;

Булеві функції

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

Зміст

1 Булеві функції та їх задання

1.1 Визначення булевих функцій і формул, що задають булеві функції

Функції, у яких і область визначення і область значень двоелементна, називають булевими.

Змінні в булевих функціях називають пропозиційними символами, а в програмуванні — булевими змінними. 0 та 1 — булеві константи.

Елементи як області визначення так і області значень звичайно позначають символами 0 та 1. Отже, коли говоримо про булеву функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то мається на увазі, що

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}.$$

Є кілька найпростіших булевих функцій, що мають позначення. За допомогою цих позначень будують формули, які задають булеві функції. Ці функції мають таблиці значень. Наше завдання — дати таблиці значень для функцій, що мають свої унікальні назви та позначення. Потім ми повинні показати, яка будується формула (над множиною введених позначень для найростіших функцій) та як будується таблиця значень функції, яка задана формулою.

Три функції двох змінних виникають в логіці висловлень — це функції "не", "і" та "або". Функцію "не" називають також запереченням і позначають символом $\neg$. Функцію "і" називають такою кон'юнкцією і позначають символом $\wedge$. Функцію "або" називають також диз'юнкцією і позначають символом $\vee$.

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

В логіці висловлень виникають ще дві функції "якщо, то" і "тоді і тільки тоді". Першу ще називають імплікацією і позначають $\Rightarrow$, а другу називають також рівносильністю, та еквіваленцією і позначають символом $\Leftrightarrow$. Ці функції мають наступні таблиці значень

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Використовуються також дві сталі функції 0 та 1, додавання $x+y$ та множення xy, і функції "штрих Шефера" $x|y$ та "стрілка Пірса" $x \downarrow y$. Таблиці значень цих функцій наведені нижче.

x	y	0	1	$x+y$	xy	$x|y$	$x \downarrow y$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0

Формули над множиною функціональних символів визначається індуктивно.

База індуктивного означення — кожна булева змінна і сталі 0 та 1 є формулами.

Індуктивне припущення: Припустимо, що ми знаємо, що A, B є формулами.

Індуктивний прехід залежить від множини фінкціональних символів.

Над множиною $\neg, \vee, \wedge$ індуктивним переходом буде: Якщо A, B є формулами, то формулами будуть також

$$(\neg A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B).$$

Над множиною $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ індуктивним переходом буде: Якщо A, B є формулами, то формулами будуть також

$$(\neg A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (A \Leftrightarrow B).$$

Над множиною $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, |, \downarrow, \cdot, +$ індуктивним переходом буде: Якщо A, B є формулами, то формулами будуть також

$$(\neg A), \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (A \Leftrightarrow B), \quad (AB), \quad (A+B), \quad (A|B), \quad (A \downarrow B).$$

Формули над множинаю $\neg, \vee, \wedge$ і над множиною $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ називають формулами логіки висловлень.

Подібним чином визначаються формули над довільною множиною функціональних символів.

Кожна формула задає функцію. Таблиця значень функцiЇ, що задана формулою, визначається індукцією за числом кроків, що потрібні для побудови формули.

База індукції Якщо формула це просто булева змінна або булева константа, то значення формули і значення змінної чи константи це одне і те ж.

Індуктивне припущення Припускаємо, що ми вміємо будувати таблиці значень формул, що побудовані на попередніх кроках.

Індуктивний перехід у визначенні таблиці значень здійснюється так. Якщо уже відомі значення $A(x), B(x)$ функцій, що задані формулами A, B від деякого набору змінних $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то значення функцій. що задані формулами, які побудовані на наступному кроці за допомогою формул A, B від тих же змінних визначається за допомогою таблиці

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A + B$	AB	$A\|B$	$A \downarrow B$
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0

Таблиці значень формули логіки висловлень називають таблицями істиності формули.

Приклад 1. Побудувати таблицю істиності формули

$$f_1 = (p \to q) \to ((p \vee (q \wedge r)) \to (r \wedge \neg p)). \tag{1}$$

Побудова. Спочатку в першому рядку таблиці виписуємо підформули, що будуються на першому кроці — тобто виписуємо пропозиційні змінні, що входять до формули — тобто p, q, r. Потім виписуємо підформули, що будуються на 2 кроці — тобто $\neg p, p \Rightarrow q, q \wedge r$. Далі йдуть підформули, що будуються на 3 кроці — $r \wedge \neg p, p \vee (q \wedge r)$, на четвертому кроці $A = (p \vee (q \wedge r)) \to (r \wedge \neg p)$, і,нарешті, сама формула $f = (p \to q) \to A$, що будується на 5 кроці.

Для зручності пояснення того, як заповнюється таблиця, перенумеруємо стовпчики, номери 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 запишему у другий рядок.

Переходимо власне до таблиці. Спочатку заповнюються стовпчики, які відповідають пропозиційним змінним — тобто перші три стовпичики. Потрібно виписати всі можливі набори значень — для трьох змінних наборів буде $2^3 = 8$. В загальному випадку, коли формула має n пропозиційних змінних, потрібно виписати 2^n — наборів. Ця кількість одержується із комбінаторних міркувань, які зараз проводити не будемо.

p	q	r	$\neg p$	$p \to q$	$q \wedge r$	$r \wedge \neg p$	$p \vee (q \wedge r)$	$A = (p \vee (q \wedge r)) \to (r \wedge \neg p)$	$f_1 = (p \to q) \to$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1

Табл. 1: Побудова таблиці істиності формули логіки висловлювань (1)

Набори (кажуть ще кортежі, вектори) значень змінних можна виписувати як завгодно, але є стандарт — виписати двійкові записи чисел $0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ в загальному випадку, а в нашому конкретному випадку двійкові записи чисел 0,1,2,3,4,5,6,7. Нагадаємо, що

> двійковий запис невід'ємного цілого числа n це така послідовність
>
> $$a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0,$$
>
> 0 та 1, що
>
> $$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + a_m 2^m = n$$

З цього означення маємо: двійковим записом числа 0 є 0, двійковим записом числа 1 є 1, числа 2 є 10, числа 3 є 11, числа 4 є 100, числа 5 є 101, числа 6 є 110, числа 7 є 111. Перед першою одиницею можна дописувати 0.

