ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

АКСИОМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Д. З. Гордевский

Харьков

§ 1. Задачу аксиоматического обоснования многомерной проективной геометрии, насколько известно, впервые поставил Сегре [1] в 1890—91 гг. (впрочем, еще в 1879 г. К. А. Андреев в своей докторской диссертации по существу аксиоматически строит пятимерную проективную геометрию в терминах теории конических сечений на плоскости [2]). С тех пор этому вопросу было посвящено много работ[1].

Разные авторы строят свои системы аксиом, подходя с различных позиций. В настоящей статье не представляется возможным останавливаться на рассмотрении этих систем.

Как известно, чтобы добиться возможно большей строгости при построении многомерной проективной геометрии, как и всякой другой геометрии, желательно на первых порах понятия основных объектов (точек, прямых, плоскостей и т. д.) не связывать ни с какими наглядными представлениями. В настоящей статье мы не только будем к этому стремиться, но сначала у нас вообще не будет указанных понятий (точки, прямой и т. д.). Известно, что природа объектов (элементов) проективной геометрии двойственна. Плоскость, например, есть элемент трехмерного пространства и одновременно сама является пространством (двумерным). Но природа плоскости не только двойственна, а в некотором смысле тройственна. Именно, кроме только что указанных двух точек зрения на плоскость, можно указать еще третью. Зафиксируем плоскость α и инцидентную ей точку A; совокупность прямых инцидентных A и α есть одномерное пространство (прямых).

Элементы многомерных пространств имеют не только двойственную, но в указанном только что смысле множественную природу. Это свойство учитывается предлагаемой ниже системой аксиом. Назовем точку 0-элементом (элемент измерения нуль), прямую (—1)-элементом и т. д. В таком случае одномерное пространство прямых, или лучше сказать, одномерная связка прямых, задается парою инцидентных элементов (2-элемент α и 0-элемент A); эту связку обозначим C_0^2.

Какой парой инцидентных элементов задается плоскость как двумерное пространство? Естественно считать, что это двумерное пространство задается 2-элементом α и инцидентным ему (—1)-элементом. Элемент измерения—1 понятие не новое и оно легко воспринимается,

[1] Ценные исторические сведения и библиографические данные можно найти в сочинениях [3], [4], [5], [6], [11].

если понимать под (-1)-элементом пустое множество точек. Но у нас сначала, как об этом уже говорилось, не будет точек, прямых и т. д., поэтому (-1)-элемент вводится не как пустое множество, а как абстрактная категория, на тех же основаниях, что и любой другой i-элемент при $i \neq -1$. Но может быть, значение числа i не играет никакой роли, когда говорят об i-элементе. Отличается ли i- элемент от k-элемента при $i \neq k$? i-элементы и k-элементы при $i \neq k$ составляют два класса разных элементов или два класса одних и тех же элементов?

Во всех случаях мы отвечаем: и да и нет. Такой ответ можно понять, если рассмотреть некоторые объекты в трехмерном пространстве.

Рассмотрим пучок прямых (связка C_0^2) и пучок плоскостей (связка C_1^3). Геометрия связки C_0^2 тождественна геометрии связки C_1^3. Если не пользоваться наглядными представлениями, то прямые пучка C_0^2 неотличимы от плоскостей пучка C_1^3, но прямые пучка C_0^2 отличаются от той плоскости, которая вместе с инцидентной ей точкой определяет C_0^2.

Хорошо известно, что, изучая, например, геометрию плоскости, мы можем считать плоскость расположенной в трехмерном пространстве, то есть легко включаем связку C_{-1}^2 в связку C_{-1}^3. Вообще мы считаем естественным включать связку C_{-1}^k в связку C_{-1}^n $(k < n)$. Но если у нас i-элементы при разных значениях i вводятся на равных основаниях, то почему не считать естественным включение связки $C_{-1}^k (k \geqslant 0)$ в связки C_{-2}^k, C_{-3}^k и т. д. Естественно, наряду с движением вправо (или вверх) ввести движение влево (или вниз).

Что-то искусственное есть в том, что ограничивают себя слева (или снизу) одним элементом. Наряду с положительномерными элементами естественно вводить отрицательномерные.

В предлагаемой системе аксиом речь идет об i-элементах, где i принимает целые (не только положительные, но и отрицательные) и нулевые значения [1].

Каждый элемент сам по себе неинтересен. Пока i-элементы рассматриваются без связи между ними, еще никакой геометрии нет. Геометрия начинается после того, как введено понятие связи между элементами, опирающееся на понятие инцидентности. Последнее — единственно неопределяемое отношение между элементами.

Понятия „A есть часть B“, „A содержится в B“, „B проходит через A“, „B и C пересекаются по A“ на первых порах не вводятся. Первым определяемым отношением между двумя элементами является понятие связи (см. определения O_1, O_2, O_3 и аксиому A_1). Связь оформляется в виде связки. Например, две пересекающиеся прямые связаны одним образом (определяют связку C_0^2), а две непересекающиеся прямые связаны другим образом (определяют связку C_{-1}^3). Измерением связки C_a^b называется число $b-a-1$.

N-мерное пространство есть связка C_{-1}^N.

Известно, какую важную роль играет в проективной геометрии принцип двойственности. Но термин „двойственность“ не отражает полностью содержания этого принципа.

---

[1] При желании можно отказаться и от требования рассматривать i-элементы только при целых значениях i, это, по-видимому, приведет нас к новой геометрии (см. заключительные замечания в конце статьи).

Употребляя слово „двойственность“, мы имеем в виду, что если доказано некоторое утверждение, то обязательно будет верным еще одно — второе (двойственное) предложение.

В действительности в многомерной геометрии число таких предложений может быть больше (собственно говоря, таких предложений сколько угодно).

В самом деле, пусть сформулировано некоторое утверждение, относящееся к группе элементов связки C_b^a. Включив связку C_a^b в связку C_a^{b+k} $(k>0)$ и применив принцип двойственности, действующий в этой связке, мы получим столько новых предложений, сколько значений примет k. Аналогично, включая связку C_a^b в связки C_{a-l}^b $(l>0)$, получим еще сколько угодно новых утверждений. Имеет место не двойственность, а множественность. Может быть, правильнее было бы говорить не о принципе двойственности, а о теореме симметрии в связке. В связи с этой теоремой можно при желании говорить об отрицательномерных связках. В самом деле, теорема симметрии, примененная к положительномерной $(b-a-1>0)$ связке C_a^b приводит к связке C_b^a, которая является отрицательномерной $(a-b-1<0)$.

