

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗИНА  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ  
Кафедра комп'ютерної фізики

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА  
до кваліфікаційної роботи  
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр

«Вплив покриттів на зниження рівня плескань рідини в резервуарах при  
короткочасних імпульсних навантаженнях»

Виконав: студент 2 курсу, групи НФ-64

Міщенко М. С.

Спеціальність: 105 – «Прикладна фізика та  
наноматеріали»

Освітньо-наукова програма: «Комп'ютерна  
фізика»

Керівник: д. т. н., професор Стрельнікова О. О.

Рецензент:

Харків – 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики

Кафедра комп'ютерної фізики

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) магістр

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Костянтин НСМЧЕНКО  
(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 р.

**ЗАВДАННЯ  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ**

Міщенко Максиму Сергійовичу

1. Тема роботи «Вплив покриттів на зниження рівня плескань рідини в резервуарах при короткочасних імпульсних навантаженнях», керівник роботи: Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від 23 січня 2024 року № 4201- 5/144.
2. Строк подання студентом роботи 20 травня 2024.
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
  - провести аналіз сучасного стану питання міцності та коливань оболонкових конструкцій частково заповнених рідиною;
  - здійснити огляд публікацій, присвячених дослідженню коливань рідини в циліндричних резервуарах;
  - сформулювати задачу визначення вільних коливань рідини в циліндричних резервуарах за умови рівномірного обертання;
  - провести аналіз граничних умов на поверхнях оболонки та рідини;

- побудувати форму вільної поверхні в випадку обертання циліндричного резервуару із заданою частотою;
- побудувати алгоритм визначення власних частот;
- провести числові дослідження.

4. План роботи:

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми, узгодження, а також затвердження її на кафедрі
2	Робота над літературою та іншими джерелами
3	Затвердження теми на кафедрі
4	Написання вступу до роботи та проведення аналізу сучасного стану питання міцності та коливань оболонкових конструкцій
5	Здійснення огляду публікацій, присвячених дослідженню коливань рідини в циліндричних резервуарах та формулювання задачі визначення вільних коливань рідини в циліндричних резервуарах за умови рівномірного обертання
6	Проведення аналізу граничних умов на поверхнях оболонки та рідини
8	Будування форми вільної поверхні в випадку обертання циліндричного резервуару із заданою частотою
9	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
10	Подача науковому керівнику
11	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
12	Попередній захист
13	Захист

5. Дата видачі завдання 23 лютого 2024 року

Студент \_\_\_\_\_ Максим МІЩЕНКО  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ Олена СТРЕЛЬНІКОВА  
(підпис)

## РЕФЕРАТ

Міщенко Максим Сергійович «Вплив покриттів на зниження рівня плескань рідини в резервуарах при короткочасних імпульсних навантаженнях»

Кваліфікаційна робота магістра з Комп'ютерної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н.Каразіна, 2024. – 61 с.

Розглянуто коливання рідини в жорстких круглих циліндричних оболонках з внутрішніми гнучкими мембранами або покритими мембранами. Рідина в ємності вважається ідеальною і нестисливою, а рух рідини безобертовим. У нижче сформульованих припущеннях вводиться потенціал швидкості; воно задовольняє рівняння Лапласа. Сформульовано крайову задачу для потенціалу швидкості. Для отримання граничних умов на вільній поверхні рідини враховують прогин мембрани та дотримуються рівності нормальних складових швидкостей рідини та мембрани. Передбачається, що нестислива і нев'язка рідина здійснює безобертальний рух в області рідини, розділеної на дві підобласті внутрішньою гнучкою мембраною, яка встановлена на заданій висоті. Отримано аналітичний розв'язок двох крайових задач для невідомих потенціалу швидкості та прогину мембрани у вигляді ряду Фур'є–Бесселя з коефіцієнтами, що залежать від невідомої частоти. Задовольняючи граничні умови, отримуємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь. Умова нетривіального розв'язку цієї системи дає нелінійне рівняння для обчислення частот. Досліджено зв'язані коливання мембрани і рідини в циліндричних резервуарах. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою аналітичного підходу, з результатами, отриманими за допомогою граничного та методу скінченних елементів. Як впливає з чисельного моделювання, якщо мембрана встановлена всередині циліндра, то найважливішим параметром, що впливає на результат, є висота установки мембрани. Якщо мембрана встановлена на значній відстані від вільної поверхні, то частота плескання практично не змінюється, а точніше трохи збільшується. Виявлено залежності частот від рівня наповнення.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** КОЛИВАННЯ РІДИНИ, ЖОРСТКА КРУГОВА

ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА, ГНУЧКА МЕМБРАНА, РЯДИ ФУР'Є–  
БЕССЕЛЯ, МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ І ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

## **ABSTRACT**

Mischenko Maksym “Coatings effects on lowering the liquid sloshing level in reservoirs under short-term impulse loads”

Qualification work of the master of computer physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2024. – 61 p.