Далі за таблицями значень найпростіших булевих функцій послідовно записуємо значення в стовпчики, що відповідають формулам другого рівня, тобто що будуються на другому кроці, потім на третьому і так до кінця. Одержуємо таблицю 1

Таблицею істиності формули логіки висловлень

$$f_2 = (p \to r) \to ((p \wedge (q \vee r)) \to (\neg r \wedge p)) \tag{2}$$

є таблиця 2

p	q	r	$\neg r$	$p \to r$	$q \vee r$	$\neg r \wedge q$	$p \wedge (q \vee r)$	$A = (p \wedge (q \vee r)) \to (\neg r \wedge q)$	$f_2 = (p \to r) \to$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0

Табл. 2: Таблиця істиності формули (2)

1.2 Задання булевої функції рядком (кортежем, вектором)

В таблицях 1, 2 перші три стовпчики заповнюються стандартно, завжди однаково. Стовпчики з 4 по 9 є технологічними, вони важливі для одержання кінцевого результату, але у відповіді відсутні. Тому інформаційним в таблиці значень заданої формули є лише останній стовпчик. А це дозволяє задавати булеву функцію саме цим стовпчиком,який простіше писати в рядок. Для наведених двох прикладів (1) і (2) можна писати

$$f_1 = (11111111), \qquad f_2 = (11111010).$$

Якщо функція задана кортежем довжини 2^n, то формула має n пропозиційних зиінних, їх позначення не мають значення.

Інколи в таблицях значення підформул пишуть не в стовпчик, а в рядок, а список підформул пишуть у перший стовпчик, тобто міняють ролями стовпчики та рядки — це питання смаку. На папері зрічніше послідовності писати в рядок, в обчислювальній машині це не має значення. Раніше частіше значення підформул писали в стовпчик — так будемо чинити і в нашому курсі.

Крім того, існує і інший стандарт — писати набори змінний у зворотньому порядку, від одиничного до нульового.

1.3 Справжні (суттєві) та фіктивні змінні

У виразі

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2 + 1}{y^2 + 1} \cdot z - x$$

із шкільного курсу математики змінні x, y є, але вони скорочуються, від них функція не залежить. Це так звані фіктивні змінні. В булевих функціях фіктивні змінні визначаються так

> Для функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ змінна x_n називається фіктивною, коли для будь-якого кортежу $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ виконується рівність
>
> $$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1).$$

> Для функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ змінна x_n називається справжньою або суттєвою, коли існує кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ такий, що
>
> $$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \neq f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1).$$

У функції $f_1(p, q, r)$, що задана формулою (1) з таблицею значень табл. 1 всі змінні фіктивні. А у функції $f_2(p, q, r)$, що задана формулою (2) з таблицею значень табл. 2, змінна p суттєва, тому що

$$f(0,0,1) = 1, \qquad f(1,0,1) = 0;$$

змінна r суттєва, тому що

$$f(1,1,0) = 0, \qquad f(1,1,1) = 1;$$

змінна q фіктивна, тому що

$$f(0,1,0) = f(0,0,0) = 1, \quad f(0,1,1) = f(0,0,1) = 1,$$

$$f(1,1,0) = f(1,0,0) = 1, \quad f(1,0,1) = f(1,1,1) = 0.$$

1.4 Домовленості про дужки у формулах

Для обчислювальної машини не має значень кількість дужок у формулі, а для людини дужки захаращують запис. Тому, подібно до запису арифметичних виразів, часто пропускають дужки. Загальних підхід

> Дужки у формулі можна не писати тоді і тільки тоді, коли їх можна однозначно відновити.

Щоб використовуати це загальне правило, є три домовленості

Домовленість про зовнішні дужки: Якщо формула не використовується для побудови інших формул (тобто не є підформулою), то зовнішні дужки можна не писати. Отже замість $(p \wedge q)$ можна писати $p \wedge q$.

Домовленість про силу знаків для позначення функцій, зв'язок. $\wedge$ — найсильніший знак, $\vee$ — слабший, $\Rightarrow$ — ще слабший. Ці знаки роташовються за своєю силою загальноприйнято. Решту символів можна розташовувати за соїми вподобаннями. Так що замість $(p \vee (q \wedge r))$ можна писати $p \vee q \wedge r$.

Третя **домовленість — про ліве групування**. Пояснимо прикладом: формула $p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s$ розуміється як $(((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s)$. Точно так же розуміється бездужковий запис з використанням іншого функціонального символа.

1.5 Рівносильні формули і основні рівносильності.

Формули, що задають одну і ту ж функцію називають рівносильними. Рівносильні формули з'єднують знаком $=$. Формули, що рівносильні 1, називають тавтологіями.

Є таблиця основних рівносильностей. Наведемо її.

- $p \wedge p = p$ — ідемпотентність $\wedge$;
- $p \vee p = p$ — — ідемпотентність $\vee$;
- $p \wedge q = q \wedge p$ — комутативність $\wedge$;
- $p \vee q = q \vee p$ — комутативність $\vee$;
- $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ — асоціативність;
- $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ — асоціативність;
- $p \to q = \neg p \vee q$ — переписування імплікації через заперечення та диз'юнкцію;
- $(p \wedge q) \vee r = (p \vee q) \wedge (q \vee r)$ — дистрибутивність;
- $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ — дистрибутивність;
- $\neg\neg p = p$ — подвійне заперечення;
- $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ — закон де Моргана;

- $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ — закон де Моргана;
- $1 \wedge p = p$, $1 \vee p = 1$, $0 \wedge p = 0$, $0 \vee p = p$ — визначення констант.
- $(p \wedge q) \vee p = p$, $(p \vee q) \wedge p = p$, — поглинання.

Вказані рівносильності доводяться побудовою відповідних таблиць істиності.

