

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

58|93



**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ
И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

**РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК**

Основан в 1965г.

ISSN 0321—4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1993. Вып. 58. 1—140.

«ОСНОВА»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

В Ы П У С К 58

Харків
Видавництво «Основа»
при Харківському державному університеті
1992

Сборник содержит статьи по теории целых и субгармонических функций, теории динамических систем, многомерным функциональным уравнениям, геометрии банаховых пространств, математической физике.
Для преподавателей, научных работников, специалистов.

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секретарь), Ю. М. Березанский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, А. В. Кужель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков, пл. Свободы, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $u(z)$, $z \in C^n$ — плюрисубгармоническая функция не более чем нормального типа при порядке $\rho > 0$. Последнее означает, что $u(z) \leq c_1 |z|^\rho + c_2$, где c_1, c_2 — какие-либо положительные постоянные. Условимся класс всех таких функций обозначать через $\text{PSH}(C^n, \rho)$. Функция $u(z) \in \text{PSH}(C^n, \rho)$ называется функцией вполне регулярного роста* (в. р. р.), если в пространстве обобщенных функций $D'(C^n)$ семейство функций $u^{[t]} = t^{-\rho} u(tz)$ имеет при $t \rightarrow +\infty$ предел**. Заметим, что этот предел, если он существует, совпадает с регуляризованным радиальным индикатором функции $u(z)$, т. е. с функцией

$$L_f^*(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} L_f(\zeta),$$

где

$$L_f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} u^{[t]}(z).$$

Пусть l — комплексная прямая в C^n . Это означает, что при некотором $\lambda \in C^n \setminus \{0\}$ множество l может быть задано в виде $l = \{z: z = \lambda \omega, \omega \in C\}$. Совокупность всех «прямых» l , как известно, образует комплексное многообразие, а именно, проективное пространство P^{n-1} . Сужение функции $u(z)$ на l обозначим через u_l . Очевидно, что функция u_l является субгармонической функцией переменного ω , параметризующего l . В [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $u(z) \in \text{PSH}(C^n, \rho)$ и пусть для почти всех $l \in P^{n-1}$ функция u_l является функцией в. р. р. (в $C = l$). Тогда функция $u(z)$ имеет в. р. р. в C^n .

Мы покажем здесь, что подобного характера утверждение имеет место и при замене комплексных прямых комплексными плоскостями (подпространствами) произвольной размерности. Для точной формулировки полученного результата введем необходимые обозначения.

Через L будут обозначаться точки грассманового многообразия $G(n, k)$, т. е. k -мерные подпространства в C^n . Каждое такое подпространство может быть задано в виде $L = \{z \in C^n: z_j =$

* Теория функций в. р. р. (целых, субгармонических, плюрисубгармонических), ведущая свое начало от работ Б. Я. Левина и А. Пфлюгера, посвящена обширная литература. Отметим здесь лишь монографии [1—3], в которых дано систематическое изложение многих вопросов теории, а также обзоры [4, 5].

** Это одно из эквивалентных определений функции в. р. р.

*** Формально в [6] рассматривались лишь целые функции в C^n . Однако, по существу, там речь шла о функциях плюрисубгармонических. Отметим также, что в [6] использовалось классическое определение функций в. р. р., а переход к сходимости в $D'(C)$ и $D''(C^n)$ и связанному с этим новому, используемому здесь определению, был ключевым моментом доказательства содержащихся в [6] результатов.

$= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \in C^k, \quad j = 1, \dots, n$ и естественным образом отождествлено с C^k . Атлас многообразия $G(n, k)$ состоит из карт $G^I(n, k) = (\alpha_I^{-1}(V_I), \alpha_I^{-1})$, где: $I = (i_1, \dots, i_k)$ — упорядоченная $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ выборка из чисел $1, \dots, n$; V_I — пространство $C^{k(n-k)}$ всех комплексных $k \times n$ матриц A , столбцы которых с номерами $i_1, \dots, i_k$ образуют единичную $k \times k$ -матрицу; α_I — отображение из V_I в $G(n, k)$, ставящее в соответствие матрице A подпространство L , натянутое на векторы-строки матрицы A . Через $G_{\bar{L}}(n, k)$, где $\bar{L} \in G(n, k-1)$, обозначим множество тех $L \in G(n, k)$, которые содержат $\bar{L}$. Это подмногообразие грассманиана $G(n, k)$ следующим образом отождествляется с P^{n-k} .

Обозначим через $(\bar{L}, L)^\perp$, где $L \in G_{\bar{L}}(n, k)$, множество всех векторов из L , ортогональных к $\bar{L}$, а через $\bar{L}^\perp$ обозначим множество всех векторов из C^n , ортогональных к $\bar{L}$. Ясно, что $(\bar{L}, L)^\perp$ — комплексная прямая, $\bar{L}^\perp$ — подпространство в C^n комплексной размерности $n-k+1$, $(\bar{L}, L)^\perp \subset \bar{L}^\perp$, совокупность всех $(\bar{L}, L)^\perp$ совпадает с $\bar{L}^\perp$ и при этом различным $L \supset \bar{L}$ отвечают различные $(\bar{L}, L)^\perp$. Следовательно, множество $\{(\bar{L}, L)^\perp\}_L \in G_{\bar{L}}(n, k)$ есть проективное пространство P^{n-k} , полученное проективизацией пространства $C^{n-k+1} = \bar{L}^\perp$.

Обозначим для краткости построенное выше биективное отображение $G_{\bar{L}}(n, k) \rightarrow P^{n-k}$ через π . Таким образом $(\bar{L}, L)^\perp = \pi L$. Определим теперь интеграл по $G_{\bar{L}}$. Именно, положим

$$\int_{G_{\bar{L}}} \Phi(L) d\omega_L(L) = \int_{P^{n-k}} \Phi(\pi^{-1}l) dW_{2n-2k}(l), \quad (1)$$

где dW_{2n-2k} — введенный стандартным образом* элемент объема на P^{n-k} .

Естественным образом также определяются понятия множества меры ноль на $G_{\bar{L}}$ и соответственно понятие «почти всюду». Именно, множество $E \subset G_{\bar{L}}$ называется множеством меры ноль (на $G_{\bar{L}}$), если в P^{n-k} равна нулю мера множества πE . Заметим еще, что сужение u_L плюрисубгармонической в C^n функции $u(z)$ на подпространство L является плюрисубгармонической функцией переменных $\omega_1, \dots, \omega_k$ параметризующих L . Будем также говорить, что u_L — функция в.р.р., или, что то же самое, функция u является функцией в.р.р. на L , если u_L — функция в.р.р. от указанных параметров $\omega_1, \dots, \omega_k$.

Теорема 2. Пусть $u \in \text{PSH}(C^n, \rho)$ и пусть при некотором $\bar{L} \in G(n, k-1)$ для почти всех $L \in G_{\bar{L}}$ функции u_L являются функциями в.р.р. Тогда и сама функция $u(z)$ является функцией в.р.р.

* Об интегрировании по проективному пространству см., например, [3, 7, 8].

Доказательство. Прежде всего сведем интегрирование по C^n к интегрированию по $G_{\tilde{L}}$ и P^{n-k} .

Пусть Φ — какая-нибудь суммируемая функция в C^n . Тогда

$$\int_{C^n} \Phi(z) d\omega(z) = \int_{\tilde{L}} d\sigma \int_{\tilde{L}^\perp} \Phi d\tau, \quad (2)$$

где $d\omega(z)$, $d\sigma$ и $d\tau$ — элементы объемов в пространствах $C^n_{(z)}$, $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^\perp$, индуцированные метрикой пространства C^n . Выберем в $\tilde{L}^\perp$ какую-либо ортонормальную систему координат $\xi_1, \dots, \xi_{n-k+1}$, а комплексные прямые l — из $(\tilde{L}, L)^\perp$, т. е. точки соответствующего пространства P^{n-k} будем представлять в виде $l = \{\xi \in \tilde{L}^\perp : \xi_1 = \lambda_1 \kappa, \dots, \xi_{n-k} = \lambda_{n-k} \kappa, \xi_{n-k+1} = \kappa, \kappa \in C\}$, $\lambda \in C^{n-k}$. Тогда, учитывая известный вид (см., например, [7]) элемента объема dW_{2n-2k} , имеем

$$\begin{aligned} d\tau &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} d\xi_1 \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{n-k+1} \wedge d\bar{\xi}_{n-k+1} = \\ &= |\kappa|^{2n-2k} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} (d\lambda_1 \wedge d\bar{\lambda}_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_{n-k} \wedge d\bar{\lambda}_{n-k} \wedge d\kappa \wedge d\bar{\kappa}) = \\ &= (1 + |\lambda|^2)^{n-k+1} |\kappa|^{2n-2k} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k+1} d\kappa \wedge d\bar{\kappa} \wedge \\ &\wedge \frac{d\bar{\lambda}_1 \wedge d\bar{\lambda}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\lambda}_{n-k}}{(1 + |\lambda|^2)^{n-k+1}} = |\xi|^{2(n-k)} dS_l \wedge dW_{2n-2k}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $dS_l = \frac{i}{2} |\kappa|^{-2} d\kappa \wedge d\bar{\kappa}$ — индуцированный евклидовой метрикой пространства C^n элемент площади на l .

Заметим далее, что, как следует из сказанного перед формулировкой теоремы 2, каждое пространство $L \in G_{\tilde{L}}$ имеет вид $L = l \times \tilde{L}$, $l \in \tilde{L}^\perp$, и если $\xi_1, \dots, \xi_{n-k+1}$ это указанные выше координаты ортогональной проекции точки $z \in C^n$ на $\tilde{L}^\perp$, то $|\xi|$ есть расстояние $\text{dist}(z, \tilde{L})$ от точки z до подпространства $\tilde{L}$. Отсюда и из (1) — (3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{C^n} \Phi(z) d\omega(z) &= \int_{\tilde{L}} d\sigma \int_{\tilde{L}^\perp} \Phi d\tau = \\ &= \int_{\tilde{L}} d\sigma \int_{P^{n-k}} dW_{2n-2k}(l) \int_e \Phi(z) [\text{dist}(z, \tilde{L})]^{2n-2k} dS_l = \\ &= \int_{P^{n-k}} dW_{2n-2k}(l) \int_{\tilde{L} \times l} \Phi [\text{dist}(z, \tilde{L})]^{2n-2k} d\sigma dS_l = \\ &= \int_{G_{\tilde{L}}} d\omega_L(L) \int_{\tilde{L}} [\text{dist}(z, \tilde{L})]^{2n-2k} \Phi(z) d\omega_L(z), \end{aligned} \quad (4)$$

где $d\omega_L(z)$ — элемент объема на L .

Согласно определению функции в.р.р. и условию доказываемой теоремы почти для всех $L \in G_L$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_L u^{(t)} \varphi d\omega_L = \int_L L_u^* \varphi d\omega_L, \quad \forall \varphi \in D(L), \quad (5)$$

где $D(L)$ — пространство основных функций на L . Далее, поскольку функция u имеет не более чем нормальный тип при порядке ρ , семейство функций $u^{(t)}$ равномерно ограничено сверху на каждом компакте в C^n . Отсюда, очевидно, следует ограниченность по L и t интегралов

$$\int_L u^{(t)} \psi |_L d\omega_L, \quad \forall \psi \in D(C^n)$$

Беря в качестве φ функцию $\psi \cdot [\text{dist}(z, \bar{L})]^{2n-2k}$ и используя теорему о мажорированной сходимости, получаем,

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{C^n} \psi u^{(t)} d\omega = \int_{\bar{L}} d\omega_L \int_{\bar{L}} \psi \cdot [\text{dist}(z, \bar{L})]^{2n-2k} L_u^* d\omega_L = \int_{C^n} \psi \cdot L_u^* d\omega.$$

Тем самым доказано существование в $D'(C^n)$ предела $\lim_{t \rightarrow \infty} u^{(t)}$. Это означает, что $u(z)$ — функция в.р.р. Теорема доказана.

К теореме 2 близка

Теорема 3. Пусть функция $u(z)$ из $\text{PSH}(C^n, \rho)$ на почти всех $L \in G(n, k)$ имеет в.р.р.. Тогда $u(z)$ является функцией в.р.р. в C^n .

Для доказательства этой теоремы, как следует из изложенного выше, достаточно показать существование хотя бы одного такого $\bar{L} \in G(n, k-1)$, которое почти для всех $L \in G_L$ функция u_L является функцией в.р.р.. В действительности же почти все $\bar{L} \in G(n, k-1)$ обладают указанным свойством. Это с очевидностью вытекает из следующего равенства:

$$\int_{G(n,k)} \Phi(L) d\omega_{(n,k)}(L) = \int_{G(n,k-1)} d\omega_{(n,k-1)}(\bar{L}) \int_{G_L} \Phi(L) \gamma(L, \bar{L}) d\omega_L(L), \quad (6)$$

где $d\omega_{(n,k)}(L)$ — элемент объема на $G(n, k)$, а $\gamma(L, \bar{L})$ — некоторая непрерывная функция на множестве $\{(L, \bar{L}) : \bar{L} \in G(n, k-1), L \in G(n, k), L \subset \bar{L}\}$. Конкретный вид функции $\gamma(L, \bar{L})$ несущественен. В наличии равенства (6) можно удостовериться путем перехода к локальным координатам какой-либо из карт.

Список литературы: 1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. Азарин В. С. Теория роста субгармонических функций. Х., 1982. 74 с. 3. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М., 1989. 350 с. 4. Ронкин Л. И. Целые функции // Совр. проблемы математики. Фундамент направления. 1986. 39. С. 5—36. 5. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции // Совр. проблемы математики. Фундамент направления. 1990. 85. С. 5—186. 6. Агранович П. З., Ронкин Л. И. О функциях вполне регулярного роста. Ann. polon. mat. 1981. 39. № 2. С. 239—254. 7. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971. 422 с. 8. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М., 1985. 272 с.

Поступила в редколлегию 15.07.90

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $F(x)$ — локально-аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на окрестность точки $F(x_0) \in \mathbb{R}^n$, для которого x_0 не является неподвижной: $F(x_0) \neq x_0$.

Изучим вопрос существования локально-аналитического решения $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ функционального уравнения

$$g(x, \varphi(x), \varphi(F(x))) = 0, \quad (1)$$

в котором g — заданное локально-аналитическое отображение, действующее из окрестности некоторой точки $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^k$. Этот вопрос становится нетривиальным, если требовать, чтобы разыскиваемое решение было аналитическим в некоторой связной области, содержащей точки x_0 и $F(x_0)$.

Если $F(x) = x + l_1$, $l_1 \in \mathbb{R}^n$, то (1) превращается в уравнение со сдвигом, к которому, например, легко сводится скалярное конечно-разностное уравнение на прямой

$$\sum_{p=0}^s a_p(x) \varphi(x + p) = h(x).$$

Подавляющее число известных результатов о разрешимости таких уравнений относится к случаю постоянных коэффициентов $a_0, \dots, a_p$.

В теореме 1 мы доказываем локальную разрешимость уравнения.

С уравнением (1) тесно связана задача классификации локальных отображений относительно сопряженности $F \rightarrow \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. Случай, когда x_0 — неподвижная точка для F , имеет большую историю. Полученные здесь результаты достаточно полно изложены в [1, 2].

Простейшим диффеоморфизмом, «сдвигающим» точку, является $x \rightarrow x + e_1$, $e_1 \in \mathbb{R}^n$. Вопрос о сопряженности F с таким сдвигом приводит к известному уравнению Абеля

$$\Phi(F(x)) = \Phi(x) + e_1. \quad (2)$$

Если требовать, чтобы Φ был диффеоморфизмом общей связной окрестности точек x_0 и $F(x_0)$, то из (2) с необходимостью вытекает, что $\det F'(x_0) > 0$, т. е. что диффеоморфизм F не меняет ориентацию. В теореме 2 мы докажем, что сохранение или обращение ориентации является единственным инвариантом относительно сопряжения.

Перейдем к формулировкам полученных нами результатов.

Теорема 1. Пусть F — аналитический диффеоморфизм, определенный в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и пусть $F(x_0) \neq x_0$. Предположим, что локально-аналитическое отображение $g(x, y, z)$, действующее из некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$\times R^m$ в пространство R^k , удовлетворяет условию $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ и что матрицы Якоби

$$A_0 = \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \quad A_1 = \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}$$

имеют ранг k .

Если $n > 1$ или $n = 1$ и $F'(x_0) > 0$, то существует стягиваемая область* $U \subset R^n$, содержащая точки x_0 и $F(x_0)$, и аналитическая в U вектор-функция φ , которая удовлетворяет условиям $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(F(x_0)) = z_0$ и уравнению (1) в некоторой окрестности точки $x_0 \in R^n$.

При $n = 1$ и $F'(x_0) < 0$ утверждение теоремы 1 неверно. Достаточно рассмотреть скалярное уравнение $\varphi(1-x) + \varphi(x) = \gamma(x)$, $x \in R^1$, где правая часть γ аналитична в малой окрестности точки $x = 0$. Для разрешимости этого уравнения в функциях, аналитических на отрезке $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы функция γ была аналитической на $[0, 1]$ и четной относительно точки $x = \frac{1}{2}$, т. е.

$$\gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \gamma\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В условиях теоремы 1 мы сводим вопрос о разрешимости уравнения (1) к такому же вопросу для уравнения

$$\varphi(F(x)) = Q(x, \varphi(x)), \quad \varphi(x_0) = 0, \quad \varphi(F(x_0)) = 0. \quad (3)$$

где $Q(x, y)$ — локально-аналитическое отображение, определенное в окрестности точки $(x_0, 0)$, для которого $Q(x_0, 0) = 0$, $\det \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y} \neq 0$. С уравнением (3) естественно связать локальный послыйный диффеоморфизм

$$G(x, y) = (F(x), Q(x, y)). \quad (4)$$

Решение φ уравнения (3) определяет в пространстве $R^n \times R^m$ график $(x, \varphi(x))$, являющийся связным аналитическим n -мерным подмногообразием M . Под действием диффеоморфизма G часть M , лежащая в окрестности точки $(x_0, 0)$, переходит в часть, лежащую в окрестности точки $(F(x_0), 0)$. Таким образом, из теоремы 1 вытекает существование в пространстве $R^n \times R^m$ связного локально инвариантного относительно G подмногообразия. Вводя преобразование

$$\Phi(x, y) = (H(x), T(x, y)), \quad (5)$$

положим

$$\tilde{G} = \Phi^{-1} \circ G \circ \Phi, \quad \tilde{G}(x, y) = (\tilde{F}(x), \tilde{Q}(x, y)). \quad (6)$$

Если ψ есть решение уравнения

$$\psi(\tilde{F}(x)) = \tilde{Q}(x, \psi(x)), \quad \psi(x_0) = 0, \quad \psi(\tilde{F}(x_0)) = 0, \quad (7)$$

то $\varphi(x) = T(H^{-1}(x), \psi(H^{-1}(x)))$ является решением уравнения (3). Поэтому уравнение (3) естественно свести к его простейшей «нор-

* Диффеоморфна открытому кубу пространства R^n .

мальной» форме относительно группы (6). Для описания такой формы положим $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $I = \{x \in \mathbb{R}^n : x = te_1, 0 \leq t \leq 1\}$, $J = \text{diag}(\delta, 1, \dots, 1)$, где $\delta = \text{sign det } \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y}$ и $J_0 = \text{diag}(1, \varepsilon, 1, \dots, 1)$, где $\varepsilon = \text{sign det } F'(x_0)$ при $n \geq 2$ и $J_0 = 1$ при $n = 1$.

Теорема 2. Пусть F — аналитический диффеоморфизм, определенный в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $F(x_0) \neq x_0$, и пусть $Q(x, y)$ — локально-аналитическое отображение окрестности точки $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, для которого $Q(x_0, 0) = 0$, $\text{det } \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y} \neq 0$. Если $n > 1$ или $n = 1$ и $F'(x_0) > 0$, то существует такой аналитический диффеоморфизм Φ вида (5), где $H(0) = x_0$, $H(e_1) = F(x_0)$, определенный в окрестности прямого произведения $I \times 0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, который приводит отображение $G(x, y) = (F(x), Q(x, y))$ к нормальной форме

$$\tilde{G}(x, y) = (J_0 x + e_1, Jy). \quad (8)$$

Уравнение (7), соответствующее диффеоморфизму (8), имеет вид

$$\psi(J_0 x + e_1) = J\psi(x). \quad (9)$$

Тривиальному решению $\psi = 0$ этого уравнения соответствует решение $\varphi_0(x) = T(H^{-1}(x), 0)$ уравнения (3). Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\psi(\xi, \eta) = e^{\xi \ln J} \omega(\xi, e^{-\xi \ln J_0} \eta), \quad x = (\xi, \eta), \quad (10)$$

где $J_0 x = (\xi, J_0 \eta)$, а $\omega(x)$ — произвольная, e_1 — периодическая функция: $\omega(x + e_1) = \omega(x)$. Поэтому общее решение уравнения (3), достаточно близкое к решению φ_0 имеет вид $\varphi(x) = T(H^{-1}(x), \psi(H^{-1}(x)))$, где ψ определяется согласно (10) с достаточно малой e_1 — периодической функцией ω . Для того чтобы получить вещественное решение φ , нужно в формуле (10) заменить ψ на $\text{Re } \psi$. В описанном смысле теорему 2 можно считать теоремой о приведении (3) к простейшему уравнению (9). Из возможности такого приведения, в частности, получается приведение к нормальной форме «первой координаты» F .

Следствие. Пусть F — аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на окрестность образа $F(x_0) \neq x_0$. Если $n \geq 2$ или $n = 1$ и $F'(x_0) > 0$, то существует аналитический диффеоморфизм Φ , определенный в окрестности отрезка I , для которого $\Phi(0) = x_0$, $\Phi(e_1) = F(x_0)$ и в некоторой окрестности V начала координат выполняется равенство

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(x) = J_0 x + e_1, \quad x \in V, \quad (11)$$

где $J_0 = 1$ при $n = 1$.

В случае $n = 1$ диффеоморфизм F , определенный на отрезке $[x_0, F(x_0)]$ и меняющий ориентацию, имеет неподвижную точку на нем. Это приводит к появлению инвариантов, отличных от ориентации и, в частности, препятствует сопряжению F с «обратным сдвигом» $x \rightarrow e_1 - x$.

Рассмотрим в качестве примера диффеоморфизм $F(x) = 1 + cx$, $c \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^1$. Точка $a = (1 - c)^{-1}$ является неподвижной для F . Если $c > 0$, то полагая

$$\Phi(x) = \frac{e^{cx} - 1}{c - 1},$$

получим диффеоморфизм оси $\mathbb{R}^1$ на полуось $(a, +\infty)$, который приводит F к стандартному сдвигу $\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}^1$. В случае $c < 0$, в отличие от предыдущего, $a \in [0, 1]$ и при $c \neq -1$ F не может приводиться к обратному сдвигу $x \rightarrow 1 - x$. Действительно, уравнение $1 + c\Phi(x) = \Phi(1 - x)$, $c < 0$, $c \neq -1$ не имеет аналитического на отрезке $[0, 1]$ решения, отличного от постоянного $\Phi(x) \equiv a$.

Если диффеоморфизм F сохраняет ориентацию, то в (11) $J_0 = E$, и равенством $F_t = \Phi^{-1} \circ (\cdot + te_1) \circ \Phi$ F включается в локально-аналитический поток F_t , который по «ременной» переменной t аналитичен в окрестности отрезка $[0, 1]$.

§ 2. Вспомогательные построения

Прежде всего, в качестве предварительного результата мы установим, что диффеоморфизм F приводится к виду, близкому к нормальной форме (11).

Лемма 1. Пусть F — аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на окрестность образа $F(x_0) \neq x_0$. Тогда при каждом фиксированном $N > 0$ существует аналитический диффеоморфизм Φ , определенный в окрестности отрезка I , для которого $\Phi(0) = x_0$, $\Phi(e_1) = F(x_0)$ и выполняется равенство

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(x) = J_0 x + e_1 + O(\|x\|^N), \quad (12)$$

где $J_0 = \text{sign } F'(x_0)$ при $n = 1$.

Доказательство. Аффинное преобразование $\Phi(x) = cx + x_0$, в котором $c^{-1}(F(x_0) - x_0) = e_1$ приводит F к виду $\tilde{F} = \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$, где $F(0) = e_1$. Поэтому в дальнейшем примем $x_0 = 0$, $F(x_0) = e_1$, так что $F(x) = e_1 + Ax + f(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

Докажем существование такого диффеоморфизма Ψ окрестности отрезка $[0, e_1]$ на образ, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(e_1) = e_1$, приводящего F к виду $F_1(x) = \Psi^{-1} \circ F \circ \Psi(x) = e_1 + J_0 x + f_1(x)$, где $f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 0$. Нетрудно проверить, что для этой цели достаточно в качестве Ψ взять такой диффеоморфизм, для которого

$$\Psi(0) = 0, \Psi'(0) = E, \Psi(e_1) = e_1, \Psi'(e_1) = J_0 A. \quad (13)$$

При этом, согласно определению матрицы J_0 , имеем $\det J_0 A > 0$.

Полагая для краткости $B = J_0 A$, предположим вначале, что $B = E + \omega$, где $\|\omega\| \leq \frac{1}{4}$. Выберем аналитическую вектор-функцию $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую условиям $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h(e_1) = 0$, $h'(e_1) = E$ и положим $\Phi(x; \omega) = x + \omega h(x)$.

Если дополнительно потребовать, чтобы выполнялась оценка $\|h'(x)\| \leq 2$, то $\Phi(x; \omega)$ будет диффеоморфизмом пространства R^n , удовлетворяющим условиям (13).

В общем случае, благодаря условию $\det B > 0$, оператор B может быть представлен в виде конечного произведения $B = (E + \omega_s)(E + \omega_{s-1}) \dots (E + \omega_1)$, где $\|\omega_k\| \leq \frac{1}{4}$. Для того чтобы получить (13), теперь достаточно в качестве Ψ взять суперпозицию $\Psi = \Phi(\cdot, \omega_s) \circ \Phi(\cdot, \omega_{s-1}) \circ \dots \circ \Phi(\cdot, \omega_1)$.

Таким образом, для доказательства (12) достаточно рассмотреть диффеоморфизм

$$F(x) = e_1 + J_0 x + f(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0. \quad (14)$$

Положим

$$\Psi_0(x) = x + f(J_0 \tau(x)), \quad (15)$$

где аналитическая вектор-функция $\tau: R^n \rightarrow R^n$ удовлетворяет условиям

$$\tau^{(v)}(0) = 0, \quad 0 \leq v \leq N;$$

$$\tau(e_1) = 0, \quad \tau'(e_1) = E;$$

$$\tau^{(v)}(e_1) = 0, \quad 2 \leq v \leq N$$

и настолько мала, что отображение Ψ_0 определено в окрестности отрезка $[0, e_1] \subset R^n$ и является ее диффеоморфизмом на образ.

Для построения $\tau(x)$ воспользуемся тем, что благодаря условию $f'(0) = 0$ можно считать

$$2 \left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right\| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{dist}(x, I) \leq \rho_0. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(\xi) = \left(\frac{\delta^2 - (\xi - 1)^2}{\delta^2} \right)^{N+1} \cdot \xi^p. \quad (17)$$

При фиксированном значении ρ_0 выберем $p \geq N + 1$ столь большим, чтобы на отрезке $[0, 1 - \rho_0]$ выполнялось неравенство $|\theta(\xi)| \leq \frac{\rho_0}{2}$,

а затем найдем столь малое значение $\rho_1 < \frac{\rho_0}{2}$, что $|\theta(\xi)| \leq 2$ при $\xi \in [-\rho_1, 1 + \rho_1]$, $|\theta(\xi)| |\xi - 1| \leq \rho_0$ при $1 \leq \xi \leq 1 + \rho_1$ и $|\theta(\xi)| \leq 1$ при $\xi \in [-\rho_1, 1]$.

Определим в окрестности отрезка $[0, e_1] \subset R^n$ отображение

$$\tau(x) = \theta(\xi)(x - e_1), \quad x = (\xi, \eta) \quad (18)$$

Если $1 \leq \xi \leq 1 + \rho_1$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leq 2\rho_1 \leq \rho_0$. Если $1 - \rho_0 \leq \xi \leq 1$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leq |\xi - 1| \leq \rho_0$. Наконец, если $-\rho_1 \leq \xi \leq 1 - \rho_0$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leq \frac{\rho_0}{2} \cdot 2 \leq \rho_0$. Если к тому же $\eta = (\eta_1,$

$\eta_2, \dots, \eta_{n-1})$, то $|\theta(\xi) \eta_i| \leq 2\rho_1 \leq \rho_0$. Таким образом, равенство (16) определяет аналитическое отображение $\tau(x)$ окрестности отрезка $[0, e_1]$. Более того, из (16) следует, что Ψ_0 есть диффеоморфизм окрестности этого отрезка на ее образ.

Дифференцируя (15) по x , получим

$$\Psi_0(0) = 0, \Psi_0'(0) = E, \Psi_0^{(\nu)}(0) = 0, 2 \leq \nu \leq N$$

и

$$\Psi_0^{(\nu)}(e_1) J_0^\nu = F^{(\nu)}(0).$$

Отсюда следует, что если F имеет вид (14), то

$$\Psi_0^{-1} \circ F \circ \Psi_0(x) = e_1 + J_0 x + O(\|x\|^N)$$

и лемма 1 доказана.

Покажем теперь, что в условиях теоремы 1 уравнение (1) действительно приводится к виду (3). С этой целью заметим, что в силу этих условий $\dim \text{Ker } A_0 = \dim \text{Ker } A = m - k$. Выберем какое-нибудь подпространство $L \subset \mathbb{R}^m$, $\dim L = k$, так что $L \cap \text{Ker } A_0 = L \cap \text{Ker } A_1 = \{0\}$, и зафиксируем какой-нибудь линейный оператор $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ с образом $T\mathbb{R}^k = L$. Тогда операторы $A_0 T$ и $A_1 T$ являются изоморфизмами пространства $\mathbb{R}^k$.

Положим теперь

$$\tilde{g}(x, u, v) = g(x, Tu + a(x), Tv + a(F(v))),$$

где $u, v \in \mathbb{R}^k$ и $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — фиксированное аналитическое отображение, которое удовлетворяет условию $a(x_0) = y_0$, $a(F(x_0)) = z_0$. Очевидно, $\tilde{g}(x_0, 0, 0) = g(x_0, y_0, z_0)$ и $\frac{\partial \tilde{g}(x_0, 0, 0)}{\partial u} = A_0 T$, $\frac{\partial \tilde{g}(x_0, 0, 0)}{\partial v} = A_1 T$. По теореме о неявной функции существует такое отображение $v = Q(x, u)$, $Q(x_0, 0) = 0$ определенное и аналитическое в окрестности точки $(x_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, для которого в этой окрестности выполняется равенство $\tilde{g}(x, u, Q(x, u)) = 0$. При этом оператор $A = \frac{\partial \tilde{g}(x_0, 0, 0)}{\partial u}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ является изоморфизмом, поскольку $A_0 T + A_1 T A = 0$. В результате исходное уравнение (1) сводится к уравнению

$$\Psi(F(x)) = Q(x, \Psi(x)), \Psi(x_0) = 0. \quad (19)$$

Действительно, если ψ — некоторое решение уравнения (19) в области $U \subset \mathbb{R}^n$, то $\phi(x) = T\psi(x) + a(x)$ есть решение уравнения (1) в той же области U .

В соответствии со сказанным в § 1, для доказательства разрешимости уравнения (19) достаточно доказать возможность приведения диффеоморфизма $G(x, y) = (F(x), Q(x, y))$ к нормальной форме (8) преобразованием Φ вида (5), т. е. доказать теорему 2. Первым шагом на пути доказательства является

Лемма 2. При каждом $N > 0$ существует аналитический диффеоморфизм $\Phi(x, y) = (H(x), T(x, y))$, определенный в окрестности отрезка $I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, для которого $H(0) = x_0$, $H(e_1) = F(x_0)$ и равномерно относительно y , лежащих в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^k$, выполняется равенство

$$\Phi^{-1} \circ G \circ \Phi(x, y) = (J_0 x + e_1 + O(\|x\|^N), Jy + O(\|x\|^N)). \quad (20)$$

Доказательство. Согласно лемме 1, можно принять $x_0 = 0$ $F(x) = J_0 x + e_1 + O(\|x\|^N)$ и $H(x) = x$.

Переходя к построению диффеоморфизма $\Phi(x, y)$, приводящего уравнение (19) к виду (20), выделим линейную часть функции Q , полагая $Q(x, y) = Ay + h(x, y)$, где $\frac{\partial h(0, 0)}{\partial y} = 0$. Если линейный относительно y диффеоморфизм $\Phi_0(x, y) = (x, T_0(x)y)$ таков, что

$$T(0) = E, T_0(e_1) = AJ,$$

то определяемая равенством

$$\Phi_0^{-1} \circ G \circ \Phi_0(x, y) = (F(x), Jy + h_0(x, y))$$

вектор-функция h_0 удовлетворяет условию $\frac{\partial h_0(0, 0)}{\partial y} = 0$.

Для построения $T_0(x)$ заметим, что поскольку $\det AJ > 0$, то $AJ = B_1 B_2$, где операторы B_1 и B_2 имеют вещественные логарифмы. Это позволяет принять $T_0(x) = \exp(\xi \ln B_1) \cdot \exp(\xi \ln B_2)$, $x = (\xi, \eta)$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Таким образом, в условиях леммы 2, можно считать, что

$$G(x, y) = (F(x), Q(x, y)), Q(x, y) = Jy + h(x, y), \frac{\partial h(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Пусть теперь $\Phi(x, y) = (x, T(x, y))$, а функция $\tilde{h}$ определена равенством $\Phi^{-1} \circ G \circ \Phi(x, y) = (F(x), Jy + \tilde{h}(x, y))$. Тогда

$JT(x, y) + h(x, T(x, y)) = T(J_0 x + e_1 + O(\|x\|^N), Jy + \tilde{h}(x, y))$ и (20) эквивалентно выполнению равенств

$$\frac{\partial^{(v)} \tilde{h}(0, y)}{\partial x^v} = 0, 0 \leq v \leq N.$$

Это, в свою очередь, эквивалентно выполнению равенств

$$J \frac{\partial^{(v)} T(0, y)}{\partial x^v} + \frac{\partial^{(v)} h(x, T(x, y))}{\partial x^v} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{(v)} T(e_1, Jy)}{\partial x^v} J_0^v. \quad (21)$$

Если вектор-функция $T(x, y)$ такова, что

$$T(0, y) = y; \quad (22)$$

$$\frac{\partial^{(v)} T(0, y)}{\partial x^v} = 0, 1 \leq v \leq N,$$

то (21) окажется эквивалентным соотношениям

$$\frac{\partial^{(v)} T(e_1, Jy)}{\partial x^v} J_0^v = \frac{\partial^{(v)} Q(0, y)}{\partial x^v}, 0 \leq v \leq N. \quad (23)$$

Будем искать T в виде

$$T(x, y) = y + h(J_0 \tau(x), \theta(\xi) Jy), x = (\xi, \eta), \quad (24)$$

где τ и θ те же функции, что и в доказательстве леммы 1. Поскольку $h(0, 0) = 0$, $\frac{\partial h(0, 0)}{\partial y} = 0$, найдется столь малое число $\rho_0 > 0$, что

$$2 \left\| \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right\| \leq \frac{1}{2}, \text{dist} \{(x, y), I \times 0\} \leq \rho_0, \quad (25)$$

и определенная согласно (24) вектор-функция T аналитична в окрестности отрезка $I = [0, e_1] \subset R^n \times R^m$. Но тогда из условия (25) будут следовать соотношения (22) и (23).

Поскольку

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = E + \theta(\xi) \frac{\partial h(J_0 T(x), \theta(\xi) J y)}{\partial y} J,$$

то из (25) следует, что отображение $\Phi(x, y) = (x, T(x, y))$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности отрезка $[0, e_1] \subset R^n \times R^m$ на ее образ.

Лемма 2 доказана.

§ 3. Гомологическая лемма

В простейшем случае уравнение (1) имеет вид

$$\psi(x + e_1) - \psi(x) = h(x), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in R^n, \quad (26)$$

относительно неизвестной вектор-функции $\psi: R^n \rightarrow R^m$. Его принято называть гомологическим. Несколько более общий вид имеет уравнение

$$\psi(e_1 + J_0 x, J y) - B\psi(x, y) = h(x, y), \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad (27)$$

в котором J_0 и J — введенные ранее диагональные операторы. Доказательство разрешимости уравнения (27) оказывается существенным элементом доказательства сформулированных в § 5 результатов.

Условимся о некоторых обозначениях. Если D — область в пространстве C^n , то $\bar{A}_q(D)$ — пространство функций со значениями в C^q , аналитических внутри D , непрерывных в замыкании $\bar{D}$ с нормой $\|h\|_D = \max_{z \in \bar{D}} \|h(z)\|$.

Для заданного $\rho > 0$ определим полицилиндр

$$\prod_q(\rho) = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_i| < \rho, \quad i = 1, \dots, q\}$$

и область

$$\Omega_q(\rho) = \{z = te_1 + \zeta, \quad t \in [0, 1], \quad \zeta \in \prod_q(\rho)\}.$$

Лемма 3. Для заданного оператора $B: R^m \rightarrow R^m$, $\det B \neq 0$ существует такая постоянная $\nu > 0$, что при любых числах ρ и δ , не превосходящих $\frac{1}{2}$, для всякой функции $h \in A_{m+n}(\prod_n(\rho))$ найдется функция $\psi \in \bar{A}_{m+n}(\Omega_n(\rho e^{-\delta}))$, $\psi(0) = 0$, которая при $x \in \prod_{m+n}(\rho e^{-\delta})$ удовлетворяет гомологическому уравнению (27) и неравенству

$$\|\psi\|_{\Omega_{m+n}(\rho e^{-\delta})} \leq \delta^{-\nu} \|h\|_{\prod_{m+n}(\rho)}.$$

Если h принимает лишь вещественные значения на вещественном подпространстве $R^n \subset C^n$, то таким же является и решение $\bar{\psi}$.

Доказательство. Рассмотрим вначале уравнение

$$\psi(e_1 + x) - B\psi(x) = h(x), \quad x \in R^n, \quad (28)$$

Пусть $\chi_1, \dots, \chi_q$ — все различные собственные числа оператора B . Каждую точку $\lambda_{sp} = \ln \chi_p + 2\pi i$; $s, p = 1, \dots, q$; $s \in \mathbb{Z}$ окружим кружком одного и того же и столь малого радиуса $\sigma < 1$ так, чтобы различные кружки не пересекались, и построим систему замкнутых контуров $L_s \subset \mathbb{C}^1$, $s = 0, 1, 2, \dots$ следующим образом. При выбранном значении $\delta > 0$ и $\kappa = e^{-\delta}$ положим $R_0 = 1$, $R_s = \kappa^{-1}$, $s = 1, 2, \dots$ и построим систему окружностей $C_s = \{z \in \mathbb{C}^1, |z| = R_s\}$. Если окружность C_s не пересекает ни одного исключительного кружка, принимаем $L_s = C_s$. В противном случае составляем L_s из частей окружности C_s и тех окружностей, ограничивающих исключительные кружки и пересекающихся с C_s , которые лежат во внешности C_s . Поскольку оператор B — вещественный, контур L_s симметричен относительно вещественной оси и имеет длину, не превосходящую $2\pi(R_s + 1)$.

Легко видеть, что существует такая постоянная $C > 0$, что выполняется оценка

$$\|(e^\lambda - B)^{-1}\| \leq C e^{-H(\arg \lambda) |\lambda|}, \quad \lambda \in L_s, \quad (29)$$

в которой $H(0)$ — опорная функция отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{C}^1$.

Положим теперь, следуя методу Гурвица [4],

$$\omega(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^{s+1}} (e^\lambda - B)^{-1} \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda, \quad z = (\xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{C}^1, \quad \eta \in \mathbb{C}^{n-1} \quad (30)$$

и проверим, что $\omega \in \bar{A}(\Omega_n(\kappa))$.

Прежде всего заметим, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}^1$ выполняется неравенство

$$|e^{\lambda \xi}| \leq e^{(H(\arg \lambda) + \kappa) |\lambda|}, \quad z = (\xi, \eta) \in \Omega_n(\kappa). \quad (31)$$

Кроме того, в силу неравенств Коши имеем

$$\left| \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} \right| \leq \frac{s!}{\rho^s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)},$$

На контуре L_s имеем $|\lambda| R_s$, что вместе с оценками (29) и (31) приводит к следующей оценке общего члена $\omega_s(z)$ ряда

$$\|\omega_s\|_{\Omega_n(\kappa)} \leq \frac{2s! e^{\kappa R_s}}{C \rho^s R_s^s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)} \leq C_1 s e^{-\delta s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)}$$

с некоторой абсолютной постоянной C_1 . Поэтому действительно $\omega \in \bar{A}_n(\Omega_n(\kappa))$ и, кроме того

$$\|\omega\|_{\Omega_n(\kappa)} \leq C_1 (1 - e^{-\delta})^{-2} \|h\|_{\Pi_n(\rho)}.$$

Если $z \in \Pi_n(\kappa)$, то $z + e_1 \in \Omega_n(\kappa)$ и из (30) следует

$$\omega(z + e_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^{s+1}} e^\lambda (e^\lambda - B)^{-1} \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^{s+1}} \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda + B \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^{s+1}} (e^{\lambda} - B)^{-1} \times \\ \times \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda = h(z) + B\omega(z),$$

так что (30) определяет решение уравнения (28). Вектор-функция $\psi(x) = \omega(x) - \operatorname{Re} e^{\xi \ln B} \omega(0)$ является решением уравнения (28), обращаясь в нуль при $x=0$ и при достаточно большом значении v удовлетворяет условию $\|\psi\| \leq \delta^{-v} \|h\|$.

Наконец, если $h(z)$ принимает вещественные значения при $z \in R^n$, то ввиду вещественности подынтегральной функции в (30) и симметрии контура L_s относительно точки $\lambda=0$, функция $\psi(z)$ также вещественнозначна при $z \in R^n$. Это доказывает лемму для уравнения (28).

Переходя к рассмотрению уравнения (27), положим

$$h_{\pm}(x, y) = \frac{h(J_0 x, Jy) + h(x, y)}{2}.$$

Тогда $h_{\pm}(J_0 x, Jy) = \pm h_{\pm}(x, y)$ и $h = h_+ + h_-$. Рассмотрим уравнение

$$\psi_{\pm}(e_1 + x, y) \mp B\psi_{\pm}(x, y) = \pm h_{\pm}(x, y).$$

Формула (30) дает решения этих уравнений $\psi_{\pm}$, которые удовлетворяют дополнительным условиям $\psi_{\pm}(J_0 x, Jy) = \pm \psi_{\pm}(x, y)$. Вектор-функция $\psi = \psi_+ + \psi_-$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Как установлено в § 2, можно считать, что

$$F(x) = e_1 + J_0 x + f(x), \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x} = 0$$

и

$$G(x, y) = (F(x), Jy + g(x, y)), \quad g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Пусть преобразование Φ имеет вид $\Phi(x, y) = (x + \varphi(x), y + t(x, y))$, пусть $G_1 = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$ и отображения f_1 и g_1 определены равенством

$$G_1(x, y) = (J_0 x + e_1 + f_1(x), Jy + g_1(x, y)).$$

Тогда

$$\Phi \circ G(x, y) = (e_1 + J_0 x + f(x) + \varphi(e_1 + J_0 x + f(x)), \\ Jy + g(x, y) + t(F(x), Jy + g(x, y)));$$

$$G_1 \circ \Phi(x, y) = (e_1 + J_0 x + J_0 \varphi(x) + f_1(x + \varphi(x)), \\ Jy + Jt(x, y) + g_1(x + \varphi(x), y + t(x, y))).$$

Поэтому, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(e_1 + J_0 x) - J_0 \varphi(x) + f(x) = 0, \quad (32)$$

а функция $t(x, y)$ — уравнению

$$t(e_1 + J_0 x, Jy) - Jt(x, y) + g(x, y) = 0, \quad (33)$$

то выполняются равенства

$$f_1(x + \varphi(x)) = \varphi(e_1 + J_0 x + f(x)) - \varphi(e_1 + J_0 x); \quad (34)$$

$$g_1(x + \varphi(x), y + t(x, y)) = t(e_1 + J_0 x + f(x),$$

$$Jy + g(x, y)) - t(e_1 + J_0 x, Jy). \quad (35)$$

Лемма 4. Существует такое число $\alpha > 0$, что если

$$\|f\|_{\Pi_n(\rho)} \leq \rho \delta^\alpha, \quad \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \leq \rho \delta^\alpha,$$

то найдутся такие решения $\varphi \in \bar{A}\left(\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)\right)$ и $t \in \bar{A}\left(\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)\right)$ уравнений (32), (33), что $\varphi(0) = 0$, $t(0, 0) = 0$ и удовлетворяются оценки

$$\|\varphi\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leq \delta^{-\nu} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}, \quad \|t\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leq \delta^{-\nu} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}, \quad (36)$$

а определяемые равенствами (34), (35) функции f_1 и g_1 удовлетворяют оценкам

$$\|f_1\|_{\Pi_n(\rho e^{-\delta})} \leq \rho^{-1} \delta^{-\alpha} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}^2; \quad (37)$$

$$\|g_1\|_{\Pi_{n+m}(\rho e^{-\delta})} \leq \rho^{-1} \delta^{-\alpha} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}. \quad (38)$$

Доказательство. Согласно лемме существует такое число ν , когда уравнения (32) и (33) при выбранных функциях $f(x)$ и $g(x, y)$ имеют решения $\varphi(x)$ и $t(x, y)$, которые обладают требуемыми свойствами. В силу неравенств Коши отсюда вытекают оценки

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leq C \rho^{-1} \delta^{-\nu-1} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}; \quad (39)$$

$$\left\| \frac{\partial t}{\partial x} \right\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} + \left\| \frac{\partial t}{\partial y} \right\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leq C \rho^{-1} \delta^{-\nu-1} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \quad (40)$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от размерностей n и m .

Если $\delta < \frac{1}{2}$, то при достаточно большом значении α будем иметь

$\delta^\alpha + e^{-\frac{3\delta}{4}} \leq e^{-\frac{\delta}{2}}$. Поэтому из (39), (40) следует

$$\begin{aligned} \|\varphi(e_1 + J_0 x + f(x)) - \varphi(e_1 + J_0 x)\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} &\leq \\ &\leq C \rho^{-1} \delta^{-\nu-1} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|t(e_1 + J_0 x + f(x), Jy + g(x, y)) - t(e_1 + J_0 x, Jy)\|_{\Pi_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} &\leq \\ &\leq 2C \rho^{-1} \delta^{-\nu-1} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}^2. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\|f_1(x + \varphi(x))\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leq C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}^2;$$

$$\|g_1(x + \varphi(x), y + t(x, y))\|_{\Pi_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leq C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}^2.$$

Увеличивая в случае необходимости значение α , можно считать, что

$$\|\varphi\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leq \rho\delta^{\alpha-\nu} \leq \rho e^{-\frac{3}{4}\delta} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{4}}\right);$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leq \frac{1}{2}.$$

Для $z \in \Omega_n(\rho e^{-\delta})$ рассмотрим уравнение $z = x + \varphi(x)$. Полагая $x_0 = 0$, $x_q = z - \varphi(x_{q-1})$, из условия $x_{q-1} \in \Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$ находим $x_q \in \Omega_n(\rho e^{-\delta} + \rho\delta^{\alpha-\nu}) \subset \Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$. Но тогда последовательность $\{x^q\}$ сходится, $\lim_{q \rightarrow \infty} x_q = x \in \Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$ и $z = x + \varphi(x)$. Следовательно,

$$\|f_1\|_{\Pi_n(\rho e^{-\delta})} \leq \|f_1(x + \varphi(x))\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leq C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1} \|f\|_{\Pi_n(\rho)}^2.$$

Аналогично проверяется оценка

$$\|g_1\|_{\Pi_{n+m}(\rho e^{-\delta})} \leq 2C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1} \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}^2.$$

Если выбрать α столь большим, что $2C\delta^{-\nu-1} < \delta^{-\alpha}$, из двух последних неравенств получим (37), (38). Лемма доказана.

Следуя [3], выберем последовательности чисел

$$\delta_0, \delta_1 = \delta_0^{\frac{3}{2}}, \dots, \delta_s = \delta_{s-1}^{\frac{3}{2}}, \dots;$$

$$M_0 = \delta_0^N, M_1 = M_0^{\frac{3}{2}}, \dots, M_s = M_{s-1}^{\frac{3}{2}} = \delta_s^N, \dots;$$

$$\rho_0, \rho_1 = \rho_0 e^{-\delta_0}, \dots, \rho_s = \rho_{s-1} e^{-\delta_{s-1}}.$$

Число δ_0 зафиксируем столь малым, что $\rho_s > \frac{\rho_0}{2}$. В обозначениях леммы 4 положим $f_1 = R[f]$, $g_1 = R[f, g]$ и введем последовательности $f_0 = f$, $g_0 = g$, $f_{s+1} = R[f_s]$, $g_{s+1} = R[f_s, g_s]$. Предположим, что при некотором целом $s > 0$ выполняются неравенства

$$\|f_s\|_{\Pi_n(\rho_s)} \leq \rho_s M_s = \rho_s \delta_s^N, \quad \|g_s\|_{\Pi_{n+m}(\rho_s)} \leq \rho_s M_s = \rho_s \delta_s^N. \quad (41)$$

Если число N выбрано столь большим, что $N > 2\alpha + 4$, то из (37) получим

$$\|f_{s+1}\|_{\Pi_n(\rho_{s+1})} \leq \rho_s^{-1} \delta_s^{-\alpha} \rho_s^2 \delta_s^{2N} = \rho_s \delta_s^{2N-\alpha} \leq \rho_{s+1} \delta_{s+1}^N. \quad (42)$$

Аналогично $\|g_{s+1}\|_{\Pi_{n+m}(\rho_{s+1})} \leq \rho_{s+1} \delta_{s+1}^N$.

Для того чтобы выбрать ρ_0 , заметим, что в соответствии с подготовительными результатами из § 2 имеем

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, g(0, 0) = 0, \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = 0,$$

откуда при достаточно малых значениях ρ следуют неравенства

$$\|f\|_{\Pi_n(\rho)} \leq K\rho^2, \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \leq K\rho^2.$$

Поэтому, если принять $K\rho_0 < \delta_0^N$, то (41) будет выполняться при $s = 0$. Но тогда последовательности f_s и g_s сходятся к нулю соответственно в пространствах $\bar{A}\left(\Pi_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$ и $\bar{A}\left(\Pi_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$.

