ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

ОБ ОДНОЙ МИНИМУМ-ПРОБЛЕМЕ ТИПА КОРКИНА — ЗОЛОТАРЕВА

А. А. Нудельман

В настоящей заметке рассматривается задача о минимуме функционала

$$I(\Omega - P) = \int_a^b |\Omega(t) - P(t)|\, d\mu(t) + \int_c^d (\Omega(t) - P(t))\, d\lambda(t) \tag{1}$$

на совокупности обобщенных полиномов $P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(t)$ при следующих условиях:

1°. Интервалы $[a, b]$ и $[c, d]$ могут быть расположены как угодно один относительно другого.

2°. Функции $\{u_k(t)\}_0^{n-1}$ и $\Omega(t)$ непрерывны в интервалах $[a, b]$ и $[c, d]$ и, кроме того, при $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $(a < t_0,\ t_n < b)$ удовлетворяют неравенствам

$$\Delta \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{n-1} \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_{n-1} \end{pmatrix} > 0, \tag{2}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{n-1} & \Omega \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_{n-1} & t_n \end{pmatrix} > 0. \tag{3}$$

3°. Функция $\mu(t)$ непрерывна и не убывает в интервале $[a, b]$; функция $\lambda(t)$ имеет ограниченную вариацию в интервале $[c, d]$.

Аналогичную задачу рассматривал М. Г. Крейн [1] при условиях, несколько отличающихся от наших условий. Отличие это заключается в том, что у М. Г. Крейна, во-первых, оба интеграла берутся по одному интервалу (то есть $c = a$ и $d = b$) и, во-вторых, на функцию $\lambda(t)$ наложены более жесткие условия: она должна быть непрерывна и при любых $(a <)\, t_1 < t_2\, (< b)$ удовлетворять неравенству[1]

$$|\lambda(t_2) - \lambda(t_1)| < \mu(t_2) - \mu(t_1).$$

В различных частных случаях задача М. Г. Крейна сводится к известным задачам, в частности, к задачам Коркина — Золотарева, Стильтьеса, Ахиезера — Крейна и др. (см. об этом [1], стр. 110—111).

К. Поссе, обобщая задачу Коркина — Золотарева, решил задачу о существовании минимума и описал минимизирующий полином для функционала

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt + (-1)^n \int_a^b f(t)\, dt, \quad (1 < a < b),$$

рассматриваемого на совокупности алгебраических полиномов $f(t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k$ степени n со старшим коэффициентом единица [2]. Эта

[1] Короче это неравенство записывают так: $|d\lambda(t)| < d\mu(t)$.

задача не является частным случаем задачи М. Г. Крейна, но, оказывается, в случае, когда минимум существует, может быть решена тем же методом. Задача Поссе является частным случаем рассматриваемой здесь задачи о минимуме функционала (1) при условиях 1°—3°.

Минимум функционала (1) при условиях 1°—3° может не существовать. Мы получим необходимые и достаточные условия существования минимума, после чего окажется возможным использовать построения М. Г. Крейна. В дальнейшем потребуются следующие факты из [1].

Пусть в интервале $[a, b]$ непрерывные функции $\{u_k(t)\}_0^{n-1}$ удовлетворяют условию (2). Точки n-мерного пространства $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$, координаты которых допускают представление

$$c_k = \int_a^b u_k(t)\, d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

где $|d\sigma(t)| \leqslant d\mu(t)$, заполняют замкнутое ограниченное тело $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$. Если точка C — внутренняя точка тела, то последовательность $\{c_k\}_0^{n-1}$ имеет бесчисленное множество представлений (4), среди которых имеется представление, задаваемое функцией

$$\sigma_{\min}(t) = \int_a^t s_{\min}(t)\, d\mu(t), \tag{5}$$

где $s_{\min}(t)$ — кусочно-постоянная функция, равная ± 1, имеющая в интервале (a, b) точно n точек разрыва θ_j, причем $s_{\min}(b-0) = -1$. Для каждой внутренней точки тела $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$ существует только одна функция $s_{\min}(t)$, обладающая такими свойствами. Если же точка C принадлежит границе тела $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$, то существует единственная функция $\sigma(t)$, задающая представление (4). Эту функцию можно единственным образом представить в виде (5), где снова $s_{\min}(t)$ — кусочно-постоянная функция, равная ± 1, только число точек разрыва функции $s_{\min}(t)$ в этом случае меньше n.

Теорема 1. Для того, чтобы функционал (1) был ограничен снизу, необходимо и достаточно, чтобы для всех $P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(t)$ функционал

$$J(P) = \int_a^b |P(t)|\, d\mu(t) + \int_c^d P(t)\, d\lambda(t)$$

принимал неотрицательные значения[1].

Доказательство. Необходимость. Пусть для полинома $P_0(t)$ имеем $J(P_0) < 0$. В таком случае неравенство

$$J(\Omega + \alpha P_0) \leqslant J(\Omega) + \alpha J(P_0),$$

справедливое при всех положительных α, показывает, что функционал $J(\Omega - P)$ не ограничен снизу.

Достаточность. Предположим, что $\inf\limits_P J(\Omega - P) = -\infty$. Тогда существует последовательность полиномов $\{P_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, для которых $J(\Omega - P_m) \to -\infty$ при $m \to \infty$. Поэтому из неравенства

$$J(-P_m) \leqslant J(-\Omega) + J(\Omega - P_m)$$

следует, что $J(-P_m) < 0$ при достаточно большом m. Теорема доказана.

