Серія «Радіофізика та Електроніка» , № 883, вип.15, 2009. С 50-53

УДК 621.574.4

ПОСТРОЕНИЕ МОДОВОГО БАЗИСА ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Н. Легенький, А.Ю. Бутрым
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
E-mail: mlegenkiy@ya.ru
Поступила в редакцию 21 ноября 2009 г.

В статье рассмотрен новый метод построения модового базиса для открытых диэлектрических волноводов, который основывается на применении метода интегральных уравнений. Проанализировано разделение спектра в подобных структурах на дискретную (поверхностные волны) и непрерывную (объемные волны) составляющие. Получено дисперсионное уравнение для мод дискретного спектра и аналитические формулы для вычисления модовых функций дискретного и непрерывного спектра. Приведены примеры модовых функций дискретного и непрерывного спектра. Аналитически показана ортогональность модовых функций и получено выражение для нормировочных функций.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод модового базиса, открытый волновод, собственные моды.

В статті розглянуто новий метод побудови модового базису для відкритих діелектричних хвилеводів, що ґрунтується на застосуванні метода інтегральних рівнянь. Проаналізовано розділення спектру у подібних структурах на дискретну (поверхневі хвилі) і безперервну (об’ємні хвилі) частини. Отримано дисперсійне рівняння для мод дискретного спектру та аналітичні формули для розрахунку модових функцій дискретного та безперервного спектру. Наведено приклади модових функцій дискретного та безперервного спектру. Аналітично показано ортогональність модових функцій та отримано вираз для нормувальних функцій.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод модового базису, відкритий хвилевод, власні моди.

A new method based on integral equation formulation is proposed for construction of mode basis in open dielectric waveguides. Decomposition of the spectrum in such structures into discrete (surface wave) and continuous (volume wave) part is analyzed. Dispersion equation for modes of the discrete spectrum and analytical formulae for calculation of mode functions of the discrete and continuous spectrum have been found. The examples of the discrete and continuous spectrum mode function are shown. Orthogonality of the mode function is demonstrated analytically. The expression for norm function has been found in a closed form.
KEYWORDS: mode basis method, open waveguide, eigenmode.

ВВЕДЕНИЕ

В связи со все более широким использованием в технике сверхширокополосных сигналов актуальным становится решение некоторых теоретических задач электродинамики во временной области. Одной из таких задач является задача о распространении импульсного сигнала в открытом диэлектрическом волноводе. Эта задача возникает при анализе распространения сверхкоротких импульсов в оптических волноводах, а также при рассмотрении излучения импульсов стержневыми антеннами. Для ее решения удобно использовать метод модового базиса (ММБ) [1-4]. Существуют модификации ММБ для анализа полей в закрытых волноводах с неоднородным диэлектриком (дискретный спектр) [1,2] и для анализа полей в свободном пространстве (непрерывный спектр) [3]. Данная статья посвящена анализу структуры, которая обладает как дискретным, так и непрерывным спектром. Анализ удобно провести на примере прямоугольного волновода с диэлектрическим слоем (одна из металлических стенок волновода удалена на бесконечность см. Рис. 1). Ранее в статье [4] были рассмотрены особенности построения модового базиса для таких структур. В данной работе рассмотрим особенности построения модового базиса для данной структуры с помощью интегральных уравнений и отличия от предложенного в [4] подхода.

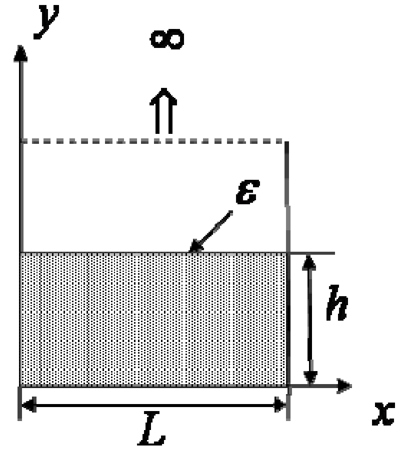

Рис.1. Исследуемая структура

Метод модового базиса основан на неполном разделении переменных, которое применяется к уравнениям Максвелла во временной области. После выделения из уравнений Максвелла оператора дифференцирования по поперечным координатам и доказательства его самосопряженности, получается модовый базис из собственных функций этого оператора, который можно использовать для разложения полей. В результате искомое решение во временной области представляется в виде модового разложения с коэффициентами, зависящими от продольной координаты и времени. Для построения базиса необходимо решить задачу на собственные значения для выделенного оператора дифференцирования по поперечным координатам.