Наведемо приклади використання найпростіших рівносильнсотей.

$$x = x \vee 0 = x \vee (y \wedge \neg y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y);$$

$$\neg(y \Rightarrow x) \wedge ((y \vee \neg x) \Rightarrow x) = \neg(\neg y \vee x) \wedge (\neg(y \vee \neg x) \vee x) = (y \wedge \neg x) \wedge ((\neg y \wedge x) \vee x) = y \wedge \neg x \wedge x = 0.$$

1.6 Поліноми Жегалкіна та лінійні функції

Операції додавання та множення на булевих знаеннях 0,1 відбувається за правилами

$$1+1=0=0+0, \quad 1+0=0+1=1, \quad 1\cdot 1=1, \quad 1\cdot 0=0\cdot 1=0\cdot 0=0.$$

Для булевої мінної x можна записати $x^2 = x, \quad x + x = 0, \quad x = -x$. Для того, щоб відрізнити додавання в булевих функціях від додавання в числових функціях, для булевого додавання використовують знак $\oplus$. У нас числових функцій немає, тому використовуємо звичайний знак $+$.

Поліномом (або многочленом) Жегалкіна від змінних $x_1, x_2, \dots x_n$ називають вираз

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{M \subseteq \{1,2,\dots,n\}} a_M \cdot \prod_{i \in M} x_i \qquad (3)$$

де $a_M \in \{0,1\}$ — сталі коефіцієнти полінома Жегалкіна, $a_\emptyset \prod_{i\in\emptyset} x_i = a_\emptyset$.

Поліном Жегалкіна вважається нульовим, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю.

Поліноми Жегалкіна від трьох змінних x_1, x_2, x_3 мають вигляд

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Прикладами поліномів Жегалкіна є

$$1 + x_1 + x_2x_3 + x_2x_5, \qquad x_1x_2 + x_1x_2x_4.$$

Лема 1.1 *Ненульовий поліном Жегалкіна приймає ненульове значення.*

Доведення. Нехай маємо ненульовий поліном Жегалкіна (3), тобто такий, що серед коефіцієнтів a_M є одиниця. Для прикладу ввізьмемо поліном

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_3 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5.$$

У сукупності множин $\{M|a_M = 1\}$ вибираємо одну мінімальну (не міститься в іншій), позначаємо її через N. В нашому випадку

$$a_{13} \neq 0, \quad a_{145} \neq 0, \quad a_{2345} \neq 0,$$

і можна взяти $N = 1, 3$. Переписуємо поліном, виділивши один доданок

$$\sum_{M \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} a_M \cdot \prod_{i \in M} x_i = \prod_{i \in N} x_i + \sum_{M \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, M \neq N} a_M \cdot \prod_{i \in M} x_i$$

і підраховуємо тепер цей поліном на булевому векторі $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ де

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad k \in N \\ 0 & \text{якщо} \quad k \notin N. \end{cases}$$

Серед доданків виділений дорівнює 1, а решта дорівнюють 0. В нашому прикладі потрібно взяти $x_1 = x_3 = 1, \quad x_2 = x_4 = x_5 = 0$. Від такого набору значень змінних многочлен дорівнює 1. Лема 1.1 доведена.

■

Лема 1.2 *Різні поліноми Жегалкіна задають різні функції.*

Це наслідок леми 1.1. Дійсно, використовуємо метод "від протилежного" — якби два різні поліноми задавали одну функцію, то їх різниця була б ненульовим поліномом, який задає нульову функцію. А це суперечить лемі 1.1.

Теорема 1.1 *Кожна функція може бути задана поліномом Жегалкіна.*

Доведення. Теорема є наслідком леми 1.2. Дійсно, якщо підрахувати кількість функцій та кількість поліномів Жегалкіна від n змінних, то тих і других 2^{2^n}. А оскільки різні поліноми задають різні функції, то кожна функція буде задана якимось поліномом.

■

Покажемо на прикладі, як знайти поліном Жегалкіна, що задає функцію із заданою таблицею значень.

Нехай маємо дві функції

$$f = (1110\,0001), \quad g = (0101\,1010).$$

Оскільки вектор значень має довжину $8 = 2^3$, то обидві функції від 3-х змінних — назвемо їх x, y, z. Записуємо шукані поліноми з невідомими коефіцієнтами. Принагідно скажемо, що

> Метод знаходження формули, який полягає в записі цієї формули з невідоми коефіцієнтами і наступним знаходженням цих коефіцієнтів, називають методом “невідомих коефіцієнтів“.

Отже засосуємо метод невідомих коефіцієнтів:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{123}xyz,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{23}yz + b_{123}xyz.$$

У многочлени з невідомими коефіцієнтами підставляємо значення змінних і одержуємо (оскільки значення функції нам відомі) рівняння, які послідовно дають нам шукані коефіцієнти. Результати записуємо в табличку

p	q	r	f		g	
0	0	0	1	$a_0 = 1$	0	$b_0 = 0$
0	0	1	1	$a_3 = 0$	0	$b_3 = 1$
0	1	0	0	$a_2 = 0$	0	$b_2 = 0$
0	1	1	0	$a_{23} = 1$	0	$b_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 = 1$	0	$b_1 = 1$
1	0	1	0	$a_{13} = 0$	0	$b_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_{12} = 0$	0	$b_0 = 0$
1	1	1	1	$a_{123} = 0$	0	$b_{123} = 0$

Знайшовши коефіцієнти, виписуємо відповідь:

$$f(x,y,z) = 1 + x + yz, \qquad g(x,y,z) = x + z.$$

Оскільки поліном Жегалкіна для функції f містить доданок — добуток змінних yz, то функція не лінійна. А оскільки поліном Жегалкіна для функції g не містить добутків змінних, то функція g лінійна.