При таком введении отрицательномерных пространств измерения связок C_a^b и C_b^a не равны между собой по абсолютной величине $(|a-b-1|=|b-a-1|+2)$. Можно, однако, добиться равенства абсолютных величин измерений связок C_a^b и C_b^a. Для этого надо назвать измерением связки C_a^b число $b-a$. Тогда пространством n измерений надо назвать то, что обычно называется пространством $n-1$ измерений, то есть определить пространство n измерений как связку C_0^n.

Было бы естественно так поступить, но, чтобы не ломать традиций и не вносить путаницы, мы будем под измерением связки C_a^b понимать число $b-a-1$.

§ 2. Неопределяемые вещи (объекты), о которых идет речь в настоящей статье, будем называть **элементами**. С каждым элементом неопределяемым образом связывается целое число, которое назовем **определяющим числом** элемента.

Элемент с определяющим числом i назовем i-элементом и обозначим коротко $\mathbf{i}$. Элемент с определяющим числом $i+k$ обозначим $\mathbf{i+k}$. Разные элементы с одним и тем же определяющим числом i обозначим: $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}', \mathbf{i}'', \ldots, \mathbf{i}_k^l, \ldots$ и т. п. Один элемент относительно другого может находиться в неопределяемом отношении, которое будем именовать **инцидентностью** и обозначать знаком $\#$.

Примем следующие сокращенные обозначения: A — аксиома, O — определение, T — теорема.

I. Общие аксиомы

A_1. *Существует хотя бы один элемент.*

A_2 *Если* $\mathbf{i}\#\mathbf{k}$, *то* $\mathbf{k}\#\mathbf{i}$.

Каждый $\mathbf{i}$-*элемент сам себе инцидентен, и при фиксированном* $\mathbf{i}$ *нет других* $\mathbf{i}$-*элементов (кроме его самого), ему инцидентных.*

A_3. *Если* $\mathbf{i}\#\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{k}\#\mathbf{l}$ $(i<k<l)$, *то* $\mathbf{i}\#\mathbf{l}$.

T_1. *Если* $\mathbf{i}\#\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{k}\#\mathbf{l}$ $(i>k>l)$, *то* $\mathbf{i}\#\mathbf{l}$. (Следует из A_2 и A_3).

O_1. Если каждый из двух неинцидентных элементов **i** и **k** $(i \leqslant k)$ инцидентен единственному элементу **i — l** $(l > 0)$, но нет ни одного r-элемента, $(i - l < r < i)$, инцидентного **i** и **k** одновременно, то будем говорить, что элементы **i** и **k** связаны между собой слева **в i—l**.

O_2. Если каждый из двух неинцидентных элементов **i** и **k** $(i \leqslant k)$ инцидентен единственному элементу **k+l** $(l > 0)$, но нет ни одного r-элемента $(k < r < k + l)$, инцидентного **i** и **k** одновременно, то будем говорить, что элементы **i** и **k** связаны между собой справа в **k+l**.

O_3. О двух инцидентных между собой элементах **i** и **k** $(i < k)$ будем говорить, что они связаны между собой слева в **i** и справа в **k**.

A_4. *Всякие два элемента связаны между собой. Если элементы* **i** *и* **k**$(i \leqslant k)$ *связаны слева в* **i—l**, *то они также связаны справа в* **k+l**. *Если элементы* **i** *и* **k** $(i \leqslant k)$ *связаны справа в* **k + l**, *то они также связаны слева в* **i — l** [1].

Основная формула Из A_4 следует, что если элементы **i** и **k** связаны между собой слева в **m** и справа в **n**, то между определяющими числами i, k, m, n этих четырех элементов **i**, **k**, **m**, **n** существует зависимость $n - k = i - m$, которую будем называть основной формулой.

O_4. Относительно элементов **i** и **k** аксиомы A_4 будем говорить, что они имеют свободу l.

Относительно двух инцидентных между собой элементов будем говорить, что они имеют свободу 0.

O_5. Совокупность двух инцидентных между собой элементов **m** и **n** (пусть для определенности $m \leqslant n$) назовем связкой $\overset{n}{C}_m$; элементы **m**, **n** назовем концами связки (**m**-левый, **n**-правый конец); число $n - m - 1$ назовем измерением связки $\overset{n}{C}_m$.

A_5. *Какова бы ни была связка* $\overset{n}{C}_m$ *существует по крайней мере один элемент* **m + 1**, *связанный с* **n** *в* **m**, *и по крайней мере один элемент* **n — 1**, *связанный с* **m** *в* **n** [2].

T_2. *Каков бы ни был элемент* **r** *и каково бы ни было число*[3] $s \neq r$, *существует по крайней мере один элемент* **s**, *инцидентный элементу* **r**. (Вытекает из A_5 при $m = n = r$ и A_4 по методу полной индукции).

T_3. *Каковы бы ни были два числа k и l, существует связка* $\overset{l}{C}_k$.

Доказательство. Обозначим определяющее число существующего по A_1 элемента через a. Тогда по T_2. A_2, A_3, T_1 существуют элементы

$$\mathbf{a+1},\ \mathbf{a+2},\ \mathbf{a+3}$$

и

$$\mathbf{a-1},\ \mathbf{a-2};\ \mathbf{a-3},$$

инцидентные **a** и между собой.

---

[1] Аксиома A_4 играет основную роль. В многомерных проективных построениях она повсюду находит непосредственное применение. (См., например, статью автора о многомерных гиперболоидах УМН, т. X, вып. 3 (65), 1955, 129—133).

Рассмотрение аксиомы A_4 при $i = k = l = 1$ показывает, что она является обобщением следующего утверждения: если две прямые имеют единственную общую точку, то они принадлежат единственной плоскости; если две прямые принадлежат единственной плоскости, то они имеют единственную общую точку.

[2] Первая часть аксиомы A_5 является обобщением следующего утверждения (см. A_5 при $m = -1$): каково бы ни было n-мерное пространство, существует по крайней мере одна точка, не принадлежащая этому пространству.

[3] Здесь и в дальнейшем, где речь идет о числе, имеется в виду целое число.

T_4. *Какова бы ни была связка C_m^n $(m<n)$ и каковы бы ни были числа $s>m$ и $t<n$, существует по крайней мере один элемент* **s**, *связанный с* **n** *слева в* **m** *и по крайней мере один элемент* **t**, *связанный с* **m** *справа в* **n**. (Вытекает из A_5 и A_4 по методу полной индукции).