Liquid vibrations in rigid circular cylindrical shells with internal flexible membranes or covered by membranes are considered. The liquid in the container is supposed to be an ideal and incompressible one, and the fluid motion is irrotational. In above formulated suppositions the velocity potential is introduced; it satisfies the Laplace equation. The boundary value problem is formulated for the velocity potential. To obtain boundary conditions on the liquid free surface, the membrane deflection is considered, and the equality of normal components of liquid and membrane velocities is satisfied. The incompressible and inviscid liquid is supposed to perform irrotational motion in the fluid domain divided into two sub-domains by internal flexible membrane that is installed at the given height. The analytical solution of two boundary value problems are obtained for unknown velocity potential and membrane deflection as the Fourier–Bessel series with coefficients depending on unknown frequency. Satisfying boundary conditions, we obtain the system of homogeneous algebraic equations. The condition of a non-trivial solution of this system gives the non-linear equation for evaluating the frequencies. The coupled membrane and liquid vibrations in cylindrical tanks are studied. The comparison of results obtained using analytical approach with ones received with boundary and finite element method is provided. As follows from numerical simulations, if the membrane is installed inside the cylinder then the most important parameter affecting the result, is the height of the membrane installation. If the membrane is installed at a considerable distance from the free surface, then the sloshing frequency practically does not change, and more precisely, it slightly increases. The dependencies of frequencies via the filling level are identified.

**KEYWORDS: LIQUID VIBRATIONS, RIGID CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL, FLEXIBLE MEMBRANE, FOURIER–BESSEL SERIES, FINITE AND BOUNDARY ELEMENT METHODS**

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	10
1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПИТАННЯ .....	11
2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ .....	16
2.1 Диференціальне рівняння для визначення тиску рідини на змочену поверхню оболонки. ....	16
2.2 Наявність покриття вільної поверхні .....	19
2.3 Метод заданих форм .....	22
3. КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З МЕМБРАНОЮ .....	23
3.1 Коливання рідини в циліндричних резервуарах з внутрішніми гнучкими мембранами.....	27
4. Аналіз результатів .....	32
4.1 Валідаційне дослідження .....	32
5. Гасіння плескань при сейсмічному навантаженні .....	39
5.1 Формулювання задачі.....	41
5.2 Числові результати .....	43
ВИСНОВКИ .....	54
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	51

## **ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР**

КЗ - крайова задача

МГЕ – метод граничних елементів

МСЕ - метод скінченних елементів

ЕВА - етиленвінілацетат

## ВСТУП

Однією з найважливіших науково-технічних проблем сучасної техніки є забезпечення стійкості ракет-носіїв на різних етапах польоту, та міцності резервуарів з вибухонебезпечними речовинами. Коливання рідини в баках та резервуарах можуть призвести до порушення цілісності конструкції, пошкодження корисного вантажу і іншим аварійним ситуаціям. Необхідність розв'язання таких проблем викликала інтенсивний розвиток нових теорій, методів та алгоритмів розрахунку оболонкових конструкцій протягом останніх десятиліть. Особливий теоретичний і практичний інтерес при цьому приймає проблема взаємодії твердих і пружних тіл з рідиною.

Таким чином, значна кількість прикладних задач з різних галузей техніки приводить до необхідності дослідження спільного руху твердих деформованих та рідких середовищ. Деякі з цих задач були сформульовані й розв'язані ще в ХІХ столітті. Однак період найбільш інтенсивної розробки даної проблеми приходить на другу половину ХХ століття у зв'язку з розвитком ракетної та авіаційної техніки, а також з появою новітньої обчислювальної техніки.