1.7 Досконалі форми та задання функції формулою логіки висловлень

Розглядаємо булеві функції та булеві формули від $n \geq 1$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для зручності нинішньої роботи введемо позначення: x^1 означає просто x, а x^0 означає $\neg x$. Таким чином $x_1^1 \wedge x_2^0 \wedge x_3^1$ означає $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$. Тепер ми можемо розглядати вираз (його також можна назвати формулою) x^α при $\alpha \in \{0, 1\}$:

$$x^\alpha = \begin{cases} \ \ x & \text{якщо} \quad \alpha = 1, \\ \neg x & \text{якщо} \quad \alpha = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) дозволяє для будь-якої послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ нулів та одиничок побудувати формулу

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}. \tag{5}$$

Формула A від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається досконалою диз'юнктивною формою (скорочено ДДНФ), якщо для деяких різних формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, кожна з яких має вигляд (5), можна записати

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k, \qquad k \geq 1.$$

Формули, що мають вигляд (5), називають кон'юнктами

Можна сказати, що ДДНФ це диз'юнкція різних кон'юнктів.

Наведемо приклади. Формули

$$\neg x_1 \wedge x_2, \qquad (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$$

є досконалими диз'нктивними формами від двох змінних. А формули

$$(\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3), \qquad (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$$

не є ДДНФ, оскільки кон'юнкти першої формули мають різні кількості змінних, а серед кон'юнктів другої є однакові.

Подібно до формули (5), можна побудувати диз'юнкцію змінних та їх заперечень - кожна змінна чи її заперечення повинні входити в таку формулу і до того ж тільки один раз. Кон'юнкція таких формул (диз'юнктів) буде називатися ДКНФ - досконалою кон'юнктивною формою.

Наведемо приклади. Формули

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2), \qquad (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

є досконалими кон'юнктивними формами.

А формули

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3), \qquad (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

не є досконалими кон'юнктивними формами — в першій диз'юнкти мають різну кількість змінних, а в другій є однакові диз'юнкти.

Для подальшої роботи важливим є те, що функція, яка задана формулою (5), приймає значення 1 на єдиному наборі змінних: $x_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1.2 *Будь-яка не тотожно хибна булева функція може бути задана ДДНФ. Будь-яка не тотожно істинна булева функція може бути задана ДКНФ.*

Доведення. Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функція, яка при деяких значеннях змінних приймає значення 1. Для кожного набору змінних $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, на якому функція приймає значення 1, будуємо кон'юнкт

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$$

Диз'юнкція побудованих кон'юнктів дасть нашу функцію.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функція, яка при деяких значеннях змінних приймає значення 0. Для кожного набору змінних $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, на якому функція приймає значення 1, будуємо диз'юнкт

$$x_1^{\neg\alpha_1} \vee x_2^{\neg\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\neg\alpha_n}$$

Кон'юнкція побудованих диз'юнктів дасть нашу функцію.

Наведемо приклад.

Приклад 1.1 . *Привести формулу f до ДДНФ — побудувати ДДНФ, що рівносильна заданій формулі*

а) $f = (q \to p) \to (q \wedge \neg r)$

Розв'язування. Будуємо таблицю значень булевой функції, що задана формулою f. Далі за кожною одиницею будуємо відповідний кон'юнкт. Диз'юнкція побудованих кон'юнктів і є потрібна нам ДДНФ

p	q	r	$\neg r$	$q \to p$	$q \wedge \neg r$	$(q \to p) \to (q \wedge \neg r)$	Кон'юнкти	Диз'юнкти
0	0	0	1	1	0	0		$p \vee q \vee r$
0	0	1	0	1	0	0		$p \vee q \vee \neg r$
0	1	0	1	0	1	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
1	0	0	1	1	0	0		$\neg p \vee q \vee r$
1	0	1	0	1	0	0		$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

Потрібною ДДНФ буде $(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.Потрібною ДКНФ буде $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

б) $(p \to q) \to (q \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$p \to q$	$q \wedge \neg r$	$(p \to q) \to (q \wedge \neg r)$	Кон'юнкты	Диз'юнкти
0	0	0	1	1	0	0		$p \vee q \vee r$
0	0	1	0	1	0	0		$p \vee q \vee \neg r$
0	1	0	1	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	1	0	0		$p \vee \neg q \vee \neg r$
1	0	0	1	0	0	1	$p \wedge \neg q \neg r$	
1	0	1	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \neg \neg r$

Потрібною ДДНФ буде $(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Потрібною ДКНФ буде $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \neg \neg r)$.

■

2 Суперпозиція булевих функцій. Замкнені класи (відносно суперпозиції)

.

2.1 Означення суперпозиції та замкненого класу. Приклади.

Нехай маємо $n+1$-у функція, перша з них $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має n змінних, а решта n функцій $g_i(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ мають по k змінних кожна. Тоді функція $h(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ від змінних $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, яка обчислюється за правилом

$$h(y_1, y_2, \ldots, y_k) = f(g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k), g_2(y_1, y_2, \ldots, y_k), \ldots, g_n(y_1, y_2, \ldots, y_k))$$

називається суперпозицією функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g_i(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зауважимо, що кількість змінних у будь-якій функції із заданого набору функцій можна вважати однією і тією ж, — тому що можна додавати і викреслювати фіктивні змінні.

Для прикладу, суперпозицією функцій

$$f(x, y) = x \Rightarrow y, g_1(x, y, z) = \neg z, g_2(x, y, z) = (x \wedge y) \tag{6}$$

буде функція

$$\neg z \Rightarrow (x \wedge y).$$

Підкреслимо, що розглядається суперпозиція функцій, а не формул. Тому імена змінних не мають значення. Тому суперпозицією функцій (6) будуть також функції

$$\neg x \Rightarrow (y \wedge z), \quad \neg u \Rightarrow (v \wedge w), \quad x \vee (y \wedge z).$$

> Клас булевих функцій називається замкненим, якщо суперпозиція будь-яких функцій із цього класу знову є функцією із цього класу.

Теорема 2.1 *Лінійні функції $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ утворюють замкнений клас L.*

Доведення.. Нехай

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \qquad g_k = b_k^0 + \sum_{i=1}^{m} b_k^i y_i, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Тоді

$$f(g(y)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k^0 + \sum_{i=1}^{m} b_k^i y_i) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k^0\right) + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k^i\right).$$

Останній запис доводить лінійність суперпозиції лінійних функцій.

■

Замкнений клас K називається максимальним, якщо він не збігається з класом усіх булевих функцій і для будь-якої булевої функції f, $f \notin K$ єдиним замкненим класом, що містить в собі і K і f, є клас усіх булевих функцій.