ПОСТРОЕНИЕ МОД ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Для примера построения модового базиса для структуры, изображенной на Рис. 1 рассмотрим задачу на собственные моды для ТЕ-мод. Для рассматриваемой структуры задача может быть сведена к следующей граничной задаче с условиями Неймана на металле (определения функций $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ можно найти в [4])

$$\begin{cases} \nabla_\perp \cdot \varepsilon\left(\vec{r}_\perp\right)^{-1} \nabla_\perp \Phi_m\left(\vec{r}_\perp, p\right) + p_m^2\, \Psi_m\left(\vec{r}_\perp, p\right) = 0 \\ \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp \Psi_m\left(\vec{r}_\perp, p\right) + p_m^2\, \Phi_m\left(\vec{r}_\perp, p\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Используя метод разделения переменных, ищем решение задачи в виде $\Psi = \Psi(x)\Psi(y,p)$. Зависимость от x имеет вид: $\Psi(x) = \cos(\kappa_n x), \quad \kappa_n = \pi n / L_x, \quad n = 0,1,\ldots$. Таким образом, задача сводится к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dy^2} - \dfrac{1}{\varepsilon\left(y\right)}\dfrac{d\varepsilon\left(y\right)}{dy}\dfrac{d}{dy} - \kappa^2\right)\Phi\left(y,p\right) + \varepsilon\left(y\right)p^2\,\Psi\left(y,p\right) = 0 \\ \left(\dfrac{d^2}{dy^2} - \kappa^2\right)\Psi\left(y,p\right) + p^2\,\Phi\left(y,p\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Дальнейшие вычисления проводятся на основании идеи построения базиса для подобных структур, предложенной в [5]. Для потенциалов можно записать следующие интегральные уравнения справедливые при значениях спектрального параметра из интервала $p \in \left[0, \kappa\right]$

$$\begin{cases} \Phi\left(y,p\right) = 0.5\left(\cosh\left(\chi_+ y\right)\left(\Phi\left(0,p\right) - \Psi\left(0,p\right)\right) + \cosh\left(\tilde{\chi}_- y\right)\left(\Phi\left(0,p\right) + \Psi\left(0,p\right)\right)\right) \\ \displaystyle\int_0^y \left(\frac{\sinh\left(\chi_+\left(y-u\right)\right)}{2\chi_+} + \frac{\sinh\left(\tilde{\chi}_-\left(y-u\right)\right)}{2\tilde{\chi}_-}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon\left(u\right)}\frac{d\varepsilon\left(u\right)}{du}\frac{d}{du}\Phi\left(u,p\right) + \left(1-\varepsilon\left(u\right)\right)p^2\,\Psi\left(u,p\right)\right)du \\ \Psi\left(y,p\right) = 0.5\left(\cosh\left(\tilde{\chi}_- y\right)\left(\Phi\left(0,p\right) + \Psi\left(0,p\right)\right) - \cosh\left(\chi_+ y\right)\left(\Phi\left(0,p\right) - \Psi\left(0,p\right)\right)\right) \\ \displaystyle\int_0^y \left(\frac{\sinh\left(\tilde{\chi}_-\left(y-u\right)\right)}{2\tilde{\chi}_-} - \frac{\sinh\left(\chi_+\left(y-u\right)\right)}{2\chi_+}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon\left(u\right)}\frac{d\varepsilon\left(u\right)}{du}\frac{d}{du}\Phi\left(u,p\right) + \left(1-\varepsilon\left(u\right)\right)p^2\,\Psi\left(u,p\right)\right)du \end{cases} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения $\chi_+ = \sqrt{p^2 + \kappa^2}$, $\tilde{\chi}_- = \sqrt{\kappa^2 - p^2}$.Исходя из выражения (3), можно записать выражения для потенциалов вне диэлектрического слоя в виде (для координат y, лежащих вне диэлектрического слоя интегралы в (3) становятся константами)

