

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СДВИЖЕК В ПРОСТРАНСТВЕ $L(0, \infty)$ С ВЕСОМ

В. П. Гурарий, Б. Я. Левин

Обозначим $L_\varphi(-\infty, \infty)$ нормированное пространство функций, в котором норма функции $f(x)$ определена следующим образом:

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(x) \geq 1$; 2) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{1+x^2} dx < \infty$.

После введения операции свертывания функций

$$f(x) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt$$

пространство $L_\varphi(-\infty, \infty)$ становится коммутативным нормированным кольцом, при этом в силу условия 2

$$\|f\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\|.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ некоторое множество функций $\{f_\alpha(x)\}$ из $L_\varphi(-\infty, \infty)$. Обозначим $J\mathfrak{M}$ — замыкание в $L_\varphi(-\infty, \infty)$ множества линейных комбинаций вида

$$\sum_{\alpha, \beta}^N c_{\alpha\beta} f(x - t_{\alpha\beta}) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Имеется следующее, принадлежащее Берлингу ([1]), обобщение известной теоремы Винера ([2]). Для того, чтобы $J\mathfrak{M}$ совпадало со всем пространством $L_\varphi(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразования Фурье всех функций из $L_\varphi(-\infty, \infty)$ одновременно не обращались в 0 ни в одной точке вещественной оси. Наиболее простое доказательство этой теоремы получается из теории нормированных колец, при этом существенную роль играет так называемая регулярность кольца $L_\varphi(-\infty, \infty)$, то есть существование в кольце функции, преобразование Фурье которой равно нулю вне конечного интервала.* Для нерегулярных колец теорема типа теоремы Винера впервые была получена Б. И. Коренблумом [3], который рассматривал кольцо $L_\varphi(-\infty, \infty)$ при весе $\varphi(x) = e^{k|x|}$. В этом случае преобразование Фурье есть функция, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq k$.

* Существование такой функции обеспечивается условием 3 на вес $\varphi(x)$. Ее построение можно найти в [4], [5], [9], [10].

Как показал Б. И. Коренблум, для полноты системы сдвижек $\{f_\alpha(x - t_{\alpha\beta})\}$ в пространстве L_φ должны выполняться два условия: для каждой точки полосы $|\operatorname{Im} z| \leq k$ существует функция $f(x)$, преобразование Фурье которой отлично от нуля в этой точке, и преобразования Фурье не должны слишком быстро стремиться к нулю при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$) сразу для всех функций $f_\alpha(x)$.*

В нашей работе изучается возможность установления аналогичной теоремы для пространства $L_\varphi(0, \infty)$, которое состоит из функций $f(x)$, принадлежащих $L_\varphi(-\infty, \infty)$ и равных нулю при $x < 0$. Это пространство $L_\varphi(0, \infty)$ является кольцом относительно операции свертывания:

$$f_1 * f_2 = \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt.$$

Преобразование Фурье функции $f(x) \in L_\varphi(0, \infty)$, то есть

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-itz} dt,$$

— функция аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и непрерывная в замкнутой полуплоскости.

Таким образом, кольцо $L_\varphi(0, \infty)$ не регулярно в указанном выше смысле.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество функций $\{f_\alpha(x)\}$ из $L_\varphi(0, \infty)$ и, как и раньше, $J\mathfrak{M}$ — замыкание множества линейных комбинаций вида

$$\sum_{\alpha, \beta}^N c_{\alpha\beta} f(x - t_{\alpha\beta}) \quad (0 < t_{\alpha\beta} < \infty)$$

(рассматриваются только положительные сдвиги функций $f_\alpha(x)$).