O_6. Элемент **k**, инцидентный каждому из концов связки C_m^n, назовем элементом, принадлежащим связке C_m^n или просто элементом связки C_m^n.

Элемент **k** связки C_m^n при $m<k<n$ назовем внутренним, при $k<m$ или $k>n$ — внешним элементом связки C_m^n.

T_5. *Элементы* $\mathbf{m}-\mathbf{t}$ $(t>0)$, *инцидентные левому концу* **m**, *и элементы* $\mathbf{n}+\mathbf{t}$, *инцидентные правому концу* **n** *связки* C_m^n *принадлежат связке* C_m^n.

Следствие A_3 и T_1.

T_6 *Если два элемента* **i** *и* **k** *связаны между собой и l—их свобода, то они определяют связку* C_{i-l}^{k+l}.

Следствие A_4, A_2, A_3.

T_7. *Каковы бы ни были два внутренних элемента* **i** *и* **k** $(i\leqslant k)$ *связки* C_m^n, *они всегда определяют связку* $C_{i-l}^{k+l}(l\geqslant 0)$ *причем* $m\leqslant i-l<k+l\leqslant n$.

Доказательство. Пусть для определенности $i-m\leqslant n-k$. Нам дано: $m<i\leqslant k<n$, $\mathbf{m}\#\mathbf{i}\#\mathbf{n}$, $\mathbf{m}\#\mathbf{k}\#\mathbf{n}$, иными словами, **i** и **k** — инциденты **m**. Если, каково бы ни было r из $m<r<i$, нет ни одного элемента **r**, инцидентного **i** и **k**, то **i** и **k** уже связаны слева в **m** и теорема доказана: если такой элемент **r** существует, то повторим наши рассуждения до тех пор, пока натолкнемся на такой элемент **t** $(r<t'<i)$, который будет левым концом связки, определенной элементами **i** и **k**.

T_8. *Если элементы* **i** *и* **k** *связки* C_m^n *являются оба внешними или один из них внешний, а другой внутренний, то они инцидентны между собой и, следовательно, образуют связку* C_i^k.

A_6. *Всякая одномерная связка* C_a^{a+2} *по крайней мере при одном значении* a *имеет не менее трех внутренних элементов*.

A_7. *Каков бы ни был внутренний элемент* **i** *связки* C_m^n, *существует по крайней мере один внутренний элемент* **k**, *определяющий вместе с* **i** *связку* C_m^n.

A_8. *Если элементы* **r** и **s** $(r<m,\ s>n)$—*инциденты двум каким-либо внутренним элементам связки* C_m^n, *определяющим эту связку, то* $\mathbf{r}\#\mathbf{m}$ и $\mathbf{s}\#\mathbf{n}$[1].

---

[1] Аксиома A_8 является обобщением известных утверждений.

Например, при $m=-1$, $n=1$ и $s=2$ она гласит: если две точки, определяющие прямую l, принадлежат плоскости α, то и прямая l принадлежит плоскости α. Или, при $m=1$, $n=3$, $r=0$ A_8 гласит: если точка принадлежит двум плоскостям, определяющим пучок плоскостей, то она принадлежит оси этого пучка.

T_9. Всякая одномерная связка C_b^{b+2} при произвольном значении b имеет не менее трех внутренних элементов.

Доказательство. Пусть $b = a+1$, то есть пусть рассматривается связка C_{a+1}^{a+3}, где a принимает то значение, о котором говорится в A_6.

По A_5 существует по крайней мере один элемент $\mathbf{a}+2$, связанный с $\mathbf{a}+1$ справа в $\mathbf{a}+3$ и, следовательно, по A_4 слева в $\mathbf{a}$. Рассмотрим связку C_a^{a+2}, по A_6 существуют $(\mathbf{a}+1)_1$, $(\mathbf{a}+1)_2$, $(\mathbf{a}+1)_3$, инцидентные $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}+2$. Элементы $\mathbf{a}+1$ и $(\mathbf{a}+1)_1$ связаны слева в $\mathbf{a}$ и, следовательно, по A_4 связаны справа в $(\mathbf{a}+2)_1$; $\mathbf{a}+1$ и $(\mathbf{a}+1)_2$ связаны справа в $(\mathbf{a}+2)_2$; $\mathbf{a}+1$ и $(\mathbf{a}+1)_3$—справа в $(\mathbf{a}+2)_3$. По $\mathbf{a}+1$ инцидентно $\mathbf{a}+3$ (мы рассматриваем связку C_{a+1}^{a+3}); по A_3, далее, $(\mathbf{a}+1)_i \# \mathbf{a}+3$, ибо $(\mathbf{a}+1)_i \# \mathbf{a}+2 \# \mathbf{a}+3$, следовательно, по A_8 $(\mathbf{a}+2)_i \# \mathbf{a}+3$.

При $b = a+1$ теорема доказана, методом полной индукции теорема может быть доказана при произвольном $b > a$. При $b < a$ теорема доказывается аналогичными рассуждениями.

T_{10}. Каковы бы ни были числа $m < k < n$ $(n > m+2)$, существует по крайней мере одна связка C_m^n, имеющая не менее трех k-элементов.

Доказательство. Рассмотрим некоторую связку C_m^{m+2}, отметим три $(m+1)$ — элемента $(\mathbf{m}+1)_1$, $(\mathbf{m}+1)_2$, $(\mathbf{m}+1_3)$, принадлежащих ей по T_9.

По A_5 существует элемент $(\mathbf{m}+1)_0$, связанный с $\mathbf{m}+2$ слева в $\mathbf{m}$ и, следовательно, по A_4 связанный с $\mathbf{m}+2$ справа в $\mathbf{m}+3$, таким образом, имеем связку C_m^{m+3}, которой принадлежат $(\mathbf{m}+1)_i$ (ибо $(\mathbf{m}+1)_i \# \mathbf{m}+2 \# \mathbf{m}+3$ и $(\mathbf{m}+1)_i \# \mathbf{m}$). Каждый из $(\mathbf{m}+1)_i$ связан с $(\mathbf{m}+1)_0$ слева в $\mathbf{m}$ и, следовательно, справа в $(\mathbf{m}+2)_i$.

Каждый из трех элементов $(\mathbf{m}+2)_i$ принадлежит связке C_m^{m+3} (ибо $(\mathbf{m}+1)_0 \# \mathbf{m}+3$, $(\mathbf{m}+1)_i \# \mathbf{m}+3$ и по A_8 $(\mathbf{m}+2)_i \# \mathbf{m}+3$, и $\mathbf{m} \# (\mathbf{m}+1)_i \# (\mathbf{m}+2)_i$. Таким образом, переходя от C_m^{m+2} к C_m^{m+3}, мы убедились, что связке C_m^{m+3} принадлежит три $(m+1)$-элемента и три $(m+2)$-элемента. Применение метода полной индукции доказывает теорему.

