

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я. И. Житомирский

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + \sum_{j=0}^{p-1} C_j(x) D_x^{p-j-1} u(x, t) \quad (1)$$

где $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, $P_0\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — многочлен от $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ с постоянными коэффициентами порядка p и уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \quad (2)$$

корректно по И. Г. Петровскому [1], т. е.

$$P_0(s) = i[a_0 s^p + a_1 s^{p-1} + \dots + a_p] + \sum_{k=0}^h b_k s^{h-k}, \quad (3)$$

где $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_h$ — действительные числа, $h \geq 0$ — четное число; при $h > 0$ $b_0 < 0$.

К уравнению (1) присоединим начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты $c_j(x)$ ($j = 0, \dots, p-1$) и их производные до порядка $M - p + 2$ удовлетворяют условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{r_j} c_j(x)| (1 + |x|^2)^2 dx < \infty \quad (5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{p-2}{2(p-1)} & \text{при } h = 0 \\ \frac{p-h-1}{p-1} & \text{при } p > h > 0 \\ 0 & \text{при } p = h \end{cases}$$

$r_j = 0, 1, \dots, M - p + 2$ при $1 \leq j \leq p-1$ и $r_0 = 0, \dots, M+1$.

Тогда, если функции $c_0(x)$ и $u_0(x)$ и их производные достаточно высоких порядков ограничены по абсолютной величине, то в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T < \infty$ существует единственное решение $u(x, t)$

задачи Коши (1) — (4), имеющее производные по x до порядка M , удовлетворяющие оценкам:

$$|D_x^r u(x, t)| \leq \begin{cases} c & \text{при } 0 \leq r \leq [r_1] \\ c(1 + |x|^{\alpha_r}) & \text{при } r_1 < r \leq p-2 \\ c(1 + |x|^{\alpha}) & \text{при } p-2 < r \leq M, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$r_1 = \begin{cases} \frac{p-2}{2} & \text{при } h=0 \\ h-1 & \text{при } p > h > 0; \\ p-2 & \text{при } p=h \end{cases} \quad \alpha_r = \frac{r-r_1}{p-1}.$$

Это решение непрерывно зависит от начальной функции в том смысле, что постоянная c в оценках (6) может быть заменена любым числом $\varepsilon > 0$, если начальная функция $u_0(x)$ и ее производные до некоторого порядка удовлетворяют условиям $|D_x^r u_0(x)| < \delta(\varepsilon)$.

Доказательство. Заменяем в уравнении (1) искомую функцию $u(x, t)$ по формуле

$$u(x, t) = v(x, t) \cdot \omega(x), \quad (7)$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{i^{p-1}}{a_0 p} \int_0^x c_0(x) dx \right\} & \text{при } h < p \\ \exp \left\{ -\frac{i^p}{(ia_0 + b_0)p} \int_0^x c_0(x) dx \right\} & \text{при } h = p. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = P_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x, t) + \sum_{l=0}^{p-2} d_l(x) D_x^l v(x, t), \quad (8)$$

где

$$d_e(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{k=0}^{p-1-l} a_{kl}(x) D_x^{p-k-l} \omega(x),$$

а каждый коэффициент $a_{kl}(x)$ линейно выражается через коэффициент $c_{k-1}(x)$. Заметим, что выражения $\frac{1}{\omega(x)} D_x^j \omega(x)$ ($j = 1, \dots, p$) являются полиномами от p переменных $c_0(x), \dots, D_x^{p-1} c_0(x)$ степени, не выше p , и не содержат свободного члена. В силу предположения теоремы относительно функции $c_0(x)$, выражения $\frac{1}{\omega(x)} D_x^j \omega(x)$ ($j = 1, \dots, p$) и их производные достаточно высоких порядков равномерно ограничены по абсолютной величине на всей прямой. Кроме того, условия (5) при $j=0$ позволяют заключить, что эти выражения и их производные до порядка $M - p + 2$ удовлетворяют оценкам вида (5). Отсюда следует, что коэффициенты $d_l(x)$ уравнения (8) удовлетворяют оценкам

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^r d_l(x)| (1 + |x|^{\alpha})^2 dx < \infty$$

при $r = 0, \dots, M - p + 2$, $l = 0, \dots, p - 2$.