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы множество $J\mathfrak{M}$ совпало со всем пространством $L_\varphi(0, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1. *Нет примыкающего к нулю интервала $(0, \gamma)$, на котором каждая функция из $\mathfrak{M}$ равна нулю почти всюду.*

2. *Преобразования Фурье всех функций из $\mathfrak{M}$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq 0$.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *При заданном интервале (a, b) и $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ существует функция $\mu_{a, b, \varepsilon}(t) \in L_\varphi(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье которой $\tilde{\mu}_{a, b, \varepsilon}(x)$ равно нулю вне интервала (a, b) , единице на интервале $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ и $0 \leq \tilde{\mu}(x) \leq 1$ на интервалах $(a, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b)$.*

Доказательство. Как мы уже заметили раньше, существует функция $f_1(t) \in L_{\varphi_1}(-\infty, \infty)$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$, преобразование Фурье которой $F_1(x)$ равно нулю вне интервала $(a_1, a + \varepsilon)$. Функция $f_2(t) = f_1(t) * f_1(-t)$ принадлежит тому же кольцу $L_{\varphi_1}(-\infty, \infty)$ и ее преобразование Фурье равно $|F_1(x)|^2$. Построим функцию

$$F_2(x) = |F_1(x)|^2 - |F_1(b - a - \varepsilon + x)|^2$$

* Точнее, требуется, чтобы выполнялись условия:

$$\sup_{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F_\alpha(z)|}{\exp \frac{\pi x}{2\lambda}} = 0, \quad \sup_{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F_\alpha(z)|}{\exp \frac{-\pi x}{2\lambda}} = 0.$$

и, наконец,

$$F(x) = \frac{\int_a^x F_2(\xi) d\xi}{\int_a^{\frac{1}{a} + \varepsilon} F_2(\xi) d\xi}.$$

Эта функция, очевидно, также есть преобразование Фурье некоторой функции $f(t)$ из $L_\varphi(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет всем требованиям. Так как $L_{\varphi_1} \subset L_\varphi$, то $f(t) \in L_{\varphi_1}$, и лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится функция $\frac{1}{2\delta} \mu_{-\delta, \delta, \delta^*}^{(x)}$, которую мы будем обозначать $\mu_\delta(x)$.

Лемма 2. Пусть $f(t) \in L_\varphi(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье этой функции $F(x)$ не обращается в нуль на замкнутом интервале $[a, b]$. Если преобразование Фурье $\tilde{\mu}(x)$ функции $\mu(x)$ обращается в нуль вне интервала (a, b) , то уравнение

$$f * v = \mu \quad (1)$$

имеет единственное решение $v(x) \in L_\varphi(-\infty, \infty)$, непрерывно зависящее от $f(x)$ и $\mu(x)$ в метрике $L_\varphi(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Покажем сначала, что существует функция $f_1(t) \in L_\varphi(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье которой $F_1(x)$ на интервале (a, b) равно $F_1(x) = 1/F(x)$. Подберем число A так, чтобы выполнялось неравенство $|F(x)| < |A|$. Кроме того, можно так выбрать $\arg A$, что $\operatorname{Re} F(a) A^{-1} \geq 0$ и $\operatorname{Re} F(b) A^{-1} \geq 0$. Так как $F(a) \neq 0$ и $F(b) \neq 0$, то получается

$$\left|1 + \frac{F(a)}{A}\right| > 1, \quad \left|1 + \frac{F(b)}{A}\right| > 1,$$

и, следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех x из интервалов $(a - \varepsilon, a)$ и $(b, b + \varepsilon)$ выполняется неравенство $|1 + F(x) A^{-1}| > 1$.

Пусть далее функция $\lambda(x) \in L_\varphi$ и ее преобразование Фурье $\tilde{\lambda}(x)$ равно 1 на (a, b) , нулю вне интервала $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, и для всех x $0 \leq \tilde{\lambda}(x) \leq 1$. Существование такой функции было доказано в лемме 1. Тогда

$$\tilde{\lambda}(x) \neq 1 + F(x) A^{-1}.$$

По теореме Винера — Леви (см. [6]) функция

$$F_1(x) = \frac{\tilde{\lambda}(x)}{A + F(x) - \tilde{\lambda}(x) A}$$

является преобразованием Фурье функции $f_1(t) \in L_\varphi(-\infty, \infty)$ и на отрезке $[a, b]$ $F_1(x) = [F(x)]^{-1}$, при этом $f_1(t)$ непрерывно зависит от $f(t)$ в метрике $L_\varphi(-\infty, \infty)$. Функция $v(t) = \mu(t) * f_1(t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1) и непрерывно зависит от μ и f .