Замкненими класами є клас T_0 функцій, що берігають 0, тобто

$$f \in T_0 \Leftrightarrow f(0, 0, \ldots, 0) = 0$$

і клас T_1 функцій, що зберігають 1, тобто

$$f \in T_1 \Leftrightarrow f(1, 1, \ldots, 1) = 1$$

Ці класи не збігаються з класом усіх булевих функцій, тому що функція $\neg x$ не міститься ні в першому ні в другому. Вони також максимальні. Замкненим і максимальним є клас L лінійних функцій.

Крім того, є ще два класи — клас S самодвоїстих і клас M монотонних функцій. На цих класах зупинимося окремо.

Насправді, окрім вказаних 5 — T_0, T_1, L, S, M, замкнених і максимальних класів немає. Це стверджує теорема Поста (про 5 замкнених класів) яку доведемо нижче.

2.2 Самодвоїсті та монотонні функції

Булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається автодуальною, або самодвоїстою, якщо для будь-якого вектора змінних $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ виконується рівність

$$f(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \ldots, \neg\alpha_n) = \neg f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Можна сказати, що функція самодвоїста, коли вона на протилежних наборах змінних приймає протилежні значення. Функція повністю визначається своїми значеннями на наборах, у яких $x_1 = 0$.

Розглянемо два приклади — функції f та g:

x	y	f	g
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Тут функція $f(x, y)$ не самодвоїста, тому що $f(0, 0) = f(1, 1)$, а функція $g(x, y)$ самодвоїста, тому що $g(0, 0) = 0 = \neg g(1, 1)$, $\quad g(0, 1) = 1 = \neg g(1, 0)$.

Самодвоїсті функції є подобою до непарних дійсних функцій $f(-x) = -f(x)$.

Теорема 2.2 *Самодвоїсті функції утворюють замкнений клас S.*

Доведення. Нехай задані функції

$$f(x_1, \ldots, x_n), \quad g_i(y_1, \ldots, y_m), i = 1, \ldots, n, \quad h(y) = f(g(y)) \tag{7}$$

Тоді

$$h(\neg y) = f(g(\neg x)) = f(\neg g(y)) = \neg f(g(y)) = \neg h(y).$$

■

На векторах значень змінних вводиться відношення порядку: якщо

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то

$$x \geq y \Leftrightarrow (\forall i \quad x_i = 0 \Rightarrow y_i = 0)$$

або

$$x \geq y \Leftrightarrow (\forall i \quad y_i = 1 \Rightarrow x_i = 1)$$

Приклади: якщо

$$\alpha = (0111\,0100), \quad \beta = (0111\,0101), \quad \gamma = (1111\,0011),$$

то $\alpha < \beta$, а γ не порівнювана ні з α ні з β.

> Функція називається монотонною, якщо вона на більшому аргументі приймає не менше (більше або таке ж) значення, тобто функція буде монотонною, якщо
>
> $$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Теорема 2.3 *Монотонні функції утворюють замкнений клас M.*

Доведення. Нехай є функції (7) і $a > b$ Тоді

$$g(a) > g(b), \quad h(a) = f(g(a)) > f(g(b)) = h(b)$$

■

2.3 Теорема Поста про 5 замкнених класів.

Теорема 2.4 *Жоден із класів T_0, T_1, L, M, S не міститься в іншому.*

Доведення. Функція $\neg x$ не зберігає нуль, не зберігає одиницю, не монотонна, але лінійна і самодвоїста. Отже

$$L \not\subseteq T_0, \quad L \not\subseteq T_1, \quad L \not\subseteq M,$$

$$S \not\subseteq T_0, \quad S \not\subseteq T_1, \quad S \not\subseteq M,$$

Сталі функції 0 та 1 монотонні але 0 не зберігає 1, а 1 не зберігає 0. Тому

$$M \not\subseteq T_0, \quad M \not\subseteq T_1.$$

Стала функція 0 зберігає 0, мотонна, не зберігає 1 і не смодвоїста, а стала функція 1 зберігає 1, монотонна, не зберігає 0 і також не самодвоїста. Тому

$$T_1 \not\subseteq T_0, \quad T_0 \not\subseteq T_1, \quad T_0 \not\subseteq S, \quad T_1 \not\subseteq S, \quad M \not\subseteq S.$$

Функція xy монотонна, не лінійна, але зберігає 0 і зберігає 1. Тому

$$T_0 \not\subseteq L, \quad T_1 \not\subseteq L, \quad M \not\subseteq L.$$

Прикладом функції, яка зберігає нуль але не монотонна, є функція з таблицею значень

p	q	f
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

А прикладом функції, яка зберігає один і не монотонна, є функція з таблицею значень

p	q	f
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Наведені два приклади доводять, що

$$T_0 \not\subseteq M, \quad T_1 \not\subseteq M.$$

Всі автодуальні функції від двох змінних лінійні. Автодуальною але не лінійною функцією від трьох змінних буде функція

$$xy + xz + yz = (x+1)(y+1) + (x+1)(z+1) + (y+1)(z+1) + 1.$$

Функція $x+y$ лінійна але не автодуальна. Ці два приклади доводять, що

$$L \not\subseteq S, \quad S \not\subseteq L.$$

Доведення теореми завершене.

■

Позначимо клас всіх булевих функцій через $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{A}$ деякий замкнений клас функцій.

Теорему Поста можна формулювати у вигляді

Теорема 2.5 *Якщо замкнений клас $\mathfrak{A}$ не збігаєтьса з $\mathfrak{B}$, то він міститься в одному із 5 вказаних класів T_0, T_1, L, S, M.*

або у вигляді

Теорема 2.6 *Якщо клас $\mathfrak{A}$ заммкнений і не містьса ні в одному із 5 вказаних класів T_0, T_1, L, S, M, то він збігаєтьса з класом $\mathfrak{B}$.*

Теорма 2.6 є теоремою, що протилежна до оберненої до теореми 2.5.

Доведення. Доведення поводимо у другому формулюванні, тобто доводимо теорему 2.6.