В обозначениях леммы 4 положим $\varphi = U[f]$, $t = V[g]$ и рассмотрим последовательность отображений $\varphi_s = U[f_s]$, $t_s = V[g_s]$, $s = 0, 1, 2, \dots$. В силу неравенств (36), (41) они удовлетворяют оценкам

$$\|\varphi_s\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \rho_s \delta_s^{N-v}, \|t_s\|_{\Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \rho_s \delta_s^{N-v}.$$

Пусть $\Phi_s(x, y) = (x + \varphi_s(x), y + t_s(x, y))$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим суперпозицию $\Psi_s = \Phi_s \circ \Phi_{s-1} \circ \dots \circ \Phi_1 \circ \Phi_0$. Полагая $\Psi_s(x, y) = (H_s(x), L_s(x, y))$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi_{s+1}(x, y) &= \Phi_{s+1} \circ \Psi_s(x, y) = (H_s(x) + \varphi_{s+1}(H_s(x)), \\ &L_s(x, y) + t_{s+1}(H_s(x), L_s(x, y))). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H_{s+1}(x) - H(x) = \varphi_{s+1}(H_s(x)), s = 0, 1, 2, \dots; \quad (44)$$

$$L_{s+1}(x, y) - L_s(x, y) = t_{s+1}(H_s(x), L_s(x, y)), s = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

Проверим, что при всех $s \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|H_s(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \frac{\rho_0}{2}. \quad (46)$$

Действительно, согласно определению $H_0(x) = x + \varphi_0(x)$. Поэтому

$$\|H_0(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \|\varphi_0\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \rho_0 \delta_0^4,$$

а так как $\frac{\rho_0}{2} + \rho_0 \delta_0^4 \leq \rho_1 e^{-\frac{\delta_1}{4}}$, то из (44) следует

$$\|H_1(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \rho_0 \delta_0^4 + \rho_1 \delta_1^4.$$

Вообще, если

$$\|H_s(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leq \sum_{q=0}^s \rho_q \delta_q^4,$$

$$\frac{\rho_0}{2} + \sum_{q=0}^s \rho_q \delta_q^4 < \rho_{s+1} e^{-\frac{s+1}{4}},$$

из (44) будет следовать

$$\|H_{s+1}(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{q=0}^{s+1} \rho_q \delta_q^4,$$

а тогда и (46). Возвращаясь к (46), заметим, что при $x \in \Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ значения вектор-функции $H_s(x)$ принадлежат множеству $\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right) \subset \subset \Omega_n\left(\rho_{s+1} e^{-\frac{s+1}{4}}\right)$. Это приводит к оценке

$$\|H_{s+1} - H_s\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \rho_{s+1} \delta_{s+1}, \quad (47)$$

которая влечет сходимость последовательности отображений H_s в пространстве $\bar{A}\left(\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$. Для предельного отображения $H_\infty(x)$ имеем

$$\|H_\infty(x) - x\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{q=0}^{\infty} \rho_q \delta_q^4 < \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q.$$

В силу неравенства Коши отсюда следует

$$\|H_\infty - E\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{4}\right)} < C \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q,$$

где постоянная C зависит лишь от n и m . Уменьшая значение δ_0 , можно добиться, чтобы $\|H_\infty - E\|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{4}\right)} < \frac{1}{4}$. В этом случае $H_\infty(x)$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности отрезка $[0, \epsilon_1] \subset \mathbb{R}^n$ на его образ.

Из (47) и неравенства Коши вытекает, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ обратимы все отображения $H_s(x)$.

Перейдем к оценке последовательности $L_s(x, y)$. По определению $L_0(x, y) = y + t_0(x, y)$. Значит $\|L_0(x, y) - y\|_{\Omega_{m+n}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \rho_0 \delta_0^4$. Аналогично предыдущему проверяется, что при $x \in \Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ и $y \in \Pi_m\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$

будет $(H_s(x), L_s(x, y)) \in \Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ и

$$\|L_{s+1} - L_s\|_{\Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{k=0}^{s+1} \rho_k \delta_k^4.$$

Это влечет сходимость последовательности L_s и неравенство

$$\|L_\infty(x, y) - y\|_{\Omega_{n+m}(\frac{\rho_0}{2})} \leq \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q,$$

которое, в свою очередь, приводит к оценке

$$\left\| \frac{\partial L_\infty(x, y)}{\partial y} - E \right\|_{\Omega_{n+m}(\frac{\rho_0}{2})} \leq C \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q.$$

Помимо существования пределов H_∞ и L_∞ предыдущие оценки убеждают обратимость операторов $H_s(x)$ при x из малой окрестности отрезка $[0, l_1] \subset \mathbb{R}^n$ и операторов $L_s(x, y)$ при уже фиксированном x и малых $y \in \mathbb{R}^m$. Если теперь в равенстве $\Psi_s \circ G \circ \Psi_s^{-1}(x, y) = G_s(x, y)$ выполняющемся в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ произвести предельный переход, устремляя s к $+\infty$, получим

$$\Psi_\infty \circ G \circ \Psi_\infty^{-1}(x, y) = (e_1 + J_0 x, J_0 y),$$

что доказывает теорему.

Список литературы: 1. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., 1979. 117 с. 2. Арнольд В. И., Ильясенко Ю. С. Динамические системы // Совр. проблемы математики. Фундамент направления. 1985. 00. С. 5—36. 3. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978. 195 с. 4. Picard E. Leçons sur quelques équations fonctionnelles. Paris, 1928. 230 p.

Поступила в редколлегию 13.05.89

УДК 517.535

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, М. Н. ШЕРЕМЕТА

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ НА ВСЮ ПЛОСКОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть $0 < R \leq +\infty$, $A(R)$ — класс аналитических в круге $\{z: |z| < R\}$ функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (1.1)$$

а (n_p) — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. Предположим, что $n_{p+1} - n_p = o(\ln n_p)$, $p \rightarrow \infty$, а функция $f \in A(1)$ и все ее производные $f^{(n_p)}$ однолиственны в $D = \{z: |z| < 1\}$. Тогда [1] f допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции, которую обозначим также через f . В [1] доказано также существование последовательности (n_p) и функции $f \in A(1)$ таких, что все $f^{(n_p)}$ однолиственны D , а f непродолжаема аналитически на $\mathbb{C}$. Построенная в [1] последовательность (n_p) с таким свойством удовлетворяет условию $n_p \ln n_p = o(n_{p+1})$, $p \rightarrow \infty$.

Рассмотрим более общие классы аналитических в D функций. Из доказанных здесь результатов получим более сильные, чем в [1], утверждения и для однолистных функций. Отметим, что в [2] также усиливаются результаты [1], но в другом направлении, за исключением теоремы 3, которая содержится в наших результатах.

Через Λ обозначим класс числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, с $\lambda_n > 0$ и скажем, что $f \in A_\lambda(1)$, если $f \in A(1)$ и $|a_k| \leq \lambda_k |a_1|$ для всех $k \geq 2$. В частности, если $\lambda_k = k$, то классу $A_\lambda(1)$ в силу доказанной в [3] гипотезы Бибербаха принадлежат все однолистные в D функции.

Исследуем условия на $\lambda \in \Lambda$ и $f \in A_\lambda(1)$, при выполнении которых f допускает аналитическое продолжение на C . Прежде всего отметим, что если $\lambda_k^{1/k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и $f \in A_\lambda(1)$, то $|a_k|^{1/k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и, значит, $f \in A(\infty)$. Если же $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^{1/k} = \rho \in (0, 1)$ и $f \in A_\lambda(1)$, то f аналитически продолжается через $C = \{z: |z| = 1\}$, но может не продолжаться через $\{z: |z| = 1/\rho\}$. Например, в этом случае функция $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k z^k$ принадлежит $A(1/\rho)$, но не принадлежит $A(\infty)$.

Наконец, если $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^{1/k} > 1$, то без дополнительных условий на f эту функцию, вообще говоря, нельзя аналитически продолжить через C . Такими дополнительными условиями у нас будут служить условия принадлежности классу $A_\lambda(1)$ каждой производной $f^{(n_p)}$, где (n_p) — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел (помимо этого, всюду ниже $n_0 = 0$). При этом последовательность (n_p) не может быть произвольной, на что указывает следующая

Теорема 1. Для любых последовательностей $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^{1/k} > 1$, и (n_p) , удовлетворяющей условию $n_{p+1}/n_p \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$,

существует функция $f \in A(1)$ такая, что $f^{(n_p)} \notin A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, а окружность C является естественной границей для f .

С другой стороны, какова бы ни была последовательность $\lambda \in \Lambda$, из того, что $f^{(n)} \in A_\lambda(1)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, следует, что $f \in A(\infty)$. Имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ и функции $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (n_{p+1} - n_p) < \infty, \quad (1.2)$$

и необходимо, чтобы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (n_{p+1} - n_p) < \infty. \quad (1.3)$$

Следующая теорема значительно усиливает результаты из [1] для однолистных в D функций.

Теорема 3. Для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющей условию $\ln \lambda_k \leq O(k)$, $k \rightarrow \infty$, и каждой

функции $f(A(1))$ из условия $f^{(n_p)}(A(1))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ вытекало, что $f(A(\infty))$, достаточно, чтобы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} n_{p+1}/n_p = 1, \quad (1.4)$$

и необходимо, чтобы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} n_{p+1}/n_p = 1. \quad (1.5)$$

2°. Доказательство теоремы 1. Прежде всего, докажем следующую простую лемму.

Лемма 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ и $m > n$. Тогда

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!} < \left(\frac{me}{n}\right)^n, \quad (2.1)$$

Действительно, используя формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \exp\left\{\frac{\theta_n}{12n}\right\}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

нетрудно показать, что

$$C_m^n \leq \frac{m^m}{(m-n)^m n^n} \sqrt{\frac{m}{(m-n)n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{12}\right\}.$$

Так как функция $x/(x-n)$ убывающая на $[n+1, +\infty)$, то $m/(m-n) \leq (n+1)/n \leq 2$ и, значит,

$$C_m^n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{1}{12}\right\} \frac{m^m}{m^{m-n} (1-n/m)^{m-n} n^n} < \left(\frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{-(m-n)}. \quad (2.2)$$

Но функция $\psi(x) = -(x-n) \ln(1-n/x)$ возрастающая на $[n+1, \infty)$. Поэтому

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right)^{-(m-n)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \psi(x) = e^n,$$

и из (2.2) вытекает (2.1).

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Обозначим $s_k = \ln^+(1/\lambda_k)$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^{1/k} > 1$, то $0 \leq s_k/k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Поэтому существует выпуклая оболочка L множества $\{(0, s_k)\}_{k=2}^\infty$. Пусть $l(x) = \sup\{y : (x, y) \in L, x \geq 2\}$. Функция l неотрицательная, неубывающая и вогнутая на $[2, \infty)$. Положим $y_k = l(k)$. Тогда $y_{k+1} \geq y_k$, $y_k \geq s_k$, $\lambda_k \geq \exp(-y_k)$ для всех $k \geq 2$ и $0 \leq y_k/k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Обозначим $\sigma_p = (n_p + 1)/(n_{p+1} + 1)$, $u_p = y_{n_{p+1}+1}/(n_{p+1} + 1)$. Так как $n_p = 0(n_{p+1})$ и $y_p = 0(p)$ при $p \rightarrow \infty$, то $0 < q = \max\{\sigma_p : p \in \mathbb{Z}_+\} < 1$, $0 < Q = \max\{\sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p : p \in \mathbb{Z}_+\} < \infty$. Выберем α , $0 < \alpha < 1$, такое, что $\alpha Q + q < 1$. Пусть $t_p = \sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p + \sigma_p/\alpha$. Так как $t_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, то $0 < t_p \leq 1$ при $p \geq p_0$. Положим $\alpha_p = \alpha$ при $0 \leq p \leq p_0$ и $\alpha_{p+1} = t_p^{-1/2}$ при $p \geq p_0$. Учитывая, что при $p \geq p_0$

выполняется $\alpha_{p+1} > 1 > \alpha$, легко проверить, что при всех $p \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\alpha_{p+1} \{ \sigma_p \ln(e/\sigma_p) + u_p \} + \alpha_{p+1} \sigma_p / \alpha_p \leq 1. \quad (2.3)$$

Пусть теперь

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1}, \quad a_p = \exp\left(-\frac{n_p+1}{\alpha_p}\right). \quad (2.4)$$

Так как $\alpha_p \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$, то функция (2.4) принадлежит классу $A(1)$. Но $n_{p+1}/n_p \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$). Поэтому по теореме Адамара о лакунах [4, с. 65] окружность S является естественной границей для функции f_1 . Нам осталось показать, что $f_1^{(n_p)} \notin A_k(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку

$$f_1^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!} a_{p+k} z^{n_{p+k}-n_p+1},$$

то нам нужно доказать, что

$$\frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!} a_{p+k} \leq \lambda_{n_{p+k}-n_p+1} (n_p+1)! a_p \quad (2.5)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$. Взяв в лемме 1 $n = n_p + 1$ и $m = n_{p+k} + 1$, легко получим, что неравенство (2.5) выполняется; если

$$\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1} e\right)^{n_p+1} \leq \frac{a_p}{a_{p+k}} \lambda_{n_{p+k}-n_p+1} \quad (2.6)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$. Так как $\lambda_k \geq e^{-y_k}$ и $y_{k+1} \geq y_k$ для всех $k \geq 2$, то неравенство (2.6) выполняется, если

$$(n_p+1) \ln\left(\frac{n_{p+k}+1}{n_p+1} e\right) + y_{n_{p+k}+1} + \frac{n_p+1}{\alpha_p} - \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} \leq 0 \quad (2.7)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$.

Покажем, что выражение стоящее в левой части неравенства (2.7), убывает с ростом k . Это равносильно тому, что

$$(n_p+1) \ln \frac{n_{p+k+1}+1}{n_{p+k}+1} + y_{n_{p+k+1}+1} - y_{n_{p+k}+1} + \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} - \frac{n_{p+k+1}+1}{\alpha_{p+k+1}} < 0.$$

Так как $y_k \geq 0$ для всех $k \geq 2$, то последнее неравенство выполняется, если

$$(n_{p+k}+1) \ln \frac{n_{p+k+1}+1}{n_{p+k}+1} + y_{n_{p+k+1}+1} + \frac{n_{p+k}+1}{\alpha_{p+k}} - \frac{n_{p+k+1}+1}{\alpha_{p+k+1}} \leq 0.$$

Последнее же неравенство легко следует из (2.3).

Таким образом, неравенство (2.7) выполняется для всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$, если оно выполняется для $k=1$ и $p \in \mathbb{Z}_+$, т. е. если выполнено неравенство (2.3), справедливость которого мы доказали. Нужная нам функция построена, и тем самым теорема 1 доказана.

3°. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 2. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$|a_{n_p+m}| \leq |a_1| \frac{m! \lambda_m}{(n_p+m)!} \prod_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^p \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1} \quad (3.1)$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и $m, 1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$.

Действительно, поскольку

$$f^{(n_p)}(z) = n_p! a_{n_p} + \frac{(n_p+1)!}{1!} a_{n_p+1} z + \dots + \frac{k!}{(k-n_p)!} a_k z^{k-n_p} + \dots$$

и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\frac{k!}{(k-n_p)!} |a_k| \leq \lambda_{k-n_p} (n_p+1)! |a_{n_p+1}| \quad (3.2)$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и $k \geq n_p + 1$. Положив в (3.2) $k = n_{p+1} + 1$, имеем

$$\frac{(n_{p+1}+1)!}{(n_{p+1}-n_p+1)!} |a_{n_{p+1}+1}| \leq (n_p+1)! |a_{n_p+1}| \lambda_{n_{p+1}-n_p+1},$$

откуда

$$|a_{n_{p+1}+1}| \leq \frac{(n_p+1)! (n_{p+1}-n_p+1)!}{(n_{p+1}+1)!} |a_{n_p+1}| \lambda_{n_{p+1}-n_p+1}.$$

Из последнего неравенства легко следует, что

$$|a_{n_p+1}| \leq \frac{|a_1|}{(n_p+1)!} \prod_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^p \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}. \quad (3.3)$$

Если же в (3.2) возьмем $k = n_p + m$, то получим неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leq \frac{(n_p+1)! m!}{(n_p+m)!} \lambda_m |a_{n_p+1}|. \quad (3.4)$$

Объединяя неравенства (3.3) и (3.4), получаем неравенство (3.1).

Докажем теорему 2. Если выполнено условие (1.2), т. е. $n_{p+1} - n_p + 1 \leq l < \infty$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то

$$|a_1| m! \lambda_m \prod_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^p \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1} \leq ab^p \leq ab^{n_p+m}$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и $m, 1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$, где a и b — положительные постоянные, не зависящие от p и m . Поэтому из (3.1) имеем

$$\frac{1}{n_p+m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geq \ln(n_p+m) + O(1) \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow \infty,$$

т. е. $f \in A(\infty)$. Достаточность условия (1.2) доказана.

Докажем необходимость условия (1.3). Предположим от противного, что $n_{p+1} - n_p \rightarrow +\infty, p \rightarrow \infty$. Тогда множество $\{n_{p+1} - n_p + 1\}$ неограничено. Если $k \in \{n_{p+1} - n_p + 1\}$, через J_k обозначим множество $\{j: n_{p_j+1} - n_{p_j} + 1 = k\}$. Так как $n_{p+1} - n_p \rightarrow +\infty, p \rightarrow \infty$, то множество J_k конечно. Положим

$$\lambda_k^* = \max \left\{ (n_{p_j} + 1) \ln \left(\frac{n_{p_j+1} + 1}{n_{p_j} + 1} e \right) : j \in J_k \right\}.$$

Тогда для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$(n_p + 1) \ln \left(\frac{n_{p+1} + 1}{n_p + 1} e \right) \leq \lambda_{n_{p+1} - n_p + 1}^* \quad (3.5)$$

Если же $k \in \mathbb{N} \setminus \{n_{p+1} - n_p + 1\}$, полагаем $\lambda_k^* = 1$. Выберем положительную непрерывно дифференцируемую на $[1, \infty)$ функцию γ такую, что $\gamma'(x) \geq 1$ для всех $x \in [1, \infty)$ и $\gamma(k) \geq \lambda_k^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и положим $\lambda_k = \exp \gamma(k)$.

Пусть

$$f_2(z) = \sum_{p=0}^{\infty} z^{n_p+1}. \quad (3.6)$$

Поскольку $n_{p+1} - n_p \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow \infty$, по теореме Фабри [4, с. 80, 89] окружность S является естественной границей для функции (3.6). Чтобы доказать, что $f_2^{(n_p)} \notin A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, в силу (2.6) нам достаточно показать, что

$$\left(\frac{n_{p+k} + 1}{n_p + 1} e \right)^{n_p+1} \leq \lambda_{n_{p+k} - n_p + 1}$$

для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{N}$, т. е. что

$$(n_p + 1) \ln \left(\frac{n_{p+k} + 1}{n_p + 1} e \right) \leq \gamma(n_{p+k} - n_p + 1). \quad (3.7)$$

Так как $n_{p+k} + 1 \geq n_p + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\gamma'(x) \geq 1$ ($x \geq 1$), то функция $\psi_1(x) = (n_p + 1) \ln \frac{x e}{n_p + 1} - \gamma(x - n_p)$ — убывающая на $[n_p + 1, \infty)$. Поэтому (3.7) выполняется, если

$$(n_p + 1) \ln \left(\frac{n_{p+1} + 1}{n_p + 1} e \right) \leq \gamma(n_{p+1} - n_p + 1).$$

Так как $\gamma(k) \geq \lambda_k^*$, последнее неравенство вытекает из (3.5). Таким образом, существуют последовательность $\lambda \in \Lambda$ и функция $f_2 \in A(1)$ такие, что все $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ и $f_2 \notin A(\infty)$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

4°. Доказательство теоремы 3. Достаточность условия (1.4) в теореме 3 мы получим из следующего более сильного утверждения.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\ln \lambda_k \leq O(k)$, $k \rightarrow \infty$, а

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln \left(\frac{n_j}{n_{j-1}} - 1 \right) = -\infty. \quad (4.1)$$

Если $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in A(\infty)$.

Доказательство. Из условия $\ln \lambda_k \leq O(k)$, $k \rightarrow \infty$, вытекает существование числа $B > 0$ такого, что $\ln \lambda_{m+1} \leq Bm$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и

$$\sum_{j=1}^p \ln \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1} \leq B \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) = B n_p \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Далее, используя неравенство $\ln(x+1) \leq \ln x + \ln 2$ при $x \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1) \ln(n_j - n_{j-1} + 1) &\leq \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + \\ &+ 1) \{\ln(n_j - n_{j-1}) + \ln 2\} = \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}) + \\ &+ (n_p + p) \ln 2 + \sum_{j=1}^p \ln(n_j - n_{j-1}). \end{aligned}$$

Поэтому из неравенства (3.1), используя формулу Стирлинга, для всех $p \in \mathbb{N}$ и m , $1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_p + m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} &\geq \frac{1}{n_p + m} \{\ln(n_p + m)! - \ln m! - \ln |a_1| - \\ &- \ln \lambda_m - \sum_{j=1}^p \ln(n_j - n_{j-1} + 1)! - \sum_{j=1}^p \ln \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}\} \geq \\ &\geq \frac{1}{n_p + m} \left\{ (n_p + m) \ln(n_p + m) - \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln m - (n_p + m) + \right. \\ &+ m - 1 - Bm - \sum_{j=1}^p \left(n_j - n_{j-1} + \frac{3}{2}\right) \ln(n_j - n_{j-1} + 1) + \\ &+ \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1) + O(p) - Bn_p \left. \right\} \geq \frac{1}{n_p + m} \left\{ (n_p + \right. \\ &+ m) \ln(n_p + m) - m \ln m + O(n_p + m) - \\ &- \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}) + \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1) - \\ &- \frac{3}{2} \sum_{j=1}^p \ln(n_j - n_{j-1} + 1) \left. \right\} \geq \frac{(n_p + m) \ln(n_p + m) - m \ln m - C_p}{n_p + m} + \\ &+ O(1), \quad p \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$C_p = \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}).$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{(n_p + x) \ln(n_p + x) - x \ln x - C_p}{n_p + x}, \quad x \geq 1.$$

Легко видеть, что функция Φ имеет на $[1, \infty]$ единственную точку экстремума $x_* = \exp\{C_p/n_p\}$, являющуюся точкой максимума. Поэтому

$\min \{ \Phi(x) : 1 \leq x \leq n_{p+1} - n_p + 1 \} = \min \{ \Phi(1), \Phi(n_{p+1} - n_p + 1) \}$,
и из (4.2) для всех m , $1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$, получаем неравенство

$$\frac{1}{n_p + m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geq \min \left\{ \frac{(n_p + 1) \ln(n_p + 1) - C_p}{n_p + 1}, \right. \\ \left. \frac{(n_{p+1} + 1) \ln(n_{p+1} + 1) - (n_{p+1} - n_p + 1) \ln(n_{p+1} - n_p + 1) - C_p}{n_{p+1} + 1} \right\} + O(1) \geq \\ \geq \min \{ \ln n_p - C_p/n_p, \ln n_{p+1} - C_{p+1}/n_{p+1} \} + O(1), \quad p \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Далее,

$$\sum_{j=2}^p (n_j - n_{j-1}) \ln n_{j-1} \leq \sum_{j=2}^p \int_{n_{j-1}}^{n_j} \ln x dx = \int_{n_1}^{n_p} \ln x dx \leq \\ \leq n_p \ln n_p - n_1 \ln n_1 \leq n_p \ln n_p.$$

Поэтому в силу условия (4.1) выполняется соотношение

$$\ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}) \geq \\ \geq \frac{1}{n_p} \sum_{j=2}^p (n_j - n_{j-1}) (\ln n_{j-1} - \ln(n_j - n_{j-1})) = \\ = -\frac{1}{n_p} \sum_{j=2}^p (n_j - n_{j-1}) \ln \left(\frac{n_j}{n_{j-1}} - 1 \right) \rightarrow +\infty, \quad p \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает, что $\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|a_k|} \rightarrow +\infty, k \rightarrow \infty$, т. е. $f \in A(\infty)$, и теорема 4 доказана.

Достаточность условия (1.4) в теореме 3 вытекает из теоремы 4 в силу известной теоремы Штольца [5, п. 33].

Докажем необходимость условия (1.5). Допустим, что (1.5) не выполняется. Тогда можем считать, что $(n_{p+1} + 1)/(n_p + 1) \geq q > 1, p \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$\lambda_k = \exp \left\{ \frac{\ln q + 1}{q - 1} (k - 1) \right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим функцию

$$f_3(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1}, \quad a_p = \exp \{ -(n_p + 1) q^{-p} \}. \quad (4.5)$$

Так как $q > 1$, то $f_3 \in A(1)$ и по теореме Адамара о лакунах f_3 непродолжима на $\mathbb{C}$. Покажем, что все $f_3^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$. Как при доказательстве теоремы 1, достаточно доказать неравенство (2.6) для всех $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$, т. е. в силу выбора последовательности λ достаточно показать, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{n_{p+k} + 1}{n_p + 1} e \right)^{n_p+1} a_{p+k} \leq a_p \exp \left\{ \frac{\ln q + 1}{q - 1} (n_{p+k} - n_p) \right\},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{\ln q + 1}{q \simeq 1} \left(\frac{n_{p+k} + 1}{n_p + 1} - 1 \right) + \frac{n_{p+k} + 1}{(n_p + 1) q^{p+k}} - \ln \frac{n_{p+k} + 1}{n_p + 1} \geq 1 + q^{-p} \quad (4.6)$$

для всех $k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{Z}_+$. Так как $(n_{p+k} + 1)/(n_p + 1) \geq q^k$, $k \in \mathbf{N}$, функция

$$\psi_2(x) = \frac{\ln q + 1}{q - 1} (x - 1) + \frac{x}{q^{p+k}} - \ln x$$

возрастающая на $[q, \infty)$, то неравенство (4.6) выполняется, если

$$\frac{\ln q + 1}{q \simeq 1} (q^k - 1) + \frac{q^k}{q^{k+p}} - k \ln q \geq 1 + \frac{1}{q^p}.$$

Последнее неравенство очевидно, и, таким образом, мы приходим к противоречию. Теорема 3 доказана.

5°. Замечания. 1. В теореме 4 условие (4.1) можно заменить более слабым условием

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}) \right\} = +\infty, \quad (5.1)$$

как видно из доказательства теоремы 4 (см. (4.4)). Если $n_{p+1} = O(n_p)$, $p \rightarrow \infty$, то легко показать, что условия (4.1) и (5.1) равносильны.

2. В связи с теоремой 1 возникает естественный вопрос: не будет ли условие (1.4) или более слабое условие $n_{p+1} = O(n_p)$, $p \rightarrow \infty$, в условиях теоремы 3 необходимым, помимо (1.5). Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

Пример. Обозначим $m_k = 2^{2^k}$, и пусть $\{n_j\} = \mathbf{N} \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} (m_k, km_k)$.

Если теперь $km_k \leq n_p \leq m_{k+1}$, то

$$\begin{aligned} \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}) &= \\ &= \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=2}^k m_j (j-1) \ln \{m_j (j-1)\} \geq \ln (km_k) - \\ &- \frac{1}{km_k} \left\{ m_k (k-1) \ln (m_k (k-1)) + \sum_{j=2}^{k-1} m_j (j-1) \ln (m_j (j-1)) \right\} = \\ &= \ln \frac{k}{k-1} + 2^k \frac{\ln 2}{k} + \frac{1}{k} \ln (k-1) - \\ &- \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{j-1}{2^{2^{k-2}j}} (2^j \ln 2 + \ln (j-1)) \geq 2^k \frac{\ln 2}{k} + o(1) - \\ &- \frac{1}{m_{k-1}} \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j+1} \ln 2 = 2^k \frac{\ln 2}{k} + o(1) \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому выполняется (5.1) и из предыдущего замечания следует, что $f \in A(\infty)$. В то же время для последовательности (n_p) выполняется соотношение $\lim_{p \rightarrow \infty} n_{p+1}/n_p = \infty$.

3. Остается открытым вопрос, можно ли в условиях теоремы заменить нижний предел верхним.

Список литературы: 1. Shah S. M., Trimble S. Y. Univalent functions with univalent derivatives, III // J. Math. Mech. 1969/70. 19, P. 451—460. 2. Кирьяцкий Е. 3. Об одном признаке целой функции // Лит. мат. сб.—1989. 29, № 3. С. 485—491. 3. Branges L. de. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta math. 1985. 154, № 1, 2. P. 137—152. 4. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М., 1967. 240 с. 5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М., 1969. 610 с.

Поступила в редколлегию 17.03.90

УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО, Г. М. ЛЕВИН

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОЛИНОМА

1. Рассмотрим полином f степени $d \geq 2$ и обозначим через f^n его n -ю итерацию. Результаты теории итераций, используемые в этой статье, содержатся в [1, 2].

Корень уравнения $f^n z = z$ называется периодической точкой (с периодом n). Величина $\chi(z) = \frac{1}{n} \log |(f^n)'(z)|$ есть характеристический показатель этой точки. В случае, когда множество Жюлиа полинома f связно, для любой периодической точки z выполняется

$$\chi(z) \leq 2 \log d, \quad (1.1)$$

причем эта оценка точна и достигается только в том случае, когда множество Жюлиа — отрезок, а z — его конец [3]. В настоящей работе мы получим оценку для $\chi(z)$ сверху для произвольных полиномов, а также оценку для $\chi(z)$ снизу в случае, когда множество Жюлиа вполне несвязно.

Положим

$$u_f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z)|. \quad (1.2)$$

Этот предел существует и является субгармонической функцией в $\mathbb{C}$ (стандартное руководство по теории субгармонических функций — книга [4]). Функция u_f неотрицательна и непрерывна в $\mathbb{C}$. Она гармоническая и положительная в области $D = \{z: f^n z \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$, и $u_f(z) = 0$ в $\mathbb{C} \setminus D = K$. Имеет место функциональное уравнение

$$u_f \circ f = d u_f. \quad (1.3)$$

Риссовская мера μ_f функции u_f сосредоточена на множестве Жюлиа $J = \partial D = \partial K$. Это единственная вероятностная мера в $\mathbb{C}$, обладаю-

дая следующим свойством: для любого борелевского множества $E \subset C$, на котором функция f однолистка, выполняется

$$d\mu_f(E) = \mu_f(fE). \quad (1.4)$$

Мера μ_f называется уравновешенной мерой или мерой максимальной энтропии.

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_{d-1}$ — все критические точки (нули производной) полинома f . Положим

$$a = \max \{u(c_j) : 1 \leq j \leq d-1\}, \quad (1.5)$$

$$b = \min \{u(c_j) : 1 \leq j \leq d-1\}. \quad (1.6)$$

Числа a и b являются естественными параметрами, характеризующими степень несвязности множества Жюлиа. $a=0$ тогда и только тогда, когда J связно; с другой стороны, J канторово (вполне несвязно) если $b>0$. Отметим еще связь между числом a и средним характеристическим показателем

$$\chi_f = \int \log |f'| d\mu_f.$$

праведливо

$$\chi_f = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} u_j(c_j),$$

отому $a \leq \chi_f - \log d \leq (d-1)a$. В частности, $\chi_f = \log d$ тогда только тогда, когда $a=0$, т. е. J связно.

Теорема 1.1. Если $f(z) = z^d + c$, $c \in C$, то

$$\chi(z) \leq (d-1)a + 2 \log d \leq 2\chi_f \quad (1.7)$$

для любой периодической точки z .

Пусть u — субгармоническая функция, μ — ее риссовская мера, z_0 — некоторая точка, в которой $u(z_0) = 0$. Положим

$$n(r, u, z_0) = \mu(\{z : |z - z_0| \leq r\}), \quad N(r, u, z_0) = \int_0^r n(t, u, z_0) \frac{dt}{t}.$$

Формула Иенсена с учетом того, что $u(z_0) = 0$ дает

$$N(r, u, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Определим порядок меры μ в точке z_0 следующим образом:

$$\rho = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r, u, z_0)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log n(r, u, z_0)}{\log r}.$$

Легко видеть, что порядок меры μ совпадает с величиной

$$\rho(u, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} (\log \max_{\theta} u(z_0 + re^{i\theta})) / \log r,$$

поэтому его можно назвать также порядком функции u в точке z_0 .

Теорема 1.2. Для любого полинома f и любой точки $z_0 \in J$ выполняется

$$\rho(u_1, z_0) > \frac{1}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{ad}{\pi},$$

где число a определено формулой (1.5).

Следствие 1.3 Для любой периодической точки справедлив

$$\chi(z) \leq \frac{\pi \log d}{\operatorname{arccctg} \frac{ad}{\pi}}. \quad (1.)$$

Если $a = 0$, то (1.7) и (1.8) превращаются в точную оценку (1.1). При малых a имеем

$$\frac{\pi \log d}{\operatorname{arccctg} \frac{ad}{\pi}} = 2 \log d + \frac{4ad \log d}{\pi^2} + o(a), \quad a \rightarrow 0.$$

Таким образом, при $d \leq 8$ неравенство (1.8) дает при малых a лучший результат, чем теорема 1.1.

Для произвольной точки $z_0 \in J$ определим (верхний) характеристический показатель формулой

$$\chi(z_0) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(z_0)|.$$

Напомним, что полином называется гиперболическим, если траектории всех его критических точек притягиваются к притягивающему циклу.

Следствие 1.4. Если f гиперболический полином, то (1.8) выполняется для любой точки $z \in J(f)$.

Доказательство теоремы 1.2 использует следующий результат из теории субгармонических функций, представляющий самостоятельный интерес. Положим

$$A(r, u, z_0) = \inf_{\theta} u(z_0 + re^{i\theta}).$$

Теорема 1.5. Пусть u — субгармоническая функция в окрестности точки z_0 , $u(z_0) = 0$, и порядок функции u в точке z_0 равен ρ . Тогда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{A(r, u, z_0)}{\rho(r, u, z_0)} \geq \pi \operatorname{ctg} \pi \rho.$$

Эта теорема навеяна так называемыми « $\cos \pi \rho$ — неравенствами» из теории целых и субгармонических функций (см., например, [5—7]). Ее доказательство представляет собой модификацию рассуждений из [6].

Рассмотрим теперь случай вполне несвязного множества Жюльна, в котором удастся получить равномерную оценку характеристического показателя снизу.

Теорема 1.6. Пусть a и b заданы формулами (1.5), (1.6) и натуральное число k определяется из условия $a < d^k b \leq da$. Тогда

$$\chi(z) \geq \frac{a + d^k(d-2)b}{(d-1)^k} \geq (d-1)b \quad (1.9)$$

для любой периодической точки z .

Следствие 1.7. Хаусдорфова размерность множества Жюлиа удовлетворяет неравенству

$$\text{HD}(J) \leq \frac{(d-1)^k \log d}{a + d^k (d-2)b} \leq \frac{\log d}{(d-1)b}.$$

Для семейства функций $f_c(z) = z^d + c$, $c \in \mathbb{C}$, мы докажем в п. 2 следующие асимптотики при $c \rightarrow \infty$:

$$a_c = b_c = \frac{1}{d} \log |c| + o(1), \quad (1.10)$$

$$\chi(z) = \frac{d-1}{d} \log |c| + o(1) \quad (1.11)$$

для любой периодической точки $z = z_c$. Отсюда видно, что оценки (1.7) и (1.9) асимптотически точные при $c \rightarrow \infty$, а оценка (1.8) в рассматриваемом случае отличается от точной множителем $\log d$.

2. Доказательство теоремы 1.1. Проверим сначала (1.10) и (1.11). Полином f_c имеет единственную $d-1$ кратную критическую точку 0. Поэтому

$$a_c = b_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f_c^n(0)| = \frac{1}{d} \log |c| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d^{k+1}} \log^+ \left| 1 + \frac{c}{(f_c^k(0))^d} \right|.$$

Устремив c к ∞ , приходим к (1.10).

Если $z_1 = z_c$ — периодическая точка периода n , то

$$z_i = z_{i-1}^d + c, \quad i = 2, \dots, n; \quad z_1 = z_n^d + c. \quad (2.1)$$

Отсюда выводим, что $z_i \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{c}{z_i^d} \right) = \frac{1}{(z_1 \cdot \dots \cdot z_n)^{d-1}} \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty,$$

и поэтому модуль хотя бы одного сомножителя $(1 + c/z_j^d)$, $j = j(c)$, мал. Теперь из (2.1) получаем, что $z_i/z_{i-1} \rightarrow 1$, $z_n/z_1 \rightarrow 1$, откуда следует, что $|z_i|^d \sim |c|$, $c \rightarrow \infty$, $1 \leq i \leq n$. Поэтому

$$\left(\prod_{i=1}^n |f_c(z_i)| \right)^{1/n} \sim |c|^{(d-1)/d}, \quad c \rightarrow \infty$$

что доказывает (1.11).

Закончим доказательство теоремы 1.

Имеем

$$a_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f_c^n(0)|.$$

Функция $c \mapsto a_c$ непрерывная [8] и субгармоническая в $\mathbb{C}$. Она равна нулю на множестве $M = \{c : J(f_c) \text{ связно}\}$. Дополнение $U = \mathbb{C} \setminus M$ связно (по принципу максимума), и функция a_c положительная и гармоническая в U . Таким образом, da_c — функция Грина области U с полюсом в ∞ .

Зафиксируем натуральное число n . Легко видеть, что

$$\chi_n(c) = \max \{ \chi(z) : f_c^n z = z \}$$

субгармоническая функция в C . На множестве M в силу (1.1) выполняется $\chi_n(c) \leq 2 \log d$, а в окрестности ∞ — в силу (1.10) и (1.11) справедливо $\chi_n(c) \leq (d-1)a_c + o(1)$.

Применяя принцип гармонической мажоранты к области U , получаем $\chi_n(c) \leq 2 \log d + (d-1)a_c$, т. е. (1.7).

3. Доказательство теоремы 1.5. Не уменьшая общности, считаем, что $z_0 = 0$. Далее мы можем предполагать, что u субгармоническая в C и выполняется

$$u(z) = O(\log |z|), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

(любая функция, субгармоническая на компакте в C , может быть продолжена в C со свойством (3.1)). Функция (1.2), к которой мы собираемся применить теорему 1.5, уже обладает свойством (3.1)). Из (3.1) и $u(0) = 0$ следует представление

$$u(z) = \int \log \left| 1 - \frac{z}{\xi} \right| d\mu_{\xi}. \quad (3.2)$$

Полагаем $A(r, u) = A(r, u, 0)$, $n(r, u) = n(r, u, 0)$, $N(r, u) = N(r, u, 0)$. Пусть

$$v(z) = \int \log \left| 1 - \frac{z}{\xi} \right| dv_{\xi},$$

где v — мера, сосредоточенная на отрицательном луче и имеющая считающую функцию $n(r, v) \equiv n(r, u)$. Из неравенств $\log |1 - |u|| \leq \log |1 - u| \leq \log(1 + |u|)$, $u \in C$ вытекает $A(r, u) \geq A(r, v) = v(-r)$. Поэтому теорему достаточно доказать для функции v вместо u . Нам потребуется следующая

Лемма 3.1 (о пиках Поля). Пусть Φ — возрастающая функция, $\Phi(0) = 0$,

$$\rho = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \Phi(r)}{\log r} < \infty.$$

Тогда найдутся последовательности $r_k \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, такие, что

$$\Phi(r) \leq \Phi(r_k) \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\rho} (1 + \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k r_k \leq r \leq \varepsilon_k^{-1} r_k. \quad (3.3)$$

Если в формулировке заменить $r \rightarrow 0$, $r_k \rightarrow 0$ на $r \rightarrow \infty$, $r_k \rightarrow \infty$, а знак неравенства в (3.3) — на противоположный, получится хорошо известное утверждение, часто применяемое в теории целых и мероморфных функций конечного порядка (доказательство см., например, в [9]). Наша формулировка сводится к стандартной при помощи замены $\Psi(r) = 1/\Phi(1/r)$. Полагая в лемме $\Phi(r) = N(r, v)$, найдем последовательность пиков Поля $r_k \rightarrow 0$ таких, что

$$N(r, v) \leq N(r_k, v) \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\rho} (1 + \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k r_k \leq r \leq \varepsilon_k^{-1} r_k. \quad (3.4)$$

Рассмотрим последовательно те субгармонических функций

$$v_k(z) = \frac{v(r_k z)}{N(r_k, v)}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что

$$v_k(z) = \int \log \left| 1 - \frac{z}{\xi} \right| dv_{\xi}, \quad (3.6)$$

где меры ν_k определены так:

$$\nu_k(E) = \frac{\nu(r_k E)}{N(r_k, \nu)}.$$

Справедливы соотношения

$$n(r, \nu_k) = \frac{n(r r_k, \nu)}{N(r_k, \nu)}, \quad (3.7)$$

$$N(r, \nu_k) = \frac{N(r r_k, \nu)}{N(r_k, \nu)}. \quad (3.8)$$

Применяя оценку $n(r, \nu_k) \leq N(r r_k, \nu_k)$ и (3.4) получаем, что меры ν_k равномерно ограничены на компактах. Выбирая подпоследовательность, считаем, что $\nu_k \rightarrow \nu_0$ (сходимость в пространстве, сопряженном к пространству непрерывных финитных функций).

Тогда $\nu_k \rightarrow \nu_0$, где $w_0(z) = \int \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu_0$. Сходимость $\nu_k \rightarrow \nu_0$ имеет место в среднем по площади на каждом компакте в $\mathbb{C}$, а также в среднем по 1-мере на каждом компакте в $\mathbb{R}$. Имеем

$$n(r, \nu_k) \rightarrow n(r, \nu_0), \quad N(r, \nu_k) \rightarrow N(r, \nu_0). \quad (3.9)$$

Из (3.4), (3.8) следует, что

$$N(r, \nu_0) \leq r^\rho, \quad 0 \leq r < \infty, \quad N(1, \nu_0) = 1. \quad (3.10)$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\frac{w_0(-1)}{n(1, \nu_0)} \geq \pi \operatorname{ctg} \pi \rho. \quad (3.11)$$

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_1(re^{i\theta}) = \rho^2 \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{re^{i\theta}}{t} \right| t^{\rho-1} dt = \frac{\pi \rho r^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta, \quad |\theta| < \pi.$$

(равенство следует из формулы Иенсена). Имеем

$$n(r, \nu_1) = r^\rho, \quad (3.12)$$

$$N(r, \nu_1) = r^\rho, \quad (3.13)$$

$$w_1(-1) = \pi \rho \operatorname{ctg} \pi \rho. \quad (3.14)$$

Заметим, что функция $N(r, \nu_0)$ выпуклая относительно логарифма. Поэтому из (3.10) следует, что $N(r, \nu_0)$ дифференцируема в точке 1 и

$$n(1, \nu_0) = \frac{d}{d \log r} N(r, \nu_0) \Big|_{r=1} = \frac{d(r^\rho)}{d \log r} \Big|_{r=1} = \rho. \quad (3.15)$$

Покажем теперь, что $w_0(-1) > w_1(-1)$. Обе функции w_0, w_1 гармонические в плоскости, разрезанной по отрицательному лучу. Положим

$$w_j^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} w_j(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad j = 0, 1.$$

Легко видеть, что функции w_j^* гармонические в верхней полуплоскости (w_j^* — это тривиальный частный случай * — функций Бернштейна, см., например, [10, 11]).

Имеем $\omega_0^*(r) = \omega_1^*(r) = 0$, $r > 0$.

$$\omega_0^*(-r) = N(r, \omega_0) \leq r = N(r, \omega_1) = \omega_1^*(-r), \quad r > 0, \quad (3.16)$$

в силу (3.10), (3.13). Отсюда по теореме Фрагмена — Линделёфа выводим, что

$$\omega_0^*(z) \leq \omega_1^*(z), \quad \operatorname{Im} z > 0. \quad (3.17)$$

Далее, в силу (3.10), (3.13) выполняется $\omega_0^*(-1) = \omega_1^*(-1)$, что вместе с (3.17) дает

$$\left. \frac{\partial \omega_0^*(e^{it})}{\partial t} \right|_{t=\pi} \geq \left. \frac{\partial \omega_1^*(e^{it})}{\partial t} \right|_{t=\pi}.$$

Но $\left. \frac{\partial \omega_j^*(e^{it})}{\partial t} \right|_{t=\pi} = \frac{1}{\pi} \omega_j(-1)$, таким образом $\omega_0(-1) \geq \omega_1(-1) = \rho \operatorname{tg} \rho$, что вместе с (3.15) дает (3.11).

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2 и следствий 1.3, 1.4. Для доказательства теоремы 1.2 рассмотрим два случая:

а) точка z_0 содержится в неодноточечной связной компоненте множества Жюлиа J . Тогда для субгармонической функции u выполняется $A(r, u, z_0) \equiv 0$ при достаточно малых r и по теореме 1.5 справедливо $\rho \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ad}{\pi}$;

б) точка z_0 является связной компонентой множества J . Положим $E_0 = \{z: u(z) \leq a\}$. Множество E_0 связно, потому что a — наибольшее критическое значение функции u . Пусть E_k — связная компонента множества $f^{-k}(E_0)$, содержащая точку z_0 . Иначе говоря, E_k — связная компонента множества $\{z: u(z) \leq ad^{-k}\}$, содержащая точку z_0 (см. (1.3)). Из (1.4) следует, что

$$\mu(E_k) \geq d^{-k} \quad (4.1)$$

($\mu(E_0) = 1$, так как $\operatorname{supp} \mu = J \subset E_0$). Поскольку z_0 — связная компонента множества J , справедливо

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = \{z_0\}. \quad (4.2)$$

Пусть D_r — круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$, настолько малого, что $C_r = \partial D_r$ пересекает E_0 . Пусть $k(r)$ — наименьшее натуральное число такое, что $E_{k(r)} \subset D_r$ (такое число существует в силу (4.2)). Из (4.1) следует

$$\mu(D_r) \geq \mu(E_{k(r)}) \geq d^{-k}. \quad (4.3)$$

По определению числа $k(r)$ множество $E_{k(r)-1}$ не содержится в D_r . Поскольку $E_{k(r)-1}$ связно и содержит z_0 , оно должно пересекать C_r , поэтому

$$A(r, u, z_0) \leq ad^{-k+1}. \quad (4.4)$$

Из (4.3) следует, что $n(r, u, z_0) \geq d^{-k}$. Таким образом, при всех достаточно малых $r > 0$

$$\frac{A(r, u, z_0)}{n(r, u, z_0)} \leq ad.$$

Применение теоремы 1.5 заканчивает доказательство теоремы 1.2.

Для доказательства следствий нам потребуется

Предложение 4.1. Пусть $z_0 \in J(f)$, обозначим через $r_n(z_0)$ радиус наибольшего круга с центром в точке $f^n z_0$, в котором существует однозначная ветвь g_n функции f^{-n} со свойством $g_n(f^n z_0) = z_0$. Предположим, что

$$r(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z_0) > 0. \quad (4.5)$$

Тогда

$$\rho(u, z_0) = \frac{\log d}{\chi(z_0)}$$

(верхний характеристический показатель $\chi(z_0)$ любой точки $z_0 \in J(f)$ определен в п.1)

Доказательство. Функция g_n однолистка в круге $\{z: |z - f^n z_0| < r(z_0)\}$. Согласно теореме искажения, вдвое меньший круг $\{z: |z - f^n z_0| < \frac{1}{2} r(z_0)\}$ отображается на овал с ограниченным искажением E_n , причем $t_n = \text{diam } E_n \asymp |(f^n)' z_0|^{-1}$ (знак $\asymp$ означает, что отношение величин ограничено сверху и снизу положительными абсолютными постоянными). Из определения характеристического показателя следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log t_n}{n} = -\chi(z_0).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mu(E_n) &\asymp d^{-n}, \\ \frac{\log \mu(E_n)}{n} &\rightarrow -\log d. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log t_n}{\log \mu(E_n)} = \frac{\chi(z_0)}{\log d}.$$

Из монотонности функции $n(t, u, z_0)$ и того, что $\log \mu(E_{n+1}) - \log \mu(E_n) = O(1)$, следует

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\log r}{\log n(r, u, z_0)} = \frac{\chi(z_0)}{\log d}$$

или

$$\rho(u, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log n(r, u, z_0)}{\log r} = \frac{\log d}{\chi(z_0)}.$$

Заметим теперь, что условие (4.5) выполняется в двух случаях:

- f — произвольный полином, z_0 — периодическая точка;
- f — гиперболический полином, $z_0 \in J(f)$ — любая точка.

Таким образом, следствия 1.3, 1.4 вытекают из теоремы 1.2 и предложения 4.1.

5. Доказательство теоремы 1.6 и следствия 1.7.

Мы будем пользоваться методом экстремальных длин [12], модуль семейства кривых Γ будем обозначать через $M(\Gamma) = \lambda(\Gamma)^{-1}$, где

λ — экстремальная длина. Непосредственно из определения модуля вытекает

Лемма 5.1. Пусть Γ — семейство попарно непересекающихся кривых, заполняющих область U , а $g: U \rightarrow g(U)$ — голоморфное отображение с двумя свойствами:

(i) если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $g(\gamma_1) \cap g(\gamma_2) = \emptyset$; (ii) $g: \gamma \rightarrow g(\gamma)$ — накрытие степени не больше, чем N

Тогда $M(\Gamma) \geq M(g(\Gamma))/N$

Занумеруем критические точки $c_1, c_2, \dots, c_{d-1}$ полинома f таким образом, чтобы $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_{d-1}$, где $u_i = u_f(c_i)$, в частности, $u_1 = a$, $u_{d-1} = b$.

Мы можем предполагать, что $d'u_i \neq u_j$, $i \neq j$, $l \in \mathbb{Z}$. Если мы докажем теорему в этом случае, то общий случай получится в силу непрерывности отображений $(z, f) \mapsto u_l(z)$ и $(z, f) \mapsto \chi(z)$.

Из этого предположения следует, что каждая компонента линии уровня $L(\rho) = \{z: u(z) = \rho\}$ есть либо простая замкнутая вещественно-аналитическая кривая, либо кривая, имеющая форму восьмерки (последняя возможность имеет место при $\rho = u_i d^{-l}$, $l \in \mathbb{Z}_+$).

Функция Бетхера [2,8], конформно отображает кольцо $\{z: u_1 < u(z) < du_1\}$ на кольцо $\{z: e^{u_1} < |z| < e^{du_1}\}$, поэтому

$$M(\Gamma_0) = \frac{(d-1)u_1}{2\pi}, \quad (5.1)$$

где $\Gamma_0 = \{L(\rho): u_1 < \rho < du_1\}$.