При замене (7) начальное условие (4) примет вид

$$v(x, 0) = u_0(x) \omega^{-1}(x). \quad (9)$$

Применим теперь к задаче Коши (8) — (9) общий критерий корректной разрешимости задачи Коши, полученный в [2]. Тогда, учитывая ограниченность функции $\omega(x)$ и ее производных, получаем справедливость доказываемой теоремы.

Замечание 1. Доказанная теорема улучшает соответствующий результат в [2].

Замечание 2. Теорема 1, грубо говоря, показывает, что в вопросах корректной разрешимости задачи Коши существенное влияние оказывает поведение коэффициентов уравнения при $|x| \rightarrow \infty$ (см. оценки (5)). Так, уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^p u(x, t) - e^{-x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad p > 2 \quad (10)$$

при каждом фиксированном значении коэффициента e^{-x^2} ($-\infty < x < \infty$) не является корректным по И. Г. Петровскому. Однако, в силу доказанной теоремы, задача Коши (10) — (4) корректно разрешима в классе ограниченных функций.

§ 2. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) + P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t). \quad (11)$$

Здесь $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $P_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — квадратные матрицы порядка N , элементами которых являются многочлены от $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$ с постоянными коэффициентами в матрице $P_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ и коэффициентами, зависящими от пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$ в матрице $P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$.

К системе (11) присоединим начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (12)$$

Здесь мы будем рассматривать системы вида (11), у которых соответствующая система

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \quad (13)$$

является параболической по Г. Е. Шилову^[1]. Пусть $G_0(x, t)$ — матрица Грина системы (13), т. е. $G_0(x, t)$ является преобразованием Фурье матрицы $Q(s, t) = e^{P_0(s)t}$. Пусть p — порядок системы (13), h — показатель параболичности^[1], p_1 — порядок оператора $P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть числа p_1 , p и h связаны условием

$$p_1 < h - \frac{n}{q} - (p - h)(N - 1), \quad (14)$$

где $1 < q \leq 2$, а коэффициенты $a_i(x)$ оператора $P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ и все их производные до порядка $M - p_1$ принадлежат пространствам L' и L^q ($-\infty < x < \infty$).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^r a_i(x)|^q dx \leq A. \quad (15)$$

$$0 \leq r \leq M - p_1$$

Тогда, если функция $u_0(x)$ ограничена по абсолютной величине вместе со всеми своими производными до некоторого порядка l , то в полосе $\Pi(-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T < \infty)$ существует единственное решение $u(x, t)$ задачи Коши (11) — (12), ограниченное вместе со своими производными до порядка M по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ во всей полосе Π . Это решение в обычном смысле непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство. Пусть $u_0(x, t)$ — решение задачи Коши (13) — (12). Так как система (13) корректна по И. Г. Петровскому, то для нее выполнено условие A ([3]), в силу которого при достаточно большом числе l (см. условие теоремы) функция $u_0(x, t)$ и все ее производные до порядка M по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ ограничены в полосе Π :

$$|D_x^r u_0(x, t)| \leq C_0, \quad 0 \leq r \leq M. \quad (16)$$

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x - \xi, t - \tau) P_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau) d\xi. \quad (17)$$

Нетрудно убедиться в том, что достаточное число раз дифференцируемые по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ решения задачи (11) — (12) и системы (17) совпадают. Применяя метод последовательных приближений, будем искать решения системы (17) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t), \quad (18)$$

где

$$u_{k+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x - \xi, t - \tau) P_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_k(\xi, \tau) d\xi. \quad (19)$$

Обозначим ($m = 0, 1, \dots$)

$$f_{r,m}(x, t) = D_x^r \left[P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_m(x, t) \right], \quad (20)$$

$$F_{r,m}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{r,m}(x, t) e^{-isx} dx.$$

В силу (15) и (16) $f_{r,0}(x, t) \in L^q$, $1 < q \leq 2$, $r = 0, \dots, M - p_1$. При этом справедливы оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{r,0}(x, t)|^q dx \leq C_0^q \Lambda^q A, \quad (21)$$