Оскільки уже відомо, що для кожної функції є формула (ДДНФ або ДНФ) логіки висловлень, яка задає цю функцію, то при доведенні

1. вважаємо, що $\mathfrak{A}$ замкнений, не міститься в жодному із 5 класів. Отже є 5 функцій

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in \mathfrak{A}, \qquad f_1 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_3 \notin L, f_4 \notin M, f_5 \notin S$$

2. потрібно довести, що

$$\neg x, x \wedge y, x \vee y \in \mathfrak{A}$$

Доведення складається із чотирьох етапів, на яких доводимо існування відповідної функції.

i $\neg x$ (використовуємо f_1, f_2, f_4);

ii $0, 1$ (використовуємо $\neg x, f_5$);

iii $x \wedge y$ (використовуємо $\neg x, 0, 1, f_3$);

iv $x \vee y$ (використовуємо $\neg x, x \wedge y$).

При доведенні користуємося позначенням

$$x^\alpha = \begin{cases} x & \text{якщо} \quad \alpha = 1, \\ \neg x & \text{якщо} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

В цих позначеннях $1^\alpha = \alpha$, $0^\alpha = \neg\alpha$, $\alpha^\alpha = 1$.

Доводимо і. За допомогою функцій f_1, f_2 будуємо функції h_1, h_2:

$$h_1(x) = f_1(x, x, \ldots); \quad h_2(x) = f_2(x, x, \ldots).$$

Оскільки функція f_1 не зберігає 0, а функція f_2 не зберігає 1, то маємо дві можливості: або дві фукції h_1, h_2 є двома сталими функціями — нулем та одиницею, або серед функцій є $\neg x$.

Далі розглянемо випадок, коли $\{h_1, h_2\} = \{0, 1\}$.

Не монотонна функія f_4 на більшому наборі приймає менше значення (на більшому 1 а на меншому 0). Більший одержується із меншого перетворенням нулів на одиничкм. Претворюючи нулі на одинички по одному знаходимо два "сусідні" набори (відрізняються лише одним значенням, можна вважати, що відрізняються значенням x_1), такі, що на більшому функція приймає значення 0, а на меншому 1, тобто $f_4(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = 0, f_4(0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = 1$ і

$$f_4(x, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = \neg x.$$

Враховуючи, що обидві сталі функції знаходяться в класі $\mathfrak{A}$, одержуємо, що $\neg x \in \mathfrak{A}$.

Таким чином, в будь-якому випадку функція $\neg x$ належить класу $\mathfrak{A}$.

Доведення і завершене.

Переходимо до доведення іі.

Не самодвоїста функція f_5 на двох протилежних наборах

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \qquad (\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \ldots)$$

приймає однакові значення. Тому $f_5(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = f_5(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \ldots)$ на деякому наборі,

$$h_4(x) = f_5(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots) = \text{const}$$

і $\{h_4, \neg h_4\} = \{0, 1, \}$.

Доведення іі завершене.

Переходимо до доведення iii. Вважаємо, що нелінійна функція f_3 задана поліномом Жегалкіна і як поліном має добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots$.

$$f_3 = \alpha_0(x_3, x_4, \ldots) + \alpha_1(x_3, \ldots)x_1 + \alpha_2(x_3 \ldots)x_2 + \alpha_3(x_3, \ldots)x_1x_2.$$

Поліном $\alpha_3(x_3, \ldots)$ ненульовий і на якомусь наборі приймає значення 1. Оцей набір і підставляємов замість $(x_3, \ldots)$. Одержуємо спочатку $h_4(x_1, x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_1 x_2$. А далі претвоючємо h_4 в $h_5(x_1x_2) = x_1x_2$ за допомогою заміни $y_i = x_i + \alpha_i$ і при необхідності заміняючи функцію на її заперечення.

Доведення iii завершено.

Переходимо до доведення iv. Функція $x \vee y$ лежить в класі $\mathfrak{A}$ тому, що в цьому класі лежать функції $x \cdot y = x \wedge y$, $\neg x$ і $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$

Доведення iv і з цим всієї теореми Поста завершене.

■

Із теореми Поста випливає, що введені п'ять класів є максимальними, тому що замкнений клас, який містить в собі один із вказаних класів, не міститься в жодному із них і, отже, збігається з класом усіх булевих функцій.

3 Застосування булевих функцій у шифруванні та у електричних схемах

3.1 Псевдовипадкові послідовності бітів

Наведемо приклад використання булевих функцій у шифруванні. При потоковому шифруванні каналом зв'язку потрібно передати послідовність бітів — одиниць інформації, які звичайно уявляються як 0 чи 1. Отже, каналом зв'язку потрібно передати інформацію — послідовність 0 та 1 невідомої але вельми великої довжини. Перед передаванням і після передавання до послідовності додається (як сума булевих змінних) одна і та ж випадкова послідовність. Двічі додана одна і та ж послідовність 0 та 1 не змінює інформаційну послідовність. Для прикладу, потрібно предати послідовність $a = 0011110101000$ — це інформаційна послідовність. Створюється випадкова послідовність такої ж довжини — нехай нею буде $b = 1110100010011$. Каналом зв'язку передається зашифрована послідовність, тобто $a + b = 1101010111011$. Приймач до одержаної зашифрованої послідовності $a + b$ знову додає b (дешифрує) і одержує послідовність a.

У вказаному процесі важливе місце відводиться випдковій послідовності b. Випадкову послідовність породити важко. Тому замість випадкової використовують так звану псевдовипадкову, тобто таку, яку важко відрізнити від випадкової. Для побудови таких псевдовипадкових послідовностей використовують лінійні булеві функції — їх дуже і дуже легко втілити в матеріальний прилад.