Пусть $z \in J$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\Gamma_n = \Gamma_n(z)$ множество компонент линий уровня $L(\rho)$, $u_1/d^n < \rho < u_1/d^{n-1}$, охватывающих точку z . Оценим $M(\Gamma_n(z))$ снизу. Замечим, что для любой односвязной области V , ограниченной компонентой линии уровня $L(\rho)$, отображение $f: V \rightarrow f(V)$ есть N -листное разветвленное накрытие, где $N-1$ равно числу критических точек функции f в V . Поэтому величины $M(\Gamma_n)$ равны между собой при $n \geq k$, где $k \in \mathbb{N}$ определяется условием

$$u_1 d^{-k} < u_{d-1} < u_1 d^{-k+1}$$

(т. е. k совпадает с отделенным в условии теоремы 1.6).

Семейство Γ_k делится на две части: кривые $\gamma_\rho \subset L_\rho$, охватывающие критическую точку c_{d-1} (если $u_{d-1} < \rho < u_1 d^{-k+1}$), и кривые, не охватывающие критических точек (если $u_1 d^{-k} < \rho < u_{d-1}$). Функция f^k отображает Γ_k на Γ_0 . Учитывая (5.1), лемму 5.1 и свойства экстремальных длин, получаем

$$M(\Gamma_k) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{d^k u_{d-1} - u_1}{(d-1)^{k-1}} + \frac{du_1 - d^k u_{d-1}}{(d-1)^k} \right) \quad (5.2)$$

Пусть теперь z_0 — периодическая точка с периодом m , $\lambda = (f^m)' \times \times (z_0)$, $\chi(z_0) = \frac{1}{m} \log |\lambda|$,

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{m-1} \Gamma_{n+i}(z_0). \quad (5.3)$$

Кривые семейства Γ разделяют граничные компоненты кольца K , ограниченного некоторыми кривыми $\gamma_1 \subset L(ad^{-n-m})$ и $\gamma_2 \subset L(ad^{-n})$. Поскольку семейства Γ_i попарно не пересекаются, имеем с учетом (5.2)

$$M(K) \geq M(\Gamma) \geq \frac{m}{2\pi} \frac{a + d^k(d-2)b}{(d-1)^k} \quad (5.4)$$

($M(K)$ — модуль кольца K [12]).

Оценим $M(K)$ сверху. Если n велико, то кольцо K лежит в малой окрестности точки z_0 . По теореме Шредера [2] существует голоморфная замена координат в окрестности точки z_0 , $\xi = \psi(z)$, $\psi(z_0) = 0$, линеаризующая преобразование f^m . Положим $K^* = \psi(K)$. Отображение $\xi \mapsto \lambda^{-1}\xi$ переводит внешнюю граничную компоненту кольца K^* во внутреннюю. Выбирая в кольце конформную метрику с плотностью $\rho(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-1}$, получим, что длина замкнутых кривых, разделяющих граничные компоненты, не менее, чем 1, а площадь кольца в этой метрике не более, чем $(2\pi)^{-1} \log|\lambda|$. Поэтому экстремальная длина больше или равна $2\pi(\log|\lambda|)^{-1}$ и

$$M(K) = M(K^*) \leq \frac{1}{2\pi} \log|\lambda|.$$

Это соотношение вместе с (5.4) доказывает теорему 1.6.

Чтобы вывести следствие 1.7, заметим, что полином f гиперболический, если $b > 0$. Для вычисления хаусдорфовой размерности множества Жюлиа гиперболического полинома служит термодинамический формализм [13, 14].

Положим

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{z \in \text{Per}_n} |(f^n)'(z)|^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

где Per_n — множество точек с периодом n . Предел в (5.5) существует и называется давлением. Функция $t \mapsto P(t)$ строго убывает и имеет единственный нуль в точке $t = \text{HD}(J) \geq 0$. Из теоремы 1.7 следует, что $|(f^n)'(z)| \geq e^{n\chi}$ для любой точки $z \in \text{Per}_n$, где χ удовлетворяет оценке (1.9). Отсюда получаем $P(t) \leq \log d - t\chi$, что влечет искомую оценку для $\text{HD}(J)$.

Список литературы: 1. Brolin H. Invariant sets under iteration of rational functions // Ark. Mat. 1965. 6. P. 103—144. 2. Еременко А. Э., Любич М. Ю. Динамика аналитических преобразований // Алгебра и анализ. 1989. 1, вып. 3. С. 1—70. 3. Еременко А. Э., Левин Г. М. О периодических точках полиномов // Укр. мат. журн. 1989. 41. № 11. С. 1467—1471. 4. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции М., 1980. 304 с. 5. Essen M. The cosh λ -Theorem. Springer — Verlag, 1975. 112 p. 6. Еременко А. Э., Содиш М. Л., Шиа Д. Ф. О минимуме модуля целой функции на последовательности пиков Пойа // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1986. Вып. 45. С. 26—40. 7. Островский И. В. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Учен. зап. Харьк. ун-та. 1961. 120. С. 23—32. 8. Douady A., Hubbard J. Etude dynamique des polynômes complexes / Publ. Math. o'Orsay. 1984—02, 1985—02. 9. Drasin D., Shea D. Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. 34. P. 403—411. 10. Baern-

stein A. Proof of Edrei's spread conjecture // Proc. London Math. Soc. 1973. 26. P. 418—439. 11. Anderson J. M., Baernstein A. The size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. 1978. 36. P. 518—539. 12. Ahlfors L. Conformal Invariants. McGraw-Hill, N.—Y., 1973, 157 p. 13. Bower R. Hausdorff dimension of quasi-circles // Publ. Math. IHES. 1979 50. P. 259—273. 14. Ruelle D. Repellers for real analytic maps // Ergodic theory and Dynamical Systems, 1982. 2 № 1. P. 99—107.

УДК 517.95

И. Д. ЧУЕШОВ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ФИЗИКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

1. В гладкой ограниченной области $\Omega \subset R^d$ ($d = 1, 2, 3$) рассматривается следующая система уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \operatorname{div} (D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \varphi) + F(n, p) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} (D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \varphi) + F(n, p) = 0; \quad (2)$$

$$D_n \frac{\partial n}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = j_n^v(x), \quad -D_p \frac{\partial p}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = j_p^v(x); \quad (3)$$

$$n|_{t=0} = n_0(x), \quad p|_{t=0} = p_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial \Omega$, а потенциал $\varphi(x, t)$ определяется как решение задачи

$$\Delta \varphi = -(N(x) - n(x, t) + p(x, t)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} \varphi(x, t) dx = 0. \quad (6)$$

Здесь $j_n^v(x)$, $j_p^v(x)$, $n_0(x)$, $p_0(x)$, $N(x)$ — заданные функции, величина $F(n, p)$ имеет вид

$$F(n, p) = np f_1(n, p) - f_2(n, p), \quad (7)$$

где $f_1(n, p)$, $f_2(n, p)$ — неотрицательные функции класса C^1 , D_n, D_p, μ_n, μ_p — положительные константы.

Отметим, что эта система уравнений возникает при расчетах полупроводниковых приборов в рамках диффузионно-дрейфовой модели [1]. При этом структура (7) функции $F(n, p)$ позволяет, например, учесть объемную рекомбинацию носителей заряда и рекомбинацию Шокли-Рида-Холла. Для этого следует [1, с. 168] f_1 и f_2 выбрать так, чтобы при $n \geq 0, p \geq 0$

$$f_1(n, p) = R + (an + bp + c)^{-1}, \quad f_2(n, p) = d \cdot f_1(n, p), \quad (8)$$

где R, a, b, c, d — положительные константы. Заметим также, что по смыслу задачи функции $n(x, t)$ и $p(x, t)$ должны быть неотрицательными.

В данном сообщении приведен ряд результатов, относящихся к проблеме существования и единственности решений задачи (1) — (6) и исследован вопрос о существовании и свойствах глобального (максимального) аттрактора рассматриваемой системы.

2. Легко обнаружить, что необходимыми условиями разрешимости задачи (1) — (6) являются соотношения:

$$\int_{\partial\Omega} (j_n^v(x) + j_p^v(x)) d\sigma = 0, \quad \langle n_0 - p_0 \rangle = \langle N \rangle, \quad (9)$$

где $\langle g \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) dx$. В дальнейшем эти условия предполагаются выполненными. Будем также считать, что $N(x) \in H^2(\Omega)$ (здесь и далее $H^s(Q)$ — соболевское пространство порядка s на многообразии Q), а функции $f_1(n, p)$ и $f_2(n, p)$ являются непрерывно дифференцируемыми и обладают свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < f_0 < f_1(n, p) < C, \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial f_1}{\partial p} \right| < \frac{C}{1 + |n| + |p|}; \\ 0 < f_2(n, p) < C, \quad \left| \frac{\partial f_2}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial f_2}{\partial p} \right| < C. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что эти условия охватывают случай (8). Кроме того, при $d = \dim \Omega \leq 2$ они могут быть значительно ослаблены. Введем классы функций

$$V_T = L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$W_T = \{w: w(t) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), w(T) = 0\},$$

где $L^2(0, T; X)$ — пространство квадратично интегрируемых вектор-функций со значениями в X , аналогично определяется и $L^\infty(0, T; X)$.

По аналогии с [2, с. 198] слабым решением задачи (1) — (6) на интервале $[0, T]$ будем называть пару функций $(n(x, t); p(x, t))$, каждая из которых лежит в V_T и для любых $u, v \in W_T$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ -\left(n, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \varphi, \nabla u) + (F, u) \right\} dt = \\ = (n_0, u(0)) + \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} j_n^v u d\sigma; \\ \int_0^T \left\{ -\left(p, \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \varphi, \nabla v) + (F, v) \right\} dt = \\ = (p_0, v(0)) - \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} j_p^v v d\sigma, \end{aligned}$$

где $\varphi(x, t)$ определяется по n и p как решение задачи (5), (6), $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Теорема 1. Пусть $n_0(x), p_0(x)$ — неотрицательные функции из $L^2(\Omega)$, $j_n^v(x), j_p^v(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, причем $j_n^v(x) \geq 0$, $j_p^v(x) \leq 0$ и выпол-

нены условия (7), (9) (10) Тогда задача (1) — (6) на любом интервале $[0, T]$ имеет слабое решение $(n(t); p(t))$. Это решение определяется однозначно. Каждая из функций $n(x, t)$ и $p(x, t)$ лежит в $C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^3(\Omega \times (0, T))$ и является неотрицательной, причем $\langle n(t) - p(t) \rangle = \langle N \rangle$. Если же при этом $n_0(x), p_0(x) \in H^2(\Omega)$, $j_n^v(x), j_p^v(x) \in H^{1/2}$ и на $\partial\Omega$ выполнены условия

$$D_n \frac{\partial n_0}{\partial \nu} = j_n^v(x); \quad -D_p \frac{\partial p_0}{\partial \nu} = j_p^v(x),$$

то слабое решение оказывается сильным, т. е. обладает свойствами

$$n(t), p(t) \in C(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega));$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t} \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Для каждого сильного решения имеет место равенство (ниже $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\Omega)$):

$$\begin{aligned} & \mu_n^{-1} \|n(t)\|^2 + \mu_p^{-1} \|p(t)\|^2 + 2 \int_0^t \left\{ \frac{D_n}{\mu_n} \|\nabla n(t)\|^2 + \frac{D_p}{\mu_p} \|\nabla p(t)\|^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega [(n-p)^2 - N \cdot (n-p)] (n+p) dx + \left(F(n, p), \frac{n}{\mu_n} + \frac{p}{\mu_p} \right) - \\ & \left. - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{n}{\mu_n} j_n^v - \frac{p}{\mu_p} j_p^v \right) d\sigma \right\} dt = \mu_n^{-1} \|n_0\|^2 + \mu_p^{-1} \|p_0\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Опишем схему доказательства. Структура функции $F(n, p)$ и нелинейных слагаемых в (1) и (2), порождаемых потенциалом $\varphi(x, t)$, не позволяет непосредственно к задаче (1) — (6) применить метод компактности. Поэтому сначала вместо (1) — (6) рассматривается регуляризованная задача, отличающаяся от исходной тем, что в левые части равенств (1), (2) добавлены слагаемые εn^3 и εp^3 соответственно, где ε — малый положительный параметр. Уравнение (5) при этом заменяется уравнением

$$\Delta\varphi = -(N(x) - n + p - \langle N - n + p \rangle).$$

Используя метод Галеркина, получим необходимые априорные оценки и докажем существование слабых и сильных решений регуляризованной задачи. При этом для сильных решений справедлив соответствующий аналог уравнения баланса (11). Он отличается от (11) наличием в левой части дополнительного слагаемого

$$\int_0^t \left\{ \varepsilon \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu_n} n^4 + \frac{1}{\mu_p} p^4 \right) dx + \frac{1}{2} \langle N - n + p \rangle \int_\Omega (n^2 - p^2) dx \right\} dt$$

Каждую из функций $n_\varepsilon(t)$ и $p_\varepsilon(t)$, дающих решение регуляризованной задачи, можно рассматривать как решение линейного уравнения вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w + \mu(\nabla\varphi, \nabla w) + V(x, t)w = G(x, t);$$

$$D \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = j(x), \quad w|_{t=0} = w_0(x),$$

где $G(x, t) \geq 0$, $j(x) \geq 0$, $w_0(x) \geq 0$. Поэтому с помощью подходящих регуляризаций коэффициентов этой задачи можно доказать неотрицательность решений $n_\varepsilon(t)$ и $p_\varepsilon(t)$ (см. принцип максимума в формулировке, приведенной в [2, с. 25]). А использование уравнения баланса и структуры функции $F(n, p)$ позволяет получить для неотрицательных решений регуляризированной задачи оценку вида

$$\begin{aligned} & \|n_\varepsilon(t)\|^2 + \|p_\varepsilon(t)\|^2 + a_1 \int_0^t \{ \|n_\varepsilon(t)\|_1^2 + \|p_\varepsilon(t)\|_1^2 + \\ & + \int_\Omega (n_\varepsilon^3 + p_\varepsilon^3) dx \} dt \leq a_2 + a_3 (\|n_\varepsilon(0)\|^2 + \|p_\varepsilon(0)\|^2), \end{aligned} \quad (12)$$

где положительные константы a_1, a_2, a_3 не зависят от $\varepsilon, t \in [0, T]$, $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $H^1(\Omega)$. Эта оценка дает возможность выполнить предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ и доказать существование слабых решений задачи (1)–(6). Теорема единственности доказывается с помощью техники, применяемой для линейных задач (см., например, [2, с. 174]).

Что касается теоремы существования сильных решений, то для ее доказательства необходимо получить дополнительные оценки решений регуляризированной задачи, независимые от ε . Сделать это можно, рассматривая систему уравнений, получающуюся формальным дифференцированием по t регуляризированной задачи, и используя оценку (12).

Отметим, что для сильных решений справедливы соотношения (1) — (6), если равенства (1) и (2) понимать как равенства элементов в пространстве $L^2(\Omega \times (0, T))$. Кроме того, исходя из (11), легко проверить, что любое слабое неотрицательное решение задачи (1) — (6) может быть аппроксимировано последовательностью сильных (доказательство приведенных ниже утверждений это обстоятельство существенно использует).

3. Дальнейшие рассмотрения посвящены исследованию асимптотического поведения решений задачи (1) — (6) при $t \rightarrow \infty$. Как известно (см., например, [3–7] и др.), при обсуждении подобных проблем важную роль играют аттракторы, изучение которых позволяет дать ответ на вопрос о возможных предельных режимах рассматриваемой системы.

Пусть

$$H_0^+ = \{(n(x); p(x)) : n, p \in L^2(\Omega), n(x), p(x) \geq 0, \langle n - p \rangle = \langle N \rangle\}.$$

Тогда теорема 1 позволяет построить сильно непрерывную полугруппу S_t , действующую в H_0^+ по формуле

$$S_t y_0 = y(t) = (n(t); p(t)), \quad y_0 = (n_0, p_0),$$

где $(n(t); p(t))$ — решение задачи (1)–(6) с начальными условиями $(n_0; p_0) \in H_0^+$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Полугруппа S_t обладает в H_0^+ компактным глобальным аттрактором M , т. е. существует компактное множество

$M \subset H_0^*$ такое, что $S_t M = M$ и для любого ограниченного множества B из H_0^*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \text{dist}_{H_0} (S_t y, M) : y \in B \} = 0,$$

где $\text{dist}_{H_0} (y, M)$ — расстояние в пространстве $H_0 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ от элемента y до множества M . Аттрактор M имеет конечную хаусдорфову размерность (определение см., например, в [3, с. 270]) и является ограниченным замкнутым подмножеством пространства $H_1 = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Если же при этом $j_n^v(x), j_p^v(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, то аттрактор M лежит в ограниченном множестве многообразия

$$H_2^* = H_0^* \cap \left\{ (n; p) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : D_n \frac{\partial n}{\partial \nu} = j_n^v, -D_p \frac{\partial p}{\partial \nu} = j_p^v \right\}.$$

Доказательство существования аттрактора опирается на результаты общего характера (см., например, [3—5]) и то обстоятельство, что полугруппа S_t обладает компактным поглощающим множеством. Существование этого множества вытекает из лемм, приведенных ниже.

Лемма 1. Полугруппа S_t является диссипативной в H_0^* , т. е. существует $R > 0$ такое, что для любого ограниченного множества B в H_0^* $\|S_t y\|_{H_0^*} \leq R, y \in B, t \geq t_0(B)$.

Это утверждение легко получить, используя свойства (7), (10) функции $F(n, p)$ и соотношение (11).

Лемма 2. Для любых начальных условий $y_0 = (n_0; p_0) \in H_0^*$ справедлива оценка

$$\|S_t y_0\|_{H_1} \leq C_T t^{-1/2}, t \in (0, T]. \quad (13)$$

Эта лемма отражает хорошо известный для параболических систем факт сглаживания с течением времени начальных условий. Формально ее доказательство получается, если (1), (2) умножить в $L^2(\Omega)$ соответственно на $t(1 - D_n \Delta_N)^{-s/2} \frac{\partial n}{\partial t}$ и $t(1 - D_p \Delta_N)^{-s/2} \frac{\partial p}{\partial t}$, где Δ_N — оператор Лапласа с условиями Неймана на $\partial\Omega$. Сначала следует считать, что $s > 0$. Затем, полагая $s = 0$ и используя оценки, полученные при $s > 0$, удается доказать, что

$$\int_0^t \tau \left(\left\| \frac{\partial n}{\partial \tau} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\|^2 \right) d\tau + t (\|n(t)\|_1^2 + \|p(t)\|_1^2) \leq C_T, \quad (14)$$

где $t \in (0, T]$, а константа C_T зависит лишь от $\|n_0\|, \|p_0\|, \|j_n^v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}, \|j_p^v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$. Отсюда вытекает (13). Оценка (14) позволяет также при условии, что $j_n^v, j_p^v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, доказать принадлежность $M \subset H_2^*$.

При доказательстве конечномерности аттрактора рассматривается уравнение в вариациях, отвечающее задаче (1) — (6), и устанавливается равномерная квазидифференцируемость (определение см. в [3, с. 270]) полугруппы S_t на M . Свойства квазидифференциала полугруппы S_t позволяют воспользоваться теоремами о размерности инвариантных множеств квазидифференцируемых отображений [5, с. 282]. Здесь можно также использовать метод, применявшийся в [6—8].

В заключение отметим, что аналоги представленных выше утверждений могут быть получены и для других граничных условий. Например, можно считать, что $\partial\Omega$ имеют место соотношения

$$D_n \frac{\partial n}{\partial \nu} + k_1 (n - \bar{n}) = 0, \quad D_p \frac{\partial p}{\partial \nu} + k_2 (p - \bar{p}) = 0, \quad \varphi = 0,$$

где $\bar{n}, \bar{p}$ — заданные на $\partial\Omega$ неотрицательные функции, $k_1, k_2 > 0$. Используемая выше техника позволяет также рассмотреть некоторые варианты нелинейных граничных условий.

Список литературы: 1. *Моделирование полупроводниковых приборов и технологических процессов* Последние достижения / Под ред. Д. Миллера. М., 1989. 280 с. 2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с. 3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М., 1989. 294 с. 4. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье — Стокса и других уравнений с частными производными // Усп. мат. наук. 1987. 42, № 6. С. 25—60. 5. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York, 1989. 500 p. 6. *Чуешов И. Д.* Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек. // Мат. сб. 1987. 133, № 4. С. 419—428. 7. *Чуешов И. Д.* Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Мат. сб. 1990. 181, № 1. С. 25—36. 8. *Ладыженская О. А.* О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье — Стокса и других диссипативных систем. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1982. 115. С. 137—155.

Поступила в редколлегию 15.10.90

УДК 513.33

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ, Г. П. ЧИСТЯКОВ

ТОЧНЫЕ В СМЫСЛЕ ПОРЯДКА ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В λ -МЕТРИКЕ

Нормальная функция распределения (ф.р.) была первой, для которой в 1951 г. Н. А. Сапоговым были получены оценки устойчивости разложений в равномерной метрике. Не вдаваясь в историю вопроса (об истории развития исследований по устойчивости разложений ф.р. [1]), отметим, что оценкам устойчивости разложений нормальной ф.р. в различных метриках посвящено значительное число работ. Среди этих метрик выделим две: метрику Леви L и λ -метрику. Сходимость ф.р. в метрике L эквивалентна слабой сходимости, и в этой метрике всегда имеет место эффект устойчивости разложений ф.р. Этим объясняется важность получения точных в смысле порядка оценок устойчивости разложений стандартной нормальной ф.р. в метрике Леви. Такие оценки были получены совсем недавно [2].

λ -метрика была введена В. М. Золотаревым и быстро нашла применение в исследованиях устойчивости характеристизационных за-

дач математической статистики и других вопросах. Эта метрика определяется с помощью характеристических функций (х.ф.) F и G

$$\lambda(F, G) = \inf_{t>0} \max \left\{ \frac{1}{2} \max_{|u| < \frac{1}{t}} |\varphi(u, F) - \varphi(u, G)|, t \right\}.$$

λ -метрика эквивалентна метрике Леви в том смысле, что сходимость в λ -метрике влечет за собой сходимость в метрике Леви и наоборот. Тем не менее не существует такой неотрицательной и убывающей к нулю при $x \rightarrow 0$ функции $\psi(x)$, для которой выполняется хотя бы одно из следующих неравенств: $\lambda \leq \psi(L)$, $L \leq \psi(\lambda)$ для любых пар соответствующих функций ($F \rightarrow \varphi(u, F)$, $G \rightarrow \varphi(u, G)$). Это показано в работе [3]. Для λ -метрики как метрике, эквивалентной метрике Леви, эффект устойчивости разложений ф.р. всегда имеет место. Возникает вопрос об оценке устойчивости разложений нормальной ф.р. в λ -метрике, насколько ее порядок отличается от оценки, полученной для нормальной ф.р. в метрике Леви.

Пусть G — ф. р., G_ε — класс ф. р. F , таких что $\lambda(F, G) \leq \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$ а K_F , K_G — классы компонент ф. р. F и G соответственно. Следия В. М. Золотареву [4], введем величину

$$\beta_\lambda(\varepsilon, G) = \sup_{F \in G_\varepsilon} \sup_{F' \in K_F} \inf_{G' \in K_G} \lambda(F', G'),$$

которая является количественной характеристикой устойчивости разложений ф.р. G в λ -метрике. Цель настоящей статьи — получение точной в смысле порядка оценки этой величины при $\varepsilon \rightarrow 0$. А именно, имеет место

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$C_1 \frac{\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4}} \leq \beta_\lambda(\varepsilon, \Phi) \leq C_2 \frac{\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/4}}. \quad (1)$$

В дальнейшем символы C , C_1 , C_2 ... обозначают абсолютные положительные постоянные, причем символ C будем использовать для обозначения, вообще говоря, различных постоянных в тех случаях, когда нас не интересует их численное значение.

Оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$. Нам понадобится следующий результат о связи между λ -метрикой и метрикой Леви L , полученный в работе [3].

Теорема А. Пусть H_1, H_2 — ф. р., $W_{H_1}(x) = H_1(-x) + 1 - H_1(x+0)$ и $u(x) = \min\{W_{H_1}(x), W_{H_2}(x)\}$, $x > 0$. Величина $L = L(H_1, H_2)$ оценивается сверху с помощью величины $\lambda = \lambda(H_1, H_2)$ следующим образом: $L \leq 8\lambda \ln \frac{\beta}{\lambda}$, где в качестве β можно взять любое число, удовлетворяющее условиям: $\beta \geq \varepsilon$, и $(\beta/\varepsilon) \leq \lambda \ln(\beta/\lambda)$.

Применим теорему А при $H_1 = F$, $H_2 = \Phi$, полагая $\beta = 5\sqrt{-\ln \varepsilon}$, где $\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \lambda(F, \Phi)$ — достаточно малое положительное число. Поскольку

$$\min \left\{ W_F \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \right), W_\Phi \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right\} \leq W_\Phi \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \right) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2\varepsilon^2} \right\} < \varepsilon,$$

то имеем $\varepsilon_L = L(F, \Phi) \leq C\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Последняя оценка позволяет использовать некоторые результаты, связанные с устойчивостью разложений нормальной ф. р. в метрике Леви и равномерной метрике [2, 5].

Пусть $\varepsilon_p = \rho(F, \Phi) = \sup_x |F(x) - \Phi(x)|$ — равномерное расстояние между ф. р. F и Φ . Имеем [5, с. 352]

$$\varepsilon_p \leq C\varepsilon_L \leq C\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Искомая оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$ будет установлена, если мы докажем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $F = F_1 \times F_2$, F_j^* — усеченные ф. р. на уровне $M = 1 + \sqrt{-2 \ln \varepsilon_p}$; a_j, s_j^2 — соответственно среднее значение и дисперсия ф. р. F_j^* ; $\Phi_j(x) = \Phi((x - a_j)/s_j)$ ($\Phi_j(x) = E_{a_j}(x)$ — единственный закон с точкой роста a_j при $s_j = 0$) [5, с. 341]. Если ф. р. F_1^* имеет нулевую медиану, то

$$\lambda(F_j, \Phi_j) \leq C \frac{\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/2}}{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/4}}; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Доказательство. Оценим величину $\lambda(F_j, \Phi_j)$, полагая для определенности $j = 1$. В силу инвариантности λ -метрики относительно сдвигов можно считать $a_1 = 0$. Согласно [2, т. 3] х. ф. $\varphi(z, F_1^*)$ допускает представление

$$\varphi(z, F_1^*) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \frac{1}{T_1} \theta(z) \right\}; \quad \sigma^2 = s_1^2, \quad |z| \leq T_1,$$

где функция $\theta(z)$ голоморфна в круге $\{|z| \leq T_1\}$, и

$$|\theta(z)| \leq C(\sigma^2 + T^{-3}T_1^{-1})|z|^3, \quad |z| \leq \frac{1}{2}T_1. \quad (4)$$

Здесь $T = \frac{1}{3}\sqrt{-\ln \varepsilon_p}$, $T_1 = CT(\ln T)^{-1}$. Поэтому при вещественных t , $|t| \leq \frac{1}{2}T_1$ имеем

$$\left| \varphi(t, F_1^*) - \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) \right| \leq \frac{|\theta(t)|}{T_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \frac{|\theta(t)|}{T_1} \right\}.$$

Поскольку при $|t| \leq CT_1^{1/2} C \sigma^2 |t|^3 T_1^{-1} \leq \frac{1}{4} \sigma^2 t^2$, то в силу (4) получим

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + |\theta(t)| T_1^{-1} \right\} \leq C \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sigma^2 t^2 \right\}$$

и

$$\begin{aligned} & \max_{|t| \leq CT_1^{1/2}} \left| \varphi(t, F_1^*) - \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) \right| \leq \\ & \leq C \max_{|t| \leq CT_1^{1/2}} \left\{ \frac{|t|}{T_1} \sigma^2 t^2 \exp \left(-\frac{1}{4} \sigma^2 t^2 \right) \right\} + CT^{-3} T_1^{1/2} \leq CT_1^{-1/2}, \end{aligned}$$

так что $\lambda(F_1^*, \Phi_1) \leq CT_1^{-1/2}$. Для оценки величины $\lambda(F_1^*, F_1)$ заметим, что

$$\lambda(F_1^*, F_1) \leq \max_{t \in R} |\varphi(t, F_1^*) - \varphi(t, F_1)| \leq 2W_{F_1}(M).$$

Как известно [5, с. 342], $W_{F_1}(M) \leq C_{\varepsilon_p} \leq CT_1^{-1/2}$. Поэтому

$$\lambda(F_1, \Phi_1) \leq \lambda(F_1, F_1^*) + \lambda(F_1^*, \Phi_1) \leq CT_1^{-1/2}.$$

Учитывая неравенства (2), приходим к оценке $T_1 \geq C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/2} \times \times \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}$, откуда и следует утверждение теоремы 2.

Отметим, наконец, что при $\sigma^2 > 1$ (т. е. в том случае, когда $\Phi_1 \notin K_\Phi$) имеем $1 < \sigma^2 \leq 1 + CM^2 \varepsilon_p$, и, как нетрудно убедиться, $\lambda(F_1, \Phi) \leq CT_1^{-1/2}$. Оценка сверху величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$ тем самым доказана.

Замечание. Если усеченные дисперсии $s_j^2 \geq C > 0$, то из неравенств (2) и доказательства теоремы Н. А. Сапогова (см. [5, с. 346]) нетрудно получить такую оценку; $\lambda(F_j, \Phi_j) \leq C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2}$. Эта оценка была использована в задаче устойчивости характеристикизации нормальной ф. р. равномерностью линейных статистик [6, след. 2.5.2].

Оценка снизу величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$. При построении примера, реализующего точную в смысле порядка оценку снизу величины $\beta_\lambda(\varepsilon, \Phi)$, мы следуем методу работ [1, 2]. Искомая оценка снизу будет получена, если для каждого $T_1 > C$ мы укажем ф. р. $F_j = F_j, T_j, j = 1, 2$, такие, что выполнены оценки

$$\lambda(F_1 \times F_2, \Phi) \leq C \exp \{-CT^2\}, T = T_1 \ln T_1 \quad (5)$$

и в то же время

$$\inf_{H \in K_\Phi} \lambda(F_1, H) \geq CT_1^{-1/2}. \quad (6)$$

Приступим к построению ф. р. $F_j, j = 1, 2$.

1. Пусть F_1 — ф. р. Пуассона с х. ф.

$$\varphi(t, F_1) = \exp \left\{ T_1 \left(e^{it/T_1} - 1 - i \frac{t}{T_1} \right) \right\}, T_1 > C;$$

$I(x)$ — функция ограниченной вариации, преобразование Фурье которой есть $\varphi(t, G) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \{\varphi(t, F_1)\}^{-1}$. Покажем, что $G(x)$ близка к некоторой ф. р. в том смысле, что

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) \varphi(t, G) dt > 0 \quad (7)$$

на «длинном» интервале и мала вне его.

1.1. В (7) перенесем интегрирование на прямую $t - iy$, $y > 0$:

$$\rho(x) = \frac{\exp(-yx) \varphi(-iy, G)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t, x, y) dt; \quad R(t, x, y) = e^{-ixt} \frac{\varphi(t - iy, G)}{\varphi(-iy, G)}.$$

Имеем

$$\ln R(t, x, y) = -it(x - y + e^{y/T_1} - 1) - T_1 e^{y/T_1} \left(e^{it/T_1} - 1 - i \frac{t}{T_1} \right) - \frac{t^2}{2}.$$

Выберем y из «уравнения перевала»

$$x = y - (e^{y/T_1} - 1) = y \{1 - y^{-1} (e^{y/T_1} - 1)\}. \quad (8)$$

Если $y \leq \frac{1}{2} T$, то $y^{-1} (e^{y/T_1} - 1) \leq T_1^{-1/2} < \frac{1}{2}$, т. е. уравнение (8) разрешимо, причем $y \leq 2x \leq 2y$. При таких y

$$\ln R(t, x, y) = -\frac{t^2}{2} - T_1 e^{y/T_1} \left(e^{it/T_1} - 1 - i \frac{t}{T_1} \right),$$

так что

$$\operatorname{Re} \ln R(t, x, y) = -\frac{t^2}{2} + 2T_1 e^{y/T_1} \sin^2 \frac{t}{2T_1}; \quad (9)$$

$$\operatorname{Im} \ln R(t, x, y) = T_1 e^{y/T_1} \left(\frac{t}{T_1} - \sin \frac{t}{T_1} \right). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\rho(x) = \frac{e^{-yx}}{2\pi} \varphi(-iy, G) I(x),$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ \operatorname{Re} \ln R(t, x, y) \} \cos \{ \operatorname{Im} \ln R(t, x, y) \} dt.$$

Будем считать, что $x \leq \frac{1}{4} T$, откуда следует $y \leq \frac{1}{2} T$. Отсюда с учетом (9), (10) имеем при $T_1 > C$

$$-\frac{t^2}{2} < \operatorname{Re} \ln R(t, x, y) \leq -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2T_1} e^{y/T_1} t^2 < -\frac{t^2}{4}; \quad (11)$$

$$| \operatorname{Im} \ln R(t, x, y) | \leq \frac{1}{6} T_1 e^{y/T_1} \left| \frac{t}{T_1} \right|^3. \quad (12)$$

Выберем постоянную C_3 из условия

$$\frac{1}{2} \int_{-C_3}^{C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt > \int_{|t| > C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt \quad (13)$$

и оценим интеграл $I(x)$, разбивая его на два

$$I(x) = \left\{ \int_{|t| \leq C_3} + \int_{|t| > C_3} \right\} \exp \{ \operatorname{Re} \ln R(t, x, y) \} \cos \{ \operatorname{Im} \ln R(t, x, y) \} dt = \\ = I_1(x) + I_2(x).$$

Если $|t| \leq C_3$ и $T_1 > C_3^2$, то $|\operatorname{Im} \ln R(t, x, y)| < \frac{\pi}{3}$, и с учетом (11),

(12) получим

$$I_1(x) \geq \frac{1}{2} \int_{-C_3}^{C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad |I_2(x)| \leq \int_{|t| > C_3} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt.$$

Из (13) вытекает, что $I_1 > |I_2|$, и значит

$$\rho(x) > 0, \quad x \leq \frac{1}{4} T. \quad (14)$$

1.2. Оценим сверху $\rho(x)$ при $x \geq \frac{1}{4} T$. Имеем

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \left(t - i \frac{T}{4} \right) x \right\} \varphi \left(t - i \frac{T}{4}, G \right) dt.$$

Так как при $T_1 > C$

$$\left| \varphi \left(t - i \frac{T}{4}, G \right) \right| = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{32} - T_1 \left(e^{T/4T_1} \cos \frac{t}{T_1} - 1 - \frac{T}{4T_1} \right) \right\} \leq \\ \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{24} \right\},$$

то

$$|\rho(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{Tx}{4} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{24} \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{Tx}{4} + \frac{T^2}{24} \right\},$$

откуда следует, что

$$|\rho(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{Tx}{12} \right), \quad x \geq \frac{1}{4} T. \quad (15)$$

1.3. Пусть F_2 — ф. р. с плотностью

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \delta^{-1} \rho(x), & x \leq \frac{1}{4} T; \\ 0 & x > \frac{1}{4} T; \end{cases}$$

$$\delta = \int_{-\infty}^{\frac{1}{4} T} \rho(x) dx = 1 - \int_{\frac{1}{4} T}^{\infty} \rho(x) dx.$$

Тогда при любом $t \in R$

$$|\varphi(t, F_2) - \varphi(t, G)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (p_2(x) - p(x)) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |p_2(x) - p(x)| dx \leq (\delta^{-1} - 1) \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}T} p(x) dx + \int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} |p(x)| dx \leq 2 \int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} |p(x)| dx.$$

Согласно (15)

$$\int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} |p(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{4}T}^{\infty} \exp\left(-\frac{Tx}{12}\right) dx = \frac{12}{\sqrt{2\pi}T} \exp\left(-\frac{T^2}{48}\right).$$

Следовательно,

$$\left| \varphi(t, F_1) \varphi(t, F_2) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = |\varphi(t, F_1) \varphi(t, F_2) - \varphi(t, F_1) \varphi(t, G)| \leq \frac{12}{\sqrt{2\pi}T} \exp\left(-\frac{T^2}{48}\right),$$

что и доказывает (5).

2. Перейдем теперь к неравенству (6), считая всюду в дальнейшем $T_1 > C$. В силу теоремы Крамера, надо доказать, что для любого R и $0 \leq \tau \leq 1$ найдется константа C_4 , такая что

$$\lambda(F_1, \Phi_{\tau^2, a}) \geq C_4 T_1^{-1/2}; \quad \Phi_{\tau^2, a}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\tau}\right).$$

Так как $\varphi(t, \Phi_{\tau^2, a}) = \exp\left(iat - \frac{\tau^2 t^2}{2}\right)$, речь идет об оценке снизу величины

$$B(t) = \left| \varphi(t, F_1) - \exp\left(iat - \frac{\tau^2 t^2}{2}\right) \right|.$$

В зависимости от значений a и τ возможны следующие случаи.

2.1. Пусть

$$\tau^2 - T_1^{-1} < -C_5 T_1^{-3/2} \quad (16)$$

Константа C_5 выбирается ниже. Имеем

$$B(t) \geq \left| \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) + \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) - |\varphi(t, F_1)| \right| \geq |B_1(t)| - |B_2(t)|,$$

где

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) \times \\ &\quad \times \left[\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(\tau^2 - \frac{1}{T_1}\right)\right\} - 1 \right]; \\ B_2(t) &= |\varphi(t, F_1)| - \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1}\right) = \\ &= \exp\left\{-2T_1 \sin^2 \frac{t}{2T_1}\right\} \left[1 - \exp\left\{-2T_1 \left(\frac{t^2}{4T_1^2} - \sin^2 \frac{t}{2T_1}\right)\right\} \right]. \end{aligned}$$

При $t = t_1 - T_1^{-1/2}$ получим с учетом (16)

$$|B_1(t_1)| \geq \frac{C_5}{2} (eT_1)^{-1/2}, \quad |B_2(t_1)| \leq CT_1 \left(\frac{t_1^2}{4T_1^2} - \sin^2 \frac{t_1}{2T_1} \right) \leq C \frac{t_1^4}{T_1^3} = \frac{C}{T_1},$$

так что при $T_1 > C$ $|B(t_1)| > CT_1^{-1/2}$. Последнее неравенство справедливо и при $\tau^2 - T_1^{-1} > C_5 T_1^{-3/2}$, что устанавливается аналогично. Таким образом, доказано неравенство

$$\lambda(F_1, \Phi_{\tau, a}) \geq CT_1^{-1/2}, \quad |\tau^2 - T_1^{-1}| > C_5 T_1^{-3/2}.$$

2.2. Предположим сейчас, что

$$|a| \leq C_6 T_1^{-1}, \quad |\tau^2 - T_1^{-1}| \leq C_5 T_1^{-3/2}, \quad (17)$$

константа C_6 выбирается ниже. Имеем

$$B(t) = \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) \left| \exp\left\{-iat - \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - 1 \right| = \\ = \exp\left(-\frac{\tau^2 t^2}{2}\right) |B_3(t) + B_4(t)|,$$

где

$$B_3(t) = \exp\left\{-iat - \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - \exp\left\{-\frac{it^3}{6T_1^2}\right\}; \\ B_4(t) = \exp\left\{-\frac{it^3}{6T_1^2}\right\} - 1.$$

При $t = t_1$ получим с учетом (17)

$$|B_3(t_1)| = \left| \exp\left\{-iat_1 - \frac{t_1^2}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \tau^2\right) + T_1 \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{T_1}\right)^k\right\} - 1 \right| \leq \\ \leq \left(|at_1| + \frac{C_5}{2} T_1^{-1/2} + \frac{2t_1^4}{T_1^3} \right) \exp\left(|at_1| + \frac{C_5}{2} T_1^{-1/2} + \frac{2t_1^4}{T_1^3} \right) < \\ < e^2 \left\{ \left(\frac{C_5}{2} + C_6 \right) T_1^{-1/2} + \frac{2}{T_1} \right\}; \\ |B_4(t_1)| \geq \left| \sin \frac{t_1^3}{6T_1^2} \right| \geq \frac{1}{3\pi} T_1^{-1/2}; \\ \tau^2 t^2 = 1 + (\tau^2 - T_1^{-1}) T_1 \leq 1 + C_5 T_1^{-1/2} < 2.$$

Выберем константы C_5 и C_6 из условия $e^2 \left(\frac{1}{2} C_5 + C_6 \right) < (12\pi)^{-1}$. В таком случае имеем

$$|B(t_1)| \geq \exp\left(-\frac{\tau^2 t_1^2}{2}\right) \{ |B_4(t_1)| - |B_3(t_1)| \} > \frac{1}{6\pi e} T_1^{-1/2},$$

так что и при условиях (17) имеет место оценка $\lambda(F_1, \Phi_{\tau, a}) > CT_1^{-1/2}$.

2.3. Пусть, наконец,

$$|a| > C_6 T_1^{-1}, \quad |\tau^2 - T_1^{-1}| \leq C_7 T_1^{-3/2}. \quad (18)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |B(t)|^2 &= e^{-\tau^2 t^2} \left| \exp \left\{ \left(T_1 \cos \frac{t}{T_1} - T_1 + \frac{\tau^2 t^2}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \left(T_1 \sin \frac{t}{T_1} - t - at \right) \right\} - 1 \right|^2 = \\ &= e^{-\tau^2 t^2} \{ (e^{u(t)} \cos v(t) - 1)^2 + e^{2u(t)} \sin^2 v(t) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$u(t) = T_1 \left(\cos \frac{t}{T_1} - 1 \right) + \frac{\tau^2 t^2}{2}, \quad v(t) = T_1 \left(\sin \frac{t}{T_1} - \frac{t}{T_1} \right) - at.$$

Пусть для определенности $a > 0$ (случай $a \leq 0$ разбирается аналогично). Тогда при $t \geq 0$ $|v(t)| = T_1 (t T_1^{-1} - \sin(t T_1^{-1})) + at$. Положим $t_2 = \min(a^{-1/2}, a^{-1})$. Если $C_6 T_1^{-1} < a \leq 1$, то

$$\begin{aligned} 1 \leq t_2 = a^{-1/2} < \left(\frac{T_1}{C_6} \right)^{1/2}, \quad \left(\frac{C_6}{T_1} \right)^{1/2} < at_2 = a^{1/2} \leq 1, \\ 0 \leq \frac{t_2}{T_1} - \sin \frac{t_2}{T_1} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{t_2}{T_1} \right)^3 \leq \frac{C}{T_1^{3/2}}, \end{aligned}$$

значит

$$\left(\frac{C_6}{T_1} \right)^{1/2} \leq |v(t_2)| \leq 1 + \frac{C}{T_1^{3/2}} < \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Если же $a > 1$, то $t_2 = a^{-1} < 1$, $at_2 = 1$ и

$$1 \leq |v(t_2)| \leq 1 + \frac{1}{T_1^3}. \quad (21)$$

Далее, из (18) и выбора t_2 следует

$$\tau^2 t_2^2 = \tau^2 - \frac{1}{T_1} \Big) t_2^2 + \frac{t_2^2}{T_1} \leq C, \quad u(t_2) \geq -2T_1 \sin^2 \frac{t_2}{2T_1} \geq -\frac{t_2^4}{2T_1} > -C. \quad (22)$$

Из (19)–(22) непосредственно вытекает $|B(t_2)| \geq C T_1^{-1/2}$. Неравенство (6) тем самым установлено, что и завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы: 1. Чистяков Г. П. Устойчивость разложений законов распределения // Теория вероятностей и ее применение. 1986. Вып. 3. 31. С. 433–450. 2. Голинский Л. Б., Чистяков Г. П. Точные в смысле порядка оценки устойчивости разложений нормального распределения в метрике Леви // Проблемы устойчивости стохастических моделей. М., 1991. С. 16–40. 3. Золотарев В. М., Сенатов В. В. Двусторонние оценки метрики Леви // Теория вероятностей и ее применение. 1975. Вып. 2. 20. С. 239–250. 4. Золотарев В. М. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона на компоненты // Теория вероятностей и ее применение. 1968. Вып. 4. 13. С. 738–741. 5. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 6. Янушкявичус Р. В. Устойчивость характеристик вероятностных распределений. Вильнюс, 1991. 248 с.

Поступила в редколлегию 10.09.91

ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА СИЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

1. Обозначим через J бесконечную в обе стороны трехдиагональную матрицу с коэффициентами

$$J_{ij} = b(j) \delta(i-j-1) + a(i) \delta(i-j) + b(i) \delta(i-j+1)$$

$$(i, j \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Im} a(i) = 0, \quad b(i) > 0)$$

и через $P(\lambda, n)$ и $Q(\lambda, n)$ — фундаментальную систему решений конечно-разностного уравнения

$$b(n-1) \psi(n-1) + a(n) \psi(n) + b(n) \psi(n+1) = \lambda \psi(n) \quad (1.1)$$

с начальными данными

$$P(-1) = 0, \quad Q(-1) = 1,$$

$$P(0) = 1, \quad Q(0) = 0.$$

Согласно теореме Вейля—Хеллингера [1] существуют такие голоморфные вне вещественной оси функции $m^\pm(\lambda)$, что решения

$$\psi^+(\lambda, n) = m^+(\lambda) P(\lambda, n) + Q(\lambda, n);$$

$$\psi^-(\lambda, n) = P(\lambda, n) + m^-(\lambda) Q(\lambda, n)$$

уравнения (1.1) принадлежат пространствам $l_2(\mathbb{Z}_\pm)$ и

$$-b(-1) \frac{\operatorname{Im} m^+(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} |\psi^+(\lambda, k)|^2, \quad -b(-1) \frac{\operatorname{Im} m^-(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\psi^-(\lambda, k)|^2.$$

Функции $m^\pm(\lambda)$ принимают сопряженные значения в сопряженных точках и

$$\frac{\operatorname{Im} m^\pm(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} > 0, \quad m^\pm(\lambda) = \frac{b(-1)}{\lambda} + O(\lambda^{-2}), \quad \operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty.$$

Следуя работе [2], вместо пары функций $m^\pm(\lambda)$ введем одну функцию $m(z)$, определенную равенствами

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z+z^{-1}), & |z| < 1 \\ (m^-(z+z^{-1}))^{-1}, & |z| > 1. \end{cases}$$

и будем называть ее функцией Вейля матрицы J . Функция $m(z)$ однозначно определяет всю матрицу J и обладает свойствами:

1) $m(z)$ голоморфна вне вещественной оси и единичной окружности;

2) $\frac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0 \quad (|z| \neq 1, \operatorname{Im} z \neq 0);$

3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{it}{m(it)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{m(it)}{it} = b(-1);$

(См. [2] лемма 1.1).

Матрица называется быстроубывающей, если

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a(n)| < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |b^2(n) - 1| < \infty.$$

Для быстроубывающих якобиевых матриц вместо стандартных спектральных характеристик (функции Вейля и спектральные функции) можно ввести альтернативные характеристики, возникающие в теории рассеяния (коэффициент отражения, дискретный спектр и нормировочные коэффициенты). Быстроубывающие матрицы, у которых коэффициент отражения равен нулю, называются безотражательными. Доказано [2], что для того, чтобы функция $m(z)$ была функцией Вейля безотражательной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида

$$m(z) = C \left(z + \sum_{j=1}^N \frac{-\alpha_j}{\lambda_j - z} - \sum_{j=1}^N \frac{-\alpha_j}{\lambda_j} \right), \quad (1.2)$$

где $-\alpha_j > 0$, а $\lambda_j \in \mathbf{R}$ — попарно различные вещественные числа. Кроме того, если $\|J\| < M + M^{-1}$, то

$$M^{-1} < |\lambda_j| < M \quad (1.3)$$

(см. [2] (2.17), лемма 2.2. и теорема 2.2). При этом $C = b^{-1}(-1)$ и

из формулы $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{m(z)}{z} = b(-1)$ следует, что $b^2(-1) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{-\alpha_j}{\lambda_j^2}$.

Обозначим через $\rho(\lambda)$ дискретную меру

$$d\rho(\lambda) = \sum_{j=1}^N -\alpha_j \delta(\lambda - \lambda_j) d\lambda.$$

Тогда представление (1.2) можно записать в виде

$$m(z) = C \left(z + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} - \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} \right);$$

$$C = b^{-1}(-1) = \left(1 + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.4)$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Для того чтобы функция $m(z)$ была функцией Вейля сильного предела последовательности безотражательных матриц Якоби, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида (1.4), где $\rho(\lambda)$ — борелевская мера, сосредоточенная на компакте вещественной оси, не содержащем нуля.

Для доказательства теоремы сделаем вначале следующее замечание. Пусть $\{J_N\}$ — последовательность якобиевых матриц и $m_N(z)$ — их функции Вейля. Пусть $J_N \rightarrow J$ в смысле сильной сходимости, а $m_N(z) \rightarrow m(z)$ при каждом z ($|z| \neq 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$). Тогда $m(z)$ является функцией Вейля матрицы J . Действительно, канонические решения $P_N(\lambda, n)$, $Q_N(\lambda, n)$, соответствующие матрицам J_N , при каждом λ

сходятся к каноническим решениям $P(\lambda, n)$, $Q(\lambda, n)$ уравнения $J\psi = \lambda\psi$. При $\lambda = z + z^{-1}$ ($|z| \neq 1$, $\text{Im } z \neq 0$) функции $\psi_N(z, n) = m_N(z)P_N(z + z^{-1}, n) + Q_N(z + z^{-1}, n)$ являются решениями Вейля, удовлетворяющими уравнению $J_N\psi_N(z, n) = (z + z^{-1})\psi_N(z, n)$. Кроме того, при $|z| < 1$

$$-b_N(-1) \frac{\text{Im } m_N(z)}{\text{Im}(z + z^{-1})} = \|\psi_N(z, n)\|_{L_2(z_+)} \quad (1.5)$$

а при $|z| > 1$

$$-b_N(-1) \frac{\text{Im } m_N(z)}{\text{Im}(z + z^{-1})} = \|\psi_N(z, n)\|_{L_2(z_-)} \quad (1.6)$$

Переходя к пределу в равенствах (1.5), (1.6) при $N \rightarrow \infty$, получим, что $m(z) = \lim m_N(z)$ есть функция Вейля матрицы J .