T_{11}. Каковы бы ни были два внутренних элемента $\mathbf{i}$ *и* $\mathbf{k}$ $(i \leqslant k)$ *связки C_m^n, концы определенной ими связки C_{i-l}^{k+l} $(l > 0$, $l \leqslant i-m$, $l \leqslant n-k)$ инцидентны одноименным концам связки C_m^n, то есть* $\mathbf{i}-1 \# \mathbf{m}$, $\mathbf{k}+1 \# \mathbf{n}$.

Доказательсто. Допустим, что $\mathbf{m}$ и $\mathbf{i}-1$ неинциденты, тогда по A_4 они связаны слева в $\mathbf{r}$ и справа в $\mathbf{s}$. Имеем $\mathbf{i} \# \mathbf{m}$ и $\mathbf{i} \# \mathbf{i}-1$, следовательно, по A_8 $\mathbf{i} \# \mathbf{s}$, аналогично $\mathbf{k} \# \mathbf{m}$, $\mathbf{k} \# \mathbf{i}-1$, следовательно, $\mathbf{k} \# \mathbf{s}$. Но $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ по условию связаны слева в $\mathbf{i}-1$ $(\mathbf{i}-1 < \mathbf{s})$ и, следовательно, одновременно не могут иметь места инцидентности $\mathbf{i} \# \mathbf{s}$, $\mathbf{k} \# \mathbf{s}$. Таким образом, $\mathbf{m} \# \mathbf{i}-1$. Аналогично убедимся в том, что $\mathbf{k}+1 \# \mathbf{n}$.

T_{12}. Все внутренние элементы связки C_{i-l}^{k+l}, определенной внутренними элементами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ *связки C_m^n, принадлежат связке C_m^n.* (Вытекает из T_7, T_{11}, A_3, T_1).

T_{13}. **Теорема симметрии** (принцип двойственности). *Если в каком-либо утверждении вытекающем из аксиом $A_1 - A_8$ и относящемся к некоторой совокупности элементов связки C_m^n, поменять местами слово $(m+t)$-элемент со словом $(n-t)$-элемент (для значений t, соответствующих элементам данной совокупности), то получим утверждение, которое также вытекает из аксиом $A_1 - A_8$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что симметричны формулировки аксиом A_2, A_3 (вместе с T_1), A_4, A_5, A_6(и T_9), A_7, A_8, формулировка аксиомы A_1 симметрии остальных аксиом не нарушает.

O_7. Связку C_{-1}^N будем называть *N*-мерным проективным пространством. Связки C_{-1}^k, где **k**-внутренний элемент связки C_{-1}^N, назовем **k**-мерными подпространствами *N*-мерного пространства. *k*-мерные подпространства при $k=0$ иногда будем называть точками[1] при $k=1$ — прямыми, при $k=2$ — проскостями *N*-мерного пространства.

Если иметь в виду описание связи между элементами *N*-мерного пространства (то есть рассматривать только внутренние элементы связки C_{-1}^N) при фиксированном *N*, то аксиомы $A_1 - A_8$ можно записать в несколько измененном виде и называть их аксиомами инцидентности *N*-мерного проективного пространства.

II. Аксиомы инцидентности N-мерного проективного пространства

Потребуем, чтобы определяющие числа всех элементов, о которых идет речь в аксиомах $A_1 - A_8$, были не меньше -1 и не больше *N*. Мы придем к таким аксиомам.

A_1'. *Существует хотя бы один i-элемент при* $-1 \leqslant i \leqslant N$. A_2' и A_3'' *формулируются так же, как* A_2 и A_3, *но с соблюдением только что высказанного требования*

A_4'. *Каковы бы ни были два элемента, они всегда связаны между собой. Если элементы* **i** *и* **k** $(-1 \leqslant i \leqslant k \leqslant N)$ *связаны слева в* **i** — **l** $(l > 0,$ $i - l \geqslant -1)$, *то они также связаны справа в* **k** + **l** $(k + l \leqslant N)$. *Если элементы* **i** *и* **k** *связаны справа в* **k** + **l**, *то они также связаны слева в* **i** — **l**.

A_5'. *Какова бы ни была связка* C_m^n $(-1 < m \leqslant n < N)$, *существует по крайней мере один элемент* **m** + **1**, *связанный с* **n** *в* **m**, *и по крайней мере один элемент* **n** — **1**, *связанный с* **m** *в* **n**.

A_6'. *Всякая одномерная связка* C_a^{a+2} $(-1 \leqslant a \leqslant N-2)$, *по крайней мере при одном значении a, имеет не менее трех внутренних элементов.*

A_7'. *Каков бы ни был элемент* **i** *связки* C_m^n $(-1 \leqslant m < i < n \leqslant N)$, *существует по крайней мере один элемент* **k**, *определяющий вместе с* **i** *связку* C_m^n.

A_8'. *Если элемент* **r** $(-1 \leqslant r < m < n \leqslant N)$, *инцидентен двум каким-либо внутренним элементам связки* C_m^n, *определяющим эту связку, то* **r** $\#$ **m**.

Если элемент **s** $(-1 \leqslant m < n < s \leqslant N)$ *инцидентен двум каким-либо внутренним элементам связки* C_m^n, *определяющим эту связку, то* **s** $\#$ n.

Теоремы $T_1 - T_{13}$ при соответствующих ограничениях, накладываемых на определяющие числа элементов, о которых идет в них речь, естественно имеют место[2].

---

[1] Впрочем, точками будем вообще называть связки C_a^{a+1} при произвольном a (точка, как пространство), а также $(a+1)$-элементы связки C_a^b при $b > a+1$ (точка, как элемент).

[2] Теоремы $T_1 - T_{13}$, вытекающие из $A_1' - A_8'$ будем обозначать штрихами, то есть через $T_1' - T_{13}'$.

В частности, справедлива T_3 при $k=-1$ и $l=N$: существует N-мерное пространство.

III. Сравнение системы аксиом $A'_1 - A'_8$ с некоторыми другими системами аксиом

Сравнивая ниже аксиомы $A'_1 - A'_8$ с постулатами из книги Ходжа и Пидо [12, гл. VI], мы убедимся в совместности аксиом $A'_1 - A'_8$ [1]. Затем попытаемся проверить, что постулаты К. Менгера, [7] вытекают из аксиом $A'_1 - A'_8$, откуда следует, что из аксиом $A'_1 - A'_8$ вытекают аксиомы линейности и расширения Веблена и Юнга [5].

