УДК 519.215

А. М. УЛАНОВСКИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕРЫ ПО СУЖЕНИЮ ЕЕ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК НА МАССИВНОЕ МНОЖЕСТВО

1. Обозначим $M(\boldsymbol{R})$, $P(\boldsymbol{R})$ — соответственно множества всех конечных комплекснозначных борелевских и вероятностных мер на прямой $\boldsymbol{R}$; μ^n — n-кратная свертка меры μ; $\mu|_E$ — сужение μ на множество E.

В 70-х годах возникла область, изучающая меры, однозначно определяющиеся сужением на массивное множество (см. [1, 2] и указанную там литературу). В ряде работ были указаны случаи, когда меры из $M(\boldsymbol{R})$ и $P(\boldsymbol{R})$ однозначно определяются по сужению их n-кратной свертки на полупрямую. Приведем наиболее общий результат в этом направлении, принадлежащий И. В. Островскому.

Теорема А [3]. *Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число; меры μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ удовлетворяют условиям:*

(A) $\inf \operatorname{supp} \mu = -\infty$;

(B) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln\{1/|\mu|((-\infty, -r))\} = \infty$; $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln\{1/|\nu|((-\infty, -r))\} = \infty$. *Справедлива импликация:*

$$(\exists a: \mu^n|_{(-\infty,-a)} = \nu^n|_{(-\infty,-a)}) \Rightarrow (\mu = \varepsilon\nu),$$

где ε — некоторый корень n-й степени из единицы.

Отметим [3], что ограничения (A) и (B) в теореме А ослабить нельзя. Возникает вопрос: можно ли произвольную меру μ определить по сужению на полупрямую ее нескольких n-кратных сверток? Для вероятностных мер этот вопрос можно переформулировать так. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\Sigma_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ — случайные блуждания на $\boldsymbol{R}$, распределения которых совпадают на полупрямой при некоторых n. Когда отсюда следует, что распределения X_1 и Y_1 совпадают всюду? Частичный ответ дает следующая

Теорема 1. *а) Пусть μ, $\nu \in P(\boldsymbol{R})$; $T = \{1, n_1, n_2, \ldots\}$ — бесконечное подмножество натуральных чисел, содержащее единицу. Справедлива импликация:*

$$(\mu|_{(-\infty,0)} \neq 0;\ \mu^n|_{(-\infty,0)} = \nu^n|_{(-\infty,0)},\ n \in T) \Rightarrow (\mu = \nu). \qquad (1)$$

б) Пусть μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$; $T = \{1, 2, n_2, \ldots\}$ — бесконечное подмножество натуральных чисел, содержащее единицу и двойку. Справедлива импликация (1).

Покажем, что, вообще говоря, вероятностная мера не определяется по любому фиксированному числу сужений $\mu^n|_{(-\infty,0)}$.

Пример 1. *Пусть N — произвольное натуральное число. Обозначим c_K — коэффициенты в разложении*

$$z(1+z)^N (1-z)^{-N-1} = \sum_{k=0}^{N+1} c_k (1-z)^{-k},$$

$I = \{k : c_k > 0\}$. *Положим*

$$f_1(t) = \sum_{k \in I} \frac{c_k}{(1-it)^k} \Big(\sum_{k \in I} c_k\Big)^{-1}; \quad f_2(t) = -\sum_{k \notin I} \frac{c_k}{(1-it)^k} \Big(\sum_{k \in I} c_k\Big)^{-1}.$$

Очевидно, функции $\hat{\mu}(t) = (1+it)^{-1} f_1$, $\hat{\nu}(t) = (1+it)^{-1} f_2(t)$ являются преобразованиями Фурье вероятностных мер μ, ν и $\mu|_{(-\infty, 0)} \neq 0$. Замечая, что $f_1(t) - f_2(t) = it(1+it)^N (1-it)^{-1-N}$, $(\sum_{k \in I} c_k)^{-1}$, имеем

$$\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = \frac{f_1^n(t) - f_2^n(t)}{(1+it)^n} = \frac{it(1+it)^{N-n}}{(1-it)^{N+1}} \{f_1^{n-1}(t) + \ldots + f_2^{n-1}(t)\}.$$