Обратимся к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть $\{J_N\}_{N=1}^\infty$ — последовательность безотражательных якобиевых матриц и $J_N \rightarrow J$ в смысле сильной сходимости. Безотражательные матрицы J_N ограничены, а поскольку они имеют сильный предел, то ограничены в совокупности. Пусть $\|J_N\| < M + M^{-1} \forall N \in \mathbb{N}$. Функции Вейля $m_N(z)$ матриц J_N имеют вид

$$m_N(z) = C_N \left(z + \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda - z} - \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda} \right),$$

где $\rho_N(\lambda)$ — дискретные меры, сосредоточенные на множестве

$$\left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right].$$

Кроме того,

$$C_N = b_N^{-1}(-1) = \left(1 + \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{-1/2}$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$\int d\rho_N(\lambda) \leq M^2(b^2(-1) - 1) \leq M^2((M + M^{-1})^2 - 1) = M^4 + M^2 + 1.$$

Пользуясь теоремой Хелли, выделим подпоследовательность $\rho_{N'}(\lambda) \rightarrow \rho(\lambda)$. Тогда $m_{N'}(z) \rightarrow m(z)$ при каждом z ($|z| \neq 1$, $\text{Im } z \neq 0$) и значит $m(z)$ есть функция Вейля матрицы J .

Достаточность. Пусть некоторая функция $m(z)$ имеет вид (1.4), где $\text{supp } \rho(\lambda) \subset \left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. Пусть $\int d\rho(\lambda) = \rho$. Построим последовательность дискретных мер $\rho_N(\lambda) \rightarrow \rho(\lambda)$ таких, что $\int d\rho_N(\lambda) = \rho$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность рациональных функций

$$m_N(z) = C_N \left(z + \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda - z} - \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda} \right);$$

$$C_N = \left(1 + \int \frac{d\rho_N(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{-1/2}$$

сходится к $m(z)$. Каждая из них является функцией Вейля некоторой безотражательной матрицы J_N . Последовательность J_N ограничена, поэтому из нее можно выделить сильно сходящуюся подпоследо-

тельность $J_{N'}$. Тогда, согласно сделанному выше замечанию, $m(z)$ является функцией Вейля матрицы $J = \lim_{N' \rightarrow \infty} J_{N'}$.

Следствие 1. Для того, чтобы матрица J была сильным пределом безотражательных якобиевых матриц, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее функция Вейля была голоморфна при $|z|=1, z \neq \pm 1$.

Необходимость следует из представления (1.4).

Достаточность. Пусть функция Вейля $m(z)$ ограниченной матрицы J голоморфна на единичной окружности. Из ограниченности матрицы J следует, что ее канонические функции Вейля $m^\pm(\lambda)$ не имеют особенностей вне некоторого компакта вещественной оси.

Пусть $m^\pm(\lambda)$ голоморфны вне отрезка $\left[-M - \frac{1}{M}, \frac{1}{M} + M\right]$. Тогда все особенности функции

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z + z^{-1}), & |z| < 1 \\ (m^-(z + z^{-1}))^{-1}, & |z| > 1 \end{cases}$$

находятся на отрезках $\left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. С учетом свойства (2) функции $m(z)$ это означает, что $m(z)$ есть функция Неванлинны и поэтому допускает представление

$$m(z) = C \left(z + D + \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} \right),$$

в котором $\text{supp } \rho(\lambda) \subset \left[-M, -\frac{1}{M}\right] \cup \left[\frac{1}{M}, M\right]$. Находя коэффициенты C и D из свойства 3) функции $m(z)$, получим представление (1.4), откуда в силу теоремы 1 заключаем, что J есть сильный предел безотражательных матриц.

Замыкание множества безотражательных матриц будем обозначать $\tilde{B}$. Класс $\tilde{B}$ можно описать в терминах канонических функций Вейля $m^\pm(\lambda)$.

Следствие 2. Для того чтобы матрица J принадлежала классу $\tilde{B}$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее канонические функции Вейля удовлетворяли условию

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m^+(\lambda - i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{m^-(\lambda + i\varepsilon)} \quad (1.7)$$

при всех $\lambda \in (-2, 2)$.

Доказательство. Покажем, что голоморфность функции $m(z)$ на единичной окружности эквивалентна (1.7). Поскольку функция $m(z)$ принимает сопряженные значения в сопряженных точках, можно ограничиться рассмотрением верхней полуплоскости $0 < \arg z < \pi$. Согласно определению функций Вейля,

$$m((1 - i\delta)e^{i\varphi}) = m^+(2 \cos \varphi - 2i\delta \sin \varphi + O(\delta^2)), \quad \delta \rightarrow 0;$$

$$m((1 + i\delta)e^{i\varphi}) = (m^-(2 \cos \varphi + 2i\delta \sin \varphi + O(\delta^2)))^{-1}, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем, что непрерывность $m(z)$ на дуге $\{|z|=1, 0 < \arg z < \pi\}$ эквивалентна равенству пределов (1.7).

В приложениях важную роль играют якобиевы матрицы вида $\alpha J + \beta$, где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а $J \in \tilde{B}$. Обозначим это множество матриц через $R_+ \tilde{B} + \mathbb{R}$. Для его описания достаточно заметить, что если $m^\pm(\lambda)$ функции Вейля матрицы J , то $m^\pm(\frac{\lambda - \beta}{\alpha})$ будут функциями Вейля матрицы $\alpha J + \beta$. Такое преобразование переводит отрезок $[-2; 2]$ в отрезок $[\frac{-2 - \beta}{\alpha}, \frac{2 - \beta}{\alpha}]$, откуда вытекает

Следствие 3 Для того чтобы матрица J принадлежала классу $R_+ \tilde{B} + \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и ее канонические функции Вейля удовлетворяли условию (1.7) при всех $\lambda \in (a, b)$. При этом $J = \alpha J_0 + \beta$, где

$$\alpha = \frac{a}{b-a}; \quad \beta = 2 \frac{a+b}{a-b}; \quad J_0 \in \tilde{B}.$$

2. Приведем примеры якобиевых матриц, принадлежащих классу $R_+ \tilde{B} + \mathbb{R}$

Быстроубывающие матрицы. Для быстроубывающих матриц существуют решения Йоста $e^\pm(z, n) \in l_2(\mathbb{Z}_\pm)$ [2] уравнения

$$J\psi(z, n) = (z + z^{-1})\psi(z, n). \quad (2.1)$$

Решения Вейля $\psi^\pm(z, n)$ определены с точностью до постоянного множителя, поэтому

$$m^+(\lambda) = \frac{\psi^+(\lambda, 0)}{\psi^+(\lambda, -1)} = \frac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)};$$

$$\frac{1}{m^-(\lambda)} = \frac{\psi^-(\lambda, 0)}{\psi^-(\lambda, -1)} = \frac{e^-(z, 0)}{e^-(z, -1)}, \quad \lambda = z + z^{-1}.$$

Отсюда следует, что условие

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m^+(2 \cos \varphi - i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{m^-(2 \cos(\varphi + i\varepsilon))}, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \quad (2.2)$$

эквивалентно равенству

$$e^+(z, 0)e^-(z, -1) = e^-(z, 0)e^+(z, -1), \quad |z| \neq 1, \quad \varphi_1 < \arg z < \varphi_2. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) означает, что на дуге единичной окружности $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ имеет место линейная зависимость $e^-(z, n) = A(z) \times e^+(z, n)$, т. е. коэффициент отражения равен нулю на этой дуге. Следовательно, для того, чтобы быстроубывающая матрица J принадлежала классу $R_+ \tilde{B} + \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициент отражения равнялся нулю на некоторой дуге единичной окружности.

Матрицы с периодическими коэффициентами. Пусть коэффициенты якобиевой матрицы J имеют период L , т. е. $a(n+L) = a(n)$, $b(n+L) = b(n)$. Тогда для любого решения уравнения

$$J\psi(\lambda, n) = \lambda\psi(\lambda, n) \quad (2.4)$$

раведливо равенство

$$\begin{pmatrix} \psi(n-1+L) \\ \psi(n+L) \end{pmatrix} = A_L \begin{pmatrix} \psi(n-1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$A_L(\lambda) = \begin{pmatrix} Q(L-1, \lambda) & P(L-1, \lambda) \\ Q(L, \lambda) & P(L, \lambda) \end{pmatrix}$$

матрица монодромии. Собственные значения k матрицы монодромии числятся из уравнения

$$k^2 - 2uk + 1 = 0, \quad (2.6)$$

$$u(\lambda) = \frac{1}{2} (P(L, \lambda) + Q(L-1, \lambda)).$$

Множество отрезков $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}; |u(\lambda)| \leq 1\}$ образует спектр матрицы J . Проведем разрезы вдоль этих отрезков и рассмотрим функцию $k(\lambda) = u(\lambda) - \sqrt{u^2(\lambda) - 1}$ на $\mathbb{C} \setminus \sigma$. При этом ветвь радикала выберем так, чтобы $\sqrt{u^2(\lambda) - 1} > 0$ при $\lambda > \max \sigma$. Поскольку внутри любого замкнутого контура области $\mathbb{C} \setminus \sigma$ лежит четное число точек деления $\{\lambda: u^2(\lambda) = 1\}$, то $k(\lambda)$ является однозначной аналитической функцией на $\mathbb{C} \setminus \sigma$. Далее, при $\lambda \in \sigma$ $k(\lambda \pm i\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. на тортиках разрезов $|k(\lambda)| = 1$, а при $\lambda \rightarrow \infty$ $|k(\lambda)| \rightarrow 0$. Следовательно, по принципу максимума, $|k(\lambda)| < 1$ при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$. Функция $k(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2.6) и, очевидно, $k^{-1}(\lambda)$ также является однозначной аналитической функцией вне σ и удовлетворяет уравнению (2.6). Отметим также, что $k(\bar{\lambda}) = \overline{k(\lambda)}$, так как в $\mathbb{R} \setminus \sigma$ функция $k(\lambda)$ принимает вещественные значения.

Собственным значениям $k^{\pm 1}(\lambda)$ матрицы $A_L(\lambda)$ отвечают собственные векторы

$$f^{\pm}(\lambda) = \begin{pmatrix} -P(L-1, \lambda) \\ Q(L-1, \lambda) - k^{\pm 1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

или ψ — решение уравнения (2.4) и

$$\begin{pmatrix} \psi(n-1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = C^+ f^+(\lambda) + C^- f^-(\lambda),$$

и согласно (2.5)

$$\begin{pmatrix} \psi(n-1+mL) \\ \psi(n+mL) \end{pmatrix} = k^m(\lambda) C^+ f^+(\lambda) + k^{-m}(\lambda) C^- f^-(\lambda), \quad |k(\lambda)| < 1.$$

Поэтому решения Вейля $\psi^{\pm}(n, \lambda)$ уравнения (2.4) удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{pmatrix} \psi^{\pm}(-1) \\ \psi^{\pm}(0) \end{pmatrix} = C f^{\pm}(\lambda).$$

Соответственно выражения для функций Вейля $m^{\pm}(n, \lambda)$ имеют вид

$$(m^{\pm}(\lambda))^{\pm 1} = \frac{Q(L-1, \lambda) - k^{\pm 1}(\lambda)}{-P(L-1, \lambda)}.$$

Поскольку при $\lambda \in \sigma$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} k(\lambda + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{k(\lambda - i\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} k^{-1}(\lambda - i\varepsilon),$$

предельные значения $m^+(\lambda)$ и $(m^-(\lambda))^{-1}$ на отрезках множества совпадают и согласно следствию 3 любая периодическая матрица Якоби принадлежит множеству $R, \bar{B} + R$.

Список литературы: 1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961 310 с. 2. Маглов Л. К. Спектральные свойства безотражательных матриц Якоби // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1992. Вып. 57. С. 25—46. 3. Перколлаб Л. В. Обратная задача для периодической матрицы Якоби // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1984. Вып. 42. С. 107—121.

Поступил в редколлегию 10.09.91

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

СТРУКТУРА ТОТАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СОПРЯЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное пространство. Единичный шар и единичную сферу пространства X будем обозначать через $B(X)$ и $S(X)$ соответственно. Напомним некоторые определения.

Подпространство $M \subset X^*$ называется тотальным, если для любого $0 \neq x \in X$ найдется такой функционал $f \in M$, что $f(x) \neq 0$. Подпространство $M \subset X^*$ называется нормирующим, если для некоторого $c > 0$ имеем

$$(\forall x \in X) (\sup_{f \in S(M)} |f(x)| \geq c \|x\|).$$

Слабым* секвенциальным замыканием подпространства $M \subset X^*$ называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из M . Обозначается слабое* секвенциальное замыкание через $M_{(1)}$. Множество $M_{(1)}$ является, как легко видеть, линейным подпространством, которое, вообще говоря, может быть незамкнутым, и, тем более, не слабо* замкнутым. Соответствующий пример приведен С. Мазуркевичем (см. [1, с. 178]). В связи с этим С. Банах [1, с. 177, 181] ввел слабые* секвенциальные замыкания (у него они называются «слабыми производными») дальнейших, в числе и трансфинитных, порядков. Для ординала α слабым* секвенциальным замыканием порядка α подпространства $M \subset X^*$ называется множество $\bigcup_{\beta < \alpha} (M_{(\beta)})_{(1)}$.

Для цепочки слабых* секвенциальных замыканий имеем

$$M_{(1)} \subset M_{(2)} \subset \dots \subset M_{(\alpha)} \subset M_{(\alpha+1)} \subset \dots$$

При этом, если $M_{(\alpha)} = M_{(\alpha+1)}$, то равны между собой и все дальнейшие слабые* секвенциальные замыкания. Наименьший ординал для которого $M_{(\alpha)} = M_{(\alpha+1)}$ называется порядком подпространства

Изучение тотальных подпространств с бесконечными порядками оказалось важным для теории топологических векторных пространств [2, 3], тотальные подпространства порядка 2 оказались полезными в теории некорректных задач [4]. Естественно возникает задача описания тотальных подпространств различных порядков в сопряженных банаховых пространствах. Целью настоящей статьи является исследование такого варианта этой задачи. Пусть дано сепарабельное банахово пространство X и ординал α . Для таких банаховых пространств Y найдутся такие изоморфные вложения $T: Y \rightarrow X^*$, что $T(Y)$ — тотальное подпространство порядка α в X^* ?

Остановимся на терминологии и обозначениях. Используя термин «оператор», будем иметь в виду линейный непрерывный оператор. Для подмножества A банахова пространства X через $\text{lin } A$ и $\text{cl } A$ будем обозначать, соответственно, линейную оболочку и замыкание в сильной топологии. Для подмножества A в X^* через $\omega^* - \text{cl } A$ и $\sigma^* - \text{cl } A$ будем обозначать, соответственно, слабое* замыкание множества A и $\{x \in X: (\forall x^* \in A)(x^*(x) = 0)\}$. Через $X \oplus Y$ будем обозначать прямую сумму пространств X и Y . Надеемся, что используемые нами без объяснения обозначения и термины стандартны, и их смысл ясен из контекста.

Используемые без пояснений сведения из теории банаховых пространств могут быть найдены в [5—7].

Приведем известные утверждения о слабых* секвенциальных замыканиях, нужные для дальнейшего. Пусть X — сепарабельное банахово пространство.

1. Подпространство $M \subset X^*$ удовлетворяет соотношению $M_{(1)} = X^*$ тогда и только тогда, когда оно является нормирующим [1, с. 181].

2. Если пространство X квазирефлексивно, то любое тотальное подпространство M в X^* является нормирующим, и, следовательно, $M_{(1)} = X^*$ [7, с. 78].

3. Для подпространства $M \subset X^*$ имеем [1, с. 108] $(M = M_{(1)}) \iff (M = \omega^* - \text{cl}(M))$.

4. Порядок любого подпространства в X^* является счетным ординалом [7, с. 50] и не может равняться предельному ординалу [8].

5. Если пространство X неквазирефлексивно, то для любого счетного ординала α в X^* найдется тотальное подпространство порядка $\alpha + 1$ [9].

II. Обратимся к задаче, сформулированной в пункте I. Случай, когда пространство X рефлексивно, тривиален. Если X квазирефлексивно, то, в силу утверждения 2 из п. I, порядок любого тотального подпространства в X^* равен 0 или 1. Легко видеть, что в этом случае множество изоморфных типов тотальных подпространств порядка 1 в X^* совпадает со множеством изоморфных типов тех подпространств в X^* , коразмерность которых заключена между 1 и $\dim(X^{**}/X)$. Вопрос о том, обязаны ли все такие подпространства быть изоморфными X^* , является вариантом хорошо известной проблемы. Мы не будем рассматривать этот вопрос.

Если пространство Y таково, что в Y^* нет замкнутых нормирующих подпространств бесконечной коразмерности, и Y изоморфно тотальному подпространству в X^* , то, как доказано в [10] (теорема 3.1), Y изоморфно нормирующему подпространству в X^* и, следовательно, X изоморфно подпространству конечной коразмерности в Y^* .

С другой стороны, если пространство Y неквазирефлексивно и X изоморфно подпространству конечной коразмерности в Y^* , то, как легко видеть, пространство Y изоморфно тотальному (и даже нормирующему) подпространству в X^* .

Поэтому для неквазирефлексивного пространства Y , сопряженное которого не содержит замкнутых нормирующих подпространств бесконечной коразмерности, оператор T из задачи в п. I существует тогда и только тогда, когда $\alpha=0$ или 1 и пространство X изоморфно Y^* или подпространству конечной коразмерности в Y^* соответственно.

Для квазирефлексивного пространства Y верно аналогичное утверждение. Единственным изменением является то, что X должно быть изоморфно подпространству в Y^* , коразмерности, не превосходящей $\dim(Y^{**}/Y)$.

Сделанные замечания показывают, что нам естественно ограничиться рассмотрением следующих вопросов.

Пусть X — неквазирефлексивное сепарабельное банахово пространство, а банахово пространство Y изоморфно подпространству в X^* и таково, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной коразмерности.

Вопрос 1. Существует ли изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, образ которого тотален?

Вопрос 2. Для каких счетных ординалов α существуют изоморфные вложения $T: Y \rightarrow X^*$, для которых $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$?

Сначала мы покажем, что в общем случае ответ на вопрос 1 отрицателен. После этого (в п. III) мы укажем дополнительное условие, при выполнении которого ответ на вопрос 1 становится утвердительным, и рассмотрим вопрос 2.

Теорема 1. *Существует такое сепарабельное банахово пространство X и такое сепарабельное подпространство $Y \subset X^*$, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной коразмерности, но Y не изоморфно тотальному подпространству в X^* .*

Нам понадобится пространство, построенное в работе [11]. Нужный нам вариант конструкции из этой работы состоит в следующем. Пусть $1 < p < 2$. Обозначим через X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) подпространство в l_p , состоящее из векторов, все координаты которых начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. Введем пространство $J(l_p)$ как пополнение множества всех финитных последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ с $x_n \in X_n$ по норме

$$\|\{x_n\}_{n=0}^\infty\|_J = \sup \left(\sum_{k=1}^{m-1} \|x_{p(k+1)} - x_{p(k)}\|^2 + \|x_{p(m)}\|^2 \right)^{1/2},$$

где супремум берется по всем возрастающим последовательностям пелых чисел $\{p(k)\}_{k=1}^m$ с $p(1) \geq 0$.

Нам понадобится следующий результат о пространстве $J(l_p)$, $1 < p < 2$.

Теорема 2 [12]. *А. Пространство $(J(l_p))^{**}$ представимо в виде прямой суммы $Z \oplus l_p$, где Z — канонический образ пространства l_p в его втором сопряженном*

Б. *Любая слабо, но не сильно сходящаяся к нулю последовательность из $J(l_p)$ содержит подпоследовательность, эквивалентную ортонормированному базису пространства l_2 .*

Перейдем к доказательству теоремы 1. В качестве пространства X возьмем прямую сумму $l_q \oplus (J(l_p))^*$, где $1/q = 1 - 1/p$, а в качестве Y — канонический образ пространства $J(l_p)$ в X^* . Из теоремы 2 А непосредственно вытекает, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной коразмерности. (Таким является, например, аннулятор в Y^* слагаемого, изоморфного l_p , из Y^{**}).

Остается проверить, что Y не изоморфно тотальному подпространству в X^* . Для этого нам понадобится следующая вариация на тему результата Питта [6, с. 76].

Лемма 1. *Любой оператор $R: J(l_p) \rightarrow l_p$ ($1 < p < 2$) является компактным.*

Доказательство. Пусть множество $cl(R(B(J(l_p))))$ не является компактом. Тогда в $B(J(l_p))$ найдется такая последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$(\exists \delta > 0) (\forall i, j \in \mathbb{N}) (\|Ry_i - Ry_j\| \geq \delta).$$

Так как пространство $(J(l_p))^*$ сепарабельно, то из последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ можно выделить слабо фундаментальную подпоследовательность $\{y_{i(n)}\}_{n=1}^\infty$. Для последовательности $z_n = y_{i(2n)} - y_{i(2n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеем:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\|Rz_n\| \geq \delta); \quad (1)$$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2)$$

В силу теоремы 2.Б из последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$, эквивалентную ортонормированному базису пространства l_2 . Из (1), (2) и хорошо известных результатов [6, с. 7, 53] вытекает, что из последовательности $\{z_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису пространства l_p . Это приводит нас к противоречию, так как $p < 2$. Лемма доказана.

Пусть $T: Y \rightarrow X^*$ — произвольное изоморфное вложение. Имеем $Y^* = l_p \oplus (J(l_p))^{**} = l_p \oplus J(l_p) \oplus l_p$. Обозначим через P_1, P_2 и P_3 проекторы, соответствующие этому разложению. Получаем $T = P_1T + P_2T + P_3T$. Операторы P_1T и P_3T компактны в силу леммы 1. Следовательно, ядро оператора P_2T конечномерно. Представим пространство Y в виде прямой суммы: $\ker P_2T \oplus Y_1$. Из компактности операторов P_1T и P_3T вытекает, что сужение оператора P_2T на Y_1 является изоморфизмом. Обозначим этот изоморфизм через R ,

а подпространство $R(Y_1) \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus \{0\}$ — через M . Подпространство $T(Y_1) \subset X^*$ можно представить в виде

$$T(Y_1) = \{(P_1 T R^{-1} m, m, P_3 T R^{-1} m) : m \in M\} \subset l_p \oplus J(l_p) \oplus l_p.$$

Очевидно, что для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что слабое* замыкание подпространства $T(Y)$ в X^* не совпадает с X^* . Так как линейная оболочка объединения конечномерного и слабо* замкнутого подпространств является слабо* замкнутой, то нам достаточно показать, что $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ имеет бесконечную коразмерность в X^* .

Так как $M \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus \{0\}$, то любой оператор $Q: M \rightarrow X^*$ является непрерывным, если оба эти пространства рассматривать в топологии $\sigma(X^*, X)$. Определим оператор $Q: M \rightarrow X^*$ равенством

$$Q(0, m, 0) = (P_1 T R^{-1} m, m, P_3 T R^{-1} m).$$

Из сказанного выше следует, что Q — изоморфное вложение. Нетрудно видеть, что у оператора Q существует (и притом единственное) $\sigma(X^*, X)$ — непрерывное продолжение на подпространство $\omega^* - \text{cl}(M) \subset X^*$. Обозначим это продолжение через Q_e . Нетрудно проверить, что оператор Q_e представим в виде суммы тождественного на $\omega^* - \text{cl}(M)$ оператора и компактного оператора. Поэтому ядро оператора Q_e конечномерно, и сужение оператора Q_e на любое слабо* замкнутое дополнение к подпространству $\ker Q_e$ в $\omega^* - \text{cl}(M)$ является $\sigma(X^*, X)$ — непрерывным изоморфизмом. Отсюда, в силу теоремы Крейна—Шмульяна, вытекает слабая* замкнутость образа оператора Q_e . Так как $Q(M) = T(Y_1)$, то $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ содержится в $\text{im } Q_e$. С другой стороны, так как оператор $P_1 Q$ компактен и $\omega^* - \text{cl}(M) \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus l_p$, то оператор $P_1 Q_e$ тоже компактен. Отсюда непосредственно вытекает, что $\text{im } Q_e$, а, следовательно, и $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ имеет бесконечную коразмерность в X^* . Теорема доказана.

III. В этой части статьи указано дополнительное условие, при выполнении которого ответ на вопрос 1 становится утвердительным и рассмотрен вопрос 2.

Пусть X — банахово пространство, Y — подпространство в X^* . Каждый элемент из X можно естественным образом рассматривать как линейный функционал на Y . Полученное таким образом отображение из X в Y^* обозначим через H_Y .

Теорема 3. А. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, а $Y \subset X^*$ — такое подпространство, что $H_Y(X)$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* . Тогда найдется изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, образ которого тотален, и, более того $(T(Y))_{(2)} = X^*$.

Б. Если при этом подпространство $Y^\perp \subset X$ бесконечномерно, то оператор T можно выбрать таким, чтобы $(T(Y))_{(1)} \neq T(Y)_{(2)} = X^*$.

В. Если при этом подпространство $Y^\perp \subset X$ неквазирефлексивно, то для любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ можно найти такое изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$.

Замечание. Условия части А теоремы 3 выполнены, если подпространство $H_Y(X) \subset Y^*$ незамкнуто.

Доказательство теоремы 3. Используя рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 3.5 работы [10], получаем следующий результат.

Лемма 2. Пусть X — некоторое банахово пространство, а Y — такое подпространство в X^* , что подпространство $H_Y(X)$ незамкнуто. Тогда найдется такое изоморфное вложение $E: Y \rightarrow X^*$, что $\text{cl}(E^*(X))$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* и $E(Y)^\perp \supset Y^\perp$.

Из этой леммы вытекает, что при доказательстве теоремы 3 можно рассматривать лишь случай, когда подпространство $\text{cl}(H_Y(X))$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* .

Воспользовавшись сепарабельностью пространства X и замечанием из работы [13, с. 358], находим в Y такую слабо* сходящуюся к нулю базисную последовательность $\{u_i^*\}_{i=1}^\infty$, что для некоторой ограниченной последовательности $\{v_k^{**}\}_{k=1}^\infty \subset X^{**}$ и некоторого разложения $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ натурального ряда на попарно непересекающиеся бесконечные множества имеем

$$v_k^{**}(u_i^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I_k; \\ 0, & \text{если } i \notin I_k. \end{cases}$$

Докажем сначала части А и Б теоремы 3. Пусть $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ — некоторая нормированная последовательность, натягивающая нормирующее подпространство в X^* . Введем оператор $T: X^* \rightarrow X^*$ разложением

$$T(x^*) = x^* + \sum_{k=1}^\infty 4^{-k} v_k^{**}(x^*) x_k^* / \|v_k^{**}\|. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$(\forall x^* \in X^*) ((2/3) \|x^*\| \leq \|T(x^*)\| \leq (4/3) \|x^*\|). \quad (4)$$

Поэтому T — изоморфизм. Покажем, что $(T(Y))_{(2)} = X^*$. Для $i \in I_k$ имеем $T(u_i^*) = u_i^* + 4^{-k} x_k^* / \|v_k^{**}\|$. Так как множество I_k бесконечно, а последовательность $\{u_i^*\}_{i=1}^\infty$ слабо* сходится к нулю, то отсюда вытекает, что $x_k^* \in (T(Y))_{(1)}$. Так как векторы $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ натягивают нормирующее подпространство в X^* , то получаем соотношение $(T(Y))_{(2)} = X^*$. Часть А теоремы 3 доказана.

Для доказательства части Б достаточно проверить, что в случае, когда подпространство $Y^\perp \subset X$ бесконечномерно, построенное выше подпространство $T(Y) \subset X^*$ не является нормирующим.

Пусть $y \in Y$, а $z \in \bigcap_{k=1}^n \ker x_k^* \cap Y^\perp$. Тогда $(Ty)(z) = \sum_{k=1}^\infty 4^{-k} \times x_k^*(y) x_k^*(z) / \|v_k^{**}\|$. Поэтому $|(Ty)(z)| \leq (4^{-n}/3) \|y\| \|z\|$. В силу (4) отсюда вытекает $|(Ty)(z)| \leq (4^{-n}/2) \|Ty\| \|z\|$, следовательно, подпространство $T(Y) \subset X^*$ не является нормирующим. Часть Б теоремы 3 доказана.

Перейдем к доказательству части В. Пусть подпространство $Y^\perp$ несквизирефлексивно, а $\alpha \geq 1$ — некоторый счетный ординал. Вос

пользовавшись утверждением 5 из п. I, найдем такое замкнутое подпространство $M \subset (Y^\top)^*$, что $M_{(\alpha)} \neq M_{(\alpha+1)} = (Y^\top)^*$, если ординал α бесконечен, и такое, что $M_{(\alpha-1)} \neq M_{(\alpha)} = (Y^\top)^*$, если ординал α конечен. Пусть N — множество всевозможных продолжений функционалов из M на все пространство X . В работе [9] доказано, что для подпространства $N \subset X^*$ выполнено соотношение $N_{(\alpha)} \neq N_{(\alpha+1)} = X^*$ ($N_{(\alpha-1)} \neq N_{(\alpha)} = X^*$). Поскольку пространство X сепарабельно, то в N можно найти такую нормированную последовательность $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$, что для $L = \text{lin}(\{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$ имеем $L_{(\alpha)} \neq L_{(\alpha+1)} = X^*$, если α — бесконечный ординал, и $L_{(\alpha-1)} \neq L_{(\alpha)} = X^*$, если α — конечный ординал.

Введем оператор $T: X^* \rightarrow X^*$ равенством (3). Для так определенного оператора T выполнено неравенство (4), следовательно, T — изоморфизм. Покажем, что для подпространства $T(Y) \subset X^*$ выполнено соотношение $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$. Покажем сначала, что

$$(T(Y))_{(1)} \subset \text{cl lin}(Y_{(1)} \cup \{x_k^*\}_{k=1}^\infty).$$

Пусть $z \in (T(Y))_{(1)}$ и пусть последовательность $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset T(Y)$ такова, что $z = \omega^* - \lim_{i \rightarrow \infty} z_i$. Для некоторых векторов $y_i^* \in Y$ имеем $z_i = T(y_i)$.

Так как T — изоморфизм, то последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ ограничена. Не уменьшая общности, можем считать эту последовательность слабо сходящейся. Оператор T является суммой тождественного и компактного операторов. Обозначим последний через K . Не уменьшая общности, можем считать последовательность $\{K(y_i)\}_{i=1}^\infty$ сильно сходящейся. Ясно, что ее предел входит в $\text{cl lin}(\{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$. Следовательно, $z \in \text{cl lin}(Y_{(1)} \cup \{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$. Поэтому сужения функционалов из $(T(Y))_{(1)}$ на подпространство $(Y^\top) \subset X$ входят в M . Отсюда вытекает, что $(T(Y))_{(\alpha)} \subset N_{(\alpha-1)}$ в случае, когда ординал α конечен, и $(T(Y))_{(\alpha)} \subset N_{(\alpha)}$, если ординал α бесконечен. В обоих случаях имеем $(T(Y))_{(\alpha)} \neq X^*$.

Так же, как и при доказательстве части А, показываем, что $x_k^* \in (T(Y))_{(1)}$. Поэтому $L \subset (T(Y))_{(1)}$. Отсюда вытекает, что $(T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$ как для конечного, так и для бесконечного ординала α . Теорема 3 полностью доказана.

Замечания. 1. Пусть ординал $\alpha \geq 2$ не является предельным. Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3 и из теоремы 3.1 из [10], вытекает, что банахово пространство Y изоморфно подпространству порядка α в сопряженном к некоторому сепарабельному банахову пространству в том и только в том случае, когда в Y^* есть замкнутое сепарабельное нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.

2. Если пространства X и Y удовлетворяют условиям части А теоремы 3, и X изоморфно прямой сумме $X \oplus Z$, где Z — бесконечномерное (неквазирефлексивное) банахово пространство, то найдется изоморфное вложение $Q: Y \rightarrow X^*$, для образа которого выполнены условия части Б (В) теоремы 3.

3. Если X — сепарабельное банахово пространство, а Y — подпространство в X^* , имеющее несепарабельное сопряженное, то для Y и Y выполнены условия части А теоремы 3. В силу известных результатов [5, с. 147, 213], отсюда вытекает, что условия части А теоремы 3 выполнены, если X сепарабельное L_∞ — пространство (в смысле Линденштраусса—Пелчинского), а Y — нерефлексивное подпространство в X^* .

4. Пусть $X = C(K)$, где K — некоторый метризуемый компакт. Из известных свойств пространств непрерывных функций (см. [5]) и замечаний 2 и 3 вытекает, что для любого нерефлексивного подпространства $Y \subset X^*$ и любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ найдется линейное изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = Y^*$. Нетрудно проверить непосредственно, что аналогичное утверждение верно и для $\alpha = 0$.

Теорема 4. Пусть $X = l_1 \oplus Z$, где Z — некоторое сепарабельное банахово пространство. Тогда для любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ и любого банахова пространства Y , сопряженное которого содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности, найдется такое изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$. Наоборот, сопряженное любого тотального подпространства $Y \subset X^*$ содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности.

Доказательство. Пусть $a, b > 0$. Напомним, что подмножество $A \subset Y^*$ называется (a, b) -нормирующим, если выполнены условия:

$$(\forall y \in Y) (\sup \{ \|y^*(y)\| : y^* \in A \} \geq a \|y\|); \\ \sup \{ \|y^*\| : y^* \in A \} \leq b.$$

Пусть банаховы пространства X и Y таковы, что существует оператор $R: X \rightarrow Y^*$, для которого $R(B(X))$ является (a, b) -нормирующим множеством в Y^* для некоторых $a > 0$ и $b < +\infty$, и подпространство $R(X)$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* . Нетрудно видеть, что в этом случае сужение оператора R^* на подпространство $Y \subset Y^{**}$ является изоморфным вложением, и для X и $R^*(Y) \subset X^*$ выполнены условия части А теоремы 3.

В силу фактор-универсальности пространства l_1 [6, с. 108] все сказанное имеет место для $X = l_1 \oplus Z$ и любого банахова пространства Y , сопряженное которого содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности. Воспользовавшись замечанием 2 и частью В теоремы 3, получаем доказательство первой части теоремы 4.

Перейдем к доказательству второй части. Если подпространство $Y \subset X^*$ несепарабельно, то подпространство $cl(H_Y(X)) \subset Y^*$ является замкнутым сепарабельным нормирующим подпространством бесконечной коразмерности.

Перейдем к случаю, когда подпространство Y сепарабельно. Если подпространство Y не является нормирующим, то, повторяя рассуждения из доказательства предложения 3.5 работы [10], на-

ходим в Y^* замкнутое сепарабельное нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.

Если подпространство Y — нормирующее, то завершаем доказательство с помощью следующего обобщения леммы 1 из [14].

Лемма 3. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, сопряженное к которому существует подпространство, изоморфное l_1 . Тогда Y^* содержит нормирующее подпространство бесконечной коразмерности, изоморфное l_1 .

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset Y^*$ эквивалентна каноническому базису пространства l_1 . В силу сепарабельности пространства Y из последовательности $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ можно выделить слабо* сходящуюся подпоследовательность $\{f_{i(n)}\}_{n=1}^\infty$. Тогда последовательность $g_n = f_{i(2n)} - f_{i(2n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) будет слабо* сходящейся к нулю последовательно, эквивалентной каноническому базису пространства l_1 . Пусть $0 < c, C < \infty$ таковы, что

$$(\forall \{a_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}) (c \sum |a_i| \leq \| \sum a_i g_i^* \| \leq C \sum |a_i|).$$

Пусть $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ — плотная в $S(Y)$ последовательность. Для любого $i \in \mathbb{N}$ выберем такой функционал $h_i^* \in S(Y^*)$, что $h_i^*(y_i) = 1$. Выберем возрастающую последовательность четных натуральных чисел $\{m(i)\}_{i=1}^\infty$ так, чтобы

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (|g_{m(i)}^*(y_i)| < c/4).$$

Непосредственно проверяем, что последовательность $z_i^* = (c/2) h_i^* + g_{m(i)}^*$ ($i \in \mathbb{N}$) эквивалентна каноническому базису пространства l_1 . Поэтому пространство $L = \text{cl}(\text{lin}\{z_i^*\}_{i=1}^\infty)$ изоморфно l_1 . Покажем, что L — нормирующее подпространство бесконечной коразмерности в Y^* .

То, что L — нормирующее, вытекает из того, что для любого $i \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства $\|z_i^*\| \leq c/2 + C$ и $|z_i^*(y_i)| \geq (c/2) |h_i^*(y_i)| - |g_{m(i)}^*(y_i)| > c/4$, а последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ плотна в $S(Y)$.

Для доказательства того, что L имеет бесконечную коразмерность в Y^* достаточно проверить соотношение

$$\text{lin}\{g_{2k-1}^*\}_{k=1}^\infty \cap L = \{0\}.$$

Если мы предположим, что это соотношение не выполнено, то для некоторых последовательностей $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ из l_1 будем иметь

$$\sum_{k=1}^\infty b_k g_{2k-1}^* = \sum_{i=1}^\infty a_i g_{m(i)}^* + (c/2) \sum_{i=1}^\infty a_i h_i^*.$$

Следовательно,

$$\| \sum_{k=1}^\infty b_k g_{2k-1}^* - \sum_{i=1}^\infty a_i g_{m(i)}^* \| = (c/2) \| \sum_{i=1}^\infty a_i h_i^* \|.$$

Правая часть этого равенства не превосходит $(c/2) \sum |a_i|$, а левая — не меньше $c(\sum |b_k| + \sum |a_i|)$. Поэтому $a_i = b_k = 0$ для всех i и k . Лемма доказана.

Список литературы: 1. Банах С. С. Курс функционального анализа. К., 1948 216 с. 2. Dierolf S., Moscatelli V. B. A note on quojections // Funct. et approx. 1987. 17. P. 131—138. 3. Metafune G., Moscatelli V. B. Quojections and frequ-

jections // *Advances in the Theory of Fréchet spaces* (ed. by T. Terzioğlu), Dordrecht, 1989. P. 235—254. 4. *Островский М. И.* К вопросу о регуляризуемости суперпозиций обратных линейных операторов // *Теория функций, функций, анализ и их приложения*. 1991. Вып. 55. С. 96—100. 5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. — Berlin, 1973. 243 p. 6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, v. I. Berlin, 1977. 188 p. 7. *Петукин Ю. И., Улишко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 16 с. 8. *Годун Б. В.* Ослабых* производных трансфинитного порядка множеств линейных функционалов // *Сиб. мат. журн.* 1977. 18, № 6. С. 1289—1295. 9. *Островский М. И.* w^* -производные трансфинитного порядка подпространств сопряженного банахова пространства // *Докл. АН УССР*. 1987. № 10. С. 9—12. 10. *Strovska M. I.* Total subspaces in dual Banach spaces which are not norming over any infinite dimensional subspace // *Studia Math.* 1991. 46. P. 117—124. 11. *Bellenot S. F.* The J-sum of Banach spaces // *J. Funct. Anal.* 1982. 48. № 1. P. 95—106. 12. *Островский М. И.* Подпространства, содержащие ортогональные функционалы базисов различных типов // *Теория функций, функций, анализ и их приложения*. 1992. Вып. 57. С. 115—127. 13. *Davis W. J., Johnson W. B.* Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces // *Isr. J. Math.* 1973. 14. P. 353—367. 14. *Гладун Л. В.* О банаховых пространствах, сопряженные которых содержат нормирующие не квазибазисные подпространства // *Сиб. мат. журн.* 1987. 28, № 2. С. 55—59.

Поступила в редколлегию 10.11.91

К 517.522.2

К. Г. МАЛЮТИН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ранее [1] была решена задача кратной интерполяции в классе целых функций конечного порядка. Аналогичная задача для класса функций конечного порядка в верхней полуплоскости $C^+ = \{z: \text{Im } z > 0\}$ рассматривалась в работе [2]. Там же были найдены условия необходимые и условия достаточные для ее разрешимости. Трудности, возникающие при переходе от задач интерполяции в классах целых функций к задачам в классах функций аналитических в полуплоскости C^+ , обусловлены возможностью накопления узлов интерполяции к точкам вещественной оси. Достаточные условия, найденные в [2], исключают возможность такого накопления и позволяют применять методы теории целых функций. В данной работе, рассматривая более общую задачу, чем в [2], устраним отмеченный выше недостаток и найдем необходимые и достаточные условия для ее разрешимости. По постановке наша задача близка к задачам свободной интерполяции в H^∞ , так как на значения производной функции в узлах интерполяции накладываются естественные ограничения. При ее решении использованы идеи из работ [1, 2] и идеи П. Джонса [3] для решения задачи свободной интерполяции в H^∞ .

Обозначим через $[\rho, \infty)^+$ класс функций аналитических в C^+ и порядка $\leq \rho$, $\rho > 1$.

Определение. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}$ (т.е. множество различных комплексных чисел $a_n \in C^+$, $n = 1, 2, \dots$, все предельные точки которого принадлежат вещественной оси, вместе с их кратностями q_n , $q_n \geq 1$ — целое число), называется интерполяционным в классе $[\rho, \infty]^+$, если для любой последовательности чисел $\{b_{nk}\}$, $k = 1, \dots, q_n$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln \max_{1 \leq k \leq q_n} \frac{(\operatorname{Im} a_n)^{k-1} |b_{nk}|}{(k-1)!}}{\ln |a_n|} &< \infty; \\ \overline{\lim}_{|a_n| \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln \max_{1 \leq k \leq q_n} \frac{(\operatorname{Im} a_n)^{k-1} |b_{nk}|}{(k-1)!}}{\ln |a_n|} &\leq \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

существует функция $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ со свойствами:

$$f^{(k-1)}(a_n) = b_{nk}, \quad (n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, q_n). \quad (2)$$

Пусть $a_n = r_n e^{i\theta_n}$. Положим

$$\begin{aligned} C(r) &= \sum_{r_n \leq r} q_n \sin \theta_n, \\ E(z) &= \prod_{r_n < 1} \left(\frac{z - a_n}{z - \bar{a}_n} \right)^{q_n} \prod_{r_n > 1} E_p^{q_n}(z, \bar{a}_n), \end{aligned}$$

где $p = [\rho]$, $E_p(z, u)$ — канонический множитель Неванлинны.

Пусть далее

$$\gamma_{nk} = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \frac{(z - a_n)^{q_n}}{E(z)} \Big|_{z=a_n}, \quad n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, q_n.$$

Основным результатом нашей работы является следующая

Теорема. Для того, чтобы дивизор D был интерполяционным в классе $[\rho, \infty]^+$, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям:

$$\begin{aligned} \text{А) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r} &\leq \rho; \\ \text{Б) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{|\gamma_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n}} &< \infty; \\ \text{В) } \overline{\lim}_{r_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{|\gamma_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n}} &\leq \rho. \end{aligned}$$

Заметим, что из условий [1] следует существование числа C_1 и последовательности $\{\varepsilon_n^{(1)}\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(1)} = 0$, при которых

$$\sup_{1 \leq k \leq q_n} (\operatorname{Im} a_n)^{k-1} [(k-1)!]^{-1} |b_{nk}| \leq C_1 e^{r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(1)}}}. \quad (4)$$

Необходимость условия А) доказывается как и в работе [2]. Доказана необходимость условия В) (Б) доказывается аналогично). Пусть не выполнено и $\{\lambda_n\} \subset \{a_n\}$ такова, что

$$\lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} (\ln |\lambda_n|)^{-1} \ln^+ \ln \frac{|\tilde{\gamma}_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{p_n}} = \rho_1 > \rho, \quad (1.1)$$

p_n — кратности чисел λ_n в дивизоре D , а $\tilde{\gamma}_{n1}$ построены для λ_n , $n = 1, 2, \dots$. Множество $\{\lambda_n\}$, в силу известных теорем об интерполяции в H^∞ (см., например, [4]), можно считать столь «редким», что

$$|\operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n)| \geq \delta > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

$H(z)$ — произведение Бляшке, построенное по последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пусть далее $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ такова, что

$$f^{(k-1)}(a_n) = 0, \quad a_n \neq \lambda_n, \quad k = 1, \dots, q_n;$$

$$f^{(k-1)}(\lambda_n) = 0, \quad k = 1, \dots, p_n - 1; \quad f^{(p_n-1)}(\lambda_n) = \frac{(p_n - 1)!}{(\operatorname{Im} \lambda_n)^{p_n - 1}}.$$

Тогда функция $g(z) = f(z) H(z) [E(z)]^{-1} \in [\rho, \infty]^+$.

$$\text{Имеем } g(\lambda_n) = f^{(p_n-1)}(\lambda_n) H'(\lambda_n) p_n [E^{(p_n)}(\lambda_n)]^{-1} = \operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n) \times \\ \times \tilde{\gamma}_{n1} (\operatorname{Im} \lambda_n)^{-p_n}.$$

Учитывая (1.2), находим отсюда, что

$$\lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} (\ln |\lambda_n|)^{-1} \ln^+ \ln \frac{\tilde{\gamma}_{n1}}{(\operatorname{Im} a_n)^{p_n}} \leq \lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} (\ln |\lambda_n|)^{-1} \times \\ \times \ln^+ \ln \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n)|} + \lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} (\ln |\lambda_n|)^{-1} \ln^+ \ln |g(\lambda_n)| \leq \rho,$$

получим противоречие с (1.1).

Получим из необходимых условий некоторые утверждения.

Лемма. Если дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho, \infty]^+$, то существуют число $C_2 > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_n^{(2)}\}$, $\varepsilon_n^{(2)} = 0$ такие, что

$$q_n \leq C_2 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(2)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Доказательство. Обозначим

$$E_n(z) = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \frac{z - \bar{a}_n}{z - a_n} \right)^{q_n} E(z).$$

Стандартными методами можно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ при $|z| > r_\varepsilon$ некотором $K_1 > 0$:

$$\ln |E_n(z)| \leq K_1 |z|^{\rho + \varepsilon}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Так как $2^{q_n} = E_n(a_n) \tilde{\gamma}_{n1} (\operatorname{Im} a_n)^{-q_n}$, $n = 1, 2, \dots$, утверждение леммы следует из (1.4) и из условий Д) и В) основной теоремы.

Лемма 2. Пусть дивизор D является интерполяционным в $\text{se } [\rho, \infty]^*$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|a_n - \bar{a}_k|^2 r_k^{\rho+\varepsilon}} < \infty. \quad (1.5)$$

Доказательство. Положим

$$A_n(z) = \prod_{0 < |a_n - a_k| < \frac{r_n}{2}} [(1 - z/a_k)/(1 - z/\bar{a}_k)]^{q_k};$$

$$B_n(z) = E_n(z) A_n^{-1}(z).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Для функций $B_n(z)$ справедлива оценка, аналогичная (1.4):

$$\ln |B_n(z)| \leq K_2 |z|^{\rho+\varepsilon}, \quad |z| > r_n, \quad K_2 > 0. \quad (1.6)$$

Так как $E_n(a_n) = 2^{q_n} (\operatorname{Im} a_n)^{q_n/\gamma_{n1}}$, из (1.3), (1.6) и из условий Б) и В) теоремы получаем $\ln |A_n(a_n)| \geq \ln |E_n(a_n)| - \ln |B_n(a_n)| \geq -C_\varepsilon |r_n|^{\rho+\varepsilon}$, при некотором $C_\varepsilon > 0$, $n = 1, 2, \dots$

Используя далее утверждение, аналогичное утверждению нашей леммы для функций класса H^∞ [5, с. 243], получим

$$\sum_{0 < |a_n - a_k| < r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_n q_k \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \bar{a}_k|^2} \leq \frac{1}{2} C_\varepsilon r_n^{\rho+\varepsilon}. \quad (1.7)$$

Из условия А) теоремы следует, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$K_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \operatorname{Im} a_n}{r_n^{\rho+1+\varepsilon}} < \infty \quad (1.8)$$

Из (1.7), (1.8) находим далее

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq n} \frac{\operatorname{Im} a_n q_n \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \bar{a}_k|^2 r_k^{\rho+\varepsilon}} &= \sum_{0 < |a_n - a_k| < \frac{r_n}{2}} + \sum_{|a_n - a_k| > \frac{r_n}{2}} \leq \\ &\leq 2^{\rho+\varepsilon-1} C_\varepsilon + 4 \sin \theta_n K_\varepsilon. \end{aligned}$$

При $k = n$ слагаемое в сумме (1.5) имеет вид $q_n/4r_n^{\rho+\varepsilon}$, поэтому для завершения доказательства осталось применить (1.3).

§ 2. Доказательство достаточности

Заметим, что если $r_n \leq 1$, то в силу (1.3) кратности q_n , $n = 1, 2, \dots$, ограничены. Поэтому существует функция $\varphi(z) \in H^\infty$, решающая интерполяционную задачу (2) (см. [5]). Обозначим $b_{nk}' = b_{nk} - \varphi^{(k-1)}(a_n)$, п

$r_k > 1, k = 1, \dots, q_n$. Ясно, что b'_{nk} удовлетворяют условиям (1). При $r_n > 1, \operatorname{Im} a_n \leq 1$ положим

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1 + a_k z}{-i(z - \bar{a}_k)} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3}}, \operatorname{Im} a_k \leq 1; \quad (2.1)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} b'_{ni+1}, \quad (2.2)$$

$m = 1, \dots, q_n$.

Ряд, определяющий функцию $\alpha_n(z)$, сходится равномерно в каждой области $\{z: |z| \leq r, \operatorname{Im} z > \delta\}$ (и, следовательно, является функцией аналитической в C^+), так как

$$\left| \frac{1 + a_k z}{-i(z - \bar{a}_k)} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3}} \right| \leq \frac{2r q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+2}}.$$

В силу сходимости ряда (1.8) (перенумеровав, если есть необходимость, точки $a_n, r_n > 1$) можно считать, что

$$\frac{\operatorname{Im} a_n}{r_n^2} \geq \frac{\operatorname{Im} a_{n+1}}{r_{n+1}^2}. \quad (2.3)$$

Оценим теперь $\operatorname{Re} \alpha_n(z)$. Имеем

$$\operatorname{Re} \alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2 r_k^2} + \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^2} + \frac{\operatorname{Im} a_k}{|z|^2 r_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} \right) \frac{|z|^2 r_k^2 q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2}, \operatorname{Im} a_k \leq 1, r_k > 1,$$

где суммирование распространяется на такие k , что

$$\operatorname{Im} a_k \leq 1, r_k > 1.$$

Исходя из предположения (2.3) и (1.5), отсюда получаем

$$\operatorname{Re} \alpha_n(a_n) \leq K_3, K_3 > 0, n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

также

$$\operatorname{Re} \alpha_n(z) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2}. \quad (2.5)$$

Положим далее при $r_n > 1$

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)},$$

где выбор чисел S_n будет осуществлен ниже, а

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Im} a_n > 1, \\ \left(\frac{z \bar{a}_n}{r_n^2} \right)^{\rho+3} \left(\frac{2 \operatorname{Im} a_n}{z - \bar{a}_n} \right)^2 \exp \{ \alpha_n(a_n) - \alpha_n(z) \}, & \\ \text{если } \operatorname{Im} a_n \leq 1. \end{cases}$$

Покажем, что формальная функция $f(z) = E(z) \sum_{r_n > 1} P_n(z) + \varphi(z)$ решает интерполяционную задачу (2). Покажем, что $f_1^{(k-1)}(a_n) = b_n$, $r_n > 1$, $k = 1, \dots, q_n$, где $f_1(z) = f(z) - \varphi(z)$.