Лемма 3. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, то для функции

$$M(y) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-xy} dx$$

выполняется неравенство

$$\int_0^1 \ln \ln M(y) dy < \infty.$$

Этот факт был доказан ранее одним из авторов [7]. В своей существенной части доказательство теоремы опирается также на следующую теорему.

Теорема (Н. Левинсон [4]). Пусть $M(y)$ — положительная монотонно убывающая функция в интервале $(0, 1)$ и $M(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$.

Пусть далее $f(z)$ — функция аналитическая в прямоугольнике $|x| \leq a$, $|y| < b$ ($z = x + iy$) и в этом прямоугольнике справедливо неравенство

$$|f(z)| < M(y);$$

если

$$\int_0^1 \ln \ln M(y) dy < \infty, \quad (2)$$

то существует постоянная M , зависящая только от $M(y)$ и $\delta > 0$, такая, что в прямоугольнике $|x| < a - \delta$, $|y| < b$ выполняется неравенство

$$|f(z)| < M.$$

Перейдем к доказательству нашей теоремы.

Необходимость условий 1, 2 очевидна. Действительно, если все функции из $\mathfrak{M}$ обращаются в нуль на некотором интервале $(0, \gamma)$ почти всюду или если преобразования Фурье всех функций из $\mathfrak{M}$ обращаются в нуль в некоторой точке z_0 ($\operatorname{Im} z_0 \leq 0$), то все функции из $J_{\mathfrak{M}}$ обладают этими же свойствами, а это означает, что $J_{\mathfrak{M}}$ — собственное подпространство $L_{\varphi}(0, \infty)$.

Достаточность. Обозначим через $M_{\varphi}(0, \infty)$ пространство, сопряженное к $L_{\varphi}(0, \infty)$. Оно состоит из функций $g(x)$, таких, что

$$\operatorname{vraimax} \frac{|g(x)|}{\varphi(x)} = \|g\| < \infty.$$

Так как полнота системы функций эквивалентна отсутствию нетривиального функционала, ортогонального всем функциям системы, то достаточно доказать, что из равенства

$$\int_0^{\infty} f_{\alpha}(x-t) g(x) dx = 0, \quad (3)$$

где $t > 0$, $f_{\alpha}(x)$ — любая функция из $\mathfrak{M}$, а $g(x)$ — некоторая функция из $M_{\varphi}(0, \infty)$ следует, что $g(x) = 0$ почти всюду.

Введем функцию

$$h_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} f_{\alpha}(x-t) g(x) dx. \quad (4)$$

В силу (3), $h_{\alpha}(t) = 0$ при $t > 0$. Докажем, что $h_{\alpha}(-t) \in M_{\varphi_1}(0, \infty)$. В самом деле,

$$|h(-t)| = \left| \int_{-t}^{\infty} f(x+t) g(x) dx \right| \leq \int_0^{\infty} |f(x)| |g(x-t)| dx \leq \|g\| \|f\| \varphi_1(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \varphi(-t).$$

Обозначим

$$G^+(z) = \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} dt, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

$$H_{\alpha}(z) = \int_{-\infty}^0 h_{\alpha}(t) e^{itz} dt, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Заметим, что если бы $g(t)$ принадлежала $L(0, \infty)$, мы легко показали бы, что $G^+(z)$ аналитически продолжается через вещественную ось на всю плоскость.