T_{14}. *Из аксиом $A'_1 - A'_8$ вытекают постулаты Ходжа и Пидо*[2].

Доказательство. Установим следующие соглашения.

Соглашение 1. Понятие инцидентности у Ходжа и Пидо ($S_m \leqslant S_n$) и понятие инцидентности, принятое в настоящей статье ($m \# n$, $m \leqslant n$), тождественны.

Соглашение 2. Линейное подпространство S_k у Ходжа и Пидо понимается и как элемент **k**, и как связка C^k_{-1} в нашем изложении.

Соглашение 3. Сумма и пересечение двух линейных подпространств S_k и S_l есть то же, что правый и левый (соответственно) концы связки, определенной элементами **k** и **l**. Тогда сравнение двух систем аксиом убеждает нас в следующем.

Постулат I утверждает то же, что и A'_2 (во второй своей части).

Постулат II утверждает то же, что и A'_3.

Постулат III утверждает то же, что и T_9 при $b=-1$.

Постулат IV вытекает из аксиомы A_4 при многократном ее применении.

В самом деле, две различные точки связаны слева **в** -1, следовательно, по A_4 связаны справа **в** 1, то есть принадлежат связке C^1_{-1}.

Третья точка, если она не принадлежит связке C^1_{-1}, неинцидентна прямой **1**, но связана с **1** слева в -1 и, следовательно, по A_4 связана справа в **2**, то есть принадлежит связке C^2_{-1}, которой принадлежат и первые две точки, так как они инцидентны 1, а $1 \# 2$.

По методу полной индукции убеждаемся в существовании связки C^p_{-1}, которой принадлежат данные наперед $p+1$ линейно независимых точек.

Для доказательства постулата V рассмотрим n — мерное пространство, которое по T_{10} (при $m=-1$) имеет по крайней мере три точки,

[1] Заметим, кстати, что мы не ставим своей целью составить систему независимых аксиом.

[2] Ходж и Пидо постулируют следующие свойства отношения инцидентности $\subseteq$ [12 стр. 225]:

I. Если $S_h \subseteq S_k$ и $S_k \subseteq S_h$, то $S_k = S_h$.

II. Если $S_p \subseteq S_q$ и $S_q \subseteq S_r$, то $S_p \subseteq S_r$.

III. Каждая прямая содержит по крайней мере три различные точки.

IV. Для любых $p+1$ линейно независимых точек существует по крайней мере одно содержащее их линейное подпространство размерности p.

V. Каждое линейное подпространство размерности p содержит по крайней мере одно множество из $p+1$ линейно независимых точек.

VI. Если $p+1$ линейно независимых точек $P_0, \ldots, P_p$ содержатся в некотором S_q, то каждое содержащее эти точки S_p содержится в этом S_q.

VII. Если $p+1$ точек $P_0, \ldots, P_p$ подпространства S_p линейно независимы, как и $q+1$ точек $Q_0, \ldots, Q_q$ подпространства S_q, а $p+q+2$ точек $P_0, \ldots, P_p, Q_0, \ldots, Q_q$ линейно зависимы, то существует по крайней мере одна точка R, содержащаяся в S_p и S_q одновременно.

VIII. Существует такое целое число n, что имеется по крайней мере одно множество из $n+1$ линейно независимых точек, в то время как всякие m точек при $m > n+1$ линейно зависимы.

три прямые, и т. д., три $(n-1)$-мерных подпространства. Отметим $(n-1)$-мерное подпространство $(\mathbf{n}-\mathbf{1})_1$ данного n-мерного подпространства.

По A'_7 существует по крайней мере одна точка $\mathbf{O}_1$, связанная с $(\mathbf{n}-\mathbf{1})_1$, слева в $-\mathbf{1}$ и справа в $\mathbf{n}$.

Элементы $(\mathbf{n}-\mathbf{1})_1$ и $-\mathbf{1}$ образуют связку C^{n-1}_{-1}; отметим в этой связке $\mathbf{n}-\mathbf{2}$. В этом случае существует точка $\mathbf{O}_2$, которая вместе с $\mathbf{n}-\mathbf{2}$ определяет связку C^{n-1}_{-1}, точки $\mathbf{O}_1$ и $\mathbf{O}_2$ неинцидентны (ибо в противном случае $\mathbf{O}_1$ было бы инцидентно $(\mathbf{n}-\mathbf{1})_1$. $\mathbf{O}_1$ и $\mathbf{O}_2$ по A'_4 определяют связку C^1_{-1}, причем правый конец $\mathbf{1}$ этой связки по A'_8 инцидентен $\mathbf{n}$.

Элементы $\mathbf{n}-\mathbf{2}$ и $-\mathbf{1}$ образуют связку C^{n-2}_{-1}; отметим в этой связке элемент $\mathbf{n}-\mathbf{3}$. По соображениям, приведенным выше, существует точка $\mathbf{O}_3$, которая связана с $\mathbf{n}-\mathbf{3}$ слева в $-\mathbf{1}$ и по A'_4 — справа в $\mathbf{n}-\mathbf{2}$.

$\mathbf{O}_3$ неинцидентна $\mathbf{1}$ ибо, если бы $\mathbf{O}_3$ и $\mathbf{1}$ были инцидентны, то это бы означало, что $\mathbf{n}-\mathbf{2}$ и $\mathbf{1}$ связаны слева в $\mathbf{O}_3$, а следовательно, по A'_4 справа в $\mathbf{n}-\mathbf{1}$, а это в свою очередь означало бы, что $\mathbf{n}-\mathbf{1}\#\#\mathbf{1}\#\mathbf{O}_1$, то есть, по T'_1 $\mathbf{n}-\mathbf{1}\#\mathbf{O}_1$, что не должно иметь места.

$\mathbf{O}_3$ и $\mathbf{1}$ определяют связку C^2_{-1}, которой принадлежат линейно независимые $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$, $\mathbf{O}_3$.

Применяя метод полной индукции, убедимся в том, что подпространство C^n_{-1} содержит $n+1$ линейно независимых точек.

Постулат VI доказывается применением A'_5 после p-кратного применения A'_4 (Имеется в виду, что $-1 < p < q \leqslant N$).