Имеем

$$\frac{(z - a_n)^{q_n} f_1(z)}{E(z)} = (z - a_n)^{q_n} P_n(z) + (z - a_n)^{q_n} \sum_{k \neq n} P_k(z). \quad (2.6)$$

Далее

$$(z - a_n)^{q_n} P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \{(-1)^{m-1} (m-1)! (z - a_n)^{q_n-m} \times \\ \times \left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n} \varphi_n(z) + (z - a_n)^{q_n-m+1} \Phi_n(z)\},$$

где $\Phi_n(z)$ — функция, аналитическая в C^+ .

Дифференцируя обе части (2.6) $q_n - m$ раз в точке $z = a_n$, получим

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} C_{q_n-m}^i f_1^{(i)}(a_n) \left(\frac{d}{dz}\right)^{q_n-m-i} \frac{(z - a_n)^{q_n}}{E(z)} \Big|_{z=a_n} = \\ = (-1)^{m-1} (m-1)! (q_n - m)! \alpha_{nm}, \quad m = 1, \dots, q_n.$$

Или

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} f_1^{(i)}(a_n) = \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} b'_{ni+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} (f_1^{(i)}(a_n) - b'_{ni+1}) = 0, \\ m = 1, \dots, q_n, \quad r_n > 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Матрица, составленная из коэффициентов при $f_1^{(i)}(a_n) - b'_{ni+1}$, $i = 0, \dots, q_n - 1$, в системе (2.7) имеет вид

$$A_n = \begin{pmatrix} \gamma_{nq_n}, & \frac{1}{1!} \gamma_{nq_n-1}, & \dots, & \frac{1}{(q_n-2)!} \gamma_{n2}, & \frac{1}{(q_n-1)!} \gamma_{n1} & \\ \gamma_{nq_n-1}, & \frac{1}{1!} \gamma_{nq_n-2}, & \dots, & \frac{1}{(q_n-2)!} \gamma_{n1}, & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \gamma_{n1}, & 0, & \dots, & 0, & 0 & \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\det A_n \neq 0$, а следовательно, $f_1^{(k-1)}(a_n) = b'_{nk}$, $k = 1, \dots, q_n$, $r_n > 1$.

Покажем теперь, что при надлежащем выборе последовательности натуральных чисел S_n , $f_1(z) \in [\rho, \infty]^+$.

Из результатов А. М. Руссаковского [6, с. 48] и леммы 1 следует, что существуют число $K_4 > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_n^{(3)}\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(3)} = 0$, для которых

$$\ln \sup_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|\gamma_{nk}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n - k + 1}} \leq K_4 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(3)}}. \quad (2.8)$$

Из (4) и (2.8) получаем тогда при некотором $K_5 > 0$:

$$|\alpha_{nm}| \leq \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!} (\operatorname{Im} a_n)^m \exp(K_5 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(4)}}), \quad (2.9)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(4)} = 0$.

Представим $f_1(z)$ в виде $f_1(z) = f_2(z) + f_3(z) = E(z) \sum_{\operatorname{Im} a_n > 1} P_n(z) +$

$E(z) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} P_n(z)$ ($r_n > 1$).

Оценим $f_2(z)$, представив ее в виде $f_2(z) = f_{21}(z) + f_{22}(z) = E(z) \sum_{r_n < e^2 |z|} P_n(z) + E(z) \sum_{r_n > e^2 |z|} P_n(z)$.

Обозначим

$$u_{nm}(z) = \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)}, \quad r = |z|.$$

При $r_n > e^2 r$ имеем

$$\begin{aligned} |u_{nm}(z)| &\leq \frac{(m-1)!}{2\pi} \left| \int_{|\xi - z| = e^{-2} r_n} \left(\frac{\xi}{a_n} \right)^{S_n} \frac{d\xi}{(\xi - a_n)(\xi - z)^m} \right| \leq \\ &\leq \frac{2(m-1)! e^{2m}}{r_n^m} \left(\frac{2}{e^2} \right)^{S_n} < (m-1)! 2 r_n^{-m} e^{2m - S_n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) получаем оценку

$$\begin{aligned} |f_{22}(z)| &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}| \frac{(m-1)!}{r_n^m} e^{2m - S_n} \leq \\ &\leq |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \frac{q_n(q_n+1)}{2} \exp\{(K_5 + 2C_2) r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(5)}} - S_n\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Используя лемму 1, из (1.3) и (2.11) имеем при некотором $K_6 > 0$:

$$|f_{22}(z)| \leq |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \exp\{K_6 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(5)}} - S_n\}, \quad (2.12)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(5)} = 0$.

Оценим теперь $f_{21}(z)$. Если

$$z \notin \Omega = \bigcup_{r_n > 1} \{\xi : |\xi - a_n| \leq \operatorname{Im} a_n/2\},$$

то, интегрируя по окружности $|\xi - z| = \operatorname{Im} a_n/2$, получим как и в (2.10)

$$|u_{nm}(z)| \leq (\operatorname{Im} a_n)^{-m} r_n^{-S_n} [r(1 + 2^{-1}e^2)]^{S_n} (m-1)! 2^m \quad (2.13)$$

Откуда при некотором $K_7 > 0$ имеем

$$|f_{22}(z)| \leq \sum_{r_n < e^2 r} |E(z)| \frac{q_n(q_n+1) 2^{q_n} [r(1 + 2^{-1}e^2)]^{S_n}}{2r_n^{S_n}} \leq \\ \leq |E(z)| \exp(2 \ln r \max_{r_n < e^2 r} S_n) \sum_{r_n < e^2 r} \exp[K_7 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(6)}} - S_n \ln r_n],$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(6)} = 0$.

Заметим, что при любом $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{\operatorname{Im} a_n > 1} \exp(-\delta r_n) < \infty. \quad (2.14)$$

Положим

$$S_n = \max \{[K_6 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(5)}}] + 1, [K_7 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(6)}}] + 1\},$$

поэтому $\forall \varepsilon > 0$:

$$\max_{r_n < e^2 r} S_n \leq K_8 r^{\rho + \varepsilon}, \quad r > r_\varepsilon, \quad K_8 > 0,$$

а следовательно из (2.13) следует, что при $\Omega \ni z, r > r_\varepsilon$:

$$|f_{21}(z)| \leq K_9 \exp\{r^{\rho + \varepsilon} + 2 \ln r K_8 r^{\rho + \varepsilon}\}.$$

Функция $f_{21}(z)$ аналитическая в C^+ , поэтому по принципу максимума модуля имеем при $z \notin \Omega$:

$$|f_{21}(z)| \leq K_{10} \exp\{((1 + e^2) r)^{\rho + \varepsilon} (1 + 2 \ln(2r) K_8)\}. \quad (2.15)$$

Из (2.12), (2.15) следует, что $f_2(z) \in [\rho, \infty]^+$.

Оценим теперь $f_3(z)$. Как и выше имеем при $z \notin \Omega$:

$$|u_{nm}(z)| \leq \frac{(m-1)! 2^m r^{S_n} (1 + 2^{-1}e^2)^{S_n}}{(\operatorname{Im} a_n)^m r_n^{S_n}} \times \\ \times \max_{|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2} |\varphi_n(\xi)|, \quad r_n \leq e^2 r, \quad \operatorname{Im} a_n \leq 1 \quad (2.16)$$

$$|u_{nm}(z)| \leq \frac{(m-1)! 2^m e^{-S_n}}{(\operatorname{Im} a_n)^m} \max_{|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2} |\varphi_n(\xi)|, \quad (2.17) \\ r_n > e^2 r, \quad \operatorname{Im} a_n \leq 1.$$

Так как если $|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2$, то

$$\frac{|z - \bar{a}_n|}{2} \leq |\xi - \bar{a}_n| \leq \frac{3}{2} |z - \bar{a}_n|.$$

Поэтому и (2.4), (2.5), (2.16) и (2.17) имеем

$$|u_{nm}(z)| \leq \frac{(m-1)! 2^m [r(1+2^{-1}e^2)]^{S_n} (r+1)^{\rho+3} 16 K_3}{q_n (\operatorname{Im} a_n)^m r_n^{S_n}} \times \\ \times \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{r_n^{\rho+3} |z - \bar{a}_n|^2} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2} \right\}, \\ r_n \leq e^2 r, \operatorname{Im} a_n \leq 1 \quad (2.18)$$

$$|u_{nm}(z)| \leq \frac{(m-1)! 2^m e^{-S_n} 16 K_3 (r+1)^{\rho+3}}{q_n (\operatorname{Im} a_n)^m} \times \\ \times \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{|z - \bar{a}_n|^2 r_n^{\rho+3}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2} \right\}, \\ r_n > e^2 r, \operatorname{Im} a_n \leq 1. \quad (2.19)$$

Как и при оценке $f_2(z)$, имеем, если $z \notin \Omega$:

$$|f_3(z)| \leq C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{|z - \bar{a}_n|^2 r_n^{\rho+3}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2} \right\}, \quad r > r_e, \quad (2.20)$$

при некоторых $C_3 > 0$ и $K_{11} > 0$.

Положим $\lambda_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z - \bar{a}_k|^2}$ так, что $\frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{r_n^{\rho+\varepsilon} |z - \bar{a}_n|^2} =$

$$= \lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z).$$

Из (2.3) имеем $\lambda_n(z) \downarrow 0$, $z \in C^+$.

Возвращаясь к (2.20), получим при $z \notin \Omega$

$$|f_3(z)| \leq C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} [\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)] e^{-\frac{1}{4} \lambda_n(z)}.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $t \leq e^t - 1$, при $t = \frac{1}{4} [\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)]$, получим

$$|f_3(z)| \leq 4C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} [e^{\frac{1}{4} (\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z))} - 1] e^{-\frac{1}{4} \lambda_n(z)} = \\ = 4C_3 e^{K_{11} r^{\rho+\varepsilon}} \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} (e^{-\frac{1}{4} \lambda_{n+1}(z)} - e^{-\frac{1}{4} \lambda_n(z)}) \leq 4C_3 e^{K_{11} r^{\rho+\varepsilon}}. \quad (2.21)$$

Чтобы оценить $f_3(z)$ при $z \in \Omega$ воспользуемся принципом максимума модуля и (2.21).

Список литературы: 1. Лалин Г. П. Интерполирование в классе целых функций конечного порядка // Изв. вузов. Сер. мат. 1959. 5, № 12. С. 146—153. 2. Нгуен Тхыонг Уен. Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка // Теория функций, функций. анализ и их приложения. 1978. 29. С. 109—117. 3. Jones P. Bounded holomorphic functions with all level sets of infinite length // Michigan Math J. 1978. 27. P. 75—79. 4. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. 47. С. 15—54. 5. Кусис П. Введение в теорию пространств H^∞ . М., 1984. 368 с. 6. Русаковский А. М. Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного // Рук. деп. в ВИНТИ. М., 1982. 63 с. № 5087-82.

Поступила в редколлегию 08.03.91

УДК 513.83+513.88

В. М. КАДЕЦ

К ТЕОРЕМЕ О ВЫДЕЛЕНИИ ω -ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ элементов топологического векторного пространства E называется ω -линейно независимой, если равенство $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n = 0$ может выполняться только для нулевых коэффициентов α_n . Очевидно, что ω -линейная независимость влечет обычную линейную независимость, но эти свойства не эквивалентны. В 1953 г. Эрдеши и Штраус [1] доказали, что из любой линейно независимой последовательности в нормированном пространстве можно выделить ω -линейно независимую подпоследовательность (см. также [2, 3]). Охарактеризуем те пространства Фреше, на которые переносится этот результат Эрдеши и Штрауса.

Теорема. Для пространства Фреше E следующие два условия эквивалентны:

- 1) на E существует непрерывная норма;
- 2) из любой линейно независимой последовательности элементов пространства E можно выделить ω -линейно независимую подпоследовательность.

Для доказательства нам потребуются вспомогательные утверждения. Первое из них в несколько более общей формулировке принадлежит Б. М. Макарову [4, замечание 1], но так как [4] представляет собой краткое сообщение (без доказательств), мы для полноты изложения это утверждение также докажем.

Лемма 1. Пусть E — пространство Фреше $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$ — система полунорм, задающая топологию на E . Пусть далее последовательность функционалов $f_n \in E'$ подчиняется следующему условию: функционал f_n разрывен относительно полунорм p_k при $k \leq n$ и непрерывен относительно p_{n+1} , p_{n+2} и т. д. Тогда для любой

числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует элемент $e \in E$, на котором $f_n(e) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство. Построим по индукции элементы $e_n \in E$ со следующими свойствами:

- а) $p_n(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$;
- б) $f_k(e_n) = 0$ при $k < n$;
- в) $f_n\left(\sum_{k=1}^n e_k\right) = a_n$.

Если нам это удастся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ будет сходиться (согласно а)) и его сумма (согласно б) и в)) будет удовлетворять всем требованиям леммы. Теперь поясним, как осуществляется индуктивное построение.

Так как f_1 разрывен относительно p_1 , на шаре $\{x \in E : p_1(x) \leq \frac{1}{2}\}$ функционал f_1 принимает все числовые значения. Поэтому существует $e_1 \in E$, для которого $f_1(e_1) = a_1$ и $p_1(e_1) \leq \frac{1}{2}$. Пусть уже построены $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Рассмотрим подпространство $F = \bigcap_{k=1}^{n-1} \text{Ker } f_k$.

оно имеет конечную коразмерность в E , замкнуто относительно сходимости в p_n и содержит ядро полунормы p_n (так как $\{f_k\}_{k=1}^{n-1}$ непрерывны относительно p_n). Поэтому ограничение функционала f_n на F так же как и сам f_n , разрывно относительно p_n . Следовательно, на множестве $\{x \in F : p_n(x) \leq \frac{1}{2^n}\}$ функционал f_n принимает все числовые значения, и существует $e_n \in F$, для которого выполняются свойства а) и в). Свойство б) выполняется автоматически по построению подпространства F . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ — последовательность натуральных чисел, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольные числа. Тогда существует целая функция $g(z)$, разложение которой в степенной ряд имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$ и $g(k) = a_k$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Рассмотрим пространство E всех целых функций вида $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Зададим полунормы (точнее, нормы) $p_n : p_n(g) =$

$= \sup \left\{ |g(z)| : |z| \leq n - \frac{1}{2} \right\}$ и функционалы $f_n \in E' : f_n(g) = g(n)$. Пространство E , полунормы p_n и функционалы f_n удовлетворяют условиям леммы 1; применив эту лемму, получим требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\|\cdot\|$ — непрерывная норма на E , $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — линейно независимая последовательность в E . Рассмотрим $\{x_n\}$ как элементы нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$. Вос-

пользуемся теоремой Эрдеша—Штрауса и выделим последовательность $\{x_n\}$ ω -линейно независимую в $(E, \|\cdot\|)$. Эта подпоследовательность будет ω -линейно независимой и в любой более сильной топологии, в частности, в естественной топологии пространства E .

(2) $\Rightarrow$ (1). Будем рассуждать методом «от противного». Пусть E не обладает ни одной непрерывной нормой. Тогда [5] E обладает подпространством, изоморфным пространству S всех числовых последовательностей, наделенному топологией покоординатной сходимости. Если мы докажем, что S содержит линейно независимую последовательность без ω -линейно независимых подпоследовательностей, то этим мы придем к противоречию с условием (2). Рассмотрим следующую последовательность x_n элементов пространства S :

$$\begin{aligned}x_1 &= (2, 3, 4, 5, 6, \dots); \\x_2 &= (2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots); \\&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\x_n &= (2^n, 3^n, 4^n, 5^n, 6^n, \dots).\end{aligned}$$

Очевидно, что $\{x_n\}$ — линейно независимая последовательность. Докажем отсутствие в $\{x_n\}$ ω -линейно независимых подпоследовательностей. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ — произвольная последовательность индексов.

Воспользуемся леммой 2 и построим функцию $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$ так, что $g(1) = 1$, $g(n) = 0$ при $n > 1$. Тогда для этих коэффициентов S_k ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S_k x_{n_k}$ сходится к $(g(2), g(3), g(4), \dots) = 0$. Следовательно, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ не является ω -линейно независимой. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Erdős P., Straus E. G. On linear independence of sequences in a Banach spaces // Pacific J. Math. 1953. 3. P. 689—694. 2. Terenzi P. Proof of a theorem on ω -linear independence in Banach spaces // Rend. Ist. lombardo Accad. Sci. e lett. № 114. P. 56—64. 3. Гуляев В. И. Счетно линейно независимые последовательности в банаховых пространствах // УМН. 1981. 36. Вып. 5. С. 171—172. 4. Макаров Б. М. О проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах // Докл. АН СССР. 1959. 127, № 5. С. 957—960. 5. Bessaga C., Pelczyński A. On a class of B_0 -spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. 1957. CI, III, № 4. P. 375—377.

Поступила в редколлегию 08.08.91

УДК 517.948

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Данная работа является продолжением исследований автора, начатых в [1], и посвящена изучению простейшей алгебры Ли линейных операторов $\{A_1, A_2\}$ в гильбертовом пространстве H , удов-

удовлетворяющей коммутационному соотношению $[A_2, A_1] = iA_1$. Эту алгебру $\{A_1, A_2\}$ удобно изучать на группе Ли аффинных преобразований прямой [3], алгебра Ли векторных полей которой удовлетворяет тому же коммутационному соотношению. Ограничимся такими операторами A_1, A_2 , для которых выполняются предположения:

а) A_1 — диссипативный плотно заданный оператор с одинаковыми дефектными пространствами $E = E_\pm$, ($\dim E = r < \infty$);

б) A_2 ограничен и $(A_2)_1 H \subseteq E$, $(A_1 = (A - A^*)/2i)$.

Основной результат работы состоит в том, что алгебра Ли $\{A_1, A_2\}$ реализуется в некотором пространстве мероморфных функций на соответствующей римановой поверхности Q , при этом один из операторов будет действовать как оператор умножения на мероморфную функцию $f(P) \rightarrow \lambda(P) f(P)$, $P \in Q$, а второй — будет представлять собой оператор «сдвига» $f(P) \rightarrow f(\alpha(P))$, где α — автоморфизм римановой поверхности Q , ($\alpha^2 = 1$, $P \in Q$).

1. Под функциональной моделью оператора A обычно понимают такую реализацию гильбертова пространства H , в которой оператор A действует как оператор умножения на независимую переменную. Функциональной моделью алгебры Ли $\{A_1, A_2\}$ будем называть такую реализацию пространства H , в которой хотя бы один из операторов системы $\{A_1, A_2\}$ действует посредством умножения на независимую переменную.

Из результатов работы [1] следует, что функциональная модель учаемой алгебры Ли $\{A_1, A_n\}$, ($A_n = A_2 + nA_1$, $n \in \mathbb{R}$) имеет вид

$$\hat{A} \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} (z) = P_{\mathcal{P}_n} iz \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} (z);$$

$$\hat{A}_1 \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} (z) = P_{\mathcal{P}_n} S \sigma_n^{-1} \begin{bmatrix} iz - \gamma_- & 0 \\ 0 & iz - \gamma_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} (z), \quad (1)$$

где $\sigma_n = \sigma_2 + nI_E$; S — сдвиг $Sg_\pm(z) = g_\pm(z-1)$; $P_{\mathcal{P}_n}$ — проектор на гильбертово пространство $\mathcal{P}_n$, в котором действуют операторы $\hat{A}_n, \hat{A}_1$;

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \begin{bmatrix} g_- \\ g_+ \end{bmatrix} \in L^2_{\Pi} \begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} g_- + \sigma_n^{-1} S_n^*(z) g_+ \\ \sigma_n^{-1} S(z) g_- + g_+ \end{bmatrix} \in H^2_+(E, \sigma_n d\beta) \right\}.$$

Через $L^2_{\Pi}(E, \sigma_n d\beta)$ обозначено пространство Харди E -значных, квадратично интегрируемых по мере $\sigma_n d\beta$ функций, отвечающих полосе $\Pi = \{z = \alpha + i\beta, -1 < \alpha < 0\}$, а $H^2_{\pm}(E, \sigma_n d\beta)$ представляют собой также пространства Харди функций из $L^2_{\Pi}(E, \sigma_n d\beta)$, которые голоморфно

продолжаемы в полуплоскости $\pm \operatorname{Re} z > 0$. Символом $L^2_{\Pi} \begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix}$

обозначено пространство $\begin{bmatrix} g_-(z) \\ g_+(z) \end{bmatrix}$ квадратично интегрируемых по мере $\begin{pmatrix} \sigma_n & S_n^*(z) \\ S_n(z) & \sigma_n \end{pmatrix} d\beta$ функций таких, что $g_{\pm}(z) \in L^2_{\Pi}(E, \sigma_n d\beta)$. Наконец, $S_n(z)$ — характеристическая функция [1] оператора A_n ; $S_n(z) = I -$

— $i\varphi \cdot (A_n - izI)^{-1} \varphi^* \sigma_n$ — действующая в пространстве E , где линейный оператор $\varphi: H \rightarrow E$ таков, что $2\text{Im} \langle A_n h, h \rangle = \langle \sigma_n \varphi h, \varphi h \rangle$, $\forall h \in H$.

Операторы $\sigma_{\pm}$, $\gamma_{\pm}$ действуют в дефектном пространстве E , причем $\sigma_{\pm}$ — самосопряжен, а $2(\gamma_{\pm})_I = I_E$.

2. Модельный оператор $A_1(1)$ на каждую из компонент $g_{\pm}$ действует по правилу $S\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_{\pm})g_{\pm}$. Приведем линейный операторный пучок $\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_{\pm})$ к диагональному виду; это впоследствии позволит реализовать $g_{\pm}(z)$ в некотором классе мероморфных функций на римановой поверхности.

Из самосопряженности (в σ_n -метрике) линейного операторного пучка $\sigma_n^{-1}(iz - \gamma_{\pm}) = \sigma_n^{-1}(\zeta - (\gamma_{\pm})_R)$ при $\zeta = i(z + \frac{1}{2}) \in R$ (где $(\gamma_{\pm})_R = \gamma_{\pm} - i0,5I$) следует, что существуют собственные вектор-функции $u_{\pm}(\zeta, \omega)$ в E такие, что

$$(iz - \gamma_{\pm} - \omega \sigma_n) u_{\pm} + (\zeta, \omega) = 0, \quad \zeta = i(z + 1/2) \in R.$$

Функция $u_{\pm}(\zeta, \omega) \neq 0$, если только $(\zeta, \omega) \in Q_{\pm}$, где алгебраическая кривая

$$Q_{\pm} = \{(\zeta, \omega) \in C^2; Q_{\pm}(\zeta, \omega) = 0\} \quad (2)$$

задается многочленом $Q_{\pm}(\zeta, \omega) = \det[\zeta - (\gamma_{\pm})_R - \omega \sigma_n]$.

Мы ограничимся здесь не особыми [1] комплексными кривыми $Q_{\pm}(2)$, т. е. такими, у которых комплексный вектор градиента $\text{grad} Q_{\pm} \neq 0$ при всех $(\zeta, \omega) \in Q_{\pm}$. Это означает, что полином $Q_{\pm}(\zeta, \omega)$ неприводим, т. е. корни $\{\omega_{\pm}^s(\zeta)\}_1^r$ различны (исключая точки ветвления), более того $\omega_{\pm}^s(\zeta)$ — суть ветви r -значной алгебраической функции [1].

Рассмотрим одномерные (многочлен $Q \pm(\zeta, \omega)$ не приводим) E -расслоения над $Q_{\pm}$:

$$h \pm(P) \in \text{Ker}(\sigma_1 \zeta - (\gamma_{\pm})_R - \omega \sigma_n),$$

где $P = (\zeta, \omega) \in Q_{\pm}$; т. е. $h \pm(P)$ — собственные вектора линейных пучков

$$\sigma_n^{-1}(\sigma_1 \zeta - (\gamma_{\pm})_R) h \pm(P) = \omega_{\pm} h \pm(P), \quad (3)$$

которые будем нормировать условием $h_r^{\pm} = 1$, ($h_r^{\pm}$ — r -я компонента вектора $h \pm(P)$). Очевидно, что $h \pm(P)$ является рациональной вектор-функцией над $Q_{\pm}(2)$. Как и в коммутативном случае [1], нетрудно установить, что число полюсов $h \pm(P)$ с учетом их кратности равно $N = g + r - 1$ (здесь g — род римановой поверхности $Q_{\pm}$).

Выделим на римановой поверхности $Q_{\pm}(2)$ правильные аналоги вещественной оси $\text{Im} \zeta = 0$, полуплоскостей $\pm \text{Im} \zeta > 0$ и полосы $\Pi = \{\zeta \in C; |\text{Im} \zeta| < 0,5\}$. Определим

$$C \pm(Q_{\pm}) = \{P = (\zeta, \omega_{\pm}) \in Q_{\pm}; \pm \text{Im} \zeta(P) > 0\};$$

$$R(Q_{\pm}) = \partial C_{\pm}(Q_{\pm}); \quad (4)$$

$$\Pi(Q_{\pm}) = \{P \in Q_{\pm}; |\text{Im} \zeta(P)| < 1/2\}.$$

По причинам, которые станут понятны ниже, $R(Q_{\pm})$ будем называть разрезами римановой поверхности $Q_{\pm}$. Особенности $h \pm(P)$ (3) лежат

да $R(Q_{\pm})$ в силу σ_n — самосопряженности пучков $\sigma_n^{-1}(\sigma_1 \xi - \gamma_{\pm} R)$ при $\xi \in R$.

Каждую из функций $f(z) \in H^2(E, \Pi, \sigma_n d\beta)$ разложим по ортогональному базису собственных векторов $h^+(P_k)$ (3) ($P_k = (\xi, \omega^k(\xi)) \in R(Q_+)$, $\xi = i(z + 0,5)$), $f(z) = \sum h^+(P_k) \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_E^{-2} \cdot g(P_k)$. При этом скалярные функции $g(P_k)$ имеют вид $g(P_k) = \langle \sigma_n f(z), h^+(P_k) \rangle$ здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, как и $\| \cdot \|_E$, в смысле евклидова пространства E .

Определим теперь гильбертово пространство $H_2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$, образованное вектор-функциями $f(P) = h^+(P) \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P) \|_E^{-2}$, $g(P)$, для которых

$$\sup_{P \in \Pi(Q_+)} \int_{\text{Im} \xi(P) = \text{const}} \| \sqrt{\sigma_n} f(P) \|_E^2 dx < \infty, \quad (x = \text{Re} \xi(P)),$$

где $h^+(P)$ — собственная вектор-функция (3) пучка $\sigma_n^{-1}(\sigma_1 \xi - (\gamma_{\pm} R)$; $g(P)$ — скалярная, голоморфная в $\Pi(Q_+)$ функция, имеющая такие же особенности (с учетом их кратности, что и $h^+(P)$, причем

$$\sup_{l_t \in \Pi(Q_+)} \int |g(P)|^2 \frac{dx}{\| \sqrt{\sigma_n} h^+(P) \|_E^2} < \infty; \quad (x = \text{Re} \xi(P)). \quad (5)$$

Здесь l_t — семейство линий в $\Pi(Q_+)$, которые задаются условием $\text{Im} \xi(P) = t$, ($|t| < 0,5$); при этом, когда $t \rightarrow 0$, кривые l_t стягиваются разрезом $R(Q_+)$.

Через $H_{\pm}^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ обозначим пространства Харди, образованные функциями из $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$, скалярные компоненты которых $g(P)$ голоморфно продолжаемы в области $C_+(Q_+)$. Очевидно, что $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) = H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \oplus H^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$. Аналогичным образом вводятся $H^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$ и $H_{\pm}^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$. Так как базис $h^+(P)$ фиксирован, каждая из функций $f(P) \in H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ задается своей скалярной компонентой $g(P)$. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять $f(P)$ с $g(P)$.

3. Из уравнения для характеристической функции $S_n(z)$ следует, что

$$\sigma_n [i \partial_n S_n(z)] h^-(P), \quad h^+(\hat{P}) = [\omega_-(P) + \omega_+(\hat{P})] \langle \sigma_n S_n(z) h^-(P), \quad h^+(\hat{P}) \rangle.$$

Здесь $(\xi, \omega_{\pm}) = P \in Q_{\pm}$; $(\xi, \omega_{\pm}) = \hat{P} \in Q_{\pm}$; $\xi = i(z + 0,5)$. Определим

$$N_{\pm}(P) h^{\pm}(P) = \exp \left\{ -i \int_{n_0}^n \omega_{\pm}(P) dn' \right\} h^{\pm}(P), \quad P \in Q_{\pm},$$

тогда

$$\langle \sigma_n S_n(z) h^-(P), \quad h^+(\hat{P}) \rangle = N_-(P) N_+(\hat{P}) \theta(P, \hat{P}),$$

где ядро $\theta(P, \hat{P}) = \langle \sigma_n S_n(z) h^-(P), \quad h^+(\hat{P}) \rangle$ и может быть вычислено. После этого $S_n(z)$ на функцию $f(P) = h^-(P) \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^-(P) \|_E^{-2} g(P) \in H^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx)$ действует следующим образом:

$$S_n(z) f(P) = \frac{h^+(\hat{P})}{\| \sqrt{\sigma_n} h^+(P) \|_E^2} \sum_{\xi(P) = \xi(P)} \frac{g - (P)}{\| \sqrt{\sigma_n} h^-(P) \|_E^2} N_+(\hat{P}) N_-(P) \theta(P, \hat{P}).$$

Таким образом, характеристическая функция $S_+(z)$, записанная терминах скалярных функций $g: (P) \rightarrow g_+(P)$, имеет вид

$$(\theta g_-)(\dot{P}) = \sum_{\substack{\zeta(P)=\zeta(P) \\ P \in Q_-}} g_-(P) \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^-(P) \|_{\bar{E}}^{-2} N_-(P) N_+(\bar{P}) \theta(P, P), \quad (6)$$

где $P = (\zeta, \omega_-) \in Q_-$; $\bar{P} = (\zeta, \omega_+) \in Q_+$.

Обратимся к оператору $\bar{A}_1$ (1). Сдвигу $z \rightarrow z-1$ в терминах $\zeta = i(z+1/2)$ отвечает $\zeta \rightarrow \bar{\zeta}$, где $\bar{\zeta} \in \bar{\Pi}$. Оператор $S\sigma_n^{-1}(iz+\gamma_+)$ на функцию $f(z) = \sum h^+(P_k) \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_{\bar{E}}^{-2} \cdot g(P_k) \in H^2(E, \Pi, \sigma_n d\beta)$ действует следующим образом:

$$S\sigma_n^{-1}(iz+\gamma_+)f(z) = \sum_k \frac{h^+(\bar{P}_k)}{\| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_{\bar{E}}^2} \omega_+(\bar{P}_k) g(\bar{P}_k),$$

где $P_k = (\zeta, \omega_+(\zeta)) \in Q_+$, $\bar{P}_k = (\bar{\zeta}, \omega_+(\bar{\zeta})) \in Q_+$, причем $P_k, \bar{P}_k \in \Pi(Q_{\pm})$. Легко показать, что $h^+(\bar{P}_k) = C_k h^+(P_k)$. Действительно, из

$$\begin{aligned} & [\omega_+(P_k) - \omega_+(P_l)] \langle \sigma_n h^+(P_k), h^+(\bar{P}_l) \rangle = \\ & = \langle (\zeta - \gamma_+)_R h^+(P_k), h^+(\bar{P}_l) \rangle - \langle h^+(P_k), (\bar{\zeta} - \gamma_+)_R h(\bar{P}_l) \rangle = 0 \end{aligned}$$

следует ортогональность $h^+(P_k)$ и $h^+(\bar{P}_l)$ при $k \neq l$, так как корни $\omega_+(P_k)$ неприводимого многочлена $Q_+(\zeta, \omega) = 0$ различны (естественно вне точек ветвления). Очевидно, что

$$c_k = \langle \sigma_n h^+(\bar{P}_k), h^+(P_k) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(P_k) \|_{\bar{E}}^{-2}.$$

Поэтому действие оператора $\bar{A}_1$ (1) на скалярных функциях $g(P)$ в пространстве $H^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx)$ будет заключаться в следующем: $\bar{A}_1 g(P) = \Lambda(P) g(\bar{P})$, где точки $\bar{P} = (\bar{\zeta}, \omega_+(\bar{\zeta}))$ и $\bar{P} = (\bar{\zeta}, \omega_+(\bar{\zeta}))$ лежат в $\Pi(Q_+)$, а $\Lambda(P) = \omega_+(\bar{P}) \langle \sigma_n h^+(\bar{P}), h^+(P) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h^+(\bar{P}) \|_{\bar{E}}^{-2}$. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\dim E = r < \infty$ и алгебраические кривые $Q_{\pm}$ (2) в C^2 неособые. Тогда на $Q_{\pm}$ существуют векторные поля $h^{\pm}(P)$ с неспециальными [1] дивизорами полюсов $D_{\pm}$, $\deg D_{\pm} = g + r - 1$, что функциональная модель алгебры Ли $\{A_1, A_2\}$, для которой имеют место а), б) п. 1, имеет вид

$$\dot{A}_n f(P) = P_{\dot{H}}(\zeta(P) - i/2) f(P); \quad (7)$$

$$\dot{A}_1 f(P) = P_{\dot{H}} \Lambda(P) f(\bar{P}),$$

где $\dot{A}_n = n \dot{A}_1 + \dot{A}_2$; функции $f(P) = \left[\frac{f_-(P_-)}{f_+(P_+)} \right] \in \dot{H}$,

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= (\zeta, \omega_{\pm}) \in \Pi(Q_{\pm}), \quad \Lambda(P) f_{\pm}(P_{\pm}) = \omega_{\pm}(P_{\pm}) \times \\ &\times \langle \sigma_n h^{\pm}(\bar{P}_{\pm}), h^{\pm}(P_{\pm}) \rangle \cdot \| \sqrt{\sigma_n} h_{\pm}(\bar{P}_{\pm}) \|_{\bar{E}}^{-2}, \end{aligned}$$

причем $\bar{P}_\pm = (\bar{\zeta}_\pm, \omega_\pm(\bar{\zeta}_\pm)) \in \Pi(Q_\pm)$ Модельное пространство

$$H = \left\{ f(P) = \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix}; f_- \in \left(H_+^2(h^-, \Pi, \sigma_n dx) \ominus \theta^* H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \right), f_+ \in \left(\Delta H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \ominus \Delta H_+^2(h^+, \Pi, \sigma_n dx) \right) \right\}. \quad (8)$$

При этом $\Delta^2 = \sigma_n - \theta \sigma_n^{-1} \theta^*$, а оператор θ имеет вид (6).

Униформизируя [4] кривую $Q_\pm(\zeta, \omega_\pm) = 0$, получим $\zeta(u_\pm, \omega_\pm(u_\pm))$, которые мероморфны в круге $K(u_\pm \in K)$, а K является универсальной накрывающей [4] для $Q_\pm(2)$. Функции $\zeta(u_\pm), \omega_\pm(u_\pm)$ автоморфны относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований K в себя, которая изоморфна фундаментальной группе $F_\pm$ римановой поверхности $Q_\pm$, т. е. можно считать ζ и $\omega_\pm$ заданными в фундаментальной области $\Gamma_\pm$ (многоугольник Пуанкаре) с «правильной склейкой сторон» посредством группы $F_\pm$ [4]. Через $\Gamma_\pm(Q_\pm), \Gamma_0(Q_\pm)$ и $\Gamma_\Pi(Q_\pm)$ обозначим прообразы $C_\pm(Q_\pm), R(Q_\pm)$ и $\Pi(Q_\pm)$ при униформизации $\zeta(u_\pm), \omega_\pm(u_\pm)$. Естественная переформулировка определений $H^2(h^\pm, \Gamma_\Pi, \sigma_n dx), H_\pm^2(h^\pm, \Gamma_\Pi, \sigma_n dx)$ (6) приводит к следующей теореме, которую мы сформулируем в случае, когда θ^* является σ_n -внутренней функцией [1].

Теорема 2. Если выполняются предположения теоремы 1, а θ^* является σ_n -внутренней, то на фундаментальных областях $\Gamma_\pm$ кривых $Q_\pm(2)$ существуют такие векторные поля $h^\pm(u)$ с неспециальными дивизорами полюсов $D_\pm, \deg D_\pm = g + r - 1$, что функциональная модель алгебры Ли имеет вид

$$\hat{A}_n f(u) = P_R(\zeta(u) - i/2) f(u); \quad (7)$$

$$\hat{A}_1 f(u) = P_R \Lambda(u) f(\bar{u}),$$

где

$$\hat{K} = H_+^2(h^-, \Gamma_\Pi, \sigma_n dx) \theta \theta^* H_+^2(h^+, \Gamma_\Pi, \sigma_n dx);$$

$$\hat{A}_n = \hat{A}_2 + n \hat{A}_1; \Lambda(u) = \omega_-(u) \cdot \langle \sigma_n h^-(\bar{u}), h^-(u) \rangle \cdot \|V \overline{\sigma_n h^-(\bar{u})}\|_E^{-2},$$

причем $\bar{u}$ таково, что $\bar{\zeta}(\bar{u}) = \zeta(u); \bar{\omega}_-(\bar{u}) = \omega_-(u)$.

4. Выберем $E, \dim E = 3$, —

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \alpha & 0 \\ a & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \tilde{\gamma}_R = \begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & -b & 2-k^{-1} \end{bmatrix},$$

где $\alpha > a > 0; k \in (0, 1); b = \sqrt{2(k^{-1} - 1)}$. Тогда $Q(\zeta, \lambda) = 0$ имеет вид

$$k^2 a^2 \zeta^2 (1 - \lambda) = (1 + \lambda) (1 - k^2 \lambda^2). \quad (8)$$

Полагая $ka\zeta(1 - \lambda) = \mu$, приходим к алгебраической кривой Лежандра [4]

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2) (1 - k^2 \lambda^2). \quad (9)$$

Двудлистная риманова поверхность (9) рода $g=1$ образуется из двух λ плоскостей C , склеенных «крест-накрест» вдоль разрезов $(-\infty, -k^{-1}] \cup [-1, 1] \cup [k^{-1}, \infty)$. Так как

$$ka \operatorname{Im} \zeta = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda} (1-k^2 \lambda^2)}$$

меняет знак лишь на разрезах, то $C_+(Q)$, как и $C_-(Q)$, в данном случае выделяет один из листов римановой поверхности Q (9), а $R(Q)$ совпадает с выбранными разрезами на R . Множество $\Pi(Q)$ порождается семейством кривых

$$t = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda} (1-k^2 \lambda^2)}; \quad t \in \left(-\frac{1}{2ak}, \frac{1}{2ak}\right),$$

стягивающихся к разрезам $R(Q)$. На кривой (9) существует единственный ($g=1$) абелев дифференциал первого рода [4]

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2 \lambda^2)}}. \quad (10)$$

Поэтому эллиптический интеграл

$$u(P) = \int_{P_0}^P \omega, \quad P, P_0 \in Q \quad (11)$$

конформно отображает (9) на прямоугольник $\Gamma = \{u \in C; |\operatorname{Re} u| < 2K, |\operatorname{Im} u| < K'\}$ с надлежащим отождествлением сторон, $P_0 = (0, 1)$, а $4K$ и $2iK'$ — периоды замкнутого дифференциала (10). Обращение эллиптического интеграла (11) приводит к униформизации (9) $\mu = \operatorname{sn}' u$, $\lambda = \operatorname{sn} u$ функциями Якоби [4] и значит

$$\zeta(u) = \frac{\operatorname{sn}' u}{ka(1 - \operatorname{sn} u)}, \quad \lambda(u) = \operatorname{sn} u. \quad (12)$$

Функция $\lambda(u)$ имеет два простых полюса в точках iK' , $2K + iK'$, а $\zeta(u)$ — три простых полюса:

$$ka\zeta(u) = \zeta(u - iK) + \zeta(u - 2K - iK') - 2\zeta(u - K),$$

где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса [4]. Собственные вектора пучка $(\sigma_1 \zeta - \mu_R)h = \omega_{\sigma_1} h$ имеют вид $\tilde{h} = \sqrt{\sigma_1} h$. Здесь

$$\tilde{h} = \begin{bmatrix} \frac{ka\zeta}{1+k\lambda} \\ \frac{b}{\lambda-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{sn}' u}{(1-\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn} u)} \\ \frac{b}{\operatorname{sn} u-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

Вектор $\tilde{h}$ — имеет полюс второго порядка в точке $\lambda = -1$, ($u = K$) и первого порядка в $\lambda = K^{-1}$ ($u = -K + iK'$) либо $N=3$.

Изоформизм (10) переводит $C_{\pm}(Q)$ в прямоугольник $\Gamma_{\pm}(Q) = \{u \in \Gamma; \pm \operatorname{Im} u > 0\}$, а $\Gamma_0(Q) = \{u \in \Gamma, \operatorname{Im} u = 0 \text{ либо } \operatorname{Im} u = iK'\}$; наконец Γ_{II} — область в Γ , являющаяся прообразом $\Pi(Q)$.

Функциональная модель (7) в этом примере задается в пространстве K формулами (7), где $\zeta(u)$ имеют вид (12), $\tilde{u} = \bar{u}$ и, наконец,

$$\Lambda(u) = \frac{2}{k^2 a} \cdot \frac{[\alpha \operatorname{sn}' u + ka \operatorname{sn} u (1 - \operatorname{sn} u)] [1 + k \operatorname{sn} u]}{|\operatorname{sn}' u|^2 + b^2 |1 + k \operatorname{sn} u|^2 + |1 + (k-1) \operatorname{sn} u - k \operatorname{sn}^2 u|_0}.$$

- Список литературы: 1. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // *Мат. сб.* 1990. 181, № 7. С. 965—994.
2. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., 1971. 235 с. 3. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965. 115 с. 4. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. 232 с.

Поступила в редколлегию 07.03.91

УДК 517.95

А. И. ХЕЙФИЦ

КЛАССЫ ХАРДИ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

1. В ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ рассмотрим неотрицательную функцию (потенциал) $c(x) \geq 0$ такую, что $c \in L^s_{\text{loc}}(\Omega)$, где $s > n/2$ при $n \geq 4$ и $s = 2$ при $n = 2, 3$; класс этих функций обозначим $E(\Omega)$. Через $G(x, y)$ обозначим функцию Грина с нулевыми граничными значениями оператора $L_c = -\Delta + c(x)I$, Δ — лапласиан, I — тождественный оператор, определенного первоначально на $C_0^\infty(\Omega)$ и продолженного стандартным способом до самосопряженного на $L^2(\Omega)$. При $|x - y| \rightarrow 0$ нормируем G условием $G \sim \gamma_n |x - y|^{2-n}$, когда $n \geq 3$, либо $G \sim \gamma_2 \ln(|x - y|^{-1})$, когда $n = 2$. Здесь $\gamma_2 = (2\pi)^{-1}$, $\gamma_n = [(n-2)\sigma_n]^{-1}$ при $n \geq 3$, а σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n . Необходимые в дальнейшем свойства G содержатся, например, в [1—3]. Отметим, что если граница $\partial\Omega$ гладкая, то производная по внутренней нормали $\partial G/\partial n \geq 0$, суммируема на $\partial\Omega$, а при $s > n$ непрерывна.

Полунепрерывная сверху в Ω функция $u \not\equiv -\infty$ называется обобщенной субгармонической функцией (о. с. ф.) или субфункцией оператора Шредингера L_c , если она принимает значения из промежутка $[-\infty, \infty)$ и в каждой точке $x \in \Omega$ при $0 < r < r(x)$ удовлетворяет обобщенному неравенству для средних значений

$$u(x) \leq \int_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial n(y)} d\sigma(y),$$

где G_r — функция Грина L_c в шаре $B(x, y) = \{y : |x - y| < r\}$, сфера $S(x, r) = \partial B(x, r)$, а $d\sigma$ — поверхностная мера на $S(x, r)$. Это определение введено в [4, 5], ряд свойств о. с. ф. изучены в [3; 6—8], систематическому построению теории о. с. ф. посвящены работы [1, 2; 9—13]. Если u и $-u$ одновременно являются о. с. ф., то u называется обобщенной гармонической функцией (о. г. ф.) или c -гармонической функцией. Класс о. с. ф. в области Ω обозначим $SH(c, \Omega)$, а класс о. г. ф. — $H(c, \Omega)$. Очевидно, о. г. ф. непрерывны в области и удовлетворяют обобщенному соотношению средних значений

$$u(x) = \int_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial n(y)} d\sigma(y).$$

Этот интеграл естественно назвать обобщенным или s -интегралом Пуассона.

Мы изучаем граничное поведение s -интеграла Пуассона для полупространства и связанные с этим граничные свойства о. г. ф. в полупространстве. В частности, получено обобщение на о. г. ф. теоремы Фату о существовании почти всюду граничных значений ограниченных аналитических функций. Далее для о. г. ф. в полупространстве введены аналоги классов Харди H^p , $1 \leq p \leq \infty$, получено представление функций из этих классов с помощью s -интегралов Пуассона по границе полупространства.

В рассуждениях мы во многом следовали монографии [14]. Значки $\blacktriangle$ и $\blacktriangledown$ обозначают, соответственно, начало и конец доказательств.

2. Обозначим $\Omega = R_+^{m+1} = \{X = (x, x_{m+1}) : x \in R^m, x_{m+1} > 0\}$, $m \geq 1$ и $E = \partial\Omega = R^m$. Через $\Gamma_\alpha(\xi)$, где $\alpha > 0$ фиксировано, обозначим конус $\{(x, x_{m+1}) \in \Omega : |x - \xi| < \alpha x_{m+1}\}$ с вершиной в точке $\xi \in E$. Отметим, что если не оговорено иное, то нормы $\|\cdot\|$ берутся в $L^p(E)$. В этом пункте мы переносим на о. г. ф. следующие известные утверждения [14].

Пусть u — (обычная) гармоническая функция в Ω . Если при некотором p , $1 \leq p \leq \infty$ нормы $\|u(\cdot, x_{m+1})\|$ ограничены для $0 < x_{m+1} < \infty$, то u является интегралом Пуассона функции $f \in L^p(E)$ при $p > 1$ и интегралом Пуассона борелевской меры при $p = 1$, т. е.

$$u(X) = \int_E P(x_{m+1}, x - y) f(y) dy, \quad 1 < p \leq \infty;$$

$$u(x) = \int_E P(x_{m+1}, x - y) d\mu(y), \quad p = 1.$$

Причем

$$\int_E [1 + |y|^{m+1}]^{-1} |f(y)| dy < \infty;$$

$$\int_E [1 + |y|^{m+1}]^{-1} d\mu(y) < \infty,$$

где $P(x_{m+1}, y) = \gamma_{m+1} x_{m+1} [x_{m+1}^2 + |y|^2]^{-(m+1)/2}$ — гармоническое ядро Пуассона для Ω .

Пусть u — интеграл Пуассона функции $f \in L^p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда почти для всех точек $x, \xi \in E$ существуют пределы (напомним, что всегда $X = (x, x_{m+1})$)

$$\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} u(x) = f(x); \quad \lim_{\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \rightarrow \xi} u(X) = f(\xi);$$

если $p < \infty$, то существует предел

$$\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} \|u(X) - f(x)\| = 0.$$

Наконец, при $1 \leq p \leq \infty$ справедливы неравенства

$$\sup_{x_{m+1} > 0} |u(X)| \leq (Mf)(x), \quad \forall x \in E;$$

$$\sup_{x \in \Gamma_\alpha(\xi)} |u(X)| \leq A_\alpha (Mf)(\xi), \quad \forall \xi \in E,$$

где A_α — постоянная, зависящая от раствора конуса и размерности пространства;

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} (nr^{-n}(\sigma_n) \int_{B(x,r)}^{-1} |f(y)| dy) — \text{максимальная функция.}$$

В формулировках наших результатов важную роль играет функция Грина $G(X, Y)$ оператора L_c в полупространстве Ω . Ее легко построить как предел функций Грина ограниченных областей, исчерпывающих Ω изнутри [11]. Как известно (см., например, [1, 2]), $G(X, Y) \leq g(X, Y)$ — функции Грина лапласиана, откуда

$$\frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} \leq P(x_{m+1}, x - y). \quad (1)$$

Заметим, что формулируя результаты о представимости c -интегралом Пуассона, мы фактически решаем некоторую задачу Дирихле для оператора L_c . Однако известно [8], что если потенциал $c(X)$ достаточно быстро растет при приближении X к границе области, то эта задача Дирихле может не иметь решения. Поэтому приходится делать дополнительные предположения, ограничивающие рост потенциала вблизи границы.

Пусть $c \in E(\Omega)$ и точка $\xi \in E$; будем писать $c \in E(\xi, \Omega)$, если существует такая функция $Q(t)$, определенная при $0 < t < t(\xi)$, что $c(X) \leq Q(|X - \xi|)$

при $X \in \Omega$, $|X - \xi| < t(\xi)$, причем $\int_0^{t(\xi)} Q(t) dt < \infty$. Далее предполагается, что $c \in E(\xi, \Omega)$ почти всюду на E , т. е. для всех ξ из множества полной меры $E' \subset E$. Этот класс потенциалов обозначим $E_1(\Omega)$.

Назовем c -интегралом Пуассона для полупространства интеграл

$$u(X) = \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} f(y) dy, \quad (2)$$

где dy — m -мерная лебегова мера на E . Его свойства частично изучены в [2, 9, 11]. Далее рассмотрим его граничное поведение.

Теорема 1. Пусть $u(X)$ — интеграл (2), где функция $f \in L^p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $c \in E_1(\Omega)$. Тогда имеет место следующее.

1°. Интеграл сходится абсолютно, и для всех точек $x, \xi \in E$ выполняются неравенства $\sup_{x_{m+1} > 0} |u(X)| \leq (Mf)(x)$, $\sup_{x \in \Gamma_\alpha(\xi)} |u(X)| \leq A_\alpha \times (Mf)(\xi)$, где постоянная A_α зависит лишь от α и m .

2°. Для почти всех $x, \xi \in E$ существуют пределы $\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} u(X) = f(x)$;

$\lim_{\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \rightarrow \xi} u(X) = f(\xi)$.