Действительно, равенство (4) можно записать в форме

$$h_{\alpha}(-t) = f_{\alpha}(-t) * g(t)$$

и, применяя преобразование Фурье, получаем

$$H_{\alpha}(x) = F_{\alpha}(x) G^+(x). \quad (4')$$

Так как функции $H_{\alpha}(x)$ и $F_{\alpha}(x)$ — предельные значения функций $H_{\alpha}(z)$ и $F_{\alpha}(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и непрерывных в замкнутой полуплоскости, то равенство (4') показывает, что функция $G^+(z)$ продолжается через всю вещественную ось в нижнюю полуплоскость, совпадая там с функцией

$$G^-(z) = \frac{H_{\alpha}(z)}{F_{\alpha}(z)},$$

которая поэтому не зависит от α . Из условия 2 теоремы получается, что $G^-(z)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и, следовательно,

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z) & \operatorname{Im} z > 0 \\ G^-(z) & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad (5)$$

целая функция.

В общем случае $g(t) \in M_{\varphi}$ доказательство этого факта существенно усложняется.

Функции $G^+(z)$ и $H_{\alpha}(z)$ по-прежнему аналитические в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, но теперь они уже не обязаны иметь предельные значения на вещественной оси. Можно лишь утверждать на основании леммы 3, что вблизи вещественной оси выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |G^+(z)| &\leq \|g\| M(y) & y > 0 \\ |H_{\alpha}^*(z)| &\leq \|H_{\alpha}\| M(|y|) & y < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

причем $M(y)$ удовлетворяет условию (2).

Сейчас мы снова введем в рассмотрение функцию

$$G^-(z) = \frac{H_{\alpha}(z)}{F_{\alpha}(z)}$$

и докажем, что эта функция не зависит от α . Для этого запишем два равенства

$$f_{\alpha}(-t) * g(t) = h_{\alpha}(t), \quad f_{\beta}(-t) * g(t) = h_{\beta}(t).$$

Из них получается, что

$$f_{\alpha}(-t) * h_{\beta}(t) = f_{\beta}(-t) * h_{\alpha}(t).$$

Умножая $f_\alpha(-t)$, $f_\beta(-t)$, $h_\alpha(t)$, $h_\beta(t)$ на $e^{y't}$ ($y < 0$), мы приведем последнее равенство к виду

$$f_\alpha(-t) e^{y't} * h_\beta(t) e^{t'y} = f_\beta(-t) e^{t'y} * h_\alpha(t) e^{y't}$$

и, переходя к преобразованиям Фурье, получаем

$$\frac{H_\alpha(x + iy)}{F_\alpha(x + iy)} = \frac{H_\beta(x + iy)}{F_\alpha(x + iy)}.$$

В силу условия 2 теоремы функция $G^-(z)$ — аналитическая в полуплоскости $\text{Im } z < 0$. Покажем, что и сейчас функции $G^+(z)$ и $G^-(z)$ являются аналитическим продолжением одна другой. Выберем произвольную точку вещественной оси. По условию 2 теоремы найдется функция $f_\alpha(x)$, преобразование Фурье которой не обращается в нуль в этой точке, а значит, и в некотором интервале (a, b) , окружающем эту точку. Мы покажем, что $G^+(z)$ и $G^-(z)$ аналитически продолжают друг друга через интервал (a, b) . Обозначим для этого через $v_\delta(y, t)$ решение уравнения

$$e^{y't} f_\alpha * v_\delta(y, t) = v_\delta(t) e^{i\lambda t}, \quad -h \leq y \leq 0, \quad \lambda \in (a + \delta, b - \delta),$$

где $v_\delta(t)$ — функция, построенная в лемме 1.