где Λ — постоянная, зависящая от N и наибольшего числа слагаемых в элементах матрицы $P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Поэтому $F_{r,0}(s, t) \in L^{q'} (0 \leq r \leq M - p_1)$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. При этом справедливо неравенство [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_{r,0}(s, t)|^{q'} ds \leq C_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_{r,0}(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q-1}}. \quad (22)$$

Отсюда, учитывая (21), получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_{r,0}(s, t)|^{q'} ds \leq C_1 C_0^{q'} \Lambda^{q'} A^{\frac{1}{q-1}}. \quad (23)$$

В дальнейшем нам понадобится также следующее неравенство Юнга ([4]):

если $f(x) \in L^{\frac{1}{1-\lambda}}$, $g(x) \in L^{\frac{1}{1-\mu}}$, где $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu < 1$, то

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^{\frac{1}{1-\lambda}} \cdot |g|^{\frac{1}{1-\mu}} dx \right)^{1-\lambda-\mu} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^{\frac{1}{1-\lambda}} dx \right)^{\mu} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g|^{\frac{1}{1-\mu}} dx \right)^{\lambda}. \quad (24)$$

Как показано в [5], элементы матрицы $Q(s, t) = e^{tP_0(s)}$ параболической по Г. Е. Шилову системы (13) удовлетворяют условиям:

$$|\sigma^r Q(\sigma, t)| \leq \frac{C_2}{t^{\beta_r}}, \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma^r Q(\sigma, t)|^{\frac{1}{1-\mu}} d\sigma \leq \frac{C_3}{t^{\gamma_r}}, \quad (26)$$

$$\sigma^r = \sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}, \quad r_1 + \dots + r_n = r,$$

где

$$\beta_r = \frac{r + (p-h)(N-1)}{h}, \quad \gamma_r = \frac{\beta_r}{1-\mu} + \frac{n}{h}.$$

Тогда при всех $r = 0, 1, \dots, p_1$ в силу условия (14) имеем:

$$\alpha_r = \frac{\beta_r(1-\lambda-\mu)}{1-\mu} + \lambda\gamma_r \leq \alpha < 1 \quad (27)$$

при $\lambda = \frac{1}{q}$, μ — какое-либо число из интервала $(0, 1 - \frac{1}{q})$.

Докажем теперь по индукции справедливость в полосе Π следующих оценок:

$$|D_x^r u_k(x, t)| \leq C_0 C_4^k \prod_{j=1}^k B(j - (j-1)\alpha, 1 - \alpha) t^{(1-\alpha)k} \quad (28)$$

$$0 \leq r \leq M$$

$$C_4 = 2^M C_2^{\frac{1-\lambda-\mu}{1-\mu}} \cdot C_3^{\lambda} C_1^{1-\lambda} \Lambda A^{\frac{1}{q}} K, \text{ постоянная } K \text{ зависит от } T.$$

Если оценки (28) справедливы, то функция $f_{r,k}(x, t) \in L^q$ при каждом $t, 0 < t \leq T, 0 \leq r \leq M - p_1$, причем в силу (15) и (28):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{r,k}(x, t)|^q dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_x^r \left[P_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u_k(x, t) \right] \right|^q dx \leq \\ &\leq \left[C_0 C_4^k \Lambda 2^M \prod_{j=1}^k B(j - (j-1)\alpha, 1 - \alpha) t^{k(1-\alpha)} \right]^q A. \end{aligned}$$

Поэтому при $0 < t \leq T, 0 \leq r \leq M - p_1$ $F_{r,k}(s, t) \in L^{q'}$ и имеет место неравенство [4]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{r,k}(s, t)|^{q'} ds &\leq C_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_{r,k}(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q-1}} \leq \\ &\leq C_1 \left[C_0 C_4^k \Lambda 2^M \prod_{j=1}^k B(j - (j-1)\alpha, 1 - \alpha) t^{k(1-\alpha)} \right]^{q'} A^{\frac{1}{q-1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценим теперь $D_x^r u_{k+1}(x, t)$ при $0 \leq r \leq p_1$.

$$D_x^r u_{k+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^r G_0(x - \xi, t - \tau) P_1 \left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_k(\xi, \tau) d\xi. \quad (30)$$