Функция $it(1+it)^{N-n}(1-it)^{-1-N}$ при $n \leqslant N$ и функции $f_j(t)$ являются преобразованиями Фурье мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Значит, это же верно и для разности $\hat{\mu}^n - \hat{\nu}^n$. Следовательно, $\mu^n|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)}$ при $n = 1, 2, \ldots, N$, но $\mu \neq \nu$.

Таким образом, для определения вероятностной меры μ необходимо знать бесконечно много сужений $\mu^n|_{(-\infty, 0)}$, $n \in T$. Ввиду п. а) теоремы 1 это является и достаточным условием, если только $1 \in T$. В отличие от вероятностных, комплекснозначные меры μ, вообще говоря, не определяются по бесконечному числу сужений $\mu^n|_{(-\infty, 0)}$, $n \in T = \{1, n_1, \ldots\}$, если только $2 \notin T$.

Пример 2. *Положим*

$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{i}{1-i}\left(\dfrac{1-e^{it}}{t}\right)^2, & |t| < 2\pi, \\ \left(-1 - \dfrac{i}{1-i}\right)\left(\dfrac{1-e^{it}}{t}\right)^2, & |t| > 2\pi \end{cases}; \quad \hat{\mu}(t) = \hat{\nu}(t) + \left(\frac{1-e^{it}}{t}\right)^2.$$

Поскольку функции $\hat{\mu}(t)$, $\hat{\nu}(t)$, $\hat{\mu}'(t)$, и $\hat{\nu}'(t)$ лежат в $L^2(\boldsymbol{R})$, то, очевидно, $\hat{\mu}$ и $\hat{\nu}$ есть преобразования Фурье некоторых мер μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$. Замечая, что при всех натуральных $n \neq 4k+2$ выполняется

$$\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - \left(\frac{i}{1-i}\right)^n = \left(-\frac{i}{1-i}\right)^n \left(-1 - \frac{i}{1-i}\right)^n,$$

получаем

$$\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = \left[\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - \left(\frac{i}{1-i}\right)^n\right]\left(\frac{1-e^{it}}{t}\right)^{2n} = \frac{1-i^n}{(1-i)^n}\hat{\chi}^{2n}(t),$$

где $\chi = \chi(E) = \int\limits_{E \cap (0,1)} dx$. Значит, $\mu^n|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)}$ при всех $n \neq 4k+2$, но $\mu \neq \nu$.

Пример 3. *Положим* $\hat{\mu}(t) = \sqrt{2e^{it} - 1} + 1$; $\hat{\nu}(t) = \sqrt{2e^{it} - 1} - 1$. *Легко видеть, что* μ, ν *являются преобразованиями Фурье некоторых мер* μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и* $\mu|_{(-\infty, 0)} \neq 0$. *При всех* $n = 2k+1$ *имеем* $\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = 2\sum C_{2k}^{2s}(2e^{it} - 1)^{k-s}$ — *преобразование Фурье меры, сосредоточенной на* $[0, \infty]$. *Следовательно,* $\mu^n|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)}$ *при всех* $n = 2k+1$, *но* $\mu \neq \nu$.

В связи с теоремой А и теоремой 1 возникает вопрос: пусть мера удовлетворяет некоторым, более слабым, чем в теореме А,

ограничениям. Для каких множеств T мера μ определяется по сужениям $\mu^n|_{(-\infty, 0)}$, $n \in T$? Приведем два результата в этом направлении.