$$\begin{aligned} \Phi\left(y,p\right) &= \tilde{w}\left(p\right)e^{\tilde{\chi}_- y} + w\left(p\right)e^{-\tilde{\chi}_- y} + \tilde{v}\left(p\right)e^{\chi_+ y} + v\left(p\right)e^{-\chi_+ y} \\ \Psi\left(y,p\right) &= \tilde{w}\left(p\right)e^{\tilde{\chi}_- y} + w\left(p\right)e^{-\tilde{\chi}_- y} - \tilde{v}\left(p\right)e^{\chi_+ y} - v\left(p\right)e^{-\chi_+ y} \end{aligned} \tag{4}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} &\Omega\left(u,p\right) = \frac{1}{\varepsilon\left(u\right)}\frac{d\varepsilon\left(u\right)}{du}\frac{d}{du}\Phi\left(u,p\right) + \left(1-\varepsilon\left(u\right)\right)p^2\,\Psi\left(u,p\right) \\ &4w\left(p\right) = \Phi\left(0,p\right) + \Psi\left(0,p\right) - \int_0^h \frac{e^{\tilde{\chi}_- u}}{\tilde{\chi}_-}\Omega\left(u,p\right)du, 4\tilde{w}\left(p\right) = \Phi\left(0,p\right) + \Psi\left(0,p\right) + \int_0^h \frac{e^{-\tilde{\chi}_- u}}{\tilde{\chi}_-}\Omega\left(u,p\right)du, \\ &4v\left(p\right) = \Phi\left(0,p\right) - \Psi\left(0,p\right) - \int_0^h \frac{e^{\chi_+ u}}{\chi_+}\Omega\left(u,p\right)du, 4\tilde{v}\left(p\right) = \Phi\left(0,p\right) - \Psi\left(0,p\right) + \int_0^h \frac{e^{-\chi_+ u}}{\chi_+}\Omega\left(u,p\right)du \end{aligned} \tag{5}$$

Решение должно удовлетворять условию ограниченности на бесконечности, поэтому должны выполняться следующие условия

$$\begin{cases} \tilde{w}\left(p\right) = 0 \\ \tilde{v}\left(p\right) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Эти условия являются условиями существования дискретного спектра и удовлетворяются только при некотором наборе значений спектрального параметра p из интервала $\left[0, \kappa\right]$. Таким образом, решение вне диэлектрического слоя для дискретного спектра записывается в виде

$$\begin{aligned}\Phi\left(y,p_n\right) &= w\left(p_n\right)e^{-\tilde{\chi}_{n-}y} + v\left(p_n\right)e^{-\chi_{n+}y}\\ \Psi\left(y,p_n\right) &= w\left(p_n\right)e^{-\tilde{\chi}_{n-}y} - v\left(p_n\right)e^{-\chi_{n+}y}\end{aligned} \qquad (7)$$