Из этого равенства получается, что

$$\tilde{v}_\delta(y, x) = \frac{\tilde{\mu}_\delta(x - \lambda)}{F_\alpha(x + iy)} \quad (F_\alpha(x + iy) \neq 0 \quad -h \leq y \leq 0, \quad a + \delta < x < b - \delta). \quad (7)$$

В силу леммы 2 решение этого уравнения $v_\delta(y, t)$ существует при каждом y ($-h \leq y \leq 0$) и непрерывно зависит от параметра y на всем сегменте в метрике $L_\varphi(-\infty, \infty)$. Умножим обе части равенства (4) на $v_\delta(0, t)$ и проинтегрируем по t в пределах от $-\infty$ до ∞ . Совершая законную в силу теоремы Фубини перемену порядков интегрирования, будем иметь

$$\int_0^\infty g(x) \mu_\delta(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^0 v_\delta(0, t) h_\alpha(t) dt = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 v_\delta(y, t) h_\alpha(t) e^{-y't} dt. \quad (8)$$

В силу равенства Парсеваля и (7)

$$\int_{-\infty}^0 v_\delta(y, t) h_\alpha(t) e^{-y't} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{\mu}_\delta(x - \lambda)}{F_\alpha(x + iy)} H_\alpha(x + iy) dx. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$G_\delta(z) = \begin{cases} G_\delta^+(z) = \int_0^\infty g(x) \mu_\delta(x) e^{izx} dx & \text{Im } z \geq 0 \\ G_\delta^-(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\mu}_\delta(x) \frac{H_\alpha(x + z)}{F_\alpha(x + z)} dx & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Из равенств (8), (9) получается, что на интервале (a, b) предельные значения $G_\delta^+(z)$ и $G_\delta^-(z)$ совпадают и, следовательно, $G_\delta(z)$ — функция аналитическая в прямоугольнике $R: a < x < b, |y| < 1$.

Покажем, что во внутреннем прямоугольнике $R': a < a' \leq x \leq b' < b, |y| < 1$ справедливо неравенство

$$|G_\delta(z)| < M \quad (10)$$

для всех $\delta < \delta_1 = \min(b - b', a' - a)$. Используя оценки для $G_\delta(z)$, аналогичные (6), которые легко получаются из представления для $G_\delta(z)$, будем иметь неравенство

$$|G_\delta(x + iy)| < CM(|y|),$$

в котором C не зависит от $\delta \leq \delta_1$. В силу леммы 3 интеграл (2) сходится, и мы имеем возможность, применяя теорему Левинсона, убедиться в справедливости оценки (10). Заметим теперь, что, как следует из конструкции семейства $\mu_\delta(x)$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} G^+(z) & \operatorname{Im} z > 0 \\ \frac{1}{2\pi} G^-(z) = \frac{H_\alpha(z)}{2\pi F_\alpha(z)} & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

По известной теореме Стильтеса функция $G(z)$, определенная равенством (5), совпадает с аналитической в прямоугольнике R , а значит в силу произвольности (a, b) является целой функцией.

Оценим теперь целую функцию $G(z)$. Функция $G^+(z)$, в силу (6), при $y \geq h$ удовлетворяет неравенству

$$|G^+(z)| \leq M(h) \|g\| \quad (\operatorname{Im} z > h). \quad (11)$$

Для оценки величины

$$G^-(z) = \frac{H_\alpha(z)}{F_\alpha(z)}$$

в нижней полуплоскости заметим, что $H_\alpha(z)$ и $F_\alpha(z)$ аналитические, ограниченные функции при $\operatorname{Im} z < -h$. Поэтому они вполне регулярного, роста (см. [8], стр. 208) и поэтому индикатор функции $G(z)$ равен

$$h_{G-}(\theta) = (K_{H_\alpha} - K_{F_\alpha}) |\sin \theta|, \quad (0 > \theta > -\pi),$$

где

$$K_{H_\alpha} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln |H_\alpha(z)|}{|z|}, \quad K_{F_\alpha} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln |F_\alpha(z)|}{|z|}.$$

Из ограниченности $F_\alpha(z)$ и $H_\alpha(z)$ следует, что $K_{H_\alpha} \leq 0$ и $K_{F_\alpha} \leq 0$. С другой стороны, известно (см. [8], стр. 607), что $-K_{F_\alpha}$ равно длине наибольшего, примыкающего справа к нулю интервала, на котором $f_\alpha(t)$ равна нулю почти всюду. По условию 1 теоремы можно за счет выбора $f_\alpha(t)$ сделать $-K_{F_\alpha}$ как угодно малым, и так как $G^-(z)$ не зависит от этого выбора, то при $-\pi < \theta < 0$ получается

$$h(\theta) \leq 0.$$

В верхней полуплоскости $y \geq h$ функция $G(z)$ ограничена. Таким образом, $G(z)$ имеет нулевую степень внутри углов $|\theta| - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \delta$. Оценим теперь $G(z)$ внутри оставшихся углов.