Теорема 2. *Пусть* $\mu, \nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и выполнено условие (C). Найдется равномерно непрерывная на* $(-\infty, -1)$ *функция* $K(x) \geqslant 0$, *такая, что* $\int\limits_{-\infty}^{-1} x^{-2} K(x)\, dx = \infty$, $\int\limits_{(-\infty, 1)} \exp\{K(x)\}\, d|\mu|(x) < \infty$. *Импликация 1 справедлива для любого бесконечного подмножества* $T = \{1, n_1, n_2, \ldots\}$, *содержащего хотя бы одно четное число.*

Условие (C) означает, что либо вариация μ достаточно быстро убывает на $-\infty$ (но медленнее, чем в условии (B)), либо массы μ имеют «большие» лакуны при $x \to -\infty$. Легко видеть, что мера μ в примере 3 удовлетворяет условию (C) с $K(x) = r|x|$ при $r < \ln 2$. Следовательно, условие теоремы 2 «множество T содержит хотя бы одно четное число» ослабить нельзя.

Следующий результат указывает ограничение на меру μ, при котором две свертки μ^n и μ^m определяются по сужениям.

Теорема 3. *Пусть* $\mu, \nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и выполнено условие (D). Внутренность множества* $\{t \in \boldsymbol{R} : \hat{\mu}(t) = 0\}$ *пуста и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{-2} \ln |\hat{\mu}(t)|\, dt = -\infty.$$

Для любых $1 \leqslant n < m$ *справедлива импликация*

$$(\mu^n|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)},\ \mu^m|_{(-\infty, 0)} = \nu^m|_{(-\infty, 0)}) \Rightarrow (\mu^n = \nu^n,\ \mu^m = \nu^m). \quad (2)$$

Отметим, что условию (D) удовлетворяет широкий класс мер, в частности, невырожденная гауссова мера Φ. Пример $\hat{\nu} = (2 + \hat{\Phi}^n)^{1/n}$, $\nu^n - \Phi^n = 2\delta$, где δ — единичная мера, сосредоточенная в нуле, показывает, что Φ не определяется по сужению одной n-кратной свертки в классе $M(\boldsymbol{R})$ (Φ определяется по сужению $\Phi^n|_{(-\infty, 0)}$ в классе $P(\boldsymbol{R})$).

2. Введем обозначения: $C[z_1, \ldots, z_n]$ — кольцо всех многочленов с комплексными коэффициентами от переменных $z_1, \ldots, z_n$; $C(S_1, \ldots, S_n)$, $S_j \in C[z]$, — поле рациональных функций вида $R_1(S_1(z), \ldots, S_n(z))/R_2(S_1(z), \ldots, S_n(z))$; $R_1, R_2 \in C[z_1, \ldots, z_n]$. В дальнейшем через $P_k(z)$ обозначаем многочлен $P_k(z) = (1 + z)^k - z^k$.

Для доказательств теорем понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $S, R_n, R_m \in C[z]$ *удовлетворяют тождествам*

$$P_j(z) \equiv R_j(S(z)); \quad j = n, m; \quad 1 < n < m. \quad (3)$$

Тогда $\deg S \leqslant 2$. *Если к тому же одно из чисел* n, m — *четно, то* $\deg S = 1$.

Доказательство. Поскольку $m > n$, то $\deg R_m \geqslant 2$. Дифференцируя (3), имеем $P_m' = R_m'(S)\, S'$, $\deg R_m' \geqslant 1$. Пусть $R_m'(z_0) = 0$. Обозначим z_j, $j = 1, 2, \ldots$ — корни уравнения $S(z) = z_0$. Многочлен $P_m'(z) = m[(1 + z)^{m-1} - z^{m-1}] = R_m'(S) \cdot S'$ не имеет кратных корней.