3°. Если $p < \infty$, то существует предел

$$\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} \|u(X) - f(x)\| = 0.$$

▲ Утверждение 1° непосредственно следует из (1) и приведенного выше аналогичного неравенства для гармонических функций.

Для доказательства 2° возьмем такую точку $\xi \in E$ из лебегова множества I , что $c \in E(\xi, \Omega)$ — эти точки образуют множество полной меры на E , причем $|f(\xi)| < \infty$. Преобразуем разность

$$\begin{aligned} u(X) - f(\xi) &= \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} [f(y) - f(\xi)] dy + \\ &+ f(\xi) \left[\int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy - 1 \right] = \int_{|y-\xi| < \delta} + \int_{|y-\xi| > \delta} + \\ &+ f(\xi) \left[\int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy - 1 \right] \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Из предположения $c \in E(\xi, \Omega)$ следует, что ξ — с регулярная граничная точка [11], поэтому о. г. ф.

$$u_1(X) \equiv \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy \rightarrow 1$$

при $\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \rightarrow \xi$ как решение задачи Дирихле для оператора L_c в Ω с граничными данными 1. Значит $\lim_{X \rightarrow \xi} I_2 = 0$. Соотношения $\lim_{X \rightarrow \xi} I_1 = \lim_{X \rightarrow \xi} I_2 = 0$ доказываются с учетом (1) и уже имеющегося утверждения 1° аналогично случаю $c(X) = 0$ [14]. Если $\xi = x$ и вместо стремления $X \rightarrow \xi$ по некасательному конусу $\Gamma_\alpha(\xi)$ рассматривать стремление $X = (x, x_{m+1}) \rightarrow x$ по нормали (при $x_{m+1} \rightarrow 0$), то рассуждения не меняются. Утверждение 2° доказано.

Для доказательства 3° запишем равенство (3) при $x = \xi$. По принципу максимума

$$\left| \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy - 1 \right| = 1 - \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy < 1$$

для всех $x \in E$, откуда $|I_3| \leq |f|$, т. е. I_3 мажорируется суммируемой на E функцией, не зависящей от x_{m+1} . По теореме о мажорированной сходимости

$$\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} \|I_3\| = \left\{ \int_E |f(x)|^p \lim_{x_{m+1} \rightarrow 0} \left[1 - \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy \right]^p dx \right\}^{1/p} = 0.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \|I_1 + I_2\| &\leq \left\{ \int_E |f(y) - f(x)|^p [P(x_{m+1}, x - y)]^p dy \right\}^{1/p} = \\ &= \left\{ \int_E |f(y + x) - f(x)|^p [P(x_{m+1}, y)]^p dy \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \int_E \|f(y + \cdot) - f(\cdot)\| P(x_{m+1}, y) dy \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x_{m+1} \rightarrow 0$ и $p < \infty$ [14, с. 78] ▼

Замечание. По сравнению с классическим случаем $c(X) = 0$ новым моментом в доказательстве является появление в (3) слагаемого I_3 .

то связано с тем, что c -ядро Пуассона $\frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)}$ не является аппроксимативной единицей. Именно при оценке I_3 используется дополнительное предположение о потенциале, благодаря которому почти все граничные точки Ω оказываются регулярными относительно оператора L_c .

3. Теперь мы обычным способом введем для о. г. ф. в полупространстве Ω аналоги классов Харди H^p . Через $H^p(c)$ обозначим совокупность тех о. г. ф. $u \in H(c, \Omega)$, для которых

$$\|u\|_{H^p(c)} = \sup_{0 < x_{m+1} < \infty} \|u(X)\| < \infty.$$

Заметим, что вопрос о монотонности и выпуклости норм $\|u(X)\|$ в случае о. г. ф. требует дополнительного исследования, случай сферических средних рассмотрен в [2, 4].

Теорема 2. Пусть $c \in E_1 \Omega$ и $u \in H(c, \Omega)$. Для того чтобы функция u была ограниченной в полупространстве Ω , т. е. $u \in H^\infty(c)$, необходимо и достаточно, чтобы u допускала представление c -интегралом Пуассона (2) с плотностью $f \in L^\infty(E)$.

▲ Существование, ограниченность и c -гармоничность интеграла следуют из [2, теорема 2.5.1] и теоремы 1 выше, поэтому нам осталось доказать необходимость.

Пусть $|u(X)| \leq M$ в Ω . Положим $f_k(x) = u(x, 1/k)$, $k = 1, 2, \dots$ — условием, это ограниченные и непрерывные [2] функции. Определим функции

$$u_k(X) = \int_E f_k(y) \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} dy, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где G_k — функция Грина оператора L_{c_k} со «сдвинутым» потенциалом $c_k(X) = c(x, x_{m+1} + 1/k)$. Тогда $u_k \in H(c_k, \Omega)$. Введем функции $\Delta_k(X) = u(x, x_{m+1} + 1/k) - u_k(X) \in H(c_k, \Omega)$. Очевидно, что $|\Delta_k(X)| \leq 2M$. Непрерывность u_k вплоть до границы и равенство $u_k(x, 0) = f_k(x)$ вне полярного множества на E при условии $c \in E_1(\Omega)$ доказаны в [11], и поэтому $\Delta_k(x) = 0$ на E вне полярного множества. Применяя к функциям $\pm \Delta_k(X)$ в Ω теорему Фрагмена — Линделефа [1] (для полупространства критический показатель равен 1), получаем, что $\Delta_k(X) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, для всех $X \in \Omega$, т. е.

$$u(x, x_{m+1} + 1/k) = \int_E f_k(y) \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} dy.$$

Теперь аналогично [14, с. 240] найдем функцию $f \in L^\infty(E)$ как слабый предел последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и запишем

$$\begin{aligned} u(x, x_{m+1} + 1/k) &= \int_E f_k(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy - \\ &- \int_E f_k(y) \left\{ \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} \right\} dy. \end{aligned}$$

Используя (1), получим, что первый интеграл здесь стремится к $\int_E f(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy$ при $k \rightarrow \infty$. Чтобы оценить второй интеграл, заметим, что G_k — это функция Грина оператора L_c в полупространстве $\Omega_k = R^m \times (1/k, \infty)$, и поэтому $\frac{\partial G_k}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial G}{\partial n}$ при $k \rightarrow \infty$ монотонно, причем

$$\left| \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial G_k}{\partial n} \right| \leq \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{\partial G_k}{\partial n} \leq 2 \frac{\partial G}{\partial n} \in L^1(E).$$

По теореме о мажорированной сходимости

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(y) \left[\frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} \right] dy = 0,$$

и теорема доказана полностью ▼

Распространим это утверждение на все конечные значения $p \geq 1$.

Теорема 3. Пусть $c \in E_1 \Omega$ и $u \in H(c, \Omega)$. Для того чтобы $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы u была представима c -интегралом Пуассона (2) с плотностью $f \in L^p(E)$ при $p > 1$, либо с борелевской мерой μ при $p = 1$. При этом $\|u\|_{H^p(c)}$

$$= \begin{cases} \|f\|, & 1 < p < \infty, \\ \|d\mu\|, & p = 1. \end{cases}$$

▲ Мы уже отмечали, что c -интеграл Пуассона, в том числе и по мере, является c -гармонической функцией, а принадлежность его классам $H^p(c)$ следует из (1) и соответствующего утверждения для случая $c = 0$ [14, гл. 7]. При $p = \infty$ утверждение сводится к предыдущей теореме, и нам осталось доказать необходимость при $p < \infty$.

Итак, пусть $u \in H^p(c)$, $1 \leq p < \infty$. Зафиксируем точку $X = (x, x_{m+1}) \in \Omega$. По определению о.г.ф.

$$u(X) = \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} u(Y) \frac{\partial G_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)} d\sigma(Y), \quad (4)$$

где α — постоянная, $0 < \alpha \leq 1$; G_α — функция Грина оператора L_c в шаре $B(X, \alpha x_{m+1})$. Заметим, что при всех $\alpha \in (0, 1]$ этот шар лежит в «полосе» $E \times (0, 2x_{m+1})$. Так как $\partial G_\alpha / \partial r \geq 0$, из (4) получаем

$$\begin{aligned} |u(X)| &\leq \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} |u(Y)| \frac{\partial G_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)} d\sigma(Y) \leq \\ &\leq \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} |u(Y)| \frac{\partial g_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)} d\sigma(Y), \end{aligned}$$

где g_α — функция Грина лапласиана в том же шаре. Вместе с аналогичным неравенством для $-u$ приходим к оценке

$$\begin{aligned} |u(X)| &\leq \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} |u(Y)| \frac{\partial g_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)} d\sigma(y) = \\ &= \sigma_{m+1}^{-1} (\alpha x_{m+1})^{-m} \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} |u(y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

теперь по неравенству Гельдера

$$|u(X)| \leq (\sigma_{m+1} (\alpha x_{m+1})^m)^{-1/p} \|u\|_{L^p(S(X, \alpha x_{m+1}))},$$

откуда $|u(x)|^p \sigma_{m+1} (\alpha x_{m+1})^m \leq \int_{S(X, \alpha x_{m+1})} |u(y)|^p d\sigma(Y)$. Проинтегрируем это неравенство по α от 0 до 1:

$$\begin{aligned} |u(X)|^p &\leq (m+1) \sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int_{B(X, x_{m+1})} |u(Y)|^p dy Y \leq \\ &\leq (m+1) \sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int_{E \times (0, 2x_{m+1})} |u(Y)|^p dy Y = \end{aligned}$$

$$= (m+1) \sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int_0^{2x_{m+1}} \|u(\cdot, t)\|^p dt \leq 2(m+1) \sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{1-m} \|u\|_{H^p(c)}^p.$$

Итак, $|u(x)| \leq [2(m+1)/\sigma_{m+1}]^{1/p} x_{m+1}^{(1-m)/p} \|u\|_{H^p(c)}$, т.е. функция u ограничена в каждом полупространстве Ω_k , $k = 1, 2, \dots$. Окончательное доказательство такое же, как в предыдущей теореме. ▽

4. Здесь мы рассмотрим граничное поведение о.г.ф. из классов $H^p(c)$. Из теорем 1 и 3 непосредственно следует

Теорема 4. Пусть $c \in E_1(\Omega)$ и $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$ (в частности, пусть u — ограниченная о.г.ф. в Ω). Тогда почти всюду на E функция u имеет некасательные предельные значения: существует $\lim_{\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \rightarrow \xi} u(X) = f(\xi) \in L^p(E)$ для каждого $\alpha > 0$ и почти всех $\xi \in E$.

При $p = 1$ функция f определяется из лебегова разложения меры μ , соответствующей функции $u \in H^1(c)$: $d\mu(y) = f(y) dy + d\lambda(y)$, где $d\lambda$ — сингулярная компонента (относительно лебеговой меры) и $f \in L^1(E)$.

Рассмотрим далее локальный вариант теоремы Фату. Нам понадобится

Лемма 1. Для произвольного компакта $K \subset E$ обозначим $K_h = \bigcap_{\xi \in K} \Gamma_\alpha^h(\xi)$, где $\Gamma_\alpha^h(\xi) = \Gamma_\alpha(\xi) \cap \{E \times (0, h)\}$ — усеченные конусы. При $c \in E_1(\Omega)$ рассмотрим о.г.ф. $u \in H(c, \Omega)$, такую, что $|u(X)| \leq 1$ при $X \in K_h$. Тогда для почти всех $\xi \in K$ существует предел $\lim_{K_h \ni X \rightarrow \xi} u(X)$ при $K_h \ni X = (x, x_{m+1}) \rightarrow \xi$.

▲ Вначале получим для u представление в виде суммы $u = \varphi + \psi$, где $\varphi \in H^\infty(c)$ (ср. [14, с. 242 — 244]). Для этого положим

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} u(x, 1/k) & \text{при } (x, 1/k) \in K_h, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\varphi_k(X) = \int_E \varphi_k(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции ψ_k определим соотношением $u(x, x_{m+1} + 1/k) = \varphi_k(X) + \psi_k(X)$. Заметим, что $\varphi_k(X) \in H(c, \Omega)$. Так как функции $\varphi_k(X)$ равномерно ограничены на E по L^1 -норме (нормы $\|\varphi_k\|_{L^1(E)} \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$),

то последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ слабо сходится к некоторой функции $\varphi \in L^1(E)$, причем $\|\varphi\|_{L^1(E)} \leq 1$. Положим

$$\varphi(X) = \int_E \varphi(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy.$$

Для некоторой подпоследовательности k' $\varphi_{k'}(X) \rightarrow \varphi(X)$ уже поточечно в Ω , и в то же время $u(x, x_{m+1} + 1/k) \rightarrow u(X)$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, $\varphi_{k'}(x)$ сходится при $k' \rightarrow \infty$ поточечно в Ω к некоторой функции $\varphi(X)$, причем $u(X) = \varphi(X) + \psi(X)$. По построению $\varphi(X) \in H^\infty(c)$, следовательно, в силу теоремы 4 $\varphi(X)$ почти всюду на E имеет некасательные предельные значения.

Теперь покажем, что функция $\varphi(X)$ всюду на K имеет нулевые некасательные предельные значения. Для этого используем построенную в [14, с. 244] неотрицательную гармоническую функцию $H(X)$, $X \in \Omega$. Для нее выполняется соотношение $\Delta H - c(X)H = -c(X)H \leq 0$, следовательно, H является c -суперфункцией в Ω . Но по построению $\varphi \in H(c, \Omega)$, значит, $|\varphi| \in SH(c, \Omega)$, и разность $|\varphi| - H$ оказывается c -субфункцией.

Далее, так как $|u| \leq 1$ и $|\varphi_h| \leq 1$, то $|\varphi(X)| \leq 2$ всюду в K_h . Однако мы показали, что $\lim_{X \rightarrow \xi} \varphi(X) = \lim_{X \rightarrow \xi} (u(X) - \varphi(X)) = 0$ при $\xi \in K$, а с другой стороны, $H(X) \geq 2$ на $\partial K_h \setminus E$ [14, с. 244]. Теперь из принципа максимума следует оценка $|\varphi(X)| \leq H(X)$ всюду в K_h , откуда $\lim_{X \rightarrow \xi} |\varphi(X)| \leq \lim_{X \rightarrow \xi} H(X) = 0$, $\xi \in K$, что влечет существование предела $\lim_{X \rightarrow \xi} u(X) = \lim_{X \rightarrow \xi} \varphi(X)$ для почти всех $\xi \in K$. ▼

Из леммы 1 и леммы [14, с. 242], которая от гармоничности или c -гармоничности не зависит, с помощью рассуждений, аналогичных случаю $c(X) = 0$, получаем следующий локальный вариант теоремы Фату для о.г.ф. При $c = 0$ этот результат принадлежит Кальдерону [14, гл. 7]. Напомним, что функция u называется нетангенциально ограниченной в точке $\xi \in E$, если $\sup |u(X)| < \infty$ для точек X из какого-нибудь усеченного конуса $\Gamma_\alpha^h(\xi)$.

Теорема 5. Пусть $c \in (E_1(\Omega))$ и $u \in H(c, \Omega)$. Если u нетангенциально ограничена в точках K , то она имеет нетангенциальные пределы почти для всех $\xi \in K$.

5. В заключение сделаем несколько замечаний. Аналогичные результаты справедливы для о.г.ф. в шаре. Далее вместо интегралов (2) можно рассмотреть интегралы

$$U(X) = \int_E k(X, y) f(y) dy, \quad (5)$$

где ядро K не связано, вообще говоря, с каким-либо дифференциальным оператором, и при некоторых предположениях относительно этого ядра изучить граничное поведение интегралов (5), обобщающих как интегралы (2), так и общие интегралы свертки, рассмотренные в [15]. Эти результаты будут опубликованы отдельно.

Список литературы: 1. Левин Б. Я., Хейфиц А. И. Асимптотическое поведение субфункций оператора Шредингера в n -мерном конусе // Докл. АН СССР, 1988. 301, № 3. С. 540—543. 2. Хейфиц А. И. Субфункции оператора Шредингера. Ч. 1. Ростов н/Д, 1988. 137 с. Деп. в ВИНТИ 19.10.88., № 7544 В88. 3. Stampacchia G. Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier. 1965. 15, № 1. P. 189—257. 4. Myrberg L. I. Über subelliptische Funktionen // Suomalais tied. toim. 1960. Ser. II, № 290. S. 1—9. 5. Dinghas A. Über einige Konvexitäts fragen bei partiellen Differential gleichungen vom Sturmschen typus // Math Ann. 1964. 155, № 5 S. 397—427. 6. Herve R.-M., Herve M. Les fonctions surharmoniques associées à un operateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier. 1969. 19, № 1. P. 305—359. 7. Maeda F.-Y. Boundary value problems for the equation $\Delta u - qu = 0$ with respect to an ideal boundary // J. Sci. Hiroshima Univ. 1968. Ser. A. Div. 1. 32, № 1. P. 85—146. 8. Maeda F.-Y. On regularity of boundary points for Dirichlet problems of the equation $\Delta u = qu$ ($q > 0$) // Hiroshima Math. J. 1971. 1, № 2. P. 373—404. 9. Хейфиц А. И. Субфункции оператора Шредингера. Ч. 2. Ростов н/Д, 1989. 42 с. Деп. в ВИНТИ 09.01.89, № 199-В89. 10. Руссаковский А. М. Об асимптотическом поведении субфункций оператора Шредингера конечного нижнего порядка // Сиб. мат. журн. 1989. 30, № 4. С. 160—170. 11. Хейфиц А. И. Субфункции оператора Шредингера. Ч. 3. Ростов н/Д, 1990. 101 с. Деп. в ВИНТИ 26.06.90. 12. Хейфиц А. И. Канонические представления обобщенных субгармонических функций // Изв. вузов. Сер. Мат. 1990. № 2. С. 92—94. 13. Хейфиц А. И. Распределение значений и представления обобщенных субгармонических функций. Докл. АН СССР. 1990. 314, № 3. С. 568—572. 14. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с. 15. Fefferman C., Stein E. M. H^p -spaces of several variables // Acta Math. 1972, 129, № 3—4. P. 137—193.

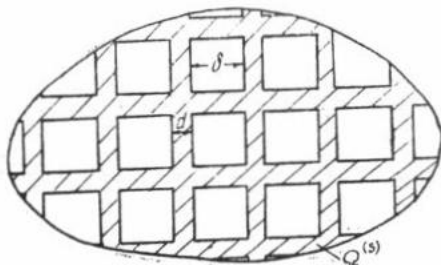
Поступила в редколлегию 08.10.90

БДК 517.946.9

Е. В. СВИЩЕВА

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ОБЛАСТЯХ МАЛОЙ МЕРЫ

1. Рассмотрим тонкую пластинку $\Omega^{(s)}$ (постоянной толщины, однородную, изотропную), принадлежащую ограниченной области Ω и состоящую из полосок ширины d , образующих периодическую квадратную решетку с периодом $d + \delta$ (рисунок). Будем считать, что при $s \rightarrow \infty$ толщина полосок уменьшается, а их густота увеличивается, причем $d = o(\delta)$. Предположим, что пластинка находится под действием вертикальных периодических во времени сил и



края ее свободны. Как известно, такая задача о колебаниях пластинки сводится к решению уравнения

$$\Delta^2 u^{(s)}(x, y) + \lambda^2 u^{(s)}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^{(s)}, \quad (1)$$

где $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, с граничными условиями [1]

$$-\frac{\partial \Delta u^{(s)}}{\partial n} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left(\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y} \right\} = 0; \quad (2)$$

$$\Delta u^{(s)} + (1 - \sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2} \right\} = 0, \\ (x, y) \in \partial \Omega^{(s)}.$$

Здесь θ — угол между осью x и нормалью к $\partial \Omega^{(s)}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial l}$ — производные по направлению нормали и касательной к границе $\partial \Omega^{(s)}$ соответственно. Будем считать, что коэффициент Пуассона $\sigma = 0$. Тогда, учитывая структуру области $\Omega^{(s)}$, можно записать граничные условия в следующем виде:

на вертикальных участках границы

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x^2} = 0, \quad 2 \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x^3} = 0;$$

на горизонтальных

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial y^2} = 0, \quad 2 \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial y^3} = 0; \quad (2')$$

в угловых точках границы

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ясно, что при больших s решение такой краевой задачи из-за сильной изрезанности области $\Omega^{(s)}$ представляет определенную трудность. Оказывается, однако, что при больших s данную краевую задачу можно заменить другой краевой задачей, но уже в более простой области Ω . А именно: асимптотика решения $u^{(s)}(x, y)$ задачи (1), (2') при больших s описывается краевой задачей

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \lambda^2 u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\ -\frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \cos \theta - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\} = 0; \\ \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega.$$

Доказательство этого факта проводится вариационным методом на основе исследования функционала

$$F(v) = \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|^2 + \lambda^2 |v|^2 - 2fv \right\} dx dy.$$

минимум которого на множестве функций $W_2^2(\Omega^{(s)})$ совпадает при достаточной гладкости $f(x, y)$ и $\partial\Omega^{(s)}$ с классическим решением задачи (2').

Сформулированный результат, касающийся задачи о колебании пластинки, может быть получен как следствие теоремы, справедливой для краевых задач более общего вида, исследование которых проводится в данной статье.

2. Пусть Ω — произвольная ограниченная область в R^n ($n \geq 2$), $\Omega^{(s)}$ — подмножество Ω , достаточно сильно изрезанное и измельченное. Предположим, что при $s \rightarrow \infty$ измельченность множества $\Omega^{(s)}$ увеличивается и при этом $\text{mes } \Omega^{(s)} \rightarrow 0$. В области $\Omega^{(s)}$ при каждом фиксированном s будем рассматривать краевую задачу

$$\int_{\Omega^{(s)}} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha u^{(s)}(x) D^\alpha v(x) + \lambda^2 u^{(s)}(x) v(x) \right\} dx = \int_{\Gamma^{(s)}} f^{(s)}(x) v(x) dx,$$

где $v(x)$ — произвольная функция из $W_2^m(\Omega^{(s)})$, $f^{(s)}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$, α — мультииндекс, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. При любом s существует единственное решение этой задачи, принадлежащее пространству $W_2^m(\Omega^{(s)})$. В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^{(s)}(x)$ при $s \rightarrow \infty$.

Введем необходимые определения. Пусть k — целое неотрицательное число.

Определение 1. Будем говорить, что функция $g(x)$, определенная на замкнутом множестве F , принадлежит классу $\text{Lip}(k, M, F)$, если она k раз непрерывно-дифференцируема и при этом для любых точек x и y , принадлежащих F , справедливы неравенства $|D^\alpha g(x)| \leq M$ ($|\alpha| \leq k$), $|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(y)| \leq M|x - y|$ ($|\alpha| = k$).

Определение 2. Будем говорить, что последовательность функций $\{u^{(s)}(x) \in W_2^k(\Omega^{(s)}), s = 1, 2, \dots\}$ сходится в $W_2^k(\Omega^{(s)})$ к функции $u(x) \in W_2^k(\Omega)$, если существует аппроксимирующая последовательность функций $\{u_M(x) \in \text{Lip}(k, C_M, \Omega), M = 1, 2, \dots\}$, сходящаяся к $u(x) \in W_2^k(\Omega)$ и такая, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{mes } \Omega^{(s)}} \|u^{(s)} - u_M\|_{W_2^k(\Omega^{(s)})}^2 = 0.$$

Определение 3. Будем говорить, что области $\Omega^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связности, если для любой последовательности функций $\{u^{(s)}(x) \in C^{2m}(\Omega^{(s)}), s = 1, 2, \dots\}$, удовлетворяющей условию $\|u^{(s)}\|_{W_2^{2m}(\Omega^{(s)})}^2 \leq C \text{mes } \Omega^{(s)}$, где C от s не зависит,

для любого M ($M = 1, 2, \dots$) существуют подмножества $\Omega_M^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$ и $G_M^{(s)} = \Omega^{(s)} \setminus \Omega_M^{(s)}$ такие, что 1) $u^{(s)}(x) \in \text{Lip}(m-1, M, \Omega_M^{(s)})$, и при

достаточно больших M , $s \geq \bar{s}(M)$ 2) $\text{mes } G_M^{(s)} = o\left(\frac{1}{M^2}\right) \text{mes } \Omega^{(s)}$;

3) $\|u^{(s)}\|_{W_2^{m-1}(G_M^{(s)})} = o(1) \text{mes } \Omega^{(s)}$.

Введем основную характеристику множества $\Omega^{(s)}$, описывающую его влияние на решение задачи (4). Пусть $K_h^0 = K(x^0, h)$ — куб с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и ребрами длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям. Обозначим через $\vec{R} = \{R_\mu\}_{|\mu|=m}$ совокупность вещественных чисел, занумерованных мультииндексом μ , $\vec{P}_0(x) = \{P_{0\mu}(x)\}_{|\mu|=m}$, где

$$P_{0\mu}(x) = \frac{1}{\mu!} (x - x^0)^\mu = \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} (x_1 - x_1^0)^{\mu_1} (x_2 - x_2^0)^{\mu_2} \dots (x_n - x_n^0)^{\mu_n}.$$

Положим

$$(R, P_0) = \sum_{|\mu|=m} R_\mu P_{0\mu}.$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \Phi_R(s, x^0, h) = \inf_{w^{(s)}} \int_{K_h^0 \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha w^{(s)}|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha (w^{(s)} - (\vec{R}, \vec{P}_0))|^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma > 0$, $a^{(s)} = \frac{1}{\text{mes } \Omega^{(s)}}$, а $\inf$ ищется в классе функций $W_2^m(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})$.

Очевидно, что функция $w_R^{(s)}$, минимизирующая (5), единственна и является решением некоторой линейной краевой задачи. Обозначим через $w_\eta^{(s)}$ функцию, минимизирующую (5), когда $\vec{R} = \{\delta_{\mu\eta}\}_{|\mu|=m}$, где $\delta_{\mu\eta}$ — символы Кронекера ($|\mu| = |\eta| = m$). Тогда из линейности соответствующей (5) краевой задачи получаем [2]

$$\Phi_R(s, x^0, h) = \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta} R_\eta R_\mu, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\mu\eta}(s, x^0, h) = \int_{K_h^0 \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^{(s)} D^\alpha w_\mu^{(s)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha (w_\eta^{(s)} - P_{0\eta})] [D^\alpha (w_\mu^{(s)} - P_{0\mu})] \right\} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Тензор $\{a_{\mu\eta}(s, x^0, h)\}_{|\mu|=|\eta|=m}$ и меру области $\Omega^{(s)} \cap K_h^0$ примем за основные количественные характеристики множества $\Omega^{(s)}$ в кубе K_h^0 . Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть последовательность областей $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет условию сильной связности в смысле определения 3 и в каждой точке $x \in \Omega$ выполняются условия:

$$1) \lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(K(x, h) \cap \Omega^{(s)})}{h^n \text{mes } \Omega^{(s)}} = b(x);$$

2) для некоторого $\gamma > 0$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{\mu\eta}(s, x, h)}{h^n} \lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{\mu\eta}(s, x, h)}{h^n} = a_{\mu\eta}(x),$$

где $b(x)$, $a_{\mu\eta}(x)$ — непрерывные в Ω функции, $b(x) > b_0 > 0$, $a_{\mu\eta}(x)$ — положительно определенная форма:

$$\sum_{|\eta|=|\mu|=m} a_{\mu\eta}(x) \xi_\eta \xi_\mu \geq a_0 \sum_{|\mu|=m} |\xi_\mu|^2, \quad a_0 > 0;$$

3) последовательность функций $f^{(s)}(x)$ сходится в $\hat{W}_2^0(\Omega^{(s)})$ к функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ в смысле определения 2.

Тогда решение $u^{(s)}(x)$ задачи 4 сходится в $\hat{W}_2^{m-1}(\Omega^{(s)})$ к функции $u(x)$, являющейся решением осредненной задачи

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta v(x) + \lambda^2 b(x) u(x) v(x) \right\} dx = \int_{\Omega} f(x) b(x) v(x) dx, \quad (8)$$

где $v(x)$ — произвольная функция из $W_2^m(\Omega)$.

3. Доказательство. Решение $u^{(s)}(x)$ задачи (4) минимизирует функционал

$$J(u^{(s)}) = \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha u^{(s)}|^2 + \lambda^{(s)} |u^{(s)}|^2 - 2f_1^{(s)} u^{(s)} \right\} dx, \quad (9)$$

где $\lambda^{(s)} = \frac{\lambda^2}{\text{mes } \Omega^{(s)}}$, $f_1^{(s)} = \frac{f^{(s)}(x)}{\text{mes } \Omega^{(s)}}$, в классе функций $W_2^m(\Omega^{(s)})$. Отсюда, учитывая, что $J(u^{(s)}) \leq J(0) = 0$, нетрудно получить неравенство $\|u^{(s)}\|_{W_2^m(\Omega^{(s)})}^2 \leq C \text{mes } \Omega^{(s)}$, где C от s не зависит.

Так как области $\Omega^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связности, согласно определению 3 $u^{(s)} \in \text{Lip}(m-1, M, \Omega_M^{(s)})$, а значит, по теореме Уитни [3] $u^{(s)}(x)$ можно продолжить с $\Omega_M^{(s)}$ на всю область Ω так, что продолжение $u_M^{(s)}$ удовлетворяет в Ω неравенствам

$$|D^\alpha u_M^{(s)}| \leq CM (|\alpha| \leq m-1), \quad |D^\alpha u_M^{(s)}(x) - D^\alpha u_M^{(s)}(y)| \leq CM |x - y| (|\alpha| = m-1),$$

где C от s и M не зависит. Применяя теорему Арцелла, убеждаемся, что $u_M^{(s)}$ сходятся к u_M в $C^{m-1}(\Omega)$ по некоторой подпоследовательности, причем $u_M \in \text{Lip}(m-1, CM, \Omega)$. Пользуясь определением 3 можно показать, что последовательность $\{u_M(x), M = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна в $W_2^{m-1}(\Omega)$, а значит, сходится в $W_2^{m-1}(\Omega)$ к некоторой

функции $u(x) \in W^{m-1}_2(\Omega)$. При этом последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ сходится по некоторой подпоследовательности к $u(x)$ в $\tilde{W}^{m-1}_2(\Omega)$ в смысле определения 2.

Покажем, что если выполняются условия теоремы, то $u(x)$ является решением задачи (8). Поскольку эта задача имеет единственное решение, отсюда будет следовать, что вся последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ сходится к $u(x)$ в $\tilde{W}^{m-1}_2(\Omega)$.

Покроем Ω кубами K_h^i с центрами в x^i , образующими пространственную периодическую решетку с периодом $h - r, r > 0, r = o(h)$. С данным покрытием стандартным образом свяжем разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}: 0 \leq \varphi_j(x) \leq 1, \varphi_j(x) = 0$ при $x \notin K_h^i, \varphi_j(x) = 1$ при $x \in K_h^i \setminus \bigcup_{i \neq j} K_h^i, \sum_j \varphi_j(x) \equiv 1, |D^\alpha \varphi_j| \leq Cr^{-|\alpha|} (|\alpha| \leq m)$.

Пусть $w(x)$ — произвольная функция из $C^{2m}(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$w^{(s)}(x) = w(x) + \sum_i \sum_{|\eta|=m} D^\eta w(x) [w_\eta^i(x) - P_{j\eta}(x)] \varphi_j(x), \quad (10)$$

где $P_{j\eta}(x) = \frac{1}{\eta!} (x - x^i)^\eta, w_\eta^i$ — функция, минимизирующая (5), когда K_h^i — куб $K(x^i, h) \equiv K_h^i$. Так как $w^{(s)} \in W_2^m(\Omega^{(s)})$, то $J(u^{(s)}) \leq J(w^{(s)})$.

Оценим правую часть неравенства. Из условия 2) теоремы аналогично [2] можно получить оценки, справедливые при достаточно больших s :

$$\int_{K_h^i \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha w_\eta^i|^2 dx = O(h^n) \text{mes } \Omega^{(s)} (|\alpha| = m); \quad (11)$$

$$\int_{K_h^i \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha (w_\eta^i - P_{j\eta})|^2 dx = O(h^{2(m-|\alpha|+\gamma)}) \text{mes } (K_h^i \cap \Omega^{(s)}) (|\alpha| \leq m-1); \quad (12)$$

$$\int_{(K_h^i \setminus K_{h_1}^i) \cap \Omega^{(s)}} |D^\alpha w_\eta^i|^2 dx = o(h^n) \text{mes } \Omega^{(s)} (|\alpha| = m), \quad (13)$$

где $K_{h_1}^i = K(x^i, h_1), h_1 = h - 2r, r = o(h)$. Подставляя $w^{(s)}(x)$ в функционал (9), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} J(w^{(s)}) = & \sum_i \sum_{|\mu|=|\eta|=m} \int_{K_h^i \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^i D^\alpha w_\mu^i D^\mu w_\alpha^i dx + \\ & + \int_{\Omega^{(s)}} \{\lambda^{(s)} w^2 - 2f_1^{(s)} w\} dx + \sum_i \sum_{|\mu|=|\eta|=m} \int_{K_h^i \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^i D^\alpha w_\mu^i \times \\ & \times D^\eta w D^\mu w (\varphi_j^2 - 1) dx + \sum_i \sum_{|\mu|=|\eta|=m} \sum_{i \neq j} \int_{K_h^i \cap K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^i \times \\ & \times D^\alpha w_\mu^j D^\eta w D^\mu w \varphi_j \varphi_i dx + E(s, h, r, w), \end{aligned} \quad (14)$$

где $E(s, h, r, w)$ — остальные слагаемые.

Для оценки $E(s, h, r, w)$ воспользуемся условиями 1) и 3) теоремы, оценками (11) и (12), а также тем, что суммирование по j идет от 1 до $N = O(h^{-n})$, а по i при фиксированном j — по пересекающимся с K_h^j кубами K_h^i , число которых не превышает 3^n . Получаем

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} |E(s, h, r, w)| = O\left(h^{m+\frac{\gamma}{2}}\right) + O(h^{2m+\gamma}) + O\left(h^{m-|\alpha^2|+\frac{\gamma}{2}}\right) r^{-|\alpha^2|} + \\ + O(h^{2(m-|\alpha^2|)-\gamma}) r^{-2|\alpha^2|}, \quad |\alpha^2| + |\alpha^3| \leq m, \quad h \rightarrow 0, \quad r = o(h).$$

Полагая $r = h^{1+\frac{\gamma_1}{2m}}$, где $0 < \gamma_1 < \gamma$, находим $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} |E(s, h, r, w)| = 0$.

Аналогично, с помощью оценки (13) получаем, что два последних слагаемых в (14) дают в пределе 0.

Так как

$$\sum_{|\eta|=|\mu|=m} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j D^\eta w D^\mu w dx \leq \\ \leq \sum_{\eta, \mu} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{\alpha} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^j D^\alpha w_\mu^j + \sum_{k=0}^{m-1} + \frac{h^{n+2(k-m)-\gamma}}{\text{mes}(K_h^j \cap \Omega^{(s)})} \times \right. \\ \times \sum_{|\alpha|=h} [D^\alpha(w_\mu^j - P_{j\mu})] [D^\alpha(w_\eta^j - P_{j\eta})] \Big\} D^\alpha w(x) D^\mu w(x) dx \leq \\ \leq \sum_{\eta, \mu} a_{\mu\eta}(s, x^j, h) D^\eta w(x^j) D^\mu w(x^j) + O(h^{n+1}),$$

то, воспользовавшись условиями теоремы, окончательно получаем из (14)

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} J(u^{(s)}) = I(w), \quad (15)$$

где

$$I(w) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta}(x) D^\eta w D^\mu w + \lambda^2 b(x) w^2 - 2f(x) b(x) w \right\} dx. \quad (16)$$

Так как класс $C^{2m}(\Omega)$ плотен в $W_2^m(\Omega)$, неравенству (15) удовлетворяет любая функция $w \in W_2^m(\Omega)$.

Ранее были построены функции $u_M^{(s)}$ и u_M такие, что

$$u_M^{(s)}(x) \xrightarrow{s=s_k \rightarrow \infty} u_M(x) \text{ в } C^{m-1}(\Omega), \\ u_M(x) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} u(x) \text{ в } W_2^{m-1}(\Omega), \\ u_M^{(s)}(x), u_M(x) \in \text{Lip}(m-1, CM, \Omega).$$

Покажем, что для построенной таким образом функции $u(x)$ справедливо обратное неравенство

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(u^{(s)}) \geq I(u), \quad (17)$$

а также $u(x) \in W_2^m(\Omega)$.

Построим функцию $u_M^e(x) \in C^\infty(\Omega)$, такую, что

$$\|u_M^e - u_M\|_{W_2^m(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Пользуясь условием 1) теоремы, можно построить последовательность бесконечно-дифференцируемых на Ω функций $w_M^{(se)}$, таких, что

$$\begin{aligned} w_M^{(se)}(x) &\xrightarrow{s=s_k \rightarrow \infty} u_M^e - u_M(x) \text{ в } C^{m-1}(\Omega); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lim_{s=s_k \rightarrow \infty} \int_{\Omega(s)} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha w_M^{(se)}|^2 dx &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем функцию $u_M^{(se)}$ по формуле

$$u_M^{(se)}(x) = u_M^{(s)}(x) + w_M^{(se)}(x).$$

Тогда $u_M^{(se)}(x) \xrightarrow{s=s_k \rightarrow \infty} u_M^e(x)$ в $C^{m-1}(\Omega)$. Покроем область Ω непересекающимися во внутренних точках кубами K_h^j с центрами x^j . В пересечении каждого из кубов с областью $\Omega^{(s)}$ рассмотрим функцию (для простоты полагаем $0 < \gamma < 2$)

$$v_M^{(sej)}(x) = u_M^{(se)}(x) - \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u_M^e(x^j) (x - x^j)^\alpha. \quad (20)$$

Для любого вектора $\vec{R} = \{R_\mu\}_{|\mu|=m}$ и целого неотрицательного $k \leq m-1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha (v_M^{(sej)}(x) - (\vec{R}, \vec{P}_j))|^2 dx &\leq 2 \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha (u_M^{(se)}(x) - \\ &- u_M^e(x))|^2 dx + 2 \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} \left| D^\alpha \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\beta!} D^\beta u_M^e(x^j) (x - x^j)^\beta + \right. \\ &\left. + \sum_{|\beta|=m+1} \frac{1}{\beta!} D^\beta u_M^e(\bar{x}^j) (x - \bar{x}^j)^\beta - (\vec{R}, \vec{P}_j) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Положим $R = \{D^\alpha u_M^e(x^j)\}_{|\alpha|=m}$ и воспользуемся тем, что $u_M^{(se)}(x) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} u_M^e$ в $C^{m-1}(\Omega)$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha (v_M^{(sej)} - (\vec{R}, \vec{P}_j))|^2 dx \leq O(h^{2(m+1-k)}) \text{mes}(K_h^j \cap \Omega^{(s)}),$$

откуда, воспользовавшись (6), (7), получаем

$$\begin{aligned} \int_{K_h^j \cap \Omega^{(s)}} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha v_M^{(sej)}|^2 dx &\geq \sum_{|\mu|=|\eta|=m} a_{\mu\eta}(s, x^j, h) D^\mu u_M^e(x^j) \times \\ &\times D^\eta u_M^e(x^j) + O(h^{n+2-\gamma}). \end{aligned}$$

Суммируем по f , используя (20):

$$J(u_M^{(se)}) \geq \sum_f \sum_{\mu, \eta} a_{\mu\eta}(s, x^f, h) D^\mu u_M^e(x^f) D^\eta u_M^e(x^f) + \\ + \int_{\Omega^{(s)}} (\lambda^{(s)} |u_M^{(se)}|^2 - 2f_1^{(s)} u_M^{(se)}) dx + O(h^{2-\gamma}).$$

Так как $u_M^{(se)} \xrightarrow{s=s_k \rightarrow \infty} u_M^e$ равномерно, то, переходя в полученном неравенстве к пределу по $s = s_k \rightarrow \infty$, а затем по $h \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(u_M^{(se)}) \geq I(u_M^e). \quad (21)$$

Перейдем к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$. Для перехода в правой части неравенства (21) заметим, что в силу ограниченности и положительной определенности тензора $\{a_{\mu\eta}(x)\}$, а также ограниченности снизу $b(x)$ справедливо представление

$$I(v) = \|v\|_{W_2^m(\Omega)}^{(1)2} - 2(bf, v)_{L_2(\Omega)}, \quad (22)$$

где $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}^{(1)}$ — норма, эквивалентная стандартной в $W_2^m(\Omega)$. Так как

$u_M^e \rightarrow u_M$ в $W_2^m(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (а следовательно, $u_M^e \rightarrow u_M$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), из (22) следует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(u_M^e) = I(u_M)$. Для перехода к пре-

делу по $\varepsilon \rightarrow 0$ в левой части (21) воспользуемся (18), (19), тем, что $u_M^e \in \text{Lip}(m-1, CM, \Omega)$, а также равномерной сходимостью $u_M^{(s)} \rightarrow u_M$, $u_M^{(s)}$ к u_M при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, после предельного перехода по $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве (21) получаем

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(u_M^{(s)}) \geq I(u_M). \quad (23)$$

Осуществим предельный переход по $M \rightarrow \infty$. Для перехода к пределу в левой части (23) воспользуемся тем, что $u_M^{(s)} = u^{(s)}$ на $\Omega^{(s)}$, и определением 3. Получаем

$$\lim_{s=s_k \rightarrow \infty} J(u^{(s)}) \geq \lim I(u_M). \quad (24)$$

Из данного неравенства следует, что $\|u_M\|_{W_2^m(\Omega)}^{(1)} \leq C$, а значит, из

$\{u_M\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^m(\Omega)$ к $\tilde{u}(x) \in W_2^m(\Omega)$, а следовательно, сильно в $W_2^{m-1}(\Omega)$. Но $u_M(x) \rightarrow u(x)$ в $W_2^{m-1}(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$. Поэтому в силу единственности предела $u(x) = \tilde{u}(x)$, откуда следует, что $u(x) \in W_2^m(\Omega)$ и $u_M(x) \rightarrow u(x)$ слабо в $W_2^m(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$. Так как для слабого предела последовательности справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega)}^{(1)} \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \|u_M\|_{W_2^m(\Omega)}^{(1)},$$

в силу (22)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(u_M) \geq I(u).$$

Таким образом, из (24) получили неравенство $\lim_{s \rightarrow \infty} J(u^{(s)}) \geq I(u)$,

которое вместе с (15) дает $I(u) \leq (\omega)$ для любой функции $\omega \in W_2^m(\Omega)$. Это значит, что функция $u(x)$ минимизирует функционал (16) в классе функций $W_2^m(\Omega)$, откуда следует, что $u(x)$ является решением задачи (8). Теорема доказана.

4. Рассмотрим типичный случай, когда удастся найти явное выражение для коэффициентов осредненного уравнения.

Пример. Вернемся к задаче о колебании тонкой пластинки, сформулированной в начале статьи. Согласно доказанной теореме для нахождения асимптотики решения $u^{(s)}(x, y)$ краевой задачи (1), (2') при больших s необходимо отыскать функцию $b(x, y)$ и тензор $\{a_{\mu\eta}(x, y)\}_{|\mu|=|\eta|=2}$.

Пусть K_h^0 — квадрат с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами длины h , ориентированными по координатным осям.

Так как

$$\begin{aligned} \text{mes } \Omega^{(s)} &\sim 2 \text{mes } \Omega \frac{d}{\delta} \text{ при } s \rightarrow \infty; \\ \text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)}) &\sim 2h^2 \frac{d}{\delta} \text{ при } s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

получаем $b(x, y) = \frac{1}{\text{mes } \Omega}$.

Для нахождения тензора $\{a_{\mu\eta}(x, y)\}$ нужно построить функции $\omega_\eta^{(s)}(x, y)$, где мультииндекс $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ принимает значения (2, 0), (0, 2) и (1, 1), минимизирующие функционал

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(s, x_0, y_0, h) &= \int_{K_h^0 \cap \Omega^{(s)}} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} |D^\alpha \omega_\eta^{(s)}|^2 + \frac{h^{-2-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times \right. \\ &\times \left| \omega_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right|^2 + \frac{h^{-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times \\ &\times \left| \nabla \left(\omega_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right) \right|^2 \Bigg\} dx \end{aligned} \quad (26)$$

в классе функций $W_2^2(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})$. Будем искать $\omega_\eta^{(s)}(x, y)$ в виде

$$\omega_\eta^{(s)}(x, y) = v_\eta^{(s)}(x, y) + u_\eta^{(s)}(x, y), \quad (27)$$

где $v_{(1,1)}^{(s)}(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$; $v_{(2,0)}^{(s)}(x, y)$ — разрывная функция, равная $\frac{1}{2}(x - x_0)^2$ в полосках, расположенных вдоль оси Ox , и $(x_i - x_0)x + \frac{1}{2}(x_0^2 - x_i^2)$ — в остальных участках i -й полоски, расположенной вдоль оси Oy , где x_i — абсцисса произвольной точки этой полоски; $v_{(0,2)}^{(s)}(x, y)$ — разрывная функция, равная $\frac{1}{2}(y - y_0)^2$ в полосках, расположенных вдоль оси Oy , и $(y_i - y_0)y + \frac{1}{2}(y_0^2 - y_i^2)$ —

остальных участках i -й полосы, расположенной вдоль оси Ox , где y_i — ордината произвольной точки этой полосы.

Подставляя (27) в функционал (26), получаем, что функции $v_\eta^{(s)}(x, y)$ должны минимизировать функционал

$$\begin{aligned} F_\eta(u_\eta^{(s)}) = & 2 \int_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha v_\eta^{(s)} D^\alpha u_\eta^{(s)} + \frac{h^{-2-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times \right. \\ & \times \left(v_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right) u_\eta^{(s)} + \frac{h^{-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times \\ & \times \nabla \left(v_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right) \nabla u_\eta^{(s)} \Big\} dx + \\ & + \int_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} |D^\alpha u_\eta^{(s)}|^2 + \frac{h^{-2-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} |u_\eta^{(s)}|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{h^{-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} |\nabla u_\eta^{(s)}|^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Omega_i^{(s)}$ — области непрерывности $v_\eta^{(s)}(x, y)$, а $\min$ ищется в классе функций $W_2^2(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})$ в случае $\eta = (1, 1)$, либо в классе функций, непрерывных вместе со своими нормальными производными в местах разрыва $v_\eta^{(s)}(x, y)$ и ее нормальной производной и компенсирующих эти разрывы. Непосредственно из вида функций $v_\eta^{(s)}(x, y)$ получаем, что при $s \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left| v_\eta^{(s)}(x, y) - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right| &= O(d^2); \\ \left| \nabla \left(v_\eta^{(s)}(x, y) - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right) \right| &= O(d). \end{aligned} \quad (29)$$

Пользуясь этими оценками, а также асимптотиками (25), можно показать, что добавки $u_\eta^{(s)}(x, y)$ малы, а именно

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} |D^\alpha u_\eta^{(s)}|^2 + \frac{h^{-2-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} |u_\eta^{(s)}|^2 + \right. \\ \left. + \frac{h^{-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} |\nabla u_\eta^{(s)}|^2 \right\} dx \leq O(h^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Вычислим коэффициенты $a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h)$ по формуле

$$\begin{aligned} a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h) = & \int_{\bigcup_i (K_h^0 \cap \Omega_i^{(s)})} \left\{ a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha w_\eta^{(s)} D^\alpha w_\mu^{(s)} + \frac{h^{-2-\gamma}}{\text{mes}(K_h^0 \cap \Omega^{(s)})} \times \right. \\ & \times \left[w_\eta^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right] \left[w_\mu^{(s)} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2} (x - x_0)^{\mu_1} (y - y_0)^{\mu_2} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{h^{-\gamma}}{\text{mes}(K_h^u \cap \Omega^{(s)})} \nabla \left(\omega_{\eta}^{(s)} - \frac{1}{\eta_1 \eta_2} (x - x_0)^{\eta_1} (y - y_0)^{\eta_2} \right) \times \\ \times \nabla \left(\omega_{\mu}^{(s)} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2} (x - x_0)^{\mu_1} (y - y_0)^{\mu_2} \right) dx.$$

Воспользовавшись (25), (29) и (30), получаем при $\epsilon \rightarrow \infty$

$$a_{\mu\eta}(s, x_0, y_0, h) = \int_{\bigcup_i (K_h^u \cap \Omega_i^{(s)})} a^{(s)} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^{\alpha} v_{\mu}^{(s)} D^{\alpha} v_{\eta}^{(s)} dx + o(h^2).$$

Из этой формулы, используя вид функций $v_{\eta}^{(s)}(x, y)$, находим

$$a_{\eta\eta}(x, y) = \frac{1}{2 \text{mes } \Omega} \text{ при } \eta = (2, 0), \eta = (0, 2);$$

$$a_{\eta\eta}(x, y) = \frac{2}{\text{mes } \Omega} \text{ при } \eta = (1, 1);$$

$$a_{\mu\eta}(x, y) = 0 \text{ при } \eta \neq \mu.$$

Коэффициенты осредненного уравнения найдены. Краевые условия получаем как естественные при варьировании функционала (16), рассматриваемого на множестве функций $W_2^3(\Omega)$, где $a_{\mu\eta}(x, y)$ и $b(x, y)$ — найденные выше функции.

Таким образом, приходим к краевой задаче (3).

Список литературы: 1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Теория упругости М., 1987. Т. 7. 248 с. 2. Хруслов Е. Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сборник. 1987. 106, № 4. С. 604—621. 3. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.

Поступила в редколлегию 05.08.91

УДК 517.948

БАЗА ХЕДИДЖА, Н. Я. ТИХОНЕНКО

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ. I

Настоящая работа посвящена обоснованию сходимости в различных функциональных пространствах метода приближенной факторизации (МПФ) решения нормального случая задачи Римана на вещественной оси $\mathbb{R}$.

$$K\Phi \equiv \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

а также установлению оценок скоростей сходимости приближенных решений задачи (1) к ее точным решениям. Здесь $G(t)$, $g(t)$ — известные функции, которые ниже подчиним вполне определенным условиям, а $\Phi^{\pm}(t)$ — краевые значения неизвестных функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскостях.

Как известно, к нахождению решений задачи Римана на R сводится широкий круг задач математической физики, теории упругости и теплопроводности, дифракции и излучения [1—6], уравнения типа свертки [7, 8].

Отметим, что теория задачи (1) при самых широких предположениях относительно ее коэффициентов построена в работах [7, 9]. Согласно этих работ решения задачи (1) выражаются через интегралы типа Коши, которые, как правило [10], точно не вычисляются. В связи с этим нахождение в явном виде факторизации коэффициента задачи (1) является по-существу не разрешимой задачей. При этом [10] лишь для некоторых классов функций их факторизация не вызывает особых затруднений. Таким свойством обладают, например, рациональные функции.