---

[1] В задаче М. Г. Крейна (то есть при $c = a$, $d = b$ и $|d\lambda(t)| < d\mu(t)$) это условие выполняется.

Теорема 2. Для того чтобы при всех $P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k(t)$ было $J(P)\geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы точка $C=(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ где

$$c_k=\int_c^d u_k(t)\,d\lambda(t) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

принадлежала телу $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)'$.

Доказательство. Для произвольного $P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k(t)$ имеем

$$J(P)=\int_a^b |P(t)|\,d\mu+\int_c^d P(t)\,d\lambda(t)=\int_a^b |P(t)|\,d\mu(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k c_k.$$

Поэтому $J(P)\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(-c_k)\leqslant\int_a^b |P(t)|\,d\mu(t),$$

то есть только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(-c_k)\leqslant\int_a^b P_+(t)\,d\mu(t)-\int_a^b P_-(t)\,d(-\mu(t)), \tag{6}$$

где $P_+(t)=\frac{1}{2}(|P(t)|+P(t))$, $P_-(t)=\frac{1}{2}(|P(t)|-P(t))$.

Неравенство (6) выполняется при всех $P(t)$ тогда и только тогда, когда точка $-C=(-c_0, -c_1, \ldots, -c_{n-1})$ принадлежит телу $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$ ([1], стр. 98). Так как тело $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$ симметрично относительно начала координат, то $-C\in\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$ только тогда, когда $C\in\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$. Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет строить минимизирующий полином с помощью рассуждений М. Г. Крейна.

Предположим, что функционал (1) ограничен снизу, то есть точка $C=(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$, где $c_k=\int_c^d u_k(t)\,d\lambda(t)$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, принадлежит телу $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu, \mu)$. Так как

$$\int_c^d u_k(t)\,d\lambda(t)=\int_a^b u_k(t)\,s_{\min}(t)\,d\mu(t), \quad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

то для любого полинома $P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k(t)$ имеем

$$J(\Omega-P)\geqslant-\int_a^b\Big(\Omega(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k(t)\Big)s_{\min}(t)\,d\mu(t)+\int_c^d\Big(\Omega(t)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k(t)\Big)d\lambda(t)=-\int_a^b\Omega(t)\,s_{\min}(t)\,d\mu(t)+\int_c^d\Omega(t)\,d\lambda(t).$$

Знак равенства имеет место для тех и только тех полиномов $P_0(t)$, для которых при $a\leqslant t\leqslant b$

$$|\Omega(t)-P_0(t)|=-(\Omega(t)-P_0(t))\,s_{\min}(t). \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$\Omega(\theta_j) - P_0(\theta_j) = 0, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{8}$$

так как разность $\Omega(t) - P_0(t)$ должна менять знак вместе с функцией $s_{\min}(t)$.

Если точка C — внутренняя, то $m = n$, и условия (8) определяют полином $P_0(t)$ однозначно. При этом, в силу неравенств (2) и (3), условие (7) выполняется автоматически, так как

$$\Omega(t) - P_0(t) = \frac{\Delta\begin{pmatrix} u_0\, u_1 \ldots\ u_{n-1}\Omega \\ \theta_1\, \theta_2\ \ldots\ \theta_n\quad t \end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix} u_0\, u_1 \ldots\ u_{n-1} \\ \theta_1\, \theta_2\ \ldots\ \theta_n \end{pmatrix}}.$$

Если же точка C — граничная, то $m < n$ и существует бесчисленное множество полиномов $P_0(t)$, удовлетворяющих соотношениям (7) и (8). Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. Если точка C принадлежит телу $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu,\ \mu)$, то коэффициенты полинома $P_0(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(t)$, доставляющего минимум функционалу

$$I(\Omega - P) = \int\limits_a^b |\Omega(t) - P(t)|\, d\mu(t) + \int\limits_c^d (\Omega(t) - P(t)\, d\lambda(t),$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(\theta_j) = \Omega(\theta_j), \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где θ_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ — точки разрыва функции $s_{\min}(t)$, отвечающей точке C.

Если точка C — внутренняя точка тела $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu,\ \mu)$, то существует единственный минимизирующий полином $P_0(t)$.

Если точка C принадлежит границе тела $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu,\ \mu)$, то существует бесчисленное множество минимизирующих полиномов $P_0(t)$; для всех этих полиномов знак разности $\Omega(t) - P_0(t)$ меняется только в точках разрыва функции $s_{\min}(t)$, отвечающей точке C, и противоположен знаку этой функции.

В заключение заметим, что в задаче К. Поссе $\Omega(t) = t^n$, $u_k(t) = t^k$, $\mu(t) = t$, $\lambda(t) = (-1)^n t$. Для этого случая известны (см. [3]) эффективный критерий принадлежности точки C телу $\mathfrak{K}_{n-1}(-\mu,\ \mu)$ и способ нахождения точек θ_j.

Автор выражает признательность М. Г. Крейну, предложившему тему настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. «Усп. матем. наук», **6**, вып. 4, 3—120 (1951).

2. К. Поссе. Об одном вопросе о наименьших величинах. Приложение к XXXVIII т. Записок Академии наук, № 3, 1—31 (1880).

3. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, ГОНТИ, 1938.