Поэтому $S'(z_j) \neq 0$, т. е. уравнение $S(z) = z_0$ имеет ровно $\deg S$ различных корней z_j. В точках z_j выполнены равенства

$$(z_j + 1)^{m-1} - z_j^{m-1} = \frac{1}{m} R_m'(S(z_j)) S'(z_j) = 0;$$

$$(z_j + 1)^m - z_j^m = R_m(S(z_j)) = R_m(S(z_0)) = (z_k + 1)^m - z_k^m.$$

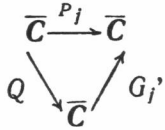
Отсюда $(z_j + 1)^m = (z_j + 1) z_j^{m-1}$; $(z_j + 1)^m - z_j^m = z_j^{m-1} = z_k^{m-1}$. Таким образом, $|z_j + 1| = |z_j| = |z_k|$. Значит, окружности в комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| = |z_1|\}$ и $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| = |z_1 + 1|\}$ имеют пересечения в точках z_j, $j = 1, \ldots, \deg S$, что возможно только если $\deg S \leqslant 2$.

Из (3) видно, что $n - 1 = \deg P_n = \deg R_n \deg S$; $m - 1 = \deg P_m = \deg R_m \deg S$. Значит, если одно из чисел n, m — четно, то $\deg S$ — нечетно, т. е. $\deg S = 1$.

Лемма 2. *Для любых натуральных чисел $1 < n < m$ найдутся многочлены $Q_1, Q_2 \in C[z_1, z_2]$, такие, что $(z^2 + z) Q_1(P_n(z), P_m(z)) \equiv \equiv Q_2(P_n(z), (P_m(z))$. Если к тому же хотя бы одно из чисел n, m — четно, то многочлены $Q_1, Q_2 \in C[z_1, z_2]$ можно выбрать так, что $Q_1(P_n(z), P_m(z)) \equiv Q_2(P_n(z), P_m(z))$.*

Доказательство леммы опирается на теорему Люрота [4, с. 252], в силу которой для любого поля $C(S_1, \ldots, S_k)$, $S_j \in C[z]$, найдется рациональная функция $S \in C(z)$, такая, что $C(S_1, \ldots, S_k) = C(s)$. В частности, $C(P_n, P_m) = C(Q)$, $\exists Q \in C(z)$, откуда $P_n, P_m \in C(Q)$. Следовательно, найдутся $G_j \in C(z)$, такие, что $P_j = G_j(Q)$, $j = n, m$.

Для любого обратимого дробно-линейного преобразования $S = (b_0 Q + b_1)(b_2 Q + b_3)^{-1}$ имеем $C(S) = C(Q)$, при этом равенства $P_j = G_j(Q)$ переходят в равенства $P_j = R_j(S)$, $\exists R_j \in C(z)$. Покажем, что найдется такое дробно-линейное преобразование $S = S(Q)$, что S, R_n и R_m будут многочленами. Рассмотрим диаграмму:



где $\overline{C}$ — замкнутая комплексная плоскость (сфера Римана). Рациональная функция отображает $\overline{C}$ на себя, т. е. каждая точка в $\overline{C}$ имеет непустой прообраз. Поэтому из равенств $\{\infty\} = \{P_j^{-1}\{\infty\}\} = \{Q^{-1}\{G_j^{-1}\{\infty\}\}\}$ следует, что полный прообраз $\{G_j^{-1}\{\infty\}\}$ содержит ровно одну точку a_j, $j = n, m$. Кроме того, $\{\infty\} = \{Q^{-1}\{a_n\}\} = \{Q^{-1}\{a_m\}\}$, откуда $a_n = a_m$. Предположим, что $a_n = \infty$. Это означает, что Q, G_n и G_m не имеют полюсов, т. е. являются многочленами. Если же $a_n \neq \infty$, то положим $S = (Q - a_n)^{-1}$. Тогда $P_j = R_j(S)$, $\exists R_j \in C(z)$. Поскольку $\{S^{-1}\{\infty\}\} = \{Q^{-1}\{a_n\}\} = \{\infty\}$, то и $\{R_j^{-1}\{\infty\}\} = \{\infty\}$, $j = n, m$. Значит, S, R_n, $R_m \in C[z]$.