Представляя функцию $D_x^r G_0(x, t)$ в виде

$$D_x^r G_0(x - \xi, t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (is)^r Q(s, t - \tau) e^{is(x-\xi)} ds$$

и меняя в (30) порядок интегрирования, получим:

$$D_x^r u_{k+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F_{0,k}(s, \tau) g_r(s, t - \tau, x) ds,$$

где

$$g_r(s, t - \tau, x) = (is)^r Q(s, t - \tau) e^{isx}.$$

Оценивая последний интеграл с помощью неравенства (24), учитывая оценки (25), (26) и (29), найдем:

$$\begin{aligned} |D_x^r u_{k+1}(x, t)| &\leq \int_0^t d\tau \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_{0,k}(s, \tau)|^{\frac{1}{1-\lambda}} |g_r(s, t - \tau, x)|^{\frac{1}{1-\mu}} ds \right)^{1-\lambda-\mu} \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_{0,k}(s, \tau)|^{\frac{1}{1-\lambda}} ds \right)^{\mu} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g_r(s, t - \tau, x)|^{\frac{1}{1-\mu}} ds \right)^{\lambda} \leq \\ &\leq C_2^{\frac{1-\lambda-\mu}{1-\mu}} \cdot C_3^{\lambda} C_1^{1-\lambda} C_0 C_4^k \Lambda 2^M A^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^k B(j - (j-1)\alpha, 1 - \alpha) \int_0^t \frac{\tau^k (1-\alpha) d\tau}{(t-\tau)^{2r}} \leq \\ &\leq C_0 C_4^{k+1} \prod_{j=1}^{k+1} B(j - (j-1)\alpha, 1 - \alpha) t^{(k+1)(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость оценок (28) при $0 \leq r \leq p_1$ и $k = 1, 2, \dots$. При $p_1 < r \leq M$

$$\begin{aligned} D_x^r u_{k+1}(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{p_1} G_0(x - \xi, t - \tau) D_{\xi}^{r-p_1} \left[P_1 \left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_k(\xi, \tau) \right] d\xi = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (is)^{p_1} Q(s, t - \tau) e^{is(x-\xi)} ds \right) D_{\xi}^{r-p_1} \left[P_1 \left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_k(\xi, \tau) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования (что, как и выше, возможно, так как условия теоремы гарантируют абсолютную сходимость всех встречающихся интегралов) и учитывая (20), получаем:

$$\begin{aligned} D_x^r u_{k+1}(x, t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{r-p_1,k}(\xi, \tau) e^{-is\xi} d\xi \right) g_{p_1}(s, t - \tau, x) ds d\tau = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F_{r-p_1,k}(s, \tau) g_{p_1}(s, t - \tau, x) ds. \end{aligned}$$

Вновь применяя неравенство (24) и пользуясь оценками вида (29), (25) и (26), получим справедливость оценок (28) при всех r , $0 \leq r \leq M$.

Оценки (28) обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость во всей полосе Π ряда (18) и наличие для решения $u(x, t)$ системы (17) оценок

$$|D_x^r u(x, t)| \leq C_0 \cdot C_5, \quad 0 \leq r \leq M \quad (31)$$

во всей полосе Π .

Единственность полученного решения доказывается точно так же, как и в работе [5].

Наконец, поскольку постоянная C_0 в (16) может быть сделана сколь угодно малой, если функция $u_0(x)$ и ее производные до порядка l достаточно малы по абсолютной величине [3], то из (31) вытекает, что полученное решение $u(x, t)$ непрерывно зависит от начальной функции $u_0(x)$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Отметим, что теорема 2 позволяет повысить возможный порядок оператора $P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ (см. условие (14)) по сравнению с тем порядком, который допускался в работе [5].

§ 3. Рассмотрим систему квазилинейных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + F(x, D_x u(x, t)), \quad (32)$$

где $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $r = 0, 1, \dots, p_1$, P_0 — квадратная матрица порядка N , элементами которой служат многочлены от $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$ с постоянными коэффициентами порядка p . Элементы вектор-функции $F = \{F_1, \dots, F_N\}$ зависят от искомой функции $u(x, t)$ и ее производных $D_x^r u(x, t)$, до порядка p_1 по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$. Присоединим к системе (32) начальное условие

$$u(x, 0) = 0, \quad (33)$$

что, очевидно, не уменьшает общности рассмотрений, так как задача Коши с ненулевыми начальными данными легко сводится к задаче (32) — (33).