Идея МПФ состоит в приближении функции $G(t)$ рациональными функциями. Впервые этот метод применил Койтер В. Т. в работе [23], однако он не установил оценок погрешности приближенных решений задачи (1). В дальнейшем этот метод был развит в работах Черского Ю. И. и Тихоненко Н. Я. [11—15], которые установили оценки погрешности приближенных решений задачи (1) в различных функциональных пространствах. Однако и им не удалось установить сходимость приближенных решений задачи (1) к точным решениям. Отметим, что приближенному решению на R задачи (1) посвящен не широкий круг работ, среди которых отметим работы [16, 17], в которых при достаточно широких предположениях относительно гладкости функций $G(t)$, $g(t)$ обоснованы как прямые (методы коллокаций, редукции, наименьших квадратов) методы приближенного решения задачи (1), так и методы, основанные на приближенном вычислении интегралов типа Коши. Однако МПФ решения задачи (1) до настоящего времени не был обоснован.

1°. Пространства функций. Пусть $t \in R$. Тогда символом $C = C(R)$ обозначим пространство функций $f(t)$, непрерывных на R , и таких, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = a = \text{const}$. Норму в C введем обычным образом. Через $H_\alpha = H_\alpha(R)$, $0 < \alpha \leq 1$ обозначим пространство функций $f(t)$, удовлетворяющих на R условию Гельдера [18]:

$$|f(t+h) - f(t)| (1 + |t+h|)^\alpha (1 + |t|)^\alpha \leq Ah^\alpha, \quad \forall t \in R, \quad \forall h > 0,$$

где A, α — постоянные, $A > 0$.

Символами $L_1 = L_1(R)$ и $L_2 = L_2(R)$ обозначим соответственно пространства суммируемых или квадратично суммируемых на R функций $f(t)$ с обычной нормой. Через $L_{1\rho} = L_{1\rho}(R)$ и $L_{2\rho} = L_{2\rho}(R)$, где $\rho(t) = (1 + t^2)^{-1}$ — весовая функция, обозначим пространства функций $f(t)$, заданных на R и удовлетворяющих соответственно условиям

$$\int_R (1 + t^2)^{-1} |f(t)| dt < +\infty, \quad \int_R (1 + t^2)^{-1} |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

Норму в $L_{1\rho}$ и $L_{2\rho}$ также введем обычным образом.

2°. Оператор Фейера и некоторые его свойства. Пусть функция $f(t) \in L_1$, и пусть $\{\zeta_k\}$, $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ — система точек комплексной плоскости, среди которых могут встречаться и одинаковые. Тогда, согласно [19], оператор Фейера функции $f(t)$ определяется следующим образом:

$$F_{2n-2}(f, t) = \int_R f(\tau) k(t, \tau) d\tau / \int_R k(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $k(t, \tau) = \sin^2 [\Phi_n(\tau) - \Phi_n(t)]$ (3), а $\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^n \arg(\zeta_k - t)$ (4).

Справедливы [19, 20] такие представления

$$k(t, \tau) = -\frac{1}{4(\tau - t)^2} \prod_{k=1}^n \frac{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} - 1}{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} + 1} \cdot \frac{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} - 1}{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} + 1} - \prod_{k=1}^n \frac{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} - 1}{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} + 1} \cdot \frac{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} - 1}{\frac{\tau - t}{\zeta_k - t} + 1} - 2; \quad (5)$$

$$\int_R k(t, \tau) d\tau = \pi \Phi'_n(t) = \pi \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(t - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}. \quad (6)$$

Из (2)–(6) следует, что $F_{2n-2}(f, t)$ является рациональной функцией и имеет следующий вид:

$$F_{2n-2}(f, t) = \frac{P_{2n-2}(f, t)}{\prod_{k=1}^n [(t - \alpha_k)^2 + \beta_k^2]}, \quad (7)$$

где $P_{2n-2}(f, t)$ — многочлен степени $2n - 2$, однозначно определяемый функцией $f(t)$ и системой точек ζ_k , а $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = \overline{1, n-1}$, — нули функции $\Phi'_n(t)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Лемма 1. [19]. Пусть $f(t) \in H_\alpha$. Тогда при $0 < \alpha < 1$

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leq A \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{\pi}{(1+t^2) \Phi'_n(t)} \right]^\alpha,$$

а при $\alpha = 1$

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leq \frac{A\pi}{(1+t^2) \Phi'_n(t)} \{1 + \ln[(1+t^2) \Phi'_n(t)]\},$$

где A — постоянная Гельдера функции $f(t)$.

Обозначим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2}. \quad (8)$$

Тогда из неравенства $(1+t^2) \Phi'_n(t) \geq \sigma_n$ для всех $t \in R$ и леммы 1 следует

Лемма 2. [19]. Если $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, то последовательность $\{F_{2n-2}(f, t)\}$ равномерно сходится на R к функции $f(t)$. При этом справедлива оценка

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leq A \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\pi}{\sigma_n}\right)^\alpha.$$

Теорема 1. Если $f(t) \in H_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, то последовательность $F_{2n-2}(f, t)$ равномерно сходится на R к функции $f(t)$, при этом справедлива оценка

$$|f(t) - F_{2n-2}(f, t)| \leq A\pi(1 + \ln \sigma_n) \sigma_n^{-1}.$$

Доказательство теоремы следует из монотонности функции $u = (1 + \ln u)u^{-1}$ при $u \geq 1$. Тогда, положив $(1 + t^2) \Phi'_n(t) = u$ из монотонности $(1 + t^2) \Phi'_n(t) \geq \sigma_n$ для всех $t \in R$ легко получить требуемое.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(t) \neq 0$ и система точек такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Тогда, начиная с некоторого номера $F_{2n-2}(f, t) \neq 0$, $\text{ind } F_{2n-2}(f, t) = \text{ind } f(t)$, где $\kappa = \text{ind } f(t)$ — индекс функции $f(t)$ по Коши.

Доказательство этого утверждения следует из равномерной сходимости на R последовательности $\{F_{2n-2}(f, t)\}$ к функции $f(t)$.

Из построения функции $F_{2n-2}(f, t)$ следует, что она имеет комплексно сопряженные полюса в комплексной плоскости. Из теоремы 2 следует, что функции $F_{2n-2}(f, t)$ при достаточно больших n имеют лишь комплексные корни. Более того, при $\kappa > 0$ $F_{2n-2}(f, t)$ имеет в D^+ на 2κ нулей больше, чем в D^- . Если же $\kappa < 0$, то $F_{2n-2}(f, t)$ имеет в D^+ на $2|\kappa|$ нулей меньше, чем в D^- . Если же $\kappa = 0$, то $F_{2n-2}(f, t)$ имеет одинаковое число нулей в D^+ и D^- .

Теорема 3. Справедливы оценки

$$\|F_{2n-2}(f, t)\|_{C \rightarrow C} = \|F_{2n-2}(f, t)\|_{H_\alpha \rightarrow C} = 1; \quad (9)$$

$$\|F_{2n-2}(f, t)\|_{C \rightarrow L_{2p}} = \|F_{2n-2}(f, t)\|_{H_\alpha \rightarrow L_{2p}} = \sqrt[n]{\pi}; \quad (10)$$

$$\|F_{2n-2}(f, t)\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq \sqrt[n]{\pi}, \quad \|F_{2n-2}(f, t)\|_{L_1 \rightarrow L_{2p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k}\right)^{1/2}. \quad (11)$$

Доказательство. Согласно определению функции $\Phi_n(t)$ следует, что ядро $k(t, \tau)$, определенное равенством (3), является неотрицательной функцией, т. е. $k(t, \tau) = |k(t, \tau)|$. Кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow t} k(t, \tau) = \sup_{\tau} k(t, \tau) = [\Phi'_n(t)]^2; \quad (12)$$

$$0 < \max_t \Phi'_n(t) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k}. \quad (13)$$

Оценки (9) элементарны и следуют из того, что функция $k(t, \tau)$ неотрицательна, а $F_{2n-2}(1, t) \equiv 1$. Первая из оценок (10) следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|F_{2n-2}(f, t)\|_{L_{2\rho}}^2 &= \int_R \left| \frac{\int_R f(\tau) k(t, \tau) d\tau}{\int_R k(t, \tau) d\tau} \right|^2 \frac{dt}{1+t^2} \leq \\ &\leq \int_R \frac{\left(\int_R f(\tau) k(t, \tau) d\tau \right)^2}{\left(\int_R k(t, \tau) d\tau \right)^2} \frac{dt}{1+t^2} \leq \pi \|f(t)\|_C^2 \end{aligned}$$

и из того, что $F_{2n-2}(1, t) \equiv 1$. Вторая из оценок (10) следует из первой. Пусть теперь $f(t) \in L_2$. Докажем справедливость первой из оценок (11). Очевидно, что

$$\begin{aligned} |F_{2n-2}(f, t)|^2 &\leq \frac{\left(\int_R |f(\tau)| k^{1/2}(t, \tau) k^{1/2}(t, \tau) d\tau \right)^2}{\left(\int_R k(t, \tau) d\tau \right)^2} \leq \\ &\leq \frac{\int_R |f(\tau)|^2 k(t, \tau) d\tau}{\int_R k(t, \tau) d\tau} \leq \frac{\sup_\tau k(t, \tau) \int_R |f(\tau)|^2 d\tau}{\int_R k(t, \tau) d\tau} \leq \frac{1}{\pi} \Phi'_n(t) \|f(t)\|_{L_2}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|F_{2n-2}(f, t)\|_{L_2}^2 &\leq \frac{1}{\pi} \|f(t)\|_{L_2}^2 \sum_{k=1}^n \int_R \frac{dt}{(\alpha_k - t)^2 + \beta_k^2} = \\ &= 2i \|f(t)\|_{L_2}^2 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\zeta_k - \bar{\zeta}_k} = n \|f(t)\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Откуда и следует первая из оценок (11). Вторая из оценок (11) следует из цепочки неравенств (14) и оценок (12), (13).

Из теоремы 3 следует, что оператор Фейера действует ограниченным образом из пространств S, H_α в пространства S и $L_{2\rho}$. И при каждом фиксированном n он действует ограниченным образом из пространства $\bar{L}_2$ в пространства L_2 и $L_{2\rho}$.

Заметим, что в случае специального выбора точек $\zeta_k = i, k = \overline{1, n}$, $F_{2n-2}(f, t)$, $\Phi'_n(t)$, σ_n имеют наиболее простой вид. Именно

$$F_{2n-2}(f, t) = \frac{P_{2n-2}(f, t)}{(1+t^2)^{n-1}}, \quad \Phi'_n(t) = \frac{n}{1+t^2}, \quad \sigma_n = \frac{n}{2}. \quad (15)$$

При этом очевидно, что в этом случае имеет место наиболее высокая скорость сходимости функций $F_{2n-2}(f, t)$ к функции $f(t)$.

3°. Теорема об оценке погрешности. Пусть X, Y — линейные пространства и $K: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Обычно при нахождении решения уравнения

$$Kx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (16)$$

ищут приближенное в некотором смысле уравнение

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \tilde{y} \in \tilde{Y}, \quad (17)$$

считая, что его точное решение находится без особого труда, и точное решение уравнения (17) называют приближенным решением уравнения (16). Здесь $\tilde{X} \subseteq X$, $\tilde{Y} \subseteq Y$, а линейный оператор $\tilde{K}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

В дальнейшем будем строить такое уравнение (17), чтобы его точное решение $\tilde{x}$ обладало бы некоторыми известными свойствами решения уравнения (16) и было бы близким к нему в некотором смысле*. Это означает, что разность $x - \tilde{x}$ принадлежит пространству X_0 , более узкому, чем пространства X и $\tilde{X}$. Тогда пространство $\tilde{X}$ будем определять так, чтобы решения уравнения (17) обладали бы известными нам свойствами решений уравнения (16) и, кроме того, уравнения (16), (17) имели бы в пространстве X_0 единственное решение. Из этого следует, что разность $y - \tilde{y}$ принадлежит более узкому пространству Y_0 , чем пространства Y и $\tilde{Y}$.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$. При этом пространства X, Y и операторы $K, \tilde{K}$ подчиним следующим условиям:

1) уравнение (16) при данном $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, возможно, не единственное;

2) $\forall y \in Y$, при котором уравнение (16) разрешимо, $\exists \tilde{y} \in Y$ такой, что $y - \tilde{y} \in Y_0$ и уравнение (17) при этом $\tilde{y}$ имеет решение $\tilde{x} \in X$ также, возможно, не единственное. Здесь $Y_0 \subseteq Y$ — банахово пространство;

3) для любого решения x уравнения (16) $(K - \tilde{K})x \in Y_0$;

4) однородное уравнение (17) имеет в пространстве X m линейно независимых решений $\tilde{x}_{0j}$, $j = \overline{1, m}$. При этом определитель $(T_k, \tilde{x}_{0j}) \neq 0$, где T_k , $k = \overline{1, m}$, — система линейных функционалов, определенных на пространстве X ;

5) для любого $\varphi \in Y_0$ уравнение (17) имеет единственное решение в пространстве $\varphi \in X_0$, где X_0 — банахово пространство $X_0 \subseteq X$. При этом $(T_k, \varphi) = 0$, $k = \overline{1, m}$, и для любого $\varphi \in X_0$ $(K - \tilde{K})\varphi \in Y_0$;

6) оператор $K - \tilde{K}$ ограничен в следующем смысле $\|(K - \tilde{K})\varphi\|_{Y_0} \leq \|K - \tilde{K}\| \|\varphi\|_{X_0}$;

7) оператор $\tilde{K}^{-1}$ также ограничен: $\|\tilde{K}^{-1}\varphi\|_{X_0} \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \|\varphi\|_{Y_0}$;

8) $\|K - \tilde{K}\| \|\tilde{K}^{-1}\| < 1$.

* Во многих случаях из структуры оператора K можно установить некоторые свойства решений уравнения (16). Например, если уравнение (16) представляет собой задачу Римана, то согласно [9, 21] можно дать асимптотику ее решений в точках разрыва коэффициентов. Или если $\kappa = \text{ind } G(t) > 0$, то исчезающие на бесконечности решения задачи Римана зависят от κ произвольных постоянных. Можно привести и ряд других примеров.

теорема 4. Пусть выполнены условия 1)–8) и x^* — фиксированное решение уравнения (16). Если $\bar{x}^*$ такое решение уравнения (17), что $(T_k, x^*) = (T_k, \bar{x}^*)$, $k = \overline{1, m}$, то $x^* - \bar{x}^* \in X_0$ и справедлива оценка погрешности

$$\|x^* - \bar{x}^*\|_{X_0} \leq \delta \|K\bar{x}^* \bar{y}\|_{Y_0}, \quad (18)$$

где

$$\delta = \|\bar{K}^{-1}\| \|1 - \|\bar{K}^{-1}\| \|K - \bar{K}\|^{-1}. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть x^* — фиксированное решение уравнения (16), соответствующее данному $y \in Y$. Тогда на основании условия 2) $\bar{y} \in Y$ такой, что $y - \bar{y} \in Y_0$ и уравнение (25) разрешимо в пространстве X . Пусть среди решений уравнения (17) существует такой элемент $\bar{x}^*$, что $(T_k, x^*) = (T_k, \bar{x}^*)$, $k = \overline{1, m}$. Покажем, что $x^* - \bar{x}^* \in X_0$. Для этого рассмотрим уравнение $\bar{K}(x^* - \bar{x}) = \psi$ (20), где $\psi = y - \bar{y} - (K - \bar{K})x^* \in Y_0$ на основании условий 2) и 3). Тогда уравнение (20) в пространстве X имеет решение $x^* - \bar{x} = \varphi + \sum_{j=1}^m c_j \bar{x}_{0j}$, где $\varphi \in X_0$, c_j — произвольные постоянные, а $\bar{x}_{0j}$ — линейно независимые решения однородного уравнения (17). В частности, для $\bar{x}^*$ будет справедливо $x^* - \bar{x}^* = \varphi + \sum_{j=1}^m c_j^* \bar{x}_{0j}$. Так как $(T_k, x^*) = (T_k, \bar{x}^*)$, $(T_k, \varphi) = 0$, $k = \overline{1, m}$, и определитель $(T_k, \bar{x}_{0j}) \neq 0$, то $c_j^* = 0$, $j = \overline{1, m}$, следовательно, $x^* - \bar{x}^* \in X_0$.

Оценив по норме пространства X_0 равенство

$$x^* - \bar{x}^* = \bar{K}^{-1}(\bar{y} - K\bar{x}^*) - \bar{K}^{-1}(K - \bar{K})(x^* - \bar{x}^*),$$

получим оценку (18), которой без особого труда можно придать следующий вид:

$$\|x^* - \bar{x}^*\|_{X_0} \leq \delta [\|(K - \bar{K})\bar{x}^*\|_{Y_0} + \|y - \bar{y}\|_{Y_0}]. \quad (21)$$

Используя результаты пп. 2° и 3°, приближенное решение задачи (1) будем находить путем точного решения задачи Римана

$$\bar{K}\bar{\Phi} \equiv \bar{\Phi}^*(t) - \bar{G}(t)\bar{\Phi}^-(t) = \bar{g}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

где $\bar{G}(t)$, $\bar{g}(t)$ — известные рациональные функции, аппроксимирующие функции $G(t)$ и $g(t)$ соответственно. Как известно [9, 11], в этом случае решения задачи (22) находятся путем простых вычислений на основании теории вычетов.

В дальнейшем будем предполагать, что $G(t) \neq 0$, $G(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и $\kappa = \text{ind } G(t)$.

4°. МПФ в С. Пусть $g(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\kappa \geq -1$ и, кроме того, в окрестности бесконечно удаленной точки справедливы разложения

$$G(t) = 1 + \frac{g_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_v}{t^v} + \gamma_1(t); \quad (23)$$

$$g(t) = b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots + \frac{b_v}{t^v} + \gamma_2(t), \quad (24)$$

где $\nu \geq \kappa + 1$, а $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\nu \gamma_k(t) = 0$, $k = 1, 2$. При этом решения задачи

(1) разыскиваем в классе ограниченных на бесконечности функций.

Выберем теперь в комплексной плоскости систему точек $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, и положим при $\kappa = -1$

$\tilde{G}(t) = F_{2n-2}(G, t)$, $\tilde{g}(t) = F_{2n-2}(g, t)$, а при $\kappa \geq 0$ функции $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ будем искать соответственно в виде*

$$\tilde{G}(t) = \frac{P_{2n-2}(G, t)}{\prod_{k=1}^{n-1} [(t - \tilde{\alpha}_k)^2 + \tilde{\beta}_k^2]}, \quad \tilde{g}(t) = \frac{P_{2n-2}(g, t)}{\prod_{k=1}^{n-1} [(t - \tilde{\alpha}_k)^2 + \tilde{\beta}_k^2]}, \quad (25)$$

где $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$ определяются в соответствии с (7).

Считая, что n достаточно велико, $\kappa + 1$ коэффициент многочленов $P_{2n-2}(G, t)$ и $P_{2n-2}(g, t)$ определим из удовлетворения функциями $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ соответственно условий (23), (24), а остальную часть их коэффициентов определим из достижения

$$\min_{P_{2n-2}} \|G(t) - \tilde{G}(t)\|_C, \quad \min_{P_{2n-2}} \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_C. \quad (27)$$

Согласно [22] многочлены $P_{2n-2}(G, t)$ и $P_{2n-2}(g, t)$ существуют, единственны и справедливы оценки

$$\|G(t) - \tilde{G}(t)\|_C \leq d_1 \|G(t) - F_{2n-2}(G, t)\|_C; \quad (28)$$

$$\|g(t) - \tilde{g}(t)\|_C \leq d_2 \|g(t) - F_{2n-2}(g, t)\|_C. \quad (29)$$

Здесь и далее ниже d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n . Ясно, что при достаточно больших n $G(t) \neq 0$, $\text{ind } \tilde{G}(t) = \kappa$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\kappa+1} [G(t) - \tilde{G}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\kappa+1} [g(t) - \tilde{g}(t)] = 0.$$

Покажем теперь, что решения задачи (22) с построенными таким образом функциями $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ сходятся к решению задачи (1). Для этого проверим выполнимость условий теоремы 4.

1. В качестве пространства X возьмем множество вектор-функций $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, $\Phi^\pm(t) \in C$, а в качестве пространства Y возьмем множество функций из C , удовлетворяющих условию (24). Тогда при данных предположениях относительно функций $G(t)$ и $g(t)$ задача (1) разрешима при $\kappa \geq -1$ [7, 9] и ее решения имеют вид $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, где

$$\Phi^+(t) = \chi^+(t) \left[\Psi^+(t) + \frac{P_\kappa(t)}{(t+i)^\kappa} \right]; \quad (30)$$

$$\Phi^-(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^\kappa \chi^-(t) \left[\Psi^-(t) + \frac{P_\kappa(t)}{(t+i)^\kappa} \right]; \quad (31)$$

$$\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)} = \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\kappa} G(t), \quad \Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{\chi^+(t)}, \quad (32)$$

* Как правило, на практике полагают $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$. Тогда функции $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ в соответствии с (15) ищут соответственно в виде

$$\tilde{G}(t) = \frac{P_{2n-2}(G, t)}{(1+t^2)^{n-1}}, \quad \tilde{g}(t) = \frac{P_{2n-2}(g, t)}{(1+t^2)^{n-1}}. \quad (26)$$

а $P_{\kappa}(t)$ — произвольный многочлен степени κ , если $\kappa \geq 0$; $P_{\kappa}(t) \equiv 0$ при $\kappa = -1$.

Зафиксировав коэффициенты многочлена $P_{\kappa}(t) = \sum_{k=0}^{\kappa} c_k t^{\kappa-k}$, т. е. положив $c_k = c_k^*$, получим фиксированное решение $\Phi_*(t) = \{\Phi_*(t), \Phi_*^-(t)\}$ задачи (1). Отметим, что при $\kappa = -1$ задача (1) имеет единственное решение.

2. В качестве пространства Y_0 возьмем пространство функций $\psi(t) \in Y$ таких, что $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\kappa+1} \psi(t) = 0$. При этом $\|\psi(t)\|_{Y_0} = \|\psi(t)\|_C$. Тогда на основании (25)–(29) и леммы 2 существует элемент $\tilde{g}(t) \in Y$ такой, что $g(t) - \tilde{g}(t) \in Y_0$. При этом $\tilde{g}(t)$ имеет вид (25) или (26), а на основании леммы 2

$$\|g(t) - \tilde{g}(t)\|_{Y_0} = \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_C \leq d_3 \sigma_n^{-\alpha}, \quad (33)$$

где σ_n определяется по формуле (8) или (15).

Так как функция $\tilde{G}(t)$ определена в соответствии с (25)–(28), то задача (22) разрешима, и ее решения имеют вид $\tilde{\Phi}(t) = \{\tilde{\Phi}^+(t), \tilde{\Phi}^-(t)\}$, где

$$\tilde{\Phi}^+(t) = \tilde{\chi}^+(t) \left[\tilde{\Psi}^+(t) + \frac{\tilde{P}_{\kappa}(t)}{(t+i)^{\kappa}} \right]; \quad (34)$$

$$\tilde{\Phi}^-(t) = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{\kappa} \tilde{\chi}^-(t) \left[\tilde{\Psi}^-(t) + \frac{\tilde{P}_{\kappa}(t)}{(t+i)^{\kappa}} \right]; \quad (35)$$

$$\frac{\tilde{\chi}^+(t)}{\tilde{\chi}^-(t)} = \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\kappa} \tilde{G}(t), \quad \tilde{\Psi}^+(t) - \tilde{\Psi}^-(t) = \frac{\tilde{g}(t)}{\tilde{\chi}^+(t)}, \quad (36)$$

а $\tilde{P}_{\kappa}(t)$ — произвольный многочлен степени κ , если $\kappa \geq 0$; $\tilde{P}_{\kappa}(t) \equiv 0$, если $\kappa = -1$.

Заметим, что функции $\tilde{\chi}^{\pm}(t)$, $\tilde{\Psi}^{\pm}(t)$ находятся без особого труда, поскольку функции $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ рациональные.

3. Пусть $\Phi(t)$ — произвольное решение задачи (1). Тогда $(K - \tilde{K})\Phi \equiv [G(t) - \tilde{G}(t)]\Phi^-(t) \in Y_0$ в силу того, что $\Phi^-(t) \in C$ и главные части разложений на бесконечности функций $G(t)$ и $\tilde{G}(t)$ совпадают.

4. Однородная задача (22) при $\kappa \geq 0$ имеет $\kappa + 1$ линейно независимое решение $\tilde{\Phi}_j(t) = \{\Phi_j^+(t), \Phi_j^-(t)\}$, где

$$\tilde{\Phi}_j^+(t) = \tilde{\chi}^+(t) \frac{t^j}{(t+i)^{\kappa}}, \quad \tilde{\Phi}_j^-(t) = \tilde{\chi}^-(t) \frac{t^j}{(t-i)^{\kappa}}, \quad j = \overline{0, \kappa}. \quad (37)$$

Если же $\kappa = -1$, то однородная задача (30) имеет лишь тривиальное решение.

Согласно [15] в силу разложений (23), (24) и способа определения функций $\tilde{G}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на бесконечности имеют место следующие разложения

$$\chi^{\pm}(t) = \alpha_0^{\pm} + \frac{\alpha_1^{\pm}}{t} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{t^2} + \dots + \frac{\alpha_v^{\pm}}{t^v} + \gamma_1^{\pm}(t), \quad (38)$$

$$\bar{\chi}^{\pm}(t) = \alpha_0^{\pm} + \frac{\alpha_1^{\pm}}{t} + \frac{\alpha_2^{\pm}}{t^2} + \dots + \frac{\alpha_v^{\pm}}{t^v} + \bar{\gamma}_2^{\pm}(t), \quad (39)$$

$$\Psi^{\pm}(t) = \beta_0^{\pm} + \frac{\beta_1^{\pm}}{t} + \frac{\beta_2^{\pm}}{t^2} + \dots + \frac{\beta_v^{\pm}}{t^v} + \gamma_2^{\pm}(t), \quad (40)$$

$$\bar{\Psi}^{\pm}(t) = \beta_0^{\pm} + \frac{\beta_1^{\pm}}{t} + \frac{\beta_2^{\pm}}{t^2} + \dots + \frac{\beta_v^{\pm}}{t^v} + \bar{\gamma}^{\pm}(t), \quad (41)$$

где $\alpha_0^{\pm} = 1$, $v \geq \kappa + 1$, а $\lim_{t \rightarrow \infty} t^v \gamma_k^{\pm}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^v \bar{\gamma}_k^{\pm}(t) = 0$, $k = 1, 2$.

Тогда систему функционалов $T_k^{\pm}$, $k = 0, \kappa$ в пространстве X определим следующим образом:

$$(T_k^{\pm}, \Phi^{\pm}) = 0, \quad (T_k^{\pm}, \Phi^{\pm}) = \sum_{s=0}^k \alpha_s^{\pm} (\beta_s^{\pm} + c_s). \quad (42)$$

Известно, что в силу разложений (38)–(41) существует такое решение $\tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) = \{\tilde{\Phi}_*^{+}(t), \tilde{\Phi}_*^{-}(t)\}$ задачи (22), что $(T_k^{\pm}, \Phi_*^{\pm}) = (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_*^{\pm})$, $(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_*^{\pm}) = (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_*^{\mp}) = 0$, $k = 1, \kappa$. Для этого необходимо положить $\tilde{\Phi}_*^{\pm}(t) = \sum_{k=0}^{\kappa} c_k^* t^{\kappa-k}$. Тогда на линейно независимых решениях (37) однородной задачи (22) функционалы $T_k^{\pm}$ принимают следующие значения:

$$(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\mp}) = 0; \quad (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm}) = \alpha_{j-k}, \quad j \leq k; \quad (T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm}) = 0, \quad j > k. \quad (43)$$

Известно, что определитель $|(T_k^{\pm}, \tilde{\Phi}_j^{\pm})| = 1$.

V. В качестве пространства X_0 возьмем пространство вектор-функций $\varphi(t) = \{\varphi^+(t); \varphi^-(t)\}$, $\varphi^{\pm}(t) \in C$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\kappa+1} \varphi^{\pm}(t) = 0$. При этом $\|\varphi(t)\|_{X_0} = \|\varphi^+(t)\|_C + \|\varphi^-(t)\|_C$. Тогда для любого $\psi(t) \in Y_0$ задача (22) в пространстве X_0 имеет единственное решение

$$\varphi(t) = \left\{ \bar{\chi}^+(t) \Omega^+(t); \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^{\kappa} \bar{\chi}^-(t) \Omega^-(t) \right\}, \quad (44)$$

где

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \frac{\psi(t)}{\chi^+(t)}. \quad (45)$$

Очевидно, что в силу определения функции $\tilde{G}(t)$ для любого $\varphi(t) \in X_0$ $(K - \tilde{K})\varphi \equiv [G(t) - \tilde{G}(t)]\varphi^-(t) \in Y_0$. При этом $(T_k^{\pm}, \varphi^{\pm}) = (T_k^{\pm}, \varphi^{\mp}) = 0$, $k = 0, \kappa$.

VI. Так как

$$\|(K - \tilde{K})\varphi\|_{Y_0} \leq \|G(t) - \tilde{G}(t)\|_C \|\varphi^-(t)\|_C,$$

то на основании оценки (28) и леммы 2 справедлива оценка

$$\|K - \tilde{K}\| \leq d_4 \sigma_n^{-\kappa}. \quad (46)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}^{-1}\psi\|_{X_0} &= \|\tilde{\chi}^+(t) \Omega^+(t)\|_C + \left\| \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^\kappa \tilde{\chi}^-(t) \Omega^-(t) \right\|_C \leq \\ &\leq \max_{+, -} \|\tilde{\chi}^\pm(t)\|_C [\|\Omega^+(t)\|_C + \|\Omega^-(t)\|_C], \end{aligned}$$

то в силу (45) и совпадения пространства X_0 с пространством W , изученным в [16], в котором норма оператора Коши равна единице, получим оценку

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \left\| \frac{1}{\tilde{\chi}^+(t)} \right\|_{C, +, -} \max_{+, -} \|\chi^\pm(t)\|_C. \quad (47)$$

VIII. Потребуем теперь, чтобы произведение правых частей неравенств (46) и (47) было бы меньше единицы. Это достигается при достаточно больших n , так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$.

Отметим, что при $\kappa = -1$ $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, и для обоснования МПФ в C в этом случае достаточно проведения оценок (46) и (47) и выполнения неравенства $\|K - \tilde{K}\| \|\tilde{K}^{-1}\| < 1$. Таким образом доказана

Теорема 5. Пусть $G(t), g(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $G(t) \neq 0$, $\kappa \geq -1$ и справедливы разложения (23), (24), а $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, — такая система точек, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)—(36) и имеет место следующая оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (1) к ее некоторому фиксированному решению

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_C \leq d_5 \sigma_n^{-\alpha}. \quad (48)$$

Заметим, что если $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$, то в условиях теоремы 5 имеет место следующая оценка

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_C \leq d_6 n^{-\alpha}. \quad (49)$$

Если же $G(t), g(t) \in H_1$, то оценки (47) и (48) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} \|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_C &\leq d_7 \sigma_n^{-1} \ln \sigma_n, \\ \|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_C &\leq d_8 n^{-1} \ln n. \end{aligned}$$

5°. МПФ в $L_{2\rho}$. Пусть $g(t) \in L_{2\rho}$, $\kappa \geq -1$ и справедливы представления (23), (24).

1. Положим $Y = L_{2\rho}$, а в качестве пространства X возьмем пространство вектор-функций $\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$, $\Phi^\pm(t) \in L_{2\rho}$. Тогда, согласно [7, 9], задача (1) разрешима при всех $g(t) \in Y$ и ее решения, определяя формулами (30)—(32), принадлежат пространству X . Зафиксировав коэффициенты многочлена $P_\kappa(t)$, получим фиксированное решение $\Phi_*^\pm(t)$ задачи (1).

II. В качестве пространства Y_0 возьмем пространство функций $\varphi(t) \in Y$ и таких, что

$$(t^2 + 1)^{\frac{\kappa+1}{2}} \psi(t) \in L_{2p}, \quad \|\psi(t)\|_{Y_0} = \|\psi(t)\|_{L_{2p}}.$$

Пусть $g(t) \in Y$. Тогда функцию $\tilde{g}(t)$ ищем в виде (25) или (26). При этом $\kappa + 1$ коэффициент многочлена $P_{2n-2}(g, t)$ определяем из условия совпадения главных частей разложений функций $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ на бесконечности, а остальные коэффициенты многочлена $P_{2n-2}(g, t)$ определяем из условия достижения

$$\min_{P_{2n-2}} \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_{L_{2p}}.$$

Согласно [22] многочлен $P_{2n-2}(g, t)$ существует и единственен. Функцию $\tilde{G}(t)$ определяем в соответствии с (25)–(28). Тогда задача (22) разрешима и ее решение имеет вид (34)–(36).

III. Пусть $\Phi(t)$ — произвольное решение задачи (1). Тогда

$$(K - \tilde{K})\Phi \equiv [G(t) - \tilde{G}(t)]\Phi^-(t) \in Y_0$$

в силу совпадения на бесконечности главных частей разложений функций $G(t)$ и $\tilde{G}(t)$.

IV. Однородная задача (22) при $\kappa \geq 0$ имеет $\kappa + 1$ линейно независимое решение (37). Если же $\kappa = -1$, то она имеет лишь тривиальное решение. В соответствии с (38)–(41) систему линейных функционалов $T_k^\pm$ определим соотношениями (42), где c_k имеют смысл п. 4°. Тогда существует такое фиксированное решение $\Phi_*(t)$ задачи (22), что $(T_k^\pm, \Phi_*) = (T_k^\pm, \tilde{\Phi}_*)$, $(T_k^\pm, \Phi_*^\mp) = (T_k^\pm, \tilde{\Phi}_*^\mp) = 0$. На решениях (37) однородной задачи (22) система линейных функционалов $T_k^\pm$, $k = \overline{0, \kappa}$, примет значения (43). Тогда определитель $|(T_k^\pm, \tilde{\Phi}_i^\pm)| = 1$.

V. В качестве пространства возьмем пространство вектор-функций

$$\varphi(t) = \{\varphi^+(t), \varphi^-(t)\}, \quad \varphi^\pm(t) \in L_{2p}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 1)^{\frac{\kappa+1}{2}} \varphi^\pm(t) = 0.$$

При этом $\|\varphi(t)\|_{X_0} = \|\varphi^+(t)\|_{L_{2p}} + \|\varphi^-(t)\|_{L_{2p}}$. Тогда для любого $\psi(t) \in Y_0$ задача (22) разрешима, ее решение принадлежит пространству X_0 и имеет вид (43). Ясно, что в силу определения функции $\tilde{G}(t)$ для любого $\varphi(t) \in X_0$ $(K - \tilde{K})\varphi \equiv [G(t) - \tilde{G}(t)]\varphi^-(t) \in Y_0$ и $(T_k^\pm, \varphi^\pm) = (T_k^\pm, \varphi^\mp) = 0$.

VI. Так как

$$\|(K - \tilde{K})\varphi\|_{L_{2p}}^2 \leq \int_R |G(t) - \tilde{G}(t)|^2 |\varphi^-(t)|^2 \frac{dt}{1+t^2} \leq d_0 \sigma_n^{-2\alpha} \|\varphi(t)\|_{X_0},$$

то норма оператора $K - \tilde{K}$ оценивается неравенством (45).

VII. Легко видеть, что

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \left\| \frac{1}{\tilde{\chi}^+(t)} \right\|_C [\|\tilde{\chi}^+(t)\|_C + \|\tilde{\chi}^-(t)\|_C]. \quad (50)$$

VIII. Потребуем, чтобы произведение правых частей неравенств (50) и (46) было бы меньше единицы. Это можно сделать при достаточно больших n , так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$.

Теорема 6. Пусть $G(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $G(t) \neq 0$, $\kappa \geq -1$, $g(t) \in L_{2\rho}$ и справедливы разложения (23), (24), а $\xi_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, — такая система точек, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)—(36) и имеет место следующая оценка погрешности приближенных решений задачи (1):

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_{2\rho}} \leq \delta [d_{10}\sigma_n^{-\alpha} + \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_{L_{2\rho}}], \quad (51)$$

где δ определяется по формуле (19) с учетом (46) и (50).

Отметим, что если $g(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то оценка (51) примет вид

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_{2\rho}} \leq \alpha_{11}\sigma_n^{-\alpha}. \quad (52)$$

Если же $z_k = i$, $k = \overline{1, n}$, то оценка (52) будет следующей:

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_{2\rho}} \leq d_{12}n^{-\alpha}.$$

Если же $G(t), g(t) \in H_1$, то оценки (52) и (53) примут соответственно вид

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_{2\rho}} \leq d_{13}\sigma_n^{-1} \ln \sigma_n,$$

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_{2\rho}} \leq d_{14}n^{-1} \ln n.$$

6°. МПФ в L_2 . Пусть $g(t) \in L_2$, $\kappa \geq 0$ и справедливы представления (23), (24), причем $b_0 = 0$ и $\nu \geq \kappa$. Чтобы обосновать МПФ, в этом случае пространства X, Y, X_0, Y_0 определим следующим образом:

$$X = \{\Phi(t) : \Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}, \Phi^\pm(t) \in L_2, Y = L_2,$$

$$Y_0 = \{\psi(t) : \psi(t) \in L_2, (t^2 + 1)^{\frac{\kappa}{2}} \psi(t) \in L_2, \|\psi(t)\|_{Y_0} = \|\psi(t)\|_{L_2},$$

$$X_0 = \{\varphi(t) : \varphi(t) = \{\varphi^+(t), \varphi^-(t)\}, \varphi^\pm(t) \in L_2, (t^2 + 1)^{\frac{\kappa}{2}} \varphi^\pm(t) \in L_2,$$

$$\|\varphi(t)\|_{X_0} = \|\varphi^+(t)\|_{L_2} + \|\varphi^-(t)\|_{L_2}.$$

В этом случае функция $\tilde{G}(t)$ определяется в соответствии с (25)—(27), а функция $\tilde{g}(t)$ ищется в виде (25), где многочлен $P_{2n-2}(g, t)$ имеет степень $2n - 3$ и κ его коэффициентов определяются из условия совпадения главных частей разложений на бесконечности функций $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$, а остальные его коэффициенты определяются из условия достижения

$$\min_{P_{2n-3}} \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_{L_2}.$$

Тогда задачи (1) и (22) разрешимы и их решения имеют соответственно вид (30)—(32) и (34)—(36), где многочлены $P_\alpha(t)$ и $\tilde{P}_\kappa(t)$ необходимо заменить на многочлены $P_{\kappa-1}(t)$, $\tilde{P}_{\kappa-1}(t)$, если $\kappa > 0$. Если же $\kappa = 0$, то $P_{\kappa-1}(t) = \tilde{P}_{\kappa-1}(t) \equiv 0$. Однородная задача (22) имеет при

$\kappa > 0$ κ линейно независимое решение (37), где t^j необходимо заменить на t^{j-1} , а $j = \overline{1, \kappa}$. В силу предположений относительно функций $G(t)$, $g(t)$ и способа определения функций $\tilde{G}(t)$, $\tilde{g}(t)$ имеют представления (38)–(41), в которых $\beta_0^\pm = 0$, $v \geq \kappa$. Линейные функционалы $T_k^\pm$, $k = \overline{1, \kappa}$, определяются соотношениями

$$(T_k^\pm, \Phi^\pm) = \sum_{s=1}^k \alpha_{s-1}^\pm (\beta_s^\pm + c_s), \quad (T_k^\pm, \Phi^\mp) = 0, \quad k = \overline{1, \kappa}.$$

При данном определении функционалов $T_k^\pm$ определитель $|(T_k^\pm, \tilde{\Phi}_j^\pm)| = 1$. Операторы $K - \tilde{K}$ и $\tilde{K}^{-1}$ ограничиваются соответственно правыми частями неравенств (46) и (50).

Теорема 7. Пусть $G(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $G(t) \neq 0$, $\kappa > 0$, $g(t) \in L_2$ и справедливы представления (23), (24) с $b_0 = 0$; а система точек $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Тогда приближенные решения задачи (1) строятся по формулам (34)–(36) с $\tilde{P}_{\kappa-1}(t)$ и имеет место следующая оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (1) к ее некоторому фиксированному решению:

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_2} \leq \delta [d_{15} \sigma_n^{-\alpha} + \|g(t) - \tilde{g}(t)\|_{L_2}]. \quad (53)$$

Заметим, что если $g(t) \in H_\alpha \cap L_2$, $0 < \alpha < 1$, то оценка (53) имеет вид

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_2} \leq d_{16} \sigma_n^{-\alpha}. \quad (54)$$

Если же $\zeta_k = i$, $k = \overline{1, n}$, то оценка (54) будет следующей:

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_2} \leq d_{17} n^{-\alpha}. \quad (55)$$

Если же $G(t) \in H_1$, $g(t) \in H_1 \cap L_2$, то оценки (54) и (55) примут соответственно вид

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_2} \leq d_{18} \sigma_n^{-1} \ln \sigma_n,$$

$$\|\Phi_*^\pm(t) - \tilde{\Phi}_*^\pm(t)\|_{L_2} \leq d_{19} n^{-1} \ln n.$$

7°. Известно [7], что если функции $k_1(t)$, $k_2(t) \in L_1$ и такие, что их интегралы Фурье $K_1(t)$, $K_2(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, причем $1 + K_j(t) \neq 0$, $j = 1, 2$, а функции $\varphi(t)$, $h(t) \in L_2$, то уравнение

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_1(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = h(t), \quad t \in R \quad (56)$$

эквивалентно задаче Римана

$$\Phi^+(t) - \frac{1 + K_2(t)}{1 + K_1(t)} \Phi^-(t) = \frac{H(t)}{1 + K_1(t)}, \quad t \in R, \quad (57)$$

где $H(t)$, $\Phi^\pm(t)$ — преобразование Фурье соответственно функций $h(t)$, $\varphi_\pm(t)$, а $\varphi(t) = \varphi_+(t) - \varphi_-(t)$, где

$$\varphi_\pm(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \varphi_-(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0; \\ -\varphi(t), & t < 0. \end{cases}$$

Задача (57) играет роль задачи (1). Тогда приближенные решения задачи (57) строим посредством точного решения задачи (22), а приближенные решения уравнения (56) определяем по формуле

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [\tilde{\Phi}^+(\tau) - \tilde{\Phi}^-(\tau)] e^{i\tau t} d\tau.$$

При этом в силу равенства Парсеваля и теоремы 7 получим следующую оценку скорости сходимости приближенных решений уравнения (56) к его некоторому зафиксированному решению

$$\|\varphi_*(t) - \tilde{\varphi}_*(t)\|_{L_1} \leq d_{20} [\sigma_n^{-\alpha} + \|h(t) - \tilde{h}(t)\|_{L_1}].$$

Заметим, что по этой же схеме строятся приближенные решения уравнения Винера — Хопфа и «парного» уравнения [7].

Список литературы: 1. Бабенко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // П. ПММ. 1976. Т. 31, вып. 1. С. 80—89. 2. Нобль Б. Метод Винера — Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 344 с. 3. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев — Одесса: Вища школа, 1982. 168 с. 4. Попов Г. Я. К решению задач теории упругости методом факторизации // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 1. С. 178—183. 5. Попов Г. Я., Паскаленко А. А. Плоская задача об изгибе бесконечной балки на линейно деформируемом основании // ПММ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 178—183. 6. Черский Ю. И. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана // Тр. матем. ин-та АН грузССР. 1961. Т. 28. С. 209—246. 7. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с. 8. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3—120. 9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с. 10. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с. 11. Черский Ю. И. Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 2. С. 271—274. 12. Черский Ю. И. К решению смешанных задач для уравнений в частных производных // Диф. уравн. 1965. Т. 1, № 5. С. 647—662. 13. Черский Ю. И. Приближенное решение уравнения Винера — Хопфа в одном исключительном случае // Диф. уравн. 1966. Т. 2, № 8. С. 1093—1100. 14. Тихоненко Н. Я. К приближенному решению исключительного случая задачи Римана теории аналитических функций // Теория функций, функ. анализ и их прилож. 1970. Вып. 10. С. 27—35. 15. Тихоненко Н. Я. О методе приближенной факторизации // Изв. вузов. Матем. 1976. № 4. С. 74—86. 16. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968. 288 с. 17. Касьянов В. И. Рациональная аппроксимация интегралов типа Коши и приближенное решение задачи Римана для полуплоскости // Изв. вузов. Матем. 1981. № 11. С. 50—55. 18. Виноградова Г. Ю. Сингулярные интегральные операторы на оси с дробно-линейным сдвигом в пространствах с весом // Изв. вузов. Матем. 1979. № 3. С. 67—72. 19. Русак В. Н. Рациональные функции, как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979. 174 с. 20. Русак В. Н. Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси // Мат. замет. 1977. Т. 22, № 3. С. 375—380. 21. Светлой А. П., Тихоненко Н. Я. К приближенному решению краевой задачи Римана с разрывными коэффициентами и правой частью // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 2. С. 128—136. 22. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Дорохин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с. 23. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener — Hopf type integrale equations with applications, parts I, II // Konike. Ned. Akad. Weteushap. Proc. 1954. В 57. Р. 552—579.

РОСТ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть Λ — класс положительных последовательностей $\lambda = (\lambda_n)$, а $A(R)$ — класс аналитических в круге $\{z: |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Скажем, что $f \in A_\lambda(1)$, если $f \in A(1)$ и $|a_n| \leq |a_1| \lambda_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Допустим, что (n_p) — возрастающая последовательность натуральных чисел и $n_0 = 0$. В [1] доказано, что для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ и $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы $n_{p+1} - n_p = O(1)$ ($p \rightarrow \infty$), и необходимо, чтобы $\lim_{p \rightarrow \infty} (n_{p+1} - n_p) < +\infty$. Условие $n_{p+1} - n_p = O(1)$ ($p \rightarrow \infty$) можно ослабить, если наложить дополнительное требование на последовательность λ . Именно [1], для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\ln \lambda_n = O(n)$, $n \rightarrow \infty$, и каждой функции $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы $n_{p+1}/n_p \rightarrow 1$ ($p \rightarrow \infty$), и необходимо, чтобы $\lim_{p \rightarrow \infty} n_{p+1}/n_p = 1$.

Вместо того или другое достаточное условие выполненным, исследуем рост соответствующей целой функции.

Теорема 1. Пусть $\lambda \in \Lambda$, а $n_{p+1} - n_p = O(1)$ ($p \rightarrow \infty$). Положим $l = \max\{n_{p+1} - n_p: p \in \mathbb{Z}_+\}$ и $L = \max\{\lambda_n: 2 \leq n \leq l+1\}$. Если $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in A(\infty)$ и

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \{L(l+1)!\}^{p/n_p}, \quad (1)$$

где $M(r, f) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$.

Доказательство. В [1] доказано, что если $\lambda \in \Lambda$ и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и m , $1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$, имеет место неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leq |a_1| \frac{m! \lambda_m}{(n_p+m)!} \prod_{j=1}^p (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^p \lambda_{n_j - n_{j-1} + 1}, \quad (2)$$

Поскольку $n_j - n_{j-1} + 1 \leq l+1$ и $\lambda_{n_j - n_{j-1} + 1} \leq L$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то из (2) вытекает неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leq |a_1| \{L(l+1)!\}^{p+1} / (n_p+m)!$$

Используя формулу Адамара для нахождения величины типа целой функции, имеем

$$\sigma = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_p + m}{e} \sqrt[n_p + m]{|a_{n_p+m}|} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \{L(l+1)!\}^{\frac{p+1}{n_p+m}},$$

где $1 \leq m \leq l+1$, т. е. приходим к неравенству (1).

Покажем, что оценку (1), вообще говоря, улучшить нельзя. Допустим, что $n_p = p! (p \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{N})$, $\lambda_n \equiv L = (l+1)^l / (l+1)!$, $n \geq 2$, и рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+1)^{pl}}{(n_p+1)!} z^{n_p+1}.$$

Для этой функции по формуле Адамара имеем

$$\sigma = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (l+1)^{l p / n_p} = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \{L(l+1)!\}^{p/n_p},$$

и нам осталось показать, что $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Так как

$$f_1^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l+1)^{(p+k)l}}{(n_{p+k} - n_p + 1)!} z^{n_{p+k} - n_p + 1},$$

нам нужно доказать, что

$$(l+1)^{kl} \leq L(n_{p+k} - n_p + 1)! = (l+1)^l (kl+1)! / (l+1)!$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Последнее неравенство очевидно, если $k=1$, а для других $k \in \mathbb{N}$ легко доказывается методом математической индукции.

Из теоремы 1 вытекает, что если $n_{p+1} - n_p = O(1)$ ($p \rightarrow \infty$), то для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ следует, что порядок функции f не превышает 1. Если же $n_{p+1} - n_p \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$), $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in A(\infty)$, то порядок может быть большим единицы. Однако и в этом случае можно дать оценку для порядка.

Теорема 2. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\ln \lambda_n = 0(n)$ ($n \rightarrow \infty$), а $n_{p+1}/n_p \rightarrow 1$ ($p \rightarrow \infty$). Если $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in A(\infty)$ и

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r} \leq q = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln n_p}{\ln \frac{1}{n_p/n_{p-1} - 1}}. \quad (3)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 4 из [1] показано, что если $\lambda \in \Lambda$, $\ln \lambda_n = 0(n)$ ($n \rightarrow \infty$) и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, то для всех $p \in \mathbb{N}$ и m , $1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{n_p + m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geq \min \left\{ \ln n_p - \frac{C_p}{n_p}, \ln n_{p+1} - \frac{C_{p+1}}{n_{p+1}} \right\} + O(1) \quad (4)$$

при $p \rightarrow \infty$, где

$$C_p = \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}).$$

Так как $n_{p+1}/n_p \rightarrow 1$ ($p \rightarrow \infty$), то $\ln n_p \sim \ln(n_p + m) \sim \ln n_{p+1}$ ($p \rightarrow \infty$) для любого m , $1 \leq m \leq n_{p+1} - n_p + 1$. Поэтому, используя формулу Адамара для нахождения порядка ρ функции f , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(n_p + m) \ln (n_p + m)} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geq \\ &\geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{C_p}{n_p \ln n_p} \right) = \left(1 - \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{C_p}{n_p \ln n_p} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если теперь $q = +\infty$, то неравенство (3) очевидно. Если же $q < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $p \geq p_0(\varepsilon)$ имеем $\ln n_p \leq (q + \varepsilon) \ln \{1/(n_p/n_{p-1} - 1)\}$, т. е. $\ln(n_p - n_{p-1}) \leq \left(1 - \frac{1}{q + \varepsilon}\right) \ln n_p$. Поэтому

$$\begin{aligned} C_p &\leq \left(1 - \frac{1}{q + \varepsilon}\right) \ln n_p \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) + O(1) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{q + \varepsilon}\right) n_p \ln n_p + O(1) \quad (p \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) в силу произвольности ε легко получаем неравенство (3).