Таким образом, выполняются условия леммы 1, в силу которой $S(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$. Поскольку $S \in C(S) = C(P_n, P_m)$, то найдутся S_1, $S_2 \in C[z_1, z_2]$, такие, что $\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \equiv S_1(P_n(z), P_m(z))/S_2 \times \times (P_n(z), P_m(z))$, откуда $(\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z) S_2(P_n(z), P_m(z)) \equiv S_1(P_n(z),$

$P_m(z)) = \alpha_0 S_2(P_n(z), P_m(z))$. Если одно из чисел n, m — четно, то, ввиду леммы 1, $\deg S = 1$, т. е. $\alpha_2 = 0$ и второе из утверждений в лемме 2 доказано. Пусть оба числа n, m — нечетны. Поскольку для нечетных j выполняется $P_j(z) = P_j(-1-z)$, то имеем $\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z \equiv \alpha_2 (-1-z)^2 - \alpha_1 (1+z)$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2$, что доказывает первое утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $\mu, \nu \in M(R)$ *и пусть* $0 > \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. *Импликация (1) справедлива для любого бесконечного множества* $T = \{1, n_1, \ldots\}$.

Доказательство. Обозначим $a = \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Поскольку $\mu|_{(-\infty, 0)} = \nu|_{(-\infty, 0)}$, то $\inf \operatorname{supp} (\mu - \nu) \geqslant 0$ и для любого $\varepsilon \neq 1$, $\inf \operatorname{supp} (\mu - \varepsilon\nu) = a$. В силу теоремы Титчмарша «о свертках», при $j \in T$ имеем

$$0 \leqslant \inf \operatorname{supp} (\mu^j - \nu^j) = \inf \operatorname{supp} [(\mu - \nu)(\mu - \varepsilon_{j1}\nu) \ldots (\mu - \varepsilon_{jj-1}\nu)] =$$

$$= \inf \operatorname{supp} (\mu - \nu) + \sum_{k=1}^{j-1} \inf \operatorname{supp} (\mu - \varepsilon_{jk}\nu), \quad \varepsilon_{jk} = \exp\{2\pi i k/j\},$$

откуда $\inf \operatorname{supp} (\mu - \nu) \geqslant -(j-1)a$. Устремляя $j \to \infty$, $j \in T$, получаем $\inf \operatorname{supp} (\mu - \nu) = \infty$, $\mu = \nu$.

Лемма 4. *Пусть преобразование Фурье* $\hat{\mu}$ *меры* $\mu \in M(R)$ *представляется в виде* $\hat{\mu}(t) = (h_1/h_2)(t)$, $t \in R$, *где* h_1, h_2 — *аналитические ограниченные в полуплоскости* $C_+ = \{t \in C : \operatorname{Im} t > 0\}$ *непрерывные в* $C_+ \cup R$ *функции, частное которых аналитично в* C_+. *Тогда* $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$.

Доказательство. Для любой функции h, аналитической и ограниченной в C_+, найдутся [5] постоянная $a > 0$ и открытое множество $E \subset (1, \infty)$, $\int_E r^{-1} dr < \infty$, для которых оценка $|h(z)| \leqslant \exp\{-a|z|\}$ выполняется при $z \in C_+$, $|z| \notin E$. Следовательно, справедлива оценка $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant \exp\{b|z|\}$, $\exists b$, $z \in C_+$, $|z| \notin E_1$, $\int_{E_1} r^{-1} dr < \infty$. Множество E_1 может содержать лишь конечное число интервалов $(N, 2N)$, поэтому из аналитичности в C_+ функции h_1/h_2 и принципа максимума получаем оценку $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant c \exp\{c|z|\}$ $\exists c$, $z \in C_+$. Отсюда видно, что функция $\exp\{icz\}(h_1/h_2)(z)$ ограничена на мнимом луче, а ввиду $\exp\{icz\}(h_1/h_2)(z) = \exp\{icz\}\hat{\mu}(z)$, $z \in R$, — и на вещественной оси. Значит, по принципу Фрагмена — Линделефа [6, с. 67], эта функция ограничена в C_+, что влечет оценку $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant d \exp\{d \operatorname{Im} z\}$, $\exists d > 0$. Отсюда стандартным образом показывается, что $\mu|_{(-\infty, -d)} = 0$.