## 1. ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПИТАННЯ

Проблеми коливань конструкцій з відсіками, що містять рідину, знаходяться в центрі уваги дослідників протягом декількох останніх десятиліть. Перші роботи в цьому напрямку з'явилися на початку 60-х років минулого століття та були пов'язані з аналізом причин сходження з орбіти та втрати стійкості ракет-носіїв перших місій на Юпітер, що виконувались Сполученими Штатами Америки. Одна з піонерських праць в цій галузі була опублікована в 1969 році [1]. У ній проведено аналіз плескань рідини в циліндричних баках при різних рівнях гравітації на основі аналітичних методів; частоти коливань вивчалися в залежності від числа Бонда. Ґрунтовний аналіз досліджень по динаміці рідини в посудинах тиску і резервуарах був наданий в монографії [2]. Зауважимо, що перші роботи в цьому напрямку пов'язані з дослідженнями плескань в баках простої форми, з припущеннями щодо двовимірного характеру руху рідини. В [3] для обчислення сил тиску рідини в призматичних і циліндричних резервуарах застосована нелінійна теорія, з урахуванням зміни форми вільної поверхні за часом. Відзначимо, що в подальшому числові методи вивчення руху рідини за наявності вільної поверхні знайшли широке застосування в багатьох інженерних галузях [4, 5], однак найбільш цікавими є задачі, пов'язані з аерокосмічною технікою. У повністю (з.або практично повністю) заповнених баках ракет-носіїв вільна поверхня не може здійснювати сильних осциляцій. Це відповідає першим стадіям місії. Однак, на тих стадіях польоту, коли рівень рідкого заповнювача падає, ефект плескання стає домінуючим. Неодноразово зазначалося, що потужні плескання заповнювача можуть призвести до порушення польотної траєкторії, як це сталося, наприклад, при запусках ракети-носія Фалькон 1 (3.Falcon 1) в 2006, 2007 і 2008 роках [6]. Наступною важливою проблемою при вивченні коливань паливних баків є вивчення зв'язаних коливань рідини, що взаємодіє з пружними стінками бака. В

[7] здійснено класифікацію коливань вільної поверхні рідини в резервуарах та виділено три основні форми плескань: а) поздовжні плескання, б) вертикальні плескання, в) обертальні плескання. Саме частково заповнені резервуари схильні до дії особливо сильних плескань. Потужний рух рідини зазвичай створює високий локалізований тиск на стінки резервуара, що в свою чергу може призвести до часткового або повного руйнування пружної конструкції, або викликати втрату стійкості. Проектування таких резервуарів вимагає ретельного дослідження поведінки рідини в них за різні умови експлуатації. Особливої уваги заслуговує вивчення локальних максимумів розподілу тиску на стінках резервуара, які можуть принаймні вдвічі перевищувати значення відповідних величин в незаповненому резервуарі внаслідок дії прикладеного зовнішнього навантаження [8]. У вантажних танкерах проблема плескань стоїть особливо гостро: навіть малі рухи контейнера можуть призвести до значних коливань поверхні рідини, що вимагає вивчення стійкості. Ряд досліджень, присвячених проблемам плескань рідини в резервуарах, знайшов своє відображення в ґрунтовних оглядах [2, 9]. До цих досліджень відносяться також роботи [10 - 12]. Із [13] застосовано нелінійну теорію для визначення сили тиску на стінки кругових і призматичних резервуарів, що рухаються з прискоренням та виявлено, що на початковій стадії руху під дією імпульсного навантаження хвилі на вільній поверхні не виникають, а вся маса рідини переходить на одну сторону контейнера. Далі, в роботах [14, 15] в двовимірному формулюванні вивчено вплив прискорення і кривини вільної поверхні при русі рідини в прямокутних контейнерах, і доведено, що динамічні характеристики резервуару суттєво залежать від відношення рівня заповнення до ширини контейнера. В [16] досліджено розподіл тиску на стінках горизонтального циліндричного резервуару безпосередньо після впливу ударного навантаження при рівні заповнення рідиною до 95%. Дослідження довело, що тиск на стінки резервуара зростає разом зі збільшенням рівня заповнення. В [17] вивчені