Отже маємо лінійну функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k.$$

Тим чи іншим способом породжується (випадкова чи псевдовипадкова) послідовність

$$b = b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m, \quad m \geq k$$

Наступні елементи послідовності b будуються за допомогою функції f —

$$b_{m+1} = a_0 + a_1b_{m-k+1} + a_2b_{m-k+2} + \ldots + a_kb_m.$$

Таким чином породжується послідовність будь-якої довжини. Фізичний пристрій, який створює цю послідовність, називають регістром зсуву із зворотним зв'язком. Для прикладу, нехай маємо функцію $f = x_1 + x_3$, і випадкову послідовність $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 0$. Тоді

$$b_5 = b_2+b_4 = 1+0 = 1, \quad b_6 = b_3+b_5 = 1+1 = 0, \quad b_7 = b_4+b_6 = 0+1 = 1, \ldots$$

3.2 Реле та контакти

Реле уявляємо як певні пристрої, які можуть "спрацьовувати" (посилати сигнал, бути увімкнетим) і "не спрацьовувати" (не посилати сигнал, бути розімкненим). А контакти можуть бути замкненими або розімкненими. Реле керують контактами — коли реле "спрацювало", воно замикає певні контакти, а певні контакти розмикає.

Якщо реле a "спрацювало", ми пишемо

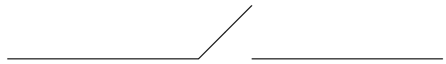
$$a = 1,$$

а якщо "не спрацювало", то пишемо

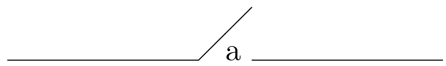
$$a = 0,$$

Можна сказати, що у нас є висловлення "Задане реле спрацювало", і це висловлення позначається тією ж буквою, що і саме реле. Як і звичайно, це висловлення може бути правильним і може бути хибним.

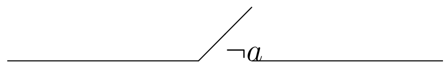
Електромережа, що з'єднує позитивний заряд A з негативним зарядом B, у кількох місцях розірвана контактами. Факт наявності контакта в електромережі зобразимо так



Сама електромережа зображається ламаними лініями, що розірвані контактами. Кожним контактом керує реле (одне). Якщо контакт замкнений при увімкненому реле a ми креслимо



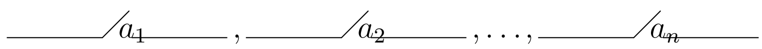
а якщо контакт розімкнений при увімкненому реле, ми креслимо



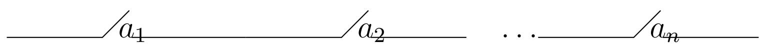
Електромережа з контактами та реле називається *релейно-контактною схемою.*

Наведемо приклади. Схема

буде пропускати струм, коли контакти $\neg a$ та b замкнені, тобто коли реле a вимкнене, а реле b увімкнене ($a = 0,\ b = 1$). Цій мережі можна поставити у відповідність формулу $\neg a \wedge b$. Вона приймає значення 1, коли мережа пропускає струм. Коли мережа складається із з'єднаних один за одним n контактів,



що керуються реле $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ми креслимо

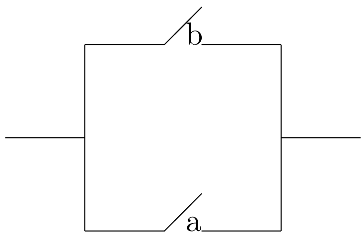


Цій мережі ставимо у відповідність формулу логіки висловлень

$$a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n,$$

яка приймає значення “один“ лише у випадку, коли $a_1 = ... = a_n = 1$. Така мережа пропускає струм у єдиному випадку — коли всі контакти замкнені. З’єднання контактів на кшталт описаного називається послідовним.

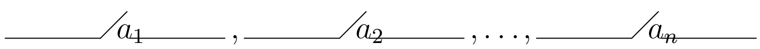
Схема



буде пропускати струм у випадку, коли один із вимикачів (контактів) a, b замкнено, а коли обидва вимикачі розімкнені, струм іти не буде. Контакти розімкнені будуть у випадку, коли $a = 0,\ b = 0$, тобто коли формула

$$a \vee b$$

хибна. У випадку, коли мережа — це жмуток провідників, що мають спільний початок і спільний кінець, причому кожен із провідників розірвано одним із контактів



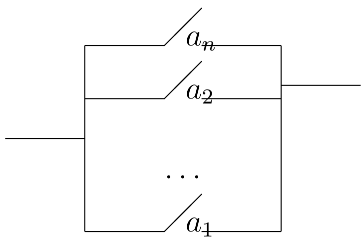
струм не буде іти в єдиному випадку, а саме коли

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0, ..., a_n = 0$$

або коли хибна формула

$$a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$$

Така схема може бути зображена наступним чином

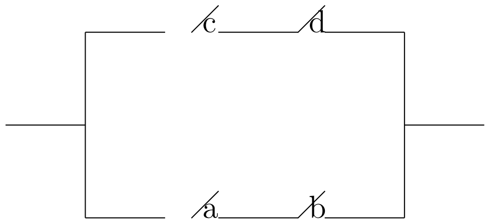


Подібне з’єднання контактів називається паралельним. Схема (див.

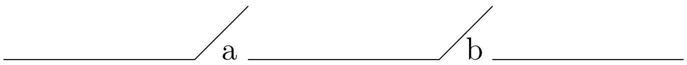
рис. 1) буде завжди пропускати струм, цій схемі ставиться у відповідність формула $a \vee \neg a$, яка при всіх значеннях a приймає значення 1. Схема, що зображена на рис. 2, ніколи не буде пропускати струм оскільки один із контактів в ній завжди буде розімкнений.

Нижче будемо розглядати мережі, які при певних положеннях реле пропускають струм, при певних — не пропускають.