Доказательство теоремы 1. а) Докажем такое, эквивалентное п. а) утверждение. Пусть $\mu, \nu \in P(R)$; $T = \{1, n_1, \ldots\}$ — бесконечное множество. Тогда справедлива импликация

$$(\mu \neq \nu;\ \mu^j|_{(-\infty, 0)} = \nu^j|_{(-\infty, 0)},\ j \in T) \Rightarrow (\mu|_{(-\infty, 0)} = 0). \qquad (4)$$

Рассмотрим два случая: (*i*) множество T не содержит ни одного четного числа; (*ii*) множество T содержит четное число n.

(*i*) Положим $\chi_j = \nu^j - \mu^j$, $j \in T$. Поскольку $\chi_j|_{(-\infty, 0)} = 0$, то преобразование Фурье $\hat{\chi}_j(t)$ аналитически продолжается в C_+ и ограни-

ено там. Замечая, что $\chi_1 = \nu - \mu \neq 0$, $\chi_j = \nu^j - \mu^j = (\mu + \chi_1)^j - \mu^j$, олучаем равенство

$$(\hat{\chi}_j/\hat{\chi}_1^j)(t) = (1 + (\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)(t))^j - (\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)^j(t) = P_j((\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)(t)), \qquad (5)$$

оторое выполняется в точках $t \in \boldsymbol{R}$, $\hat{\chi}_1(t) \neq 0$. Условимся для кратости иногда опускать аргумент в записи функций, считая, что авенства выполняются в точках непрерывности. Ввиду леммы 2 при $1 < n < m$; n, $m \in T$ выполняется

$$\left[\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)^2 + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right] Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = Q_2\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right) P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right),\ \exists Q_1,\ Q_2. \qquad (6)$$

Іскажем, что

$$Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) \not\equiv 0. \qquad (7)$$

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_N$ — корни многочлена $Q_1(P_n(z), P_m(z))$. Тогда

$$Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = \beta \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\mu}{\hat{\chi}_1} - \beta_k\right) = \beta\chi_1^{-N} \prod_{k=1}^{N}(\hat{\mu} - \beta_k\chi_1).$$

Поскольку μ, ν — вероятностные меры, то $\hat{\mu}(0) = \hat{\nu}(0) = 1$, $\hat{\chi}_1(0) = \hat{\nu}(0) - \hat{\mu}(0) = 0$. По граничной теореме единственности для аналитических в $\boldsymbol{C}_+$ и непрерывных в $\boldsymbol{C}_+ \cup \boldsymbol{R}$ функций найдется последовательность $t_k \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}$, такая, что $\hat{\chi}_1(t_k) \neq 0$. Поэтому, $\prod_{k=1}^{N}(\hat{\mu}(t_k) - \beta_k\hat{\chi}_1(t_k)) \neq 0$ при достаточно малых t_k, что доказывает (7).

Из (5), (6) и (7) получаем

$$\left[\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)^2 + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right] = Q_2\left(P_n\left(\frac{\mu}{\hat{\chi}_1}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\chi_1}\right)\right) \Big/ Q_1\left(P_n\left(\frac{\mu}{\hat{\chi}_1}\right),\ P_m\left(\frac{\mu}{\hat{\chi}_1}\right)\right) =$$

$$= Q_2\left(\frac{\chi_n}{\chi_1^n},\ \frac{\chi_m}{\hat{\chi}_1^m}\right) \Big/ Q_1\left(\frac{\hat{\chi}_n}{\hat{\chi}_1^n},\ \frac{\chi_m}{\hat{\chi}_1^m}\right).$$

