0 + 6(-z_n + a\omega_n)\tau_1 + 3\omega_n\tau_1^2 - 6b(\omega_{n+1} + \omega_n). \quad (15)$$

В случае 1) можно несколько упростить систему, заменив уравнение (12) на уравнение, полученное вычитанием уравнения (12) из уравнения (13):

$$\delta_1 - \delta_2 = -\omega_0 - 6\tau_1 z_{n+1} - 3(2a - \tau_1)\tau_1\omega_n + 6b(\omega_{n+1} + \omega_n). \quad (16)$$

Заметим, что в случае 1)  $t_n > \tilde{t}_n$ , т. е.

$$\frac{z_{n+1} + z_n}{\omega_n} - \tau_1 > 0, \quad (17)$$

а в случае 2) при  $c \rightarrow \infty$   $t_n = \tilde{t}_n$ , что соответствует уравнению (14).

Для отыскания симметричного периодического режима положим в уравнениях (13), (16) (соответственно (14), (15))

$$z_{n+1} = z_n = z, \quad \omega_{n+1} = \omega_n = \omega. \quad (18)$$

В случае 1) получим уравнения

$$\delta_1 - \delta_2 + \omega_0 = 3(2b - a\tau_1 + \tau_1^2)\omega - 6\tau_1 z;$$

$$\delta_1 + \delta_2 - \omega_0 = 3(2a - \tau_1)(2z - \omega\tau_1).$$

Так как в этом случае  $\delta_1 + \delta_2 - \omega_0 > 0$  и  $\frac{2z}{\omega} - \tau_1 > 0$ , то необходимое условие существования периодического режима состоит в выполнении неравенства

$$2a - \tau_1 > 0. \quad (19)$$

При этом условии

$$z - \frac{1}{2}\omega\tau_1 = \frac{\delta_1 + \delta_2 - \omega_0}{6(2a - \tau_1)} \equiv F_0 > 0; \quad (20)$$

$$\omega = \frac{\delta_1 - \delta_2 + \omega_0 + 6\tau_1 F_0}{6(2b - a\tau_1)}. \quad (21)$$

Так как, очевидно,  $\delta_1 - \delta_2 + \omega_0 > 0$ , то вследствие того, что  $\omega > 0$ , необходимо  $2b - a\tau_1 > 0$  (22). Нетрудно проверить, что условия (19), (22) не только необходимы, но и достаточны для существования периодического режима.

Достаточным условием устойчивости данного периодического режима, т. е. существования автоколебаний, является следующее условие: собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial \omega_n} \\ \frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial z_n} & \frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial \omega_n} \end{pmatrix} \quad (23)$$

в точке (18) должны быть по модулю меньше единицы, что, как нетрудно видеть, эквивалентно условиям  $-1 < D < 1$ ,  $-D - 1 <$

$\angle S < D + 1$  (24), где  $D$  — детерминант матрицы  $A$ , а  $S$  — ее след.

Вычисляя эти величины путем дифференцирования (13) и (16) в точке (18), получим

$$D = \left[ \frac{(2a - \tau_1)\tau_1}{2b} - 1 \right] \frac{z - aw}{z + (a - \tau_1)w};$$

$$S = \frac{b(z - aw) + b\tau_1 w - \left(b - \left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)\tau_1\right)(z + aw)}{b(z + (a - \tau_1)w)}.$$

Имеем в силу (19) и (20)

$$z + (a - \tau_1)w = \frac{1}{2}w(2a - \tau_1) + \left(z - \frac{w\tau}{2}\right) > 0.$$

Поэтому неравенство  $-1 < D < 1$  эквивалентно

$$-bz - (a - \tau_1)bw < -\left(b - a\tau_1 + \frac{\tau_1^2}{2}\right)(z - aw) < \\ < bz + (a - \tau_1)bw.$$

Левое из них равносильно

$$0 < (2b - a\tau_1)\left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)w + \frac{\tau_1}{2}(2a - \tau_1)z,$$

а правое —

$$0 < \left(2b - a\tau_1 + \frac{\tau_1^2}{2}\right)z + (2b - a\tau_1)\left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)w,$$

которые ввиду (19), (22) выполняются.

Условие  $-D - 1 < S < D + 1$  равносильно

$$-(2a - \tau_1)\left(bw + \frac{\tau_1}{2}(z - aw)\right) < b(z - aw) + b\tau_1 w - \\ - \left(b - \left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)\tau_1\right)(z + aw) < (2a - \tau_1)\left(bw + \frac{\tau_1}{2}(z - aw)\right).$$

Левое из них дает неравенство

$$0 < (2a - \tau_1)\left(bw + \frac{\tau_1}{2}(z - aw)\right) - (2a - \tau_1)bw + \\ + \left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)\frac{\tau_1}{2}(a - \tau_1)w + \left(a - \frac{\tau_1}{2}\right)\frac{\tau_1}{2}z,$$

или

$$0 < \frac{\tau_1}{2}(2z - \tau_1 w),$$



а правое — неравенство

$$0 < (2a - \tau_1) b\omega - \tau_1 \left( a - \frac{\tau_1}{2} \right) (a - \tau_1) \omega + \\ + (2a - \tau_1) \left( b - \frac{a\tau_1}{2} \right) \omega,$$

или

$$0 < \left( 2b - a\tau_1 + \frac{\tau_1^2}{2} \right) \omega,$$

которые также выполняются. Следовательно, условия (19) и (22) обеспечивают существование автоколебаний, форма которых может быть легко получена с помощью выражений (20), (21).

В случае 2) для нахождения периодического симметричного режима получим из (14), (15) при подстановке (18) уравнения  $2z - \omega\tau_1 = 0$ ;  $2\delta_2 - 2\omega_0 = 6(-z + a\omega)\tau_1 + 3\omega\tau_1^2 - 12b\omega$ , откуда

$$\omega = \frac{-\delta_2 + \omega_0}{3(2b - a\tau_1)}; \quad z = \frac{\omega\tau_1}{2}.$$

Это решение имеет смысл при том же условии (22), так как  $-\delta_2 + \omega_0 \geq \delta_1 > 0$ .

Вычисляя элементы матрицы (23) дифференцированием уравнений (14), (15), получим

$$D = 1 - \frac{\tau_1}{2} \left( a - \frac{\tau_1}{2} \right); \\ \frac{S}{D+1} = \frac{2 - \frac{\tau_1}{b} \left( a + \frac{\tau_1}{2} \right)}{2 - \frac{\tau_1}{b} \left( a - \frac{\tau_1}{2} \right)}.$$

Условия (24) снова приводят к неравенствам (19), (22).

Таким образом, первое из этих условий не требуется для существования периодического режима, но вместе со вторым гарантирует его устойчивость.

В заключение следует заметить, что случай 2) нежелателен, так как приводит к увеличению амплитуды колебаний величины  $\ddot{y}(t)$  (увеличению  $\omega$ ) и увеличению частоты колебаний.

Список литературы: 1. Вовна С. И., Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Си-  
няков В. А. Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу  
автомата вождения самоходной машины. — Вестн. Харьк. ун-та, 1977, № 148.  
Прикл. математика и механика, вып. 42, с. 27—36. 2. Вовна С. И., Подоль-  
ский Е. Н. Автоколебания системы самоходная машина — автомат вождения. —  
Вестн. Харьк. ун-та, 1979, № 177. Прикл. математика и механика, вып. 44,  
с. 11—22.

Поступила в редколлегию 10.04.84.