Приведем здесь несколько критериев корректной разрешимости задачи Коши (32) — (33), переносящих на случай квазилинейных систем вида (32) результаты работ [2], [5].

В дальнейшем предполагается, что главная часть системы (32) система

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \quad (34)$$

корректна по И. Г. Петровскому. Пусть снова $G_0(x, t)$ означает матрицу Грина системы (34).

Теорема 3. Пусть 1) элементы матриц $D_x^r G_0(x, t)$ ($r = 0, \dots, p_1$) при каждом t , $0 < t \leq T < \infty$ являются обычными (не обобщенными) функциями и удовлетворяют условиям

$$|D_x^r G_0(x, t)| \leq G_0 \cdot \frac{1 + |x|^{\alpha_r}}{t^{\beta_r}}$$

$$0 \leq r \leq p_1, \quad 0 \leq \alpha_r \leq \alpha, \quad \beta_r \leq \beta < 1;$$

2) функции $F_i(x, D_x^r f)$ ($0 \leq r \leq p_1$, $i = 1, \dots, N$) и их производные по всем аргументам $D_x^k f$ обладают всюду в полосе Π ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T < \infty$) непрерывными производными до порядка $M - p_1$, причем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^l \left(\frac{\partial F_i(x, D_x^r f)}{\partial (D_x^{k_r})} \right) (1 + |x|^{\alpha})^2 dx \right| < A \quad (35)$$

$$(i = 1, \dots, N, l = 0, 1, \dots, M - p_1; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq t \leq T)$$

при условии выполнения неравенств

$$|D_x^r f(x, t)| \leq R(1 + |x|^{\alpha_r}), \quad r = 0, 1, \dots, p_1$$

с некоторой фиксированной постоянной R (A зависит от R); 3) функции $F_i(x, 0)$ ($i = 1, \dots, N$) ограничены по абсолютной величине вместе со своими производными по $x_1, \dots, x_n$ до некоторого порядка l .

Тогда в полосе Π_1 ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T_1 < T$, T_1 — достаточно мало) существует единственное решение $u(x, t)$ задачи Коши (32) — (33), имеющее производные до порядка M по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ и удовлетворяющее оценкам

$$|D_x^r u(x, t)| \leq \begin{cases} C(1 + |x|^{\alpha_r}), & r = 0, 1, \dots, p_1 \\ C(1 + |x|^{\alpha}), & r = p_1 + 1, \dots, M. \end{cases} \quad (36)$$

При этом если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — решения системы (32), удовлетворяющие оценкам (36) с начальными данными $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, $|D_x^r \varphi(x)| \leq \varepsilon$, $r = 0, 1, \dots, l$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, то $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет в полосе Π_1 условиям (36) с заменой постоянной C на $\delta(\varepsilon)$.

Эта теорема благодаря оценкам функции Грина, полученным в [2], применима к одному квазилинейному уравнению вида (32) с одним пространственным переменным x :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) + F(x, u, \dots, D_x^{p-2} u).$$

Здесь многочлен $P_0 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ имеет порядок p . При этом в формулировке соответствующей теоремы постоянные α_r и α в оценках (35) и (36) такие же, как и в оценках (5) и (6) теоремы 1.

Следующие три критерия относятся к системам вида (32), у которых соответствующая система (34) является параболической по Г. Е. Шилову (см. § 2).

Теорема 4. Пусть 1) число p_1 (наивысший порядок производных функции $u(x, t)$, входящих в нелинейную часть $F(x, D_x^r u)$ системы (32)) удовлетворяет условию:

$$0 \leq p_1 < h - n - (p - h)(N - 1), \quad (37)$$

2) выполнено условие 2) теоремы 3 с постоянными $\alpha = \alpha_r = 0$, 3) выполнено условие 3) теоремы 3.

Тогда справедливо утверждение теоремы 3 с постоянными $\alpha = \alpha_r = 0$ (см. оценки (36)).