Отсюда

$$\hat{\mu} = -\frac{\hat{\chi}_1}{2} \pm \frac{\hat{\chi}_1}{2}\sqrt{1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n,\ \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)};$$

$$\hat{\nu} = \frac{\hat{\chi}_1}{2} \pm \frac{\chi_1}{2}\sqrt{1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n,\ \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)}.$$

Таким образом, при нечетных $j = 2k + 1 \in T$ получаем

$$\hat{\chi}_j = \hat{\nu}^j - \hat{\mu}^j = \chi_1^j 2^{1-j} \sum_{s=0}^{k} C_j^{2s}(1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n,\ \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m).$$

Так как $\hat{\chi}_j$ — аналитичны в $\boldsymbol{C}_+$, $j \in T$, то функция $(\hat{\mu} + \nu)^2 = \hat{\chi}_1^2(1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n,\ \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)$ — мероморфна в $\boldsymbol{C}_+$. Предположим, что она имеет полюс в точке $z_0 \in \boldsymbol{C}_+$. Обозначим $p \geqslant 0$ — кратность нуля χ_1 в точке z_0. Тогда, очевидно, функция χ_j должна иметь в точке z_0 полюс кратности $\geqslant k - p = (j-1)/2 - p$, что при $j > 2p + 1$ противоречит аналитичности χ_j. Следовательно, функция

$(\hat{\mu}+\hat{\nu})^2$, а, значит, [6, гл. 11, § 2], и функции $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ аналитичны в C_+. Отсюда следует [6, гл. 11, § 2], что μ и ν удовлетворяют условию (B) теоремы A. Если бы было $\inf \operatorname{supp} \mu = -\infty$, то ввиду теоремы A было бы $\mu = \nu$, что противоречит сделанному предположению $\mu \neq \nu$; то же, в силу леммы 3, происходит, если $0 > \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Таким образом, в случае (*i*) импликация (4) доказана.

(*ii*) Пусть $m > n$, $m \in T$. Ввиду леммы 2, (5) и (7), получаем

$$\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1} = (Q_2/Q_1)\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = (Q_2/Q_1)\left(\frac{\hat{\chi}_n}{\hat{\chi}_1^n},\ \frac{\hat{\chi}_m}{\hat{\chi}_1^m}\right), \tag{8}$$

откуда $\hat{\mu} = \hat{\chi}_1 (Q_2/Q_1)(\chi_n/\chi_1^n,\ \chi_m/\chi_1^m)$. Как и в случае (*i*), показываем, что $\hat{\mu}$ и ν — аналитичны в C_+ и затем, что верна импликация (4).