Постулат VII вытекает из $A'_4 \cdot S_m(\mathbf{m})$ и $S_n(\mathbf{n})$ связаны справа в некотором $S_r(\mathbf{r},\ r < m+n+1)$, следовательно, по A'_4 они связаны слева в $\mathbf{m}+\mathbf{n}-\mathbf{r}$ $(m+n-r > -1)$.

Постулат VIII требует, чтобы измерение пространства было зафиксировано и чтобы вне этого пространства не существовало точек, но это же требование содержится в тех ограничениях на определяющие числа элементов, которые накладываются аксиомами $A'_1 - A'_8$. Существование же N-мерного пространства при фиксированном N, как уже об этом было сказано выше, вытекает из T'_3. Таким образом, T_{14} доказана.

T_{15}. *Из постулатов Ходжа и Пидо вытекают аксиомы* $A'_1 - A'_8$.

1. По постулату VIII существует по крайней мере одно множество $N+1$ линейно независимых точек. Мы можем рассматривать одну какую-либо из этих точек как элемент, существование которого постулируется A'_1. Таким образом A'_1 доказана.

2. Так как у Ходжа и Пидо отношения $S_p \leqslant S_q$ и $S_q \geqslant S_p$ эквиваленты, то, следовательно, налицо взаимность инцидентности, которая утверждается первой частью A'_2. Далее, у Ходжа и Пидо доказывается, что если $S_p \leqslant S'_p$, то $S_p = S'_p$, что доказывает вторую часть A'_2.

3. A'_3, как уже отмечалось, утверждает то же, что и постулат II.

4. A'_4 вытекает из постулата VII, предложения, обратного постулату VII и теореме 1 [1].

5. Докажем A'_5 при $m < n$, так как при $m = n$ A'_5 очевидно имеет место.

Пусть точки $P_0, P_1, \ldots, P_m$ составляют базис S_m, а $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ — базис S_n. Так как $S_m \leqslant S_n$, то мы можем выбрать Q_i так, чтобы

[1] Теорема 1 гласит: размерность r пересечения двух линейных подпространств S_p и S_q связана с размерностью t их суммы соотношением $r+t=p+q$.

$Q_0=P_0$, $Q_1=P_1,\dots, Q_m=P_m$. Базисом пространства S_N выберем точки $Q_0, Q_1,\dots, Q_n, Q_{n+1},\dots, Q_N$, где $Q_{n+1},\dots, Q_N$—произвольные точки, определяющие вместе с $Q_0,\dots, Q_n$ данное пространство S_N. Тогда Q_{n+1} линейно независима с $Q_0, Q_1,\dots, Q_n$ и, следовательно, вместе с ними определяет некоторое S_{n+1}, причем $S_m\subset S_{n+1}$, с другой стороны, Q_{n+1} вместе с $Q_0=P_0$, $Q_1=P_1,\dots, Q_m=P_m$ определяет некоторое S_{m+1}, причем $S_{m+1}\subseteq S_{n+1}$ и $S_m\subset S_{m+1}$.
Таким образом, имеем

$$S_m\subseteq S_{m+1}\subseteq S_{n+1}.$$

Суммой $S_{m+1}(Q_0,\dots, Q_m, Q_{n+1})$ и S_n является $S_{n+1}(Q_0,\dots, Q_n, Q_{n+1})$, а пересечением — $S_m(Q_0,\dots, Q_m)$, что и доказывает первую часть аксиомы A'_5. Вторая часть может быть доказана аналогичными рассуждениями [1].

6) A'_6 есть следствие постулата III.

7) Докажем A'_7.

Зададим подпространства S_m, S_i, S_n своими базисами следующим образом:

$$S_m(P_0,\dots, P_m),\ S_i(P_0,\dots, P_m, P_{m+1},\dots, P_i),\ S_n(P_0,\dots, P_i, P_{i+1},\dots, P_n).$$

Точки $P_0,\dots, P_m, P_{i+1},\dots, P_n$ определяют подпространство

$$S_k(P_0,\dots, P_m, P_{i+1},\dots, P_n),\ \text{где}\ k=m+n-i.$$

Очевидно, имеем
$S_kS_i=S_m$, $S_k+S_i=S_n$, что и доказывает A'_7.

8) Две части A'_8 двойственны, поэтому достаточно доказать одну из них.

Докажем вторую часть.

Пусть S_i задано базисом $P_0,\dots, P_m, P_{m+1},\dots, P_i$,

$$S_k\ \text{задано базисом}\ P_0,\dots, P_m, Q_{m+1},\dots Q_i,\dots Q_k;$$

пусть $i+k-m=n$ и точки $P_0,\dots, P_i, Q_{m+1},\dots, Q_k$ линейно независимы. Тогда $S_iS_k=S_m(P_0,\dots, P_m)$ и $S_i+S_k=S_n(P_0,\dots, P_i, Q_{m+1},\dots, Q_k)$.

Пусть далее дано S_s $(s>n)$ такое, что $S_i\subset S_s$ и $S_k\subset S_s$. Тогда на основании постулата VI заключаем, что $S_n\subset S_s$, что и доказывает вторую часть A'_8.

Таким образом, доказана непротиворечивость системы $A'_1-A'_8$. Однако непротиворечивость системы A_1-A_8 остается еще недоказанной.

T_{16}. *Из аксиом $A'_1-A'_8$ вытекают постулаты Менгера* [2].

Для доказательства примем следующие соглашения.

---

[1] Именно, пусть даны $S_m(Q_0, Q_1,\dots, Q_m)$
и

$$S_n(Q_0, Q_1,\dots, Q_m, Q_{m+1},\dots, Q_n).$$

Рассмотрим

$$S_{n-1}(Q_0,\dots, Q_{m-1}, Q_{m+1},\dots, Q_n)$$

Очевидно,

$$S_m+S_{n-1}=S_n\ \text{и}\ S_mS_{n-1}=S_{m-1},$$

где

$$S_{m-1}(Q_0,\dots, Q_{m-1}).$$

[2] Карл Менгер совместно с Францем Альтом и Отто Шрайбером предложил в 1936 году [7] систему постулатов в следующей формулировке.

Соглашение 1. Класс элементов Менгера есть совокупность внутренних элементов (включая концы) связки (например)

$$C_{-1}^{N}, \text{ где } -1 \equiv V,\ N \equiv U.$$

Соглашение 2. Элементы $A+B$ и AB — это правый и левый (соответственно) концы связки, определенной элементами A и B.

Соглашение. 3. Отношение $A \subseteq B$ означает, что элементы A и B инцидентны, и определяющее число элемента A не превышает определяющего числа элемента B.