Із простіших схем, з'єднуючи їх послідовно або паралельно можна одержувати більш складні. Схема



буде пропускати струм у випадку, коли пропускає струм одна із схем



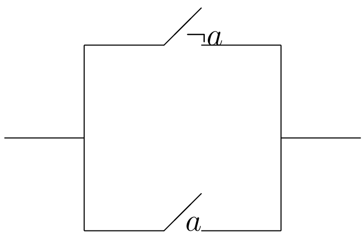
та

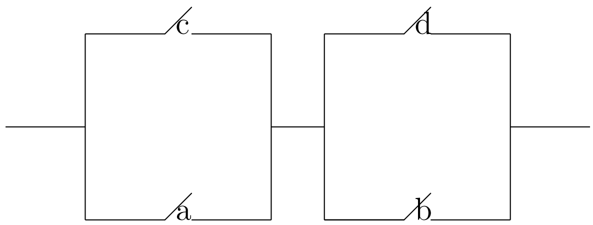
тобто коли правильна формула

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d).$$

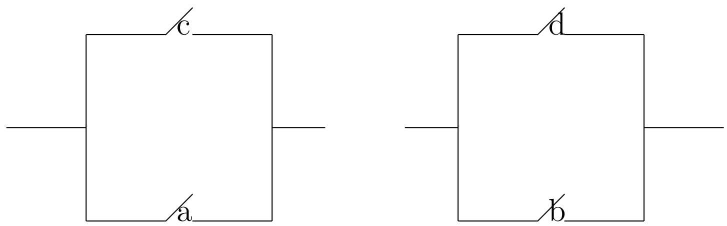
Схема

Рис. 1: Приклад релейно контактної схеми, що завжди пропускає струм





не буде пропускати струм, коли одна із двох схем (або обидві), що зображені нижче:



не буде пропускати струм, тобто коли хибна формула

$$(a \vee c) \wedge (b \vee d).$$

3.3 Побудова релейно контактної схеми із заданою таблицею роботи

Мета розділу полягає в побудові схеми, яка пропускає струм в тих і тільки тих випадках, коли увімкнені певні реле.

Наші побажання щодо роботи схеми записуємо у таблицю. Спочатку в стовпчиках записуємо можливі стани реле. А в останньому стовпчику пишемо символи 1 чи 0 в залежності від того, чи повинна мережа пропускати струм при таких положеннях реле, чи ні. Такі таблиці назвемо *таблицями роботи схеми.*

Наведемо приклади таблиць (див. табл. 3 a), b), c)) По кожній з цих таблиць ми уміємо будувати формулу, для якої задана таблиця є таблицею істинності. Для таблиці 3 a) формулою буде

$$p \wedge \neg q; \tag{8}$$

Рис. 2: Приклад релейно контактної схеми, що ніколи не пропускає струм

для таблиці 3 b) формулою буде

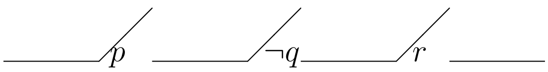
$$p \wedge \neg q \wedge r; \tag{9}$$

а для таблиці 3 c) формулою буде

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r). \tag{10}$$

Ми уміємо будувати схему, яка пропусках струм у єдиному випадку — тільки при певному положенні кожного із реле, контакти в такій схемі з'єднуються послідовно. Тому за формулою (8) ми будуємо схему

а за формулою (9) будуємо схему



Побудувавши схеми для кожного із трьох кон'юнктів

$$p \wedge q \wedge r \qquad p \wedge \neg q \wedge r \qquad \neg p \wedge \not q \wedge r$$

формули (10), з'єднуємо ці схеми паралельно, і одержуємо схему, таблицею роботи якої є таблиця 3 c).

Табл. 3: Приклади таблиць роботи релейно контактних схем.

a)

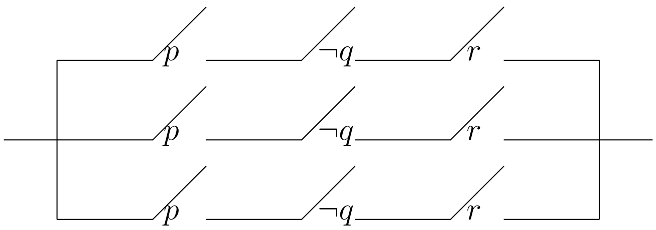
p	q	
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

b)

p	q	r	
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

c)

p	q	r	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0



Тепер ми можемо сформулювати, як можна побудувати схему із заданою таблицею роботи:

1. будуємо формулу логіки висловлювань у вигляді ДДНФ, для якої задана таблиця є таблицею істинності;

2. для кожного кон'юнкта побудованої формули будуємо відповідну схему у вигляді послідовно з'єднаних контактів;

3. побудовані для кон'юнктів схеми з'єднуються паралельно.

Можна побудувати формулу логіки висловлювань, слідкуючи лише за нулями таблиці роботи, тобто побудувати ДКНФ. Тоді будуємо схему мережі для кожного диз'юнкта, з'єднуючи контакти паралельно. А далі схеми з'єднуються послідовно.

Розглянемо приклад. Нехай задана таблиця роботи релейно-контактної схеми

a	b	c	
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Слідкуючи за нулями у останньому стовпчику таблиці (вони стоять у першому, третьому та восьмому рядках) будуємо диз'юнкти. За першим рядком будується диз'юнкт

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c,$$

за третім рядком будується диз'юнкт

$$\neg a \vee b \vee \neg c,$$

і за восьмим рядком будується диз'юнкт

$$a \vee b \vee c.$$

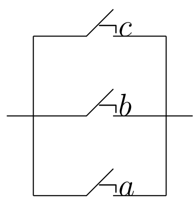
Отже задана таблиця — це таблиця істинності формули

$$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee c).$$

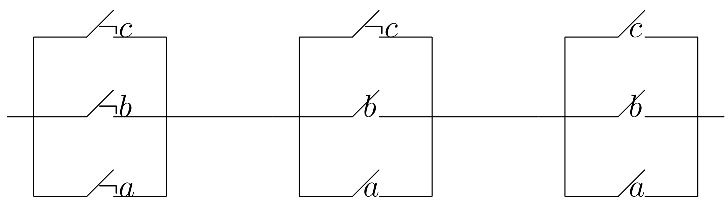
За трьома диз'юнктами

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c, \qquad \neg a \vee b \vee \neg c, \text{ та } a \vee b \vee c$$

будуємо три схеми, в кожній із яких контакти з'єднані паралельно:



З'єднавши побудовані схеми послідовно ми одержимо потрібну результуючу схему:



Покажчик