Покажем, что оценку (3), вообще говоря, улучшить нельзя. Так как $q \geq 1$ для любой возрастающей последовательности (n_p) натуральных чисел, а для случая $q = 1$ соответствующий пример функции f_1 первого порядка уже построен, будем считать, что $q > 1$.

Пусть $n_0 = 0$, $n_1 = 1$ и $n_p = n_{p-1} + [n_{p-1}^{1/q}]$, $p \geq 2$, а

$$f_2(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1}, \quad a_p = \exp \left\{ -\frac{1}{q} (n_p + 1) \ln (n_p + 1) \right\}.$$

По теореме Адамара функция f_2 имеет порядок $\rho = q$, и нам осталось показать, что $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и некоторой последовательности $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\ln \lambda_n = O(n)$ ($n \rightarrow \infty$). Поскольку

$$f_2^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n_{p+k} + 1)!}{(n_{p+k} - n_p + 1)!} a_{p+k} z^{n_{p+k} - n_p + 1},$$

нам нужно доказать, что

$$\frac{(n_{p+k} + 1)!}{(n_{p+k} - n_p + 1)! (n_p + 1)!} \frac{a_{p+k}}{a_p} \leq \lambda_{n_{p+k} - n_p + 1},$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\ln(n_{p+k} + 1)! + \ln a_{p+k} - \ln(n_p + 1)! - \ln a_p - \\ &- \ln(n_{p+k} - n_p + 1)! \leq M(n_{p+k} - n_p + 1) \end{aligned}$$

для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{N}$, где M — некоторая положительная постоянная. Используя формулу Стирлинга, нетрудно показать, что последнее неравенство выполняется, если

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) \{(n_{p+k} + 1) \ln(n_{p+k} + 1) - (n_p + 1) \ln(n_p + 1)\} -$$

$$- (n_{p+k} - n_p + 1) \ln(n_{p+k} - n_p + 1) - M(n_{p+k} - n_p + 1) \leq 0 \quad (6)$$

для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{N}$. Для $p = 0$ и $k \in \mathbb{N}$ неравенство (6) очевидно. Поэтому нам нужно его доказать для $p \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$.

На $[n_{p+1} + 1, \infty)$ рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) x \ln x - (x - n_p) \ln(x - n_p) - Mx$$

и покажем, что

$$\psi'(x) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln x - \ln(x - n_p) - M - 1/q < 0$$

при подходящем $M > 0$. Действительно, функция ψ' убывающая на $[n_{p+1} + 1, \infty)$ и

$$\begin{aligned} \psi'(n_{p+1} + 1) &= \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln(n_{p+1} + 1) - \ln([n_p^{1-1/q}] + 1) - \\ &- M - \frac{1}{q} \leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln \frac{n_{p+1}}{n_p} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln 2 - M - \\ &- \frac{1}{q} \leq 2 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln 2 - M - \frac{1}{q} < 0, \end{aligned}$$

если M достаточно большое.

Таким образом, функция ψ убывающая на $[n_{p+1} + 1, \infty)$, и нам достаточно доказать неравенство (6) для $k = 1$ и всех $p \in \mathbf{N}$. Но

$$\begin{aligned} (n_{p+1} + 1) \ln(n_{p+1} + 1) - (n_p + 1) \ln(n_p + 1) &\leq \\ \leq (n_{p+1} - n_p) (\ln n_{p+1} + 2) &\leq (n_{p+1} - n_p) (\ln n_p + 2 + \ln 2) \end{aligned}$$

и

$$(n_{p+1} - n_p + 1) \ln(n_{p+1} - n_p + 1) \geq (n_{p+1} - n_p) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln n_p.$$

Поэтому неравенство (6) выполняется для $k = 1$ и $p \in \mathbf{N}$, если только $(1 - 1/q)(2 + \ln 2) \leq M$.

Значит, если $\lambda_n = \exp\{(2 + \ln 2)n\}$, то $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \mathbf{Z}_+$, и точность оценки (3) доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 2 и $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} n_p \left(\frac{n_p}{n_{p-1}} - 1\right)^p < +\infty$, то $\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^p} < +\infty$. Действительно, в этом случае $n_p - n_{p-1} \leq d n_{p-1}^{1-1/p}$ ($p \in \mathbf{Z}_+$), $0 < d < \infty$, $C_p \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) n_p \ln n_p + n_p \ln d$, $\ln n_p - \frac{C_p}{n_p} \geq -\frac{1}{p} \ln n_p - \ln d$ и из (4), используя формулу Адамара для нахождения типа, имеем

$$\sigma = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{n_p + m}{e^p} |a_{n_p+m}|^{\frac{p}{n_p+m}} \leq K \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} < \infty,$$

где K — некоторая положительная постоянная.

Замечание 2. Теорему 2 можно перенести на случай обобщенного порядка $\rho_\alpha(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \alpha(\ln M(r, f)) / \beta(\ln r)$.

Пусть L^0 — класс положительных возрастающих к $+\infty$ непрерывно дифференцируемых на $[a, +\infty)$ функций α таких, что $\alpha(x(1 + o(1))) \sim \alpha(x)$ ($x \rightarrow +\infty$). Скажем, что $\alpha \in \Lambda^0$, если $\alpha \in L^0$ и $\alpha(cx) \sim$

$\sim \alpha(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) для каждого c , $0 < c < +\infty$. Известно [2], что если $\alpha \in \Lambda^0$, $\beta \in L^0$ и

$$\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d \ln x} = O(1) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad 0 < c < +\infty, \quad (7)$$

то

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n)/\beta\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right). \quad (8)$$

Обозначим теперь $q_{\alpha\beta} = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(n_p)/\beta(\ln \{1/(n_p/n_{p-1})\})$. Тогда, используя (4) и (9), нетрудно доказать следующее утверждение: если $\alpha \in \Lambda^0$, $\beta \in L^0$, выполнены условие (7) и условия теоремы 2, то $\rho_{\alpha\beta}(f) \leq q_{\alpha\beta}$.

Список литературы: 1. Гольдберг А. А., Шеремета М. Н. Об аналитическом продолжении на всю плоскость аналитических в круге функций // См. статью в настоящем сборнике. 2. Шеремета М. Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Сер. мат. 1967. № 2. С. 100—108.

Поступила в редколлегию 08.08.91

УДК 517.982.254+517.982.37

А. В. БРАТИЩЕВ

О КЕТЕ БАЗИСНОСТИ И ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФРЕШЕ С ОСЛАБЛЕННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

1. Пусть E — пространство Фреше с топологией v , задаваемой системой норм $\{p_s(\cdot)\}$, точнее, будем считать его проективным пределом банаховых пространств E_s с топологиями v_s , определяемыми нормами p_s , $E_{s+1} \hookrightarrow E_s$, $(E, v_s) = E_s$, $s = 1 \dots$

Обозначим (E'_s, v'_s) сопряженное с E_s банахово пространство E_s с сопряженной нормой p'_s , определяющей топологию v'_s . Очевидно, $E' = \bigcup_{s=1}^{\infty} E'_s$; если v' — топология индуктивного предела $\lim \text{ind } (E_s, v'_s)$, то $v' \geq \beta(E', E)$; семейства $\sigma(E', E)$ - и v' — ограниченных в E' множеств совпадают, и (E', v') — регулярный индуктивный предел [1] в силу теоремы Банаха—Штейнгауза.

Будем рассматривать на E еще топологию v_q проективного предела нормированных пространств (E_{q_s}, v_{q_s}) с непрерывными на (E, v) нормами q_s , $E_{q_{s+1}} \hookrightarrow E_{q_s}$, $s = 1, 2, \dots$

Пусть, наконец, $\{e_n\}$ — линейно независимая последовательность элементов в E , $W := \text{span } \{e_n\}$ — замыкание в (E, v) линейной оболочки $\{e_n\}$:

$$A_{q_s} := \{b := \{b_n\} : \|b\|_{q_s} := \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| q_s(e_n) < \infty\}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

$A_q := \lim_s \text{proj } A_{q_s}$ — пространство Кете с матрицей $(q_s(e_n))$. При условии

$$\forall s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_s(e_n)}{q_{s+1}(e_n)} < \infty \quad (1)$$

A_q становится ядерным рефлексивным пространством Фреше с сильным сопряженным

$$A'_q := \lim_s \text{ind } A'_{q_s}, \quad A'_{q_s} := \left\{ a = \{a_n\} : \|a\|_{q_s}' = \sup_n \frac{|a_n|}{q_s(e_n)} \right\}.$$

2. В работе [2] показано, что Кете регулярная базисность $\{e_n\}$ в W эквивалентна разрешимости проблемы моментов в сопряженном пространстве E' . В [3] установлено достаточное условие базисности системы элементов в ядерном пространстве. В [4] исследовались так называемые стягивающие (*shrinking*) базисы в E , когда из базисности $\{e_n\}$ в E следует базисность биортогональной с $\{e_n\}$ системы функционалов $\{t_n\}$ в E' . Следующие ниже теоремы этого пункта можно рассматривать как дальнейшее развитие этих исследований для пространств Фреше.

Теорема 1. Пусть E — пространство Фреше, $\{e_n, t_n\}$ — биортогональная система элементов в (E, E') , и $\{e_n\}$ удовлетворяет условию (1). Тогда равносильны следующие утверждения: 1) $\{e_n\}$ — q — Кете базис в W , т.е. $\forall x \in W \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, t_n \rangle e_n$ в (W, v_q) и

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall x \in W \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, t_n \rangle| q_s(e_n) \leq C_s p_{s_1}(x); \quad (2)$$

2) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов $\{t_n^s\} \subset E$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \exists s_1 \forall a \in A'_{q_s} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| p_{s_1}(t_n^s) \leq C_s \|a\|_{q_s}'; \quad (3)$$

3) проблема моментов

$$\langle e_n, t \rangle = a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

для каждой правой части $\{a_n\} \in A'_q$ разрешима в E' ; 4) для каждого s существует ограниченная в E' ортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$|\langle e_n, t_n^s \rangle| \geq q_s(e_n), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

5) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \exists s_1 \forall n \ q_s(e_n) p_{s_1}'(t_n^s) \leq C_s. \quad (6)$$

Доказательство. Пространство W' , сопряженное с $W = (W, \nu)$, алгебраически изоморфно E'/W^0 . По теореме Хана—Банаха о продолжении линейных форм имеем

$$\forall T \in W' \quad \forall s \quad p'_s(T) := \sup_{x \in W_s} \frac{|\langle x, T \rangle|}{p'_s(x)} = \inf \{p'_s(t) : t \in T \cap E'_s\},$$

где

$$W_s = W \cap E_s.$$

Пусть имеет место утверждение 1). Определим оператор l на W по формуле $l(x) := \{\langle x, t_n \rangle\}$. Соотношение (2) эквивалентно его непрерывности в A_q . Из плотности $l(W)$ в A_q следует взаимная однозначность слабо непрерывного сопряженного $l' : A'_q \rightarrow W'$. Он сопоставляет каждой последовательности $\{a_n\} \in A'_q$ функционал $T \in W'$ со свойством $\langle e_n, T \rangle = a_n$. В частности, для $T_n := l'(\bar{e}_n)$, где $\bar{e}_n := \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, имеем $T_n|_W = t_n|_W$, $n = 1, 2, \dots$. Так как

$\{q_s(e_n) \bar{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в A'_q , то $\{q_s(e_n) T_n\}$ слабо ограничена в сопряженном W' , т. е.

$$\exists C_s > 0 \quad \exists s_1 \quad \forall n \quad q_s(e_n) p'_{s_1}(T_n) \leq C_s. \quad (7)$$

Выберем $t_n^s \in T_n$ так, чтобы $p'_{s_1}(t_n^s) \leq p'_{s_1}(T_n) + \frac{1}{q_s(e_n)}$. Отсюда и из (7) имеем $q_s(e_n) p'_{s_1}(t_n^s) \leq C_s + 1$, $n = 1, 2, \dots$, и с учетом (1) получаем (3).

Если выполнено 2), то для каждой $\{a_n\} \in A'_q$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n^s$ абсолютно сходится в банаховом пространстве $E'_s \subset E'$, и его сумма дает решение проблемы моментов для $\{a_n\}$.

Пусть имеет место утверждение 3). Оно позволяет определить взаимно однозначный линейный оператор $l_1 : A'_q \rightarrow W'$, сопоставляющий каждой $\{a_n\} \in A'_q$ функционал $T \in W'$ со свойством $\langle e_n, T \rangle = a_n$, $n = 1, 2, \dots$. Пространство W' , наделенное топологией Макки $\tau := \tau(W', W)$, является совершенно полным [5]. Пространство A'_q бочечно как индуктивный предел банаховых пространств. Область определения $D := \{x \in (W', \tau)' : W : x \circ l_1 \in A''_q\}$ сопряженного с l_1 оператора l'_1 тотальна (слабо плотна) в W , так как $\text{span}\{e_n\}$ слабо плотна в W , и $e_n \circ l_1 \equiv \bar{e}_n \in A''_q$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому по теореме 8.11.5 [5] оператор $l_1 : A'_q \rightarrow (W', \tau)$ непрерывен. Так как $\{q_s(e_n) \bar{e}_n\}$ ограничена в A'_q , то $T_n^s = l'(q_s(e_n) \bar{e}_n)$ ограничена в (W', τ) , и потому $\exists \exists C_s \quad \forall p'_s(T_n^s) \leq C_s$. Выделим $t_n^s \in T_n^s$ со свойством $p'_s(t_n^s) \leq p'_s(T_n^s) + 1$, $n = 1, 2, \dots, \{t_n^s\}$, как и $\{T_n^s\}$, ортогональна к $\{e_n\}$, и

$$|\langle e_n, t_n^s \rangle| = |\langle e_n, T_n^s \rangle| = q_s(e_n), \quad n = 1, \dots$$

Пусть последовательность $\{t_n^s\}$ удовлетворяет утверждению 4). В частности, $\exists s_1 \exists C_s > 0 \ p_{s_1}(t_n^s) \leq C, \forall n$. Тогда последовательность $\tilde{t}_n^s := \frac{t_n^s}{\langle e_n, t_n^s \rangle}$ биортогональна с $\{e_n\}$ и

$$q_s(e_n) p_{s_1}(\tilde{t}_n^s) = \frac{q_s(e_n)}{|\langle e_n, t_n^s \rangle|} p_{s_1}(t_n^s) \leq C_s, n = 1, 2, \dots$$

Пусть, наконец, имеет место утверждение 5). Образует семейство непрерывных из (W, v) в (W, v_q) операторов $\{S_N(\cdot)\}$, $S_N(x) := \sum_{n=1}^N \langle x, T_n \rangle e_n - x$ и докажем его равностепенную непрерывность.

Учитывая $p'_s(T_n) \leq p'_s(t_n^s)$, имеем

$$\forall T \{ (W, v_q)' \subset \{ T \{ (W, v)' : \{ \langle e_n T \rangle \} \{ A'_q \} \} \exists C_s > 0 \exists s_1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T \rangle| p_{s_1}(T_n) \leq \| \{ \langle e_n, T \rangle \} \|_{q_s} C_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_s(e_n)}{q_{s+1}(e_n)} < \infty$$

и потому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, T \rangle T_n$ сходится к T в топологии банахова про-

странства W'_{s_1} . Отсюда $\forall x \{ W \subset (W_s, v_s) \langle x, T \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n \rangle \langle e_n, T \rangle$

или иначе $\forall x \{ W \forall T \{ (W, v_q)' \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N(x), T \rangle = 0$. Следовательно, $\{S_N(\cdot)\}$ слабо поточечно ограничена в (W, v_q) . Так как (W, v) — пространство Фреше, по теореме Банаха—Штейнгауза $\{S_N(\cdot)\}$ равностепенно непрерывно.

Пусть теперь $x \in W, V$ — произвольная окрестность нуля в (W, v_q) , U — окрестность нуля в (W, v) такая, что $\forall N S_N(U) \subset V$, наконец, элемент $x_u \in \text{span}\{e_n\}$ такой, что $x - x_u \in U$. Так как $\forall N > N_x S_N(x_n) = 0$, то $\forall N > N_x S_N(x) = S_N(x - x_u) \in V$. Это означает, что $x =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n \rangle e_n$ в топологии v_q . Соотношение (2) очевидным образом вытекает из (1), (6).

Теорема доказана.

Если в теореме 1 отказаться от условия (1), то от нее «останется» такая

Теорема 2. Пусть E — пространство Фреше, $\{e_n, t_n\}$ — биортогональная система в (E, E') . Тогда верны следующие импликации: 1) $\Leftrightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 5), 4) $\Leftrightarrow$ 5).

Докажем лишь импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Из соображений предыдущей теоремы $l_1 : A'_q := \text{ind}_s A'_s \rightarrow (W', \tau)$ непрерывен. Поэтому сильно не-

прерывно сопряженное отображение $l'_1 : (W'', \beta) \rightarrow (\bigcap_{s=1}^{\infty} A''_{q_s}, \beta)$. Так как

$\forall n l'_1(e_n) = \tilde{e}_n$ и A_q непрерывно вложено в $(\bigcap_{s=1}^{\infty} A''_{q_s}, \beta)$, сужение

$l: \text{span}\{e_n\} \rightarrow A_0$ непрерывно. В свою очередь в силу полноты $\{e_n\}$ в W и отделимости, и полноты $A_0 l$ расширяется единственным образом до непрерывного отображения из W в $A_0 \cdot l = l_1|_W$ и $\forall x \in W \langle l_1 x, \tilde{e}_n \rangle = \langle l_1 x, e_n \rangle = \langle x, T_n \rangle$, т. е. для l имеет место соотношение (2). В свою очередь из последнего

$$\forall s \exists s_1, s_2 \exists C_{s_1}, C_{s_2} > 0 \forall x \in W \forall N;$$

$$q_s(S_N(x)) \leq \sum_{n=1}^N |\langle x, T_n \rangle| q_s(e_n) + q_s(x) \leq C_1 p_{s_1}(x) + C_2 p_{s_2}(x) \leq (C_1 + C_2) p_{s_2}(x).$$

Выбирая по любому $\varepsilon > 0$ $x_\varepsilon \in \text{span}\{e_n\}$ таким, что $p_{s_2}(x - x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{C_1 + C_2}$, и N_ε таким, что $\forall N > N_\varepsilon S_N(x_\varepsilon) = 0$, получаем сходимость

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n \rangle e_n$ к x в v_0 -топологии. Таким образом, имеет место

1). Теорема доказана.

Замечание. Эквивалентность 1) $\leftrightarrow$ 3) обобщает упомянутый выше результат из [2].

Следующие теоремы являются прямыми следствиями теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $\{e_n\}$ — линейно независимая последовательность элементов в пространстве Фреше E с топологией, задаваемой системой норм $\{p_s(\cdot)\}$ и

$$\forall s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_s(e_n)}{p_{s+1}(e_n)} < \infty. \quad (8)$$

Тогда равносильны следующие утверждения:

1) $\{e_n\}$ — Кете базис в W , т. е. каждый элемент единственным образом представим в виде суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) e_n$$

и

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall s \in W \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x)| p_s(e_n) \leq C_s p_{s_1}(x);$$

2) для каждого s существует биортогональная к $\{e_n\}$ последовательность функционалов t_n^s такая, что

$$\exists C_s > 0 \exists s_1 \forall a \in A_{p_s} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| p_{s_1}(t_n^s) \leq C_s \|a\|_{p_s}; \quad (9)$$

3) проблема моментов (4) разрешима в E' для каждой правой части из A_{p_s} ;

4) для каждого s существует ограниченная ортогональная к $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$|\langle e_n, t_n^s \rangle| \geq p_s(e_n), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (10)$$

5) для каждого s существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$ такая, что

$$\exists C_s > 0 \exists s_1 \forall n p_s(e_n) p'_{s_1}(t_n^s) \leq C_s. \quad (11)$$

Теорема 4. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно известно, что $\{e_n\}$ полна в E . Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) $\{e_n\}$ — q -Кете базис в E ;
- 2) $\{t_n\}$ удовлетворяет условию

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall a \{ A'_{q_s} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| p'_{s_1}(t_n) \leq C_s \|a\|_2^2;$$

3) проблема моментов (4) разрешима в E' для каждой правой части из A' ;

4) для каждого s существует ортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n^s\}$, удовлетворяющая соотношению (5);

$$5) \forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall n p_s(e_n) p'_{s_1}(t_n) \leq C_s.$$

Замечание. Данная теорема обобщает нашу теорему 1 из [7]. Ознакомление с рукописным вариантом последней статьи позволило Ю. Ф. Коробейнику сформулировать результаты, близкие к теореме 3 [8].

Теорема 5. Пусть $\{e_n\}$ — полная линейно независимая система в пространстве Фреше с топологией, задаваемой последовательностью норм $\{p_s\}$, удовлетворяющей условию (8). Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\{e_n\}$ — Кете базис в E ;
- 2) существует биортогональная с $\{e_n\}$ система функционалов t_n , и она образует сильный p' -Кете индуктивный базис в E' , т. е. $\{t_n\}$ -базис в $(E', \beta(E', E))$ и

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall t \{ E' \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, t \rangle| p'_{s_1}(t_n) \leq C_s \| \{ \langle e_n, t \rangle \} \|_s^s;$$

3) отображение $L, L(t) := \langle e_n, t \rangle$ является алгебраическим изоморфизмом E' на A'_p ;

4) существует биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность функционалов $\{t_n\}$ и

$$\forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall n p_s(e_n) p'_{s_1}(t_n) \leq C_s.$$

Замечание. В работе [9] в предположении ядерности E (вместо условия (8)) и наличия биортогональной системы доказано, что условие 1) (точнее, шаудеровская базисность $\{e_n\}$ в E) равносильна такому утверждению:

$$4') \forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall b \{ A_p \forall n |b_n| p_s(e_n) \leq C_s p_{s_1}(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k),$$

менее жесткому, чем 4).

3. С помощью доказанных теорем получим достаточные условия Кете базисности одной системы аналитических функционалов.

Пусть $\{u_s(z)\}$ — последовательность непрерывных субгармонических в S функций, удовлетворяющих условиям

$$a) \forall s \forall |z| > r_s \max_{|t-z| < 1} u_s(t) \leq u_{s+1}(z);$$

$$б) \exists \delta > 0 \forall |z| > r_{\delta, s} u_{s+1}(z) - u_s(z) \geq \delta \ln(1 + r^2), \quad r = |z|.$$

Положим

$$P_s = \left\{ f \in A(C) : r'_s(f) = \sup_{z \in C} \frac{|f(z)|}{\exp u_s(z)} < \infty \right\};$$

$$P = \lim_{\substack{\rightarrow \\ s}} \text{ind } P_s.$$

Очевидно, P является топологическим модулем над кольцом много-
членов. При дополнительном условии

$$в) \forall s \exists C_s > 0 \exists s_1 \forall |z| < \infty \quad 2u_s(z) \leq u_{s_1}(z) + C_s$$

P становится топологической алгеброй.

Лемма. Вложение $P_s \subset P_{s+1}$, $s = 1, 2, \dots$ вполне непрерывно. Это утверждение обобщает лемму 2 [10]. Поскольку доказательство аналогично, на нем останавливаться не будем. Из леммы следует, что P является LN^* — пространством, и значит отделимым, полным и рефлексивным.

Пусть E — пространство Фреше, и его сильно сопряженное (E', β) топологически изоморфно P . Отсюда следует, что (E', β) бочечно, и значит, $\beta = v'$ ([5], 8. 4.18).

Второе сопряженное E'' является пространством Фреше (проек-
тивным пределом банаховых пространств P'_s с точностью до изомор-
физма), содержащем E в качестве замкнутого топологического под-
пространства. Поскольку последовательности норм $\{P_s\}$ и $\{r'_s\}$ опре-
деляют одну и ту же топологию на E , из оценки (8) следует ана-
логичная оценка для $\{r'_s\}$:

$$\forall s \exists s_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'_s(e_n)}{r_{s_1}(e_n)} < \infty. \quad (12)$$

Фиксируем последовательность $\Lambda = \{\lambda_n, p_n\}$ комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ с соответствующими кратностями p_n и свойствами: $\dots |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| < \dots \rightarrow \infty$. Пусть сначала $\{u_s(z)\}$ удовлетворяет условиям а) — в), и существует последовательность попарно непересекающихся областей $D = \{D_m\}$ со спрямляемыми границами Γ_m , удовлетворяющая следующим условиям 1 — 6.

1. $\Lambda \subset D$.

Перенумеруем точки из $\Lambda \cap D_m$ и их кратности в порядке воз-
растания индексов

$$\mu_1^{(m)} (= 2n_m), \mu_2^{(m)}, \dots, \mu_{q_m}^{(m)};$$

$$r_1^{(m)} (= p_{n_m}), r_2^{(m)}, \dots, r_{q_m}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

2. $\forall s_1 \exists s_1, s_2 \exists C_{s_1}, C_{s_2} > 0$

$$\max_{z \in D_m} u_{s_1}(z) - C_{s_1} < \min_{z \in D_m} u_{s_2}(z) < \max_{z \in D_m} u_s(z) < \min_{z \in D_m} u_s(z) + C_{s_2}.$$

3. $\exists s_1, C > 0$ длина контура $\Gamma_m l(\Gamma_m) \leq \exp \{u_{s_1}(\lambda_{n_m}) + C_1\}$.

4. Положим

$$\omega_{i,j}^{(m)}(z) := \prod_{l=1}^{i-1} \left(\frac{z}{\mu_l^{(m)}} - 1 \right)^{r_l^{(m)}} \left(\frac{z}{\mu_j^{(m)}} - 1 \right)^j, \quad i = 1, \dots, q_m, \quad j = 1, \dots$$

$\dots, r_l^{(m)}$ и потребуем

$$\begin{aligned} \exists s_1, s_2 \exists C_1 C_2 > 0 \quad \forall m \quad \forall i \leq q_m \quad \forall j \leq r_i^m; \\ \exp \{-u_{s_1}(\lambda_{n_m}) - C_1\} \leq \min_{z \in \Gamma_m} |\omega_{ij}^{(m)}(z)| \leq \max_{z \in D_m} |\omega_{ij}^{(m)}(z)| \leq \\ \leq \exp \{u_{s_2}(\lambda_{n_m}) + C_2\}. \end{aligned}$$

5. В P существует последовательность функций $\{a_s(z)$, обращающихся в нуль на Λ и

$$\forall s \exists C \inf_{z \in \Gamma_m} |a_s(z)| \geq \exp \{u_s(\lambda_{n_m}) - C\}.$$

$$6. \quad \forall s \exists s_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q_m} r_i^{(m)} \exp \{u_s(\lambda_{n_m}) - u_{s_1}(\lambda_{n_m})\}.$$

Пусть теперь $\{u_s(z)$ удовлетворяет условиям а), б), а последовательность $D := \{D_m\}$, $\Lambda = \{\lambda_n, \rho_n\}$ — следующим условиям 1'—6'.
1'. $\Lambda \subset D$. 6': $= 6$.

$$\begin{aligned} 2'. \quad \forall s \geq 1 \exists C_1, C_2 > 0, \max_{z \in D_m} u_{s-1}(z) - C_1 \leq \\ \leq \min_{z \in D_m} u_s(z) \leq \max_{z \in D_m} u_s(z) \leq \min_{z \in D_m} u_{s+1}(z) + C_2. \end{aligned}$$

$$3'. \quad \forall s \geq 1 \exists C > 0 \quad l(\Gamma_m) \leq C \exp \{u_s(\lambda_{n_m}) - u_{s-1}(\lambda_{n_m})\}.$$

$$\begin{aligned} 4'. \quad \forall s \geq 1 \exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall m \quad \forall i \leq q_m \quad \forall j \leq r_i^m; \\ C_1 \exp \{u_{s-1}(\lambda_{n_m}) - u_s(\lambda_{n_m})\} \leq \min_{z \in \Gamma_m} |\omega_{ij}^{(m)}(z)| \leq \\ \leq \max_{z \in D_m} |\omega_{ij}^{(m)}(z)| \leq C_2 \exp \{u_{s+1}(\lambda_{n_m}) - u_s(\lambda_{n_m})\}. \end{aligned}$$

5'. В P существует последовательность функций $\{a_s(z)\}$, о б р а щ а ю щ и х с я в н у л ь н а Λ и $\forall s \exists C \inf |a_s(z)| \geq C \exp \{u_s(\lambda_{n_m})\}$.

Предположим, что δ -функции δ_t и все их производные принадлежат $E \subset P'$ и положим

$$\begin{aligned} e_{i,j}^{(m)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\delta_t dt}{\mu_i^{(m)} \omega_{i,j}^{(m)}(t)}, \quad a_{s,i,j}^{(m)}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{\omega_{i,j-1}^{(m)}(t) a_s(z)}{a_s(t) z - t} dt, \\ j \leq r_i^{(m)}, \quad i \leq q_m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, $\{e_{i,j}^{(m)}\} \subset E$, а $\{a_{s,i,j}^{(m)}(z)\} \subset P$. В работе [11] показано, что система $(e_{i,j}^{(m)}, a_{s,i,j}^{(m)}(z))$ биортогональна.

Теорема ф. Пусть последовательности $\{u_s(z)\}$, D , Λ удовлетворяют условиям а)—в), 1—6 или а)—б), 1'—6'. Тогда система

аналитических функционалов $\{e_{l,j}^{(m)}\}$ образует Кете базис в пространстве $W_\Lambda := \text{span} \{ \delta_{\lambda_{n_m}^{(l-1)}}^{(l-1)} \}_{l=1}^{p_n} \subset E$. W_Λ — топологически изоморфно ядерному пространству Кете

$$\tilde{A}_p := \{b := \{b_{l,j}^{(m)}\} : \forall s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)}| \exp \{u_s(\lambda_{n_m})\} < \infty\}$$

при отображении $l(e) := \{ \langle e, a_{s,l}^{(m)}(z) \rangle \}$.

Поскольку доказательства обоих утверждений сходны, ограничимся первым. Число точек (с учетом кратностей) из Λ , содержащихся в D_m , равно

$$n_\Lambda(D_m) \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{a'_1(t)}{a_1(t)} dt \leq C_2 \exp \{u_{s_2}(\lambda_{n_m})\} \quad (13)$$

$$r'_s(e_{l,j}^{(m)}) = \sup_{t \in P_s} \left| \frac{1}{2\pi i \mu_l^{(m)}} \int_{\Gamma_m} \frac{f(t)}{p_s(t)} \frac{dt}{\mu_{l,j}^{(m)}(t)} \right| \leq C_3 \exp \{u_{s_2}(\lambda_{n_m})\}.$$

Если $a_{s_0,l,j}^{(m)} \notin P_{s_a}$, то

$$r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z)) \leq \frac{l(\Gamma_m)}{2\pi} \frac{\max_{t \in D_m} |\omega_{l,j-1}^{(m)}(t)|}{\min_{t \in \Gamma_m} |a_{s_0}(t)|} \max \{ \exp \max_{z \in D_m + C(0,1)} \{u_{s_0}(z) - u_{s_1}(z)\}, \exp \{ \max_{z \in \Gamma(D_m + C(0,1))} u_{s_0}(z) - \min_{z \in D_m + C(0,1)} u_{s_1}(z) \} \}. \quad (14)$$

В последнем неравенстве модуль произведения первых двух сомножителей оценивается сверху $\leq C_4 \exp \{u_{s_1}(\lambda_{n_m}) - u_{s_0}(\lambda_{n_m})\}$. При фиксированном s_0 и достаточно большом s_1 третий сомножитель будет ≤ 1 . Отсюда, в частности,

$$r'_{s_1}(e_{l,j}^{(m)}) \geq \frac{|\langle e_{l,j}^{(m)}, a_{s_0,l,j}^{(m)}(z) \rangle|}{r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z))} \geq \frac{1}{C_4} \exp \{u_{s_0}(\lambda_{n_m}) - u_{s_1}(\lambda_{n_m})\}. \quad (15)$$

Соотношение (12) и изоморфизм пространств $\tilde{A}_p$,

$$A_p := \{b := \{b_{l,j}^{(m)}\} : \forall s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)}| r'_s(e_{l,j}^{(m)}) < \infty\}$$

следуют из оценок (13), (6), (15), а утверждение 5 теоремы 3 — из (13), (14). Теорема доказана.

Замечание 1. Предположим, что выполнены первая или вторая группы условий теоремы, и положим $\alpha_{l,j}^{(m)} := \prod_{k=1}^{l-1} \mu_k^{mr_k^{(m)}} \mu_l^{(m)j-1}$. Тогда утверждение 3 теоремы 2 разворачивается в такую задачу определения целой функции по ее заданным элементам [12, с. 215]: для каждой последовательности из

$$A'_p := \{b = \{b_{l,j}^{(m)}\} : \exists s \sup_m \frac{\max_{l \leq q_m} \max_{j \leq r_l^{(m)}} |b_{l,j}^{(m)}| \alpha_{l,j}^{(m)}}{\exp u_s(\lambda_{n_m})} < \infty\}$$

существует целая функция $f(z) \in P$, разделенные разности которой $\Delta_{l,j}^{(m)}(f) := [\underbrace{\mu_1^{(m)}, \dots, \mu_l^{(m)}}_{g_1^m}, \dots; \underbrace{\mu_l^{(m)}, \dots, \mu_i^{(m)}}_i]$ удовлетворяют соотно-

шениям

$$\Delta_{l,j}^{(m)}(f) = b_{l,j}^{(m)}, \quad j \leq r_l^{(m)}, \quad l \leq q_m, \quad m < \infty.$$

При этом решение задачи согласно утверждению 2 теоремы 3 записывается в виде суммы ряда

$$f(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_l^m} b_{l,j}^{(m)} a_{s,l,j}^{(m)}(z). \quad (16)$$

Пусть последовательность $a = \{a_{n,l}\}_{l=1}^{p_n} \in A_p$ обладает тем свойством, что построенная по a , и Λ последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\} \in A_p$. Тогда сумма соответствующего ряда (16) интерполирует $\{a_{n,l}\}$ на Λ

$$f^{(u-1)}(\lambda_n) = a_{n,l}, \quad l = 1, \dots, p_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Обратно, если $f(z) \in P$, то непосредственной оценкой интегрального представления разделенной разности убеждаемся, что $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(f)\} \in A_p$. Тем самым доказана

Теорема 7. Пусть Λ , D и $\{u_s(z)\}$ удовлетворяют одной из групп условий а)–в), 1)–6) или а)–6), 1')–6'). Для того чтобы интерполяционная задача (17) была разрешима в P для последовательности $a = \{a_{n,l}\}$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,j}^{(m)}(a)\} \in A_p$.

Замечание 2. В работе [13] доказана теорема существования базиса Шаудера в ядре системы сверточных операторов $T_{\mu_1}, \dots, T_{\mu_N}$ на E . При этом E' предполагается алгебраически изоморфным $D(N$ -пространству $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind } P_s$, весовые функции удовлетворяют условиям близким к а)–в), а система ассоциированных с $\{T_{\mu_l}\}$ функций $\{F_1, \dots, F_N\} \subset P$ медленно растущая, то есть удовлетворяет условиям, сходным с 1)–3), 5). Таким образом, при дополнительных условиях 4), 6), которые в конкретных классах нередко следуют из остальных, теорема 6 устанавливает явный вид базиса и биортогональной с ней системы.

4. В заключение остановимся на двух конкретных пространствах из введенных в предыдущем пункте классов. Пусть функция $h(r)$ логарифмически выпукла на $[0, \infty)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h(r)}{\ln r} = \infty$, $\exists M > 0$ $h(2r) < Mh(r)$ и $h(r) \equiv 0$ вблизи нуля. Известно [14], что

$$\forall r < \infty \forall \gamma \in (1, 2) h(\gamma r) \leq (1 + M^3(\gamma - 1)) h(r).$$

Положим сначала $u_s(z) := sh(r)$, $z := re^{i\theta}$, $s = 1, 2, \dots$ $\{u_s(z)\}$ удовлетворяет условиям а)–в). Обозначим $n_{\Lambda}(r) := n_{\Lambda}(C(0, 1)$ считающую функцию последовательности Λ и предположим

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h(r)} \int \frac{n_{\Lambda}(t)}{t} dt < \infty. \quad (18)$$

Согласно [15] существует целая функция $a(z)$ ($P_{s_0} \subset P$, $a(z) \neq 0$, имеющая в точках λ_n нули кратностей соответственно $\geq p_n$ $n = 1, 2, \dots$). По лемме 4 [16] плоскость можно разбить на концентрические кольца, а каждое кольцо конечным числом выходящих из начала координат лучей на усеченные секторы так, что на их границах имеет место равномерная по z оценка

$$\exists s \in C > 0 \quad \ln |a(z)| > -sh(r) - C.$$

Обозначим секторы, содержащие узлы из Λ , через D_m , $m = 1, 2, \dots$ в порядке возрастания наименьших индексов n_m содержащихся в них узлов. Диаметр D_m можно считать $< \delta |\lambda_{n_m}|$, $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, откуда следуют условия 2), 3) и оценка сверху для $|\omega_{l,j}^{(m)}(z)|$ в условии 4). Оценка снизу на Γ_m получается из соотношения

$$|\omega_{l,j}^{(m)}(z)| \geq |a(z)| \min_{|t - \lambda_{n_m}| = 2\delta |\lambda_{n_m}|} \frac{|\omega_{l,j}^{(m)}(t)|}{|a(t)|}$$

и условия (18).

Определим биортогональную с $\{e_{l,j}^{(m)}\}$ систему функций по формуле

$$a_{s,l,j}^{(m)}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{\omega_{l,j-1}^{(m)}(t) a(z) z^{m s}}{a(t) t^{m s} (z-t)} dt,$$

где $m_s := [s |\lambda_{n_m}| h'(|\lambda_{n_m}|)]$, $m = 1, 2, \dots$ и оценим их нормы

$$r_{s_1}(a_{s_0,l,j}^{(m)}(z)) \leq \frac{C \exp\{s_0 h(|\lambda_{n_m}|)\}}{|\lambda_{n_m}|^{m s_0}} \max \left\{ \frac{\max_{z \in \Gamma(D_m + C(0,1))} |a(z) z^{m s_0}|}{\min_{z \in D_m + C(0,1)} \{s_1 h(r)\}} \right\},$$

$$\max_{z \in D_m + C(0,1)} \frac{|a(z) z^{m s_0}|}{\exp\{s_1 h(r)\}} \leq C \max \{ \exp\{(s_3 - s_1) h(|\lambda_{n_m}|)\} \times$$

$$\exp\{(s_2 - s_0) h(|\lambda_{n_m}|)\} \max_{r>0} \{(s_a + s_0 - s_1) h(r)\} \}.$$

Далее рассуждаем, как в теореме 6.

Пусть теперь $h(r)$ та же:

$$h_1(r) := \int_0^r \int_0^t \frac{h(\tau)}{\tau} d\tau \frac{dt}{t}$$

$$\frac{\kappa^{-2}}{\rho^{-2}} := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_1(r)}{h(r)}$$

$0 \leq \kappa \leq \rho < \infty$ [13]. Пусть $\{G_s(\theta)\}$ — строго возрастающая последовательность ограниченных 2π -периодических $[\kappa, \rho]$ -тригонометрически

выпуклых (т. е. $\forall v \in \{x, p\}$ v — тригонометрически выпуклых) функций, $u_s(z) := G_s(\theta) h(r)$. Для $z_k := r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, $|z_1 - z_2| < \delta r_1$ имеем

$$\begin{aligned} |u_s(z_2) - u_s(z_1)| &\leq \max_{|z_1 - z_2| < \delta r_1} |G_s(\theta_2) - G_s(\theta_1)| h(r_1) + \\ &+ \max_{|z_1 - z_2| < \delta r_1} G_s(\theta_2) (h(r_2) - h(r_1)) \leq \omega(G_s, \arcsin \delta) h(r_1) + \\ &+ \sigma_s (h(r_2) - h(r_1)) \leq (\omega(G_s, \arcsin \delta) + \delta_s M^3 \delta) h(r_1), \end{aligned}$$

где $\omega(\cdot)$ — модуль непрерывности функции G_s , $\sigma_s = \max_{\theta \rightarrow \infty} G_s(\theta)$. Очевидно, это оценка равномерна по θ_1, θ_2 при $r_1 = |z_1| \rightarrow \infty$.

Пусть тройка последовательностей $\{G_s(\theta) h(r)\}$, $\Lambda := \{\lambda_n, p_n\}$, $D = \{D_m\}$ удовлетворяет условиям 1'), 2'), 5') и таким аналогам условий 3'), 4'):

$$\begin{aligned} \exists \delta < 1 \forall m > m_0: |\Gamma_m| < \delta |\lambda_{n_m}|, \quad \forall s \in C_1 > 0 \forall m, \\ \min_{z \in \Gamma_m} \{|\omega_{q_m}^{(m)}, r_{q_m}^{(m)}(z)|\} \geq C_1 \exp\{(G_s(\theta_{n_m}) - G_{s+1}(\theta_{n_m})) h(|\lambda_{n_m}|)\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из выше приведенной оценки легко следует выполнение условий а)–б), 1')–б') теоремы 6.

В частном случае, когда $\rho(r) := \frac{\ln h(r)}{\ln r}$ — уточненный порядок, условия 1)–б') удастся заменить более «геометрическими». В этом случае $x = \rho$ и $G_s(\theta) \rho$ — тригонометрически выпуклые функции. Функция $H(\theta) := \lim_{s \rightarrow \infty} G_s(\theta)$ — периодическая и полунепрерывная снизу.

Она ρ — тригонометрически выпукла на каждом отрезке множества $F_H := \{\theta: H(\theta) < \infty\}$, и длины отрезков, на которых $H(\theta) = \infty$, не меньше $\frac{\pi}{\rho}$ (доказательство получается переходом к пределу по s в фундаментальном соотношении для $G_s(\theta)$). Положим еще $\Delta_H(\theta) := \frac{1}{2\pi\rho} \left(H'(\theta - 0) - H'(\theta_0 + 0) + \rho^2 \int_{\theta_0}^{\theta} H(\varphi) d\varphi \right)$ на отрезках $[\theta_0, \theta] \subset F_H$.

Пусть $\Lambda := \{\lambda_n, p_n\}$ — последовательность с конечной максимальной угловой плотностью $D_\Lambda(\theta)$ относительно $\rho(r)$ (см. определение в [17]). Это условие эквивалентно существованию функции вполне регулярного роста $a(z)$, обращающейся в нуль на Λ , однако еще не обязательно $a(z) \in P$ хотя бы для одной такой функции. Поэтому потребуем согласованность Λ с P в том смысле, что $\Lambda_+(\theta) = D_\Lambda(\theta)$ не убывает на отрезках из F_H вне, возможно, счетного множества, и

$$\min \left\{ H(\theta) + H\left(\theta + \frac{\pi}{\rho}\right) - 2\pi \int_{\theta}^{\theta + \frac{\pi}{\rho}} \sin \rho\left(\psi + \frac{\pi}{\rho} - \varphi\right) dD_\Lambda(\varphi) \right\} > 0.$$

При этих условиях, как показано в [1], существует последовательность областей $D = \{D_m\}$ и последовательность функций $\{a_s(z)\} \subset P$ вполне регулярного роста, обладающая свойствами: 1") $\Lambda \subset D$, причем каждая $a_s(z)$ в каждом D_m не имеет других нулей кроме нулей кратности $= r_l^{(m)}$ в точках $\mu_l^{(m)}$, $l = 1, \dots, q_m$; 2") последовательность индикаторов $H_s(\theta)$ функций $a_s(z)$, $s = 1, 2, \dots$, строго возрастает и исчерпывает $H(\theta)$. 3") $l(\Gamma_m) = o(|\lambda_{n_m}|)$; 4") $\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 \forall z \in D \cap \omega_{\sigma_m}^{(m)} \cap \gamma_{q_m}^{(m)}(z) \geq C \exp\{-\varepsilon h(r)\}$; 5") $\forall s \ln |a_s(z)| \sim H_s(\theta) h(r) \times \times \{\Gamma_m\}$, $m = 1, 2, \dots$.

Последовательность субгармонических функций $\{H_s(\theta) h(r)\}$ определяет в P ту же топологию, что и $\{\tilde{G}_s(\theta) h(r)\}$, а из свойств 1")—5") вытекают условия 1')—5') теоремы 6.

Таким образом, имеет место теорема

Теорема 8. Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (18) (либо $\rho(r) := \frac{\ln h(r)}{\ln r}$ — уточненный порядок, и Λ имеет конечную максимальную угловую плотность и согласована с P) и $u_s(z) := sh(r)$; ($u_s(z) := \tilde{G}_s(\theta) h(r)$, $s = 1, 2, \dots$). Тогда существует такое разбиение Λ на группы $\{\mu_l^{(m)}, r_{l,i}^{(m)}\}_{l=1}^{q_m}$, что последовательность аналитических функционалов $E_{\Lambda} := \{e_{l,i}^{(m)}\}$ образует Кете базис в замыкании своей линейной оболочки в соответствующем пространстве P' с биортогональной системой $\{a_{s,l,i}^{(m)}(z)\}$ при любом фиксированном s , пространство последовательностей коэффициентов базисных разложений совпадает с

$$\bar{A}_p := \{b := \{b_{l,i}^{(m)}\} : \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,i} |b_{l,i}^{(m)}| = -\infty\}$$

(совпадает с

$$\bar{A}_p := \{b := \{b_{l,i}^{(m)}\} : \forall s \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,i} |b_{l,i}^{(m)}| + G_s(\theta_{n_m}) \leq 0\};$$

интерполяционная задача (17) разрешима в соответствующем пространстве P для заданной правой части $a := \{a_n, l\}$ тогда и только тогда, когда последовательность разделенных разностей $\{\Delta_{l,i}^{(m)}(a)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,i} |\Delta_{l,i}^{(m)}(a) \alpha_{l,i}^{(m)}| < \infty$$

(соответственно условию

$$\exists s \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|\lambda_{n_m}|)} \ln \max_{l,i} |\Delta_{l,i}^{(m)}(a) \alpha_{l,i}^{(m)}| - G_s(\theta_{n_m}) \leq 0,$$

при этом решение представимо в виде суммы ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{q_m} \sum_{j=1}^{r_{l,i}^{(m)}} \Delta_{l,i}^{(m)}(a) a_{s,l,i}^{(m)}(a),$$

абсолютно сходящегося в некотором P_s .

Замечание 1. В случае $u_s(z) \equiv sh(r)$ критерий разрешимости интерполяционной задачи был установлен ранее в [18], теорема 11).

Замечание 2. В случае $u_s(z) = G_s(\theta)h(r)$ вторая часть теоремы иным методом доказана в теореме 6 работы [11], а первая часть при дополнительном условии $\rho(r) \equiv 1$ — в теоремах 14, 15 той же работы.

Список литературы: 1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1958. 684 с. 2. Драгилев М. М., Захарюта В. П., Коробейник Ю. Ф. Двойственность между некоторыми вопросами базисности и интерполяции // ДАН СССР. 1974. 215, № 3. С. 522—525. 3. Митягин Б. С. Аппроксимационная размерность и базисы в ядерных пространствах // УМН. 1961. 18, Вып. 4. С. 63—132. 4. Weill L. I. Unconditional and shrinking basis in convex spaces // Pacif. J. of Math. 1969. 29, № 1. P. 467—483. 5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1971. 1072 с. 6. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. 260 с. 7. Bratishchev A. V. Analytical functional basis in invariant subspaces // Мат. вестн. 1988. 40, № 3, 4. С. 185—188. 8. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Реализация сопряженного пространства с помощью преобразования Фурье — Бореля. Приложения // Комплексный анализ и математическая физика. 1988. С. 62—73. 9. Haslinger F. Complete biorthogonal system in nuclear (F)-spaces // Math. Nachr. 1978. 83, P. 305—310. 10. Ткаченко В. А. Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1977. 41, № 2. С. 378—392. 11. Братищев А. В. Последовательности с конечной максимальной угловой плотностью и некоторые их приложения. М., 1987. 90 с. Деп. в ВИНТИ. 14.12.87, № 8703-B87. 12. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с. 13. Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A. On kernel of slowly decreasing operators. Manuscript. P. 1—25. 14. Кондратьев А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища шк., 1988. 196 с. 15. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. Fr. 1968. 96, P. 53—96. 16. Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф. Кратная интерполяционная задача в пространствах целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1976. 40, № 5. С. 1102—1127. 17. Братищев А. В. Достаточные условия интерполяционности множества в классах целых функций, характеризующихся индикатором // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1036—1039. 18. Братищев А. В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. 48, № 3. С. 451—475.

СОДЕРЖАНИЕ

Ронкин Л. И. О регулярности роста плюрисубгармонической функции в пространстве и на подпространствах	3
Белицкий Г. Р., Ткаченко В. А. Аналитическая разрешимость многомерных функциональных уравнений в окрестности неособой точки	7
Гольдберг А. А., Шеремета М. Н. Об аналитическом продолжении на всю плоскость аналитических в единичном круге функций	21
Еременко А. Э., Левин Г. М. Оценки характеристических показателей полинома	39
Чуешов И. Д. Об одной системе уравнений параболического типа, возникающей в физике полупроводников	40
Голинский Л. Б., Чистяков Г. П. Точные в смысле порядка оценки устойчивости разложений нормального распределения в λ -метрике	45
Маслов Л. К. Описание множества сильных пределов безотражательных матриц Якоби	54
Островский М. И. Структура тотальных подпространств сопряженных банаховых пространств	60
Малютин К. Г. Кратная интерполяция в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка	69
Кадец В. М. К теореме о выделении ω -линейно независимых подпоследовательностей	78
Золотарев В. А. Функциональная модель одной алгебры Ли	80
Хейфиц А. И. Классы Харди и граничные свойства обобщенных гармонических функций в полупространстве	87
Свищева Е. В. Осреднение уравнений высших порядков в областях малой меры	95
База Хедиджа, Тихоненко Н. Я. О сходимости метода приближенной факторизации. I	106
Шеремета М. Н. Рост одного класса целых функций	121
Братищев А. В. О регулярной базисности и проблеме моментов в пространстве Фреше с ослабленной топологией	125

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

... 1—4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1993. Вып. 1—140.