1) Введем новое обозначение для связки $C_{a-k}^{b+k} \cdot C_r^s$, определенной элементами **a** и **b**, связанными слева **br** $(\mathbf{a}-\mathbf{k})$ и справа **bs** $(\mathbf{b}+\mathbf{k})$, именно, представим эту связку схемой

$$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{s}\quad\left(\text{или}\quad \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{s}\right).$$

Если концы связки неизвестны, то будем ее представлять схемой $\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\ \left(\cdot\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\cdot\right)$.

Доказать постулат Ia, значит, доказать следующее предложение: Пусть **a**, **b**, **c** — три произвольных внутренних элемента[1] связки C_{-1}^{N}. Рассмотрим имеющие место по T_7 и T_{11} связки

$$\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{r},\quad \cdot\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{s},\quad \text{тогда}$$

правый конец связки $\cdot\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{c}}$ *совпадает с правым концом связки* $\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{s}}\cdot$

Рассмотрим связку $\cdot\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}\cdot$, пусть ее правый конец есть t — элемент $\mathbf{t}_1$. По определению O_2 элемент $\mathbf{t}_1$ есть единственный t-элемент[2], инцидентный **r** и **s** и нет ни одного k-элемента ($s < k < t$ при $s > r$ и $r < k < t$ при $r > s$), инцидентного одновременно **r** и **s**.

Постулат I. Операции ассоциативны, то есть

$$a)\ A+(B+C)=(A+B)+C,\qquad a')\ A\,(BC)=(AB)C.$$

Постулат II. Класс содержит один элемент V и один элемент U, так что, если A — какой-либо элемент класса, то

$$a)\ V+A=A,\qquad a')\ U\cdot A=A.$$

Постулат III. Для каждых трех элементов A, B, C

класса имеют место формулы:

$$a)\ A+(A+B)\,C=A+(A+C)\,B,\quad a')\ A\,(AB+C)=A\,(AC+B).$$

Постулат IV. Если $A \subseteq B \subseteq C$, то класс содержит по крайней мере один элемент B такой, что

$$B\overline{B}=A \text{ и } B+\overline{B}=C.$$

Постулат V. Каждая строго монотонная последовательность элементов конечна.

[1] В обозначениях К. Менгера это три элемента A, B, C (соответственно).

[2] При фиксированном t.

Но по T_1 из того, что $\mathbf{a}\#\mathbf{r}$, $\mathbf{b}\#\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}\#\mathbf{t}_1$ $(a<r<t,\ \ b<r<t)$, следует, что $\mathbf{a}\#\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{b}\#\mathbf{t}_1$.

Аналогичные рассуждения убеждают нас в том, что $\mathbf{b}\#\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{c}\#\mathbf{t}_1$. Следовательно, $\mathbf{t}_1$ есть t-элемент, одновременно инцидентный **a**, **b** и **c**.

Далее, среди t-элементов нет элемента $\mathbf{t}_2$, отличного от $\mathbf{t}_1$, который также был бы инцидентен одновременно **a**, **b** и **c**. Если бы такой элемент существовал, то он был бы инцидентен по A_8' элементу **r** и элементу **s**, а следовательно, и $\mathbf{t}_1$. Но по A_2', если $\mathbf{t}_1\#\mathbf{t}_2$, то $\mathbf{t}_2\equiv\mathbf{t}_1$.

Отметим, наконец, что нет ни одного k-элемента (k между наибольшим из трех чисел a, b, c и t), инцидентного одновременно **a**, **b** и **c**. Если бы такой элемент был, то по A_8' он был бы инцидентен одновременно **r** и **s**, но такого элемента быть не может, раз $\mathbf{t}_1$ есть правый конец связки $\cdot\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{t}_1$. Из хода рассуждений видно, что $\mathbf{t}_1$ есть правый конец связки $\cdot\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{c}}\cdot$ и одновременно — правый конец связки $\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{s}}\cdot$. Тем самым постулат Ia доказан. Аналогичным образом можно показать, что из аксиом $A_1''-A_8'$ вытекает постулат Ia′.

2) Нет необходимости доказывать постулат II, так как его справедливость непосредственно ясна (см. соглашение 1).

3) Докажем постулат IIIa.

Пусть a, b, c — произвольные внутренние элементы связки C_{-1}^N. Пусть a и b определяют связку

$$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}, \tag{1}$$

$$a \text{ и } c \text{ — связку } \mathbf{s}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s} \tag{2}$$

пусть, далее, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}$ и **c** определяют связку

$$\mathbf{t}\cdot\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{r}-\mathbf{t}. \tag{3}$$

Докажем прежде всего, что левый конец связки $\cdot\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{a}}\cdot$ совпадает с левым концом **s** связки (2).

Имеем $\mathbf{s}\#\mathbf{a}$, $s\leqslant a$ (см. 2);

$$\mathbf{s}\#\mathbf{a}\#\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r},\ s\leqslant a\leqslant a+b-r \quad (\text{см. } 1);$$

$$\mathbf{s}\#\mathbf{c},\ s\leqslant c \quad (\text{см. } 2);$$

$s\not> t$, так как $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}$ и **c** связаны слева в **t**, а $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}\#\mathbf{s}$ и $\mathbf{c}\#\mathbf{s}$ (см. O_1), следовательно, $s\leqslant t$ и по A_8' $\mathbf{s}\#\mathbf{t}$.

Если $s=t$ и $\mathbf{s}\#\mathbf{t}$, то **s** и **t** уже совпадают, и раз $\mathbf{t}\equiv\mathbf{s}\#\mathbf{a}$, то левым концом связки

$$\cdot\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{a}}\cdot$$

является **s**.

Пусть $s<t$. Мы имеем $\mathbf{s}\#\mathbf{t}$, $\mathbf{s}\#\mathbf{a}$. Убедимся в том, что нет k-элемента (k между s и наименьшим из a и t), одновременно инцидентного a и t. Если бы такой элемент был, то он был бы инцидентен **a** (по предположению) и **c** (см. 3), что невозможно (см. 2). Следова-

тельно, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{t}$ связаны слева $\mathbf{bs}$, то есть определяют связку

$$s \cdot \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь связку

$$x \cdot \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}}{\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s}} \cdot \tag{5}$$

и докажем, что ее левый конец x совпадает с правым концом $\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s}$ связки 4.

Обозначим элементы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ через A, B, C (соответственно) и воспользуемся постулатом I, который уже доказан.