Теорема 4 является следствием теоремы 3 и оценок матрицы Грина параболических по Г. Е. Шилову систем, полученных в [5], которые показывают, что выполнено условие 1) теоремы 3 с постоянными $\alpha_r = 0$, $p_r < 1$ при $0 \leq r \leq p_1$, если число p_1 удовлетворяет условию (37).

Теорема 5. Пусть 1) число p_1 удовлетворяет условию

$$p_1 < h - (p - h)(N - 1) - n(1 - \mu) \text{ при } \mu \leq 0$$

$$p_1 < h - (p - h)(N - 1) - n \left(1 - \frac{h\mu}{p_0} \right) \text{ при } \mu > 0,$$

где μ — род, p_0 — приведенный порядок [1] параболической по Г. Е. Шилову системы (34).

2) Функции $F_i(x, D_x^r f)$ ($0 \leq r \leq p_1$, $i = 1, \dots, N$) и их производные по всем аргументам $D_x^l f$ обладают всюду в Π_1 непрерывными производными до порядка $M - p_1$ по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$, причем

$$\left| D_x^l \left(\frac{\partial F_i(x, D_x^r f)}{\partial (D_x^k f)} \right) \right| \leq A$$

$$(k = 0, \dots, p_1, i = 1, \dots, N, l = 0, \dots, M - p_1)$$

при условии выполнения неравенств

$$|D_x^r f(x, t)| \leq R, \quad r = 0, \dots, p_1$$

A зависит от R .

3) Функции $F_i(x, 0)$ ограничены по абсолютной величине вместе со своими производными по $x_1, \dots, x_n$ до некоторого порядка l .

Тогда в полосе Π_1 существует единственное решение задачи Коши (32) — (33), ограниченное со своими производными до порядка M по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$.

Эта теорема переносит на случай квазилинейных систем результат работы [5].

Теорема 6. Пусть 1) число p_1 удовлетворяет условию

$$p_1 < h - \frac{n}{q} - (p - h)(N - 1), \quad 1 < q \leq 2;$$

2) функции $F_i(x, D_x^r f)$ ($0 \leq r \leq p_1$, $i = 1, \dots, N$) и их производные по всем аргументам $D_x^r f$ обладают всюду в Π_1 непрерывными и абсолютно интегрируемыми производными до порядка $M - p_1$ по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| D_x^l \left(\frac{\partial F_i(x, D_x^r f)}{\partial (D_x^k f)} \right) \right|^q dx < A$$

$$(k = 0, 1, \dots, p_1, i = 1, \dots, N, l = 0, \dots, M - p_1)$$

при условии выполнения неравенств

$$|D_x^r f(x, t)| \leq R, \quad r = 0, \dots, p_1$$

A зависит от R ;

3) выполнено условие 3) предыдущей теоремы.

Тогда справедливо утверждение предыдущей теоремы. Теорема 6 переносит на случай квазилинейных систем результат теоремы 2.

Доказательство теорем 3, 5 и 6 аналогично доказательству соответствующих теорем для линейных систем. Именно, задача (32) — (33) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x - y, t - \tau) \varphi(y, D_y u(y, \tau)) dy, \quad (38)$$

где

$$u_0(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x - y, t - \tau) F(y, 0) dy,$$

$$\varphi(x, D_x u(x, t)) = F(x, D_x u(x, t)) - F(x, 0).$$

Система (38) решается методом последовательных приближений аналогично тому, как это делается для линейных систем вида (32) — см. [2], [5],

а также теорему 2 § 2. При этом функции $D_x^l \left(\frac{\partial F_i(x, D_x^r f)}{\partial (D_x^k f)} \right)$ играют ту же роль, что и коэффициенты линейной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев. Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз М., 1958.
2. Я. И. Житомирский. Об одном условии корректной разрешимости задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. «Изв. высш. учеб. завед.», Математика, 1960.
3. И. Г. Петровский. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. МГУ, сек. А, I, вып. 7, 1938.
4. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат. М. — Л., 1948.
5. Я. И. Житомирский. Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилеву систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. «Изв. АН СССР», т. 23, № 6, 1959.