Для этого воспользуемся следующей оценкой функции $G^-(z)$ в нижней полуплоскости

$$\ln |G^-(z - ih)| \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln CM(h) - \ln |F_\alpha(t - ih)|}{(t - x)^2 + y^2} dt + ky$$

(C — постоянная, $k > 0$) ([8], стр. 311).

Отсюда далее следует, что при $y < -h$ ([8], стр. 312)

$$\ln |G^-(z - ih)| \leq \ln C_1 M(h) + O\left(\frac{1 + |z|^2}{|y - h|}\right).$$

Из последней оценки получаем неравенство

$$\ln |G^-(z - 2ih)| \leq \ln C_1 M(h) + \frac{C_2}{h} (1 + |z|^2) \leq \ln CM(h) + \frac{C_1^2}{2h^2} + \frac{1}{2} (1 + |z|^2)^2$$

(C с индексами обозначают постоянные). Если ввести функцию $M_1(h)$

$$\ln M_1(h) = \ln CM\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{2C_1^2}{h^2} + C_2,$$

мы получим для $G^-(z)$ оценку

$$\ln |G^-(z - ih)| \leq \ln M_1(h) + C_3 |z|^4. \quad (12)$$

Рассмотрим в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ функцию

$$G_1(z) = G(z) e^{-Gz^4}.$$

Из (11) и (12) получается, что

$$|G_1(z)| < C_5 M_1(|y|) \quad (|y| \leq 1). \quad (13)$$

Применяя теорему Левинсона к семейству функций $G_1(z + t)$ ($-\infty < t < \infty$) в прямоугольнике $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, мы получим, что

$$|G_1(iy + t)| < M,$$

где M — постоянная, то есть, что в полосе $|y| < 1$

$$\ln |G(z)| < \ln M + C_3 |z|^4.$$

Итак, объединяя (12), (13), получаем оценку, справедливую внутри углов

$$\left| |\theta| - \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

$$|G(z)| < C_6 e^{C_3 |z|^4};$$

С помощью принципа Фрагмена — Линделёфа легко устанавливается, что $G(z)$ имеет нулевую степень внутри этих углов, то есть что $G(z)$ — целая функция нулевой степени. Но так как $G(x + iy) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $y > 0$, то получается, что $G(z) \equiv 0$, а, значит, $g(x) = 0$ почти всюду. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beurling A, Sur les integrales de Fourier absolument convergentes et leur application a une transformation fonctionnelle, *Congres des Mathematiques a Helsingfors* (1938)
2. Wiener N, Tauberian theorems, *Ann. Math.*, 33 (1932).
3. Б. И. Коренблюм. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций. «Труды Моск. матем. общ-ва» 7 стр. 121 (1956)
4. Levinson A. Gap and density theorems, *American mathematical society*, New — York, 1940.
5. Л. И. Ронкин. Об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами, «Докл. АН СССР», 92, 887 (1953).
6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев. Коммутативные нормированные кольца, ГИФМЛ, 1960 г.
7. В. П. Гурарий. О спектре растущих функций. «Докл. АН СССР» № 5, 859, 1958.
8. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1956.
9. В. А. Марченко. О некоторых вопросах аппроксимации на всей оси. Зап. Харьк. Мат. общ. (4), 22, 1950.
10. Mandelbrojt S. *Anal. Funct and Classes...*, The Rice Inst. Pamphlet, 29, 1944,