Правый конец связки 5 есть $(B+A)+(A+C)$, но по постулату I

$$(B+A)+(A+C)=[(B+A)+A]+C=[B+(A+A)]+C.$$

$A+A$ есть правый конец связки, определенной элементами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$, но у нас один элемент $\mathbf{a}$, следовательно, правый конец связки, определенной элементами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$, есть сам элемент $\mathbf{a}$.
Итак

$$(B+A)+(A+C)=(B+A)+C,$$

иначе правый конец связки 5 совпадает с правым концом связки 3, то есть является элементом $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{r}-\mathbf{t}$.
Отсюда по основной формуле, примененной к связке (5), имеем:

$$x+(a+b+c-r-t)=(a+a-r)+(a+c-r), \text{ откуда } x=a+t-s,$$

то есть левый конец связки (5) имеет то же определяющее число, что и правый конец связки (4).

Докажем, что они совпадают. Для этого обозначим правый конец связки (4) через $(\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4$, а левый конец связки (5) через $(\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_5$. Докажем, что

$$(\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4 \equiv (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_5.$$

Имеем,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r} \# \mathbf{a},\ a+b-r \geqslant a \quad (\text{см. } 1)$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r} \# \mathbf{t},\ a+b-r \geqslant t \quad (\text{см. } 3),$$

следовательно, по A'_8

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r} \# (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4,\ a+b-r \geqslant a+t-s \quad (\text{см. } 4).$$

Аналогично

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s} \# \mathbf{a} \qquad (\text{см. } 2)$$

и

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s} \# \mathbf{c} \# \mathbf{t} \quad (\text{см. } 2,3)$$
$$a+c-s \geqslant a+t-s, \text{ ибо } c \geqslant t \ (\text{см. } 3).$$

Следовательно, по A'_8

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s} \# (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4 \quad (\text{см. } 4).$$

Итак, доказано, что

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r} \# (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4,\ a+b-r \geqslant a+t-s$$

и

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s} \# (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4,\ a+c-s \geqslant a+t-s.$$

Но элементы $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{s}$ уже связаны слева (см. 5) в$(\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_5$, следовательно (в силу единственности левого конца связки 5), $(\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_4 \# (\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s})_5$.

Итак, доказано, что левый конец связки 5 совпадает с правым концом связки 4. В обозначениях Менгера это означает, что доказана справедливость такого соотношения

$$(A+B)(A+C)=A+(A+B)C \quad (\text{см. } 4,\ 5,\ 3).$$

Это соотношение, если переставить B и C местами, можно записать еще так

$$(A+C)(A+B)=A+(A+C)B.$$

Элементы, стоящие в левых частях этих двух соотношений, совпадают, так как и в той и в другой формуле элемент, стоящий в левой части, есть один и тот же элемент $\mathbf{a}+\mathbf{t}-\mathbf{s}_5$, следовательно,

$$A+(A+B)C=A+(A+C)B.$$

Итак, постулат IIIa доказан. Аналогичные рассуждения убедят нас в том, что из $A_1'-A_8'$ также вытекает IIIa′.

4) Постулат IV утверждает то же, что и A_7'.

5) Смысл постулата V станет ясным, если принять во внимание следующие определения, имеющиеся у Менгера.

„Элемент A есть часть элемента B, если элементы A, B удовлетворяют одному из двух эквивалентных соотношений $A+B=B$, $AB=A$. Мы будем писать $A\subseteq B$ или $B\supseteq A$.

Элементы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют строго монотонную последовательность, если имеют место или соотношение

$$A_1\subsetneq A_2\subset\ldots\subset A_n$$

или

$$A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_n\text{"}\ [7].$$

Следовательно, постулат V требует, чтобы пространство было конечномерным, но это же требование содержится и в аксиомах $A_1'-A_8'$. Таким образом, T_6 полностью доказана.

Менгер выводит из своих постулатов аксиомы линейности и расширения Веблена и Янга для того, чтобы доказать, что его постулаты I—V представляют собой „достаточный базис для построения (развертывания) проективной геометрии".

Если из $A_1'-A_8'$, как здесь показано, вытекают постулаты I—V Менгера, а из постулатов Менгера, как показано у Менгера, вытекают аксиомы линейности и расширения Веблена и Янга, то, следовательно, аксиомы $A_1'-A_8'$ также представляют собой достаточный базис для развертывания проективной геометрии.

IV. Заключение

Если закрепить левый конец связки C_{-1}^{N}, а правый конец сделать свободным в том смысле, что N может неограниченно возрастать, то, по-видимому, будет открыт путь к введению понятия бесконечномерного пространства C_{-1}^{∞} (вообще C_a^{∞}).

Если не закреплять и левого конца, то речь будет идти о бесконечномерном пространстве другого типа $C_{-\infty}^{+\infty}$. Система аксиом A_1—A_8 является аксиоматическим фундаментом такого пространства.

Если отказаться от требования считать определяющие числа i-элементов целыми числами и допустить, что i принимает произвольные действительные значения, и если сохранить формулировки аксиом A_1, A_2, A_3, A_4, A_7 A_8 и определений O_1, O_2, O_3, O_4, O_6; если T_4 принять в качестве A_5, T_{10} — в качестве A_6, сохранить прежнее определение связки (O_5), но не вводить понятия измерения связки, то аксиомы A_1 — A_8 приведут к некоторой новой геометрии, которую, возможно, следует назвать континууммерной проективной геометрией и сравнить с непрерывномерной геометрией Неймана [8] [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Fano. Sui postulatti fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. Gior. di Math., **30**, 1, (1891).
2. К. А. Андреев. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий. Математический сборник, т. 9, 1879.
3. G. Veronese Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradlinieger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Leipzig, B. G. Teubner, 1894.
4. E. Bertini. Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi. Pisa, 1907.
5. O. Veblen and J. W. Joung. Projective geometry, Vol. 1, 1910, 1916; Vol. II, 1918.
6. H. F. Baker. Principles of geometry, vol. I. Foundations (second edition, 1929).
7. Karl Menger. New foundations of projective and affine geometry. Annals of Mathematics, **37**, 2, (1936).
8. J. V., Neumann. Continuos geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 22, 92—100 (1936). Реферат в Zentralblatt für Math. B. 14, s. 223.
9. W. J. Gliwenko. Theorie generale des stryctures. Paris, 1938.
10. Г. Биркгоф. Теория структур. М., 1952.
11. Р. Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., 1955.
12. В. Ходж и Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, т. 1. М., 1954.

[1] Биркгоф [10 стр. 182] указывает, что „интересная конструкция, аналогичная неймановской, была предложена Аронжайном и В. И. Гливенко“ [9].