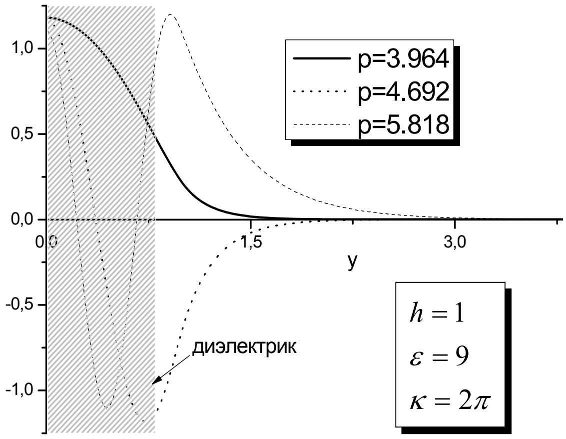

Рис.2. Моды дискретного спектра

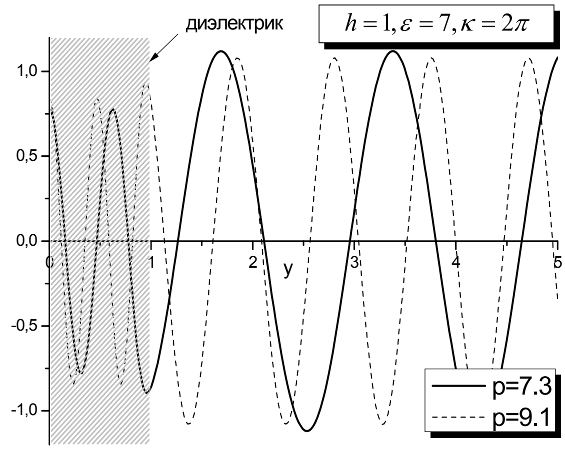

Рис.3. Моды непрерывного спектра

ПОСТРОЕНИЕ МОД НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Для значений спектрального параметра из интервала $p \in [\kappa, +\infty)$ решение также может быть записано в виде (4), но в этом случае $\tilde{\chi}_-$ становится мнимой величиной и вместо него вводиться новый параметр $\tilde{\chi}_- = i\chi_-$, равный $\chi_- = \sqrt{p^2 - \kappa^2}$. В этом случае (4) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\Phi\left(y,p\right) = a\left(p\right)\cos\left(\chi_- y\right) + b\left(p\right)\sin\left(\chi_- y\right) + v\left(p\right)e^{-\chi_+ y}\\ \Psi\left(y,p\right) = a\left(p\right)\cos\left(\chi_- y\right) + b\left(p\right)\sin\left(\chi_- y\right) - v\left(p\right)e^{-\chi_+ y}\end{cases}\\ &2a\left(p\right) = \Phi\left(0,p\right) + \Psi\left(0,p\right) - \int_0^h \frac{\sin\left(\chi_- u\right)}{\chi_-}\Omega\left(u,p\right)du, 2b\left(p\right) = \int_0^h \frac{\cos\left(\chi_- u\right)}{\chi_-}\Omega\left(u,p\right)du\end{aligned} \qquad (8)$$

При этом решение внутри диэлектрического слоя удобно представлять в виде обычного решения дифференциальных уравнений для данной структуры (здесь введены обозначения $\zeta_+ = \sqrt{\sqrt{\varepsilon}p^2 + \kappa^2}$, $\zeta_- = \sqrt{\sqrt{\varepsilon}p^2 - \kappa^2}$)

$$\begin{aligned}\Psi'\left(y,p\right) &= A\left(\zeta_-^2\cosh\left(\zeta_+ y\right) + \zeta_+^2\cos\left(\zeta_- y\right)\right) + B\left(\cosh\left(\zeta_+ y\right) - \cos\left(\zeta_- y\right)\right)\\ \Phi'\left(y,p\right) &= \sqrt{\varepsilon}\left(A\left(\zeta_-^2\cosh\left(\zeta_+ y\right) - \zeta_+^2\cos\left(\zeta_- y\right)\right) - B\left(\cosh\left(\zeta_+ y\right) + \cos\left(\zeta_- y\right)\right)\right)\end{aligned} \qquad (9)$$

Примеры функций дискретного и непрерывного спектра представлены на Рис. 2 и Рис. 3. В формулах (9) A и B - это неизвестные постоянные, которые могут быть определены из условий (6). Подставляя решение в виде (9) в условие (6) можно получить систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений с двумя неизвестными A и B. Эта система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель обращается в ноль. Из этого условия может быть получено дисперсионное соотношение для ТЕ-мод

$$\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 g_- t_+ - \left(1 + \sqrt{\varepsilon}\right)^2 g_+ t_- = 0 \qquad (10)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&g_- = \chi_+\cosh\left(\zeta_+ h\right) - \left(\zeta_+ / \sqrt{\varepsilon}\right)\sinh\left(\zeta_+ h\right), g_+ = \chi_+\cosh\left(\zeta_+ h\right) + \left(\zeta_+ / \sqrt{\varepsilon}\right)\sinh\left(\zeta_+ h\right),\\ &t_- = \chi_-\cos\left(\zeta_- h\right) - \left(\zeta_- / \sqrt{\varepsilon}\right)\sin\left(\zeta_- h\right), t_+ = \chi_-\cos\left(\zeta_- h\right) + \left(\zeta_- / \sqrt{\varepsilon}\right)\sin\left(\zeta_- h\right)\end{aligned} \qquad (11)$$