Для доказательства п. б) теоремы 1 покажем, что импликация (4) верна для любых $\mu,\ \nu \{ M(R)$ и бесконечного множества $T = \{1, 2, n_2, \ldots\}$. Действительно, из $\chi_1 = \nu - \mu$, $\chi_2 = \nu^2 - \mu^2 = (\chi_1 + \mu)^2 - \mu^2$ получаем, что $\hat{\mu} = (\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1^2)/2\hat{\chi}_1$. Отсюда, как и в случае а), получаем, что функция $(\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1^2)/2\chi_1$ аналитична в C_+. Поэтому из леммы 4 следует, что $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Применение леммы 3 завершает доказательство.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать (4) для $\mu,\ \nu \in M(R)$, где μ удовлетворяет условию (C), и бесконечного множества $T = \{1, 2, \ldots\}$, содержащего некоторое четное число n. Докажем справедливость (7) для любых $m > n$, $Q_1 \in C[z_1, z_2]$. По известной теореме из [7, с. 251], если ненулевая мера μ удовлетворяет условию (C), то ее преобразование Фурье не обращается в нуль ни на каком интервале. Поскольку $\chi_1|_{(-\infty, 0)} = 0$, то условию (C) удовлетворяют все меры $\mu - \beta_k \chi_1$, где β_k — нули $Q_1(P_n(z), P_m(z))$. Отсюда и из леммы 2 получаем (8). Далее рассуждаем, как при доказательстве п. б) теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что теорема неверна, т. е. одна из мер $\chi_n = \nu^n - \mu^n$, $\chi_m = \nu^m - \mu^m$ — ненулевая. Из равенств $\nu^{nm} = (\chi_n + \mu^n)^m = (\chi_m + \mu^m)^n$ получаем $0 = (\chi_n + \mu^n) - (\chi_m + \mu^m)^n = \sum \varphi_j \mu^j$, где через φ_j обозначены соответствующие ненулевые меры в разложении $(\chi_n + \mu^n)^m - (\chi_m + \mu^m)^n$. Поскольку $\chi_n|_{(-\infty, 0)} = \chi_m|_{(-\infty, 0)} = 0$, то и $\varphi_j|_{(-\infty, 0)} = 0$. Ввиду [7, с. 30], $\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} |\ln|\hat{\varphi}_j(t)|| < \infty$. Поэтому из условия (*D*) следует, что на некоторой последовательности $t_k \in R$, $|t_k| \to \infty$, выполняется $|\ln| \times \Pi\varphi_j(t_k)|| = o|\ln|\hat{\mu}(t_k)||$, $k \to \infty$. Значит, при $j > l$ имеем $(\hat{\varphi}_j \hat{\mu}^j) \times (t_k) = o((\hat{\varphi}_l \hat{\mu}^l)(t_k))$, $k \to \infty$, что противоречит тождеству $\sum \hat{\varphi}_j \mu^j \equiv 0$.

Замечание. Пусть $M(R_+)$ — подкласс $M(R)$ мер, сосредоточенных на $[0, \infty]$. Будем говорить, что мера $\mu \{ M(R)$ трансцендентна над $M(R_+)$, если из любого равенства $\sum_{j=0}^{N} \varphi_j \mu^j = 0$ $\varphi_j \in M(R_+)$, следует, что все $\varphi_j = 0$. При доказательстве теоремы 3 было показано факти-

чески, что если μ удовлетворяет условию (D), то μ трансцендентна над $M(\boldsymbol{R}_+)$. Оказывается, теорему 3 можно усилить следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $\mu, \nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и пусть* μ *трансцендентна над* $M(\boldsymbol{R}_+)$. *Тогда справедлива импликация (2).*

Доказательство. Из равенств $\chi_n = \nu^n - \mu^n$, $\chi_m = \nu^m - \mu^m$ вытекает, что $0 = (\mu^n + \chi_n)^m - (\mu^m + \chi_m)^n$. Если хотя бы одна из мер χ_n, $\chi_m \neq 0$, то были бы ненулевые меры φ_j в разложении $(\mu^n + \chi_n)^m - (\mu^m + \chi_m)^n = \sum \varphi_j \mu^j$, что, ввиду $\varphi_j \in M(\boldsymbol{R}_+)$ противоречит трансцендентности μ над $M(\boldsymbol{R}_+)$.

Список литературы: 1. *Rossberg H.-J, Jesiak B., Siegel G.* Analytical methods of probability theory. Berlin, 1984. 120 S. 2. *Островский И. В., Улановский А. М.* Классы комплекснозначных борелевских мер, в которых имеет место однозначная определенность сужениями//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1989. **170**. С. 233—253. 3. *Ostrovsky T. V.* Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restriction to a half-line//Lecture Notes in Math. 1985. **1155**. P. 256—283. 4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М., 1979. 80 с. 5. *Hayman W.* K. Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle//J. Math. Pures Appl. (9). 35. 1956. P. 115—126. 6. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 110 с. 7. *Louis de Brangec.* Hilbert spaces of entire functions. Prentice—Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1968. 76 p. 8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 350 с.

Поступила в редколлегию 11.12.90