Также предлагаемый подход позволяет получить аналитическое выражение для норм систем модовых функций. Моды дискретного спектра взаимноортогональны и могут быть пронормированы:

$$\int_S \Psi_n\left(\vec{r}_\perp, p\right)\Phi_m\left(\vec{r}_\perp, p\right)dS = \delta_{nm} \qquad (12)$$

Соотношение ортогональности для мод непрерывного спектра имеют вид

$$\int_S \Psi\left(\vec{r}_\perp, p\right)\Phi\left(\vec{r}_\perp, p'\right)dS = N^2\left(p\right)\delta\left(p - p'\right) \qquad (13)$$

где нормировочная функция может быть найдена исходя из (8) в следующем виде

$$N^2(p) = \frac{\pi}{16}\left(a(p)^2 + b(p)^2\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{\sin(2L\kappa)}{4\kappa}\right) \tag{14}$$

Пример нормировочной функции представлен на Рис. 4.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен новый метод построения модового базиса для открытых оптических волноводов основанный на интегральных уравнениях. Получено дисперсионное соотношение для мод дискретного спектра и аналитические выражения для модовых функций. Вычислена нормировочная функция для этих мод.

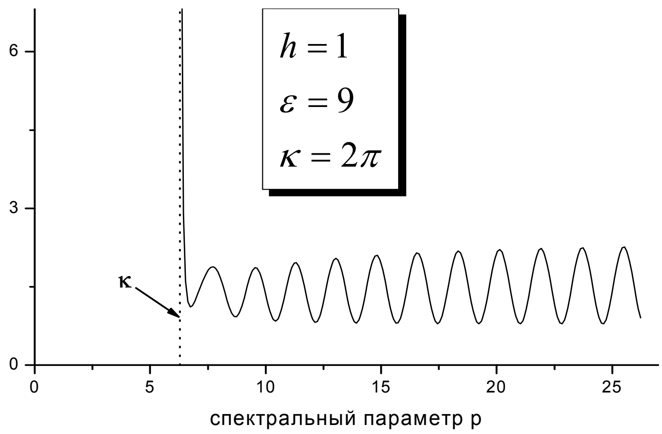

Рис.4. Нормировочная функция

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Третьяков О. А. Метод модового базиса // Радиотехника и электроника. – 1986. – Т. 31, № 6. – С. 1071-1082.
2. Бутрым А. Ю., Третьяков О. А. Модификация метода эволюционных волноводных уравнений для случая поперечно неоднородных волноводов // Вісник Харківського нац. унів. № 544 – “Радіофізика та електроніка”. – 2002. – Вип. 1. – С. 71-74.
3. Третьяков О. А., Думин А. Н. Излучение нестационарных электромагнитных полей плоским излучателем // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 12-22.
4. А.Ю. Бутрим, М.Н. Легенький Метод модового базиса для открытых диэлектрических волноводов, // Вестник ХНУ № 806, 2008 г. , с. 44-47.
5. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. Введение в теорию // М. Наука. 1969г. 191 с.
6. S.V. Boriskina, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich, "Highly efficient full-vectorial integral equation solution for the bound, leaky, and complex modes of dielectric waveguides", IEEE J. on Selected Topics in Quantum Electronics, 2002, vol. 8, no 6, pp. 1225-1232.
7. Rudzinski A. Orthonormalization of Radiation Modes in Effective Resonator Model of Dielectric Multilayer Structure. // Acta Physica Polonica A, vol. 112, no. 3. 2007, pp. 495-504.
8. Papakonstantinou I.,James R. and Selviah D. Radiation- and Bound Mode Propagation in Rectangular, Multimode Dielectric, Channel Waveguides With Sidewall Roughness, // Journal of Ligthwave Technology, vol. 27. no. 18, September 15, 2009, pp. 4151-4163.
9. Плещинский И. Н. и Плещинский Н.Б.Интегральные уравнения задачи сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов, // Известия ВУЗов «Математика» №5, 2007г. с. 63-80.