короткочасні навантаження на резервуари з рідиною та описано п'ять різних фаз руху рідини з різними амплітудами. В [18] проведено числовий експеримент для двовимірного прямокутного резервуара з жорсткими стінками при одночасній дії горизонтального і вертикального прискорення. У цій роботі розглянуто нев'язку нестисливу рідину, враховано нелінійний характер руху. Показано, що фундаментальна частота коливань істотно залежить від ширини резервуара і рівня заповнення. Ефекти в'язкості рідини досліджувалися в [18]. Виявлено, що в'язкість проявляється при малих амплітудах і високому рівні заповнення. Однак, в [19] встановлено, що ефектами в'язкості можна знехтувати при великих амплітудах плескання. Традиційні підходи, що використовуються для оцінки навантажень при плесканнях, включають лінійну і нелінійну теорію потенціалу, натурний експеримент і експеримент на модельних зразках. В останні роки робляться спроби застосування методів обчислювальної механіки рідини (3.Computational Fluid Dynamics, CFD). До цих робіт слід віднести [20]. Тут також показано, що власні частоти коливань істотно залежать від рівня заповнення. Проте, методи і теорія потенціалу мають деякі обмеження і не здатні дати аналіз систем при явищах фрагментації рідини або злиття її окремих частин. Однак, в деяких випадках є достатнім застосовувати спрощені моделі для опису руху рідини в рухомому резервуарі. Перевага цих моделей полягає в тому, що вони дозволяють описати плескання з достатньою точністю, використовуючи при цьому найпростіші рівняння, і дати швидко попередню оцінку динамічних характеристик. При цьому в окремих випадках вдається отримати аналітичні розв'язки. Але відзначимо, що такі розв'язки придатні лише для опису плескань з невеликою амплітудою в контейнерах простої форми. Такі дослідження не можуть бути узагальнені стосовно плескань з великою амплітудою в контейнерах складної форми, з конструкційними перегородками та іншими пристроями [21].

В [22] встановлено, що збудження коливань, навіть на нижчій частоті в

двовимірному резервуарі, може призвести до того, що рух стане нестійким, потім істотно тривимірним, і навіть хаотичним. У [23, 23] здійснено серію досліджень тривимірних плескань, включаючи нелінійні плескання в кубічних резервуарах. В [24] розроблено скінченно-елементний метод для розв'язання задач потенціального руху рідини і дослідження тривимірної нелінійної поведінки рідини в резервуарі, в [25] запропоновано підхід, заснований на методі скінченних різниць, для вивчення динаміки рідини в рухомому резервуарі в тривимірному формулюванні. В [26] використано метод скінченних елементів для вивчення частот і форм вільних коливань рідини в сферичному резервуарі. У [27] наведено уточнені диференціальні рівняння для визначення форми вільної поверхні, та запропоновано варіант методу скінченних різниць для їх розв'язання.

У [29] запропонована уточнена математична модель. Розрахунковими є рівняння Нав'є-Стокса, що подаються мішаною системою гіперболічних і нелінійних еліптичних диференціальних рівнянь для опису руху в'язкої нестисливої рідини. Локація і переміщення вільної поверхні рідини в резервуарі визначається за допомогою процедури, що відома як метод рідких об'ємів. Це потужний метод, заснований на використанні фінітних функцій, значення яких дорівнюють одиниці всередині рідкого об'єму і нулю поза ним. Математичному моделюванню вимушених коливань динамічної системи "оболонкова конструкція – рідина" і визначенню напруженодеформованого стану оболонкових конструкцій при взаємодії з рідким заповнювачем присвячені роботи [30, 31].

Незважаючи на наявні теоретичні досягнення, проблема коливань пружних контейнерів і баків з рідиною залишається в центрі уваги багатьох 16 наукових шкіл. Це пов'язано з тим, що проектування кожної нової потужної ракети-носія вимагає створення нових моделей баків пального та окислювача, які останнім часом почали приймати екзотичні форми: коаксіальних або тороїдальних оболонок, комбінованих циліндрико-сферичних та сфероконічних систем

оболонки. Залишаються нез'ясованими питання впливу наявності часткових покриттів вільної поверхні, стисливості та в'язкості рідини на частоти власних коливань, одночасної дії горизонтальних та вертикальних навантажень на амплітуду коливань вільної поверхні.

## 2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

### 2.1. Диференціальне рівняння для визначення тиску рідини на змочену поверхню оболонки

Для моделювання руху рідини використано математичну модель, в якій припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. Досліджуємо лише малі коливання. В цих умовах існує потенціал швидкості  $\varphi(x,y,z,t)$ , градієнт якого є швидкістю рідини, а саме

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Для визначення функції тиску,  $p = p(x, y, z, t)$  скористаємося рівняннями руху рідкого середовища в напруженнях

$$\begin{cases} \rho_l w_x = Z_1 + \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho_l w_y = Z_2 + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho_l w_z = Z_3 + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$\rho_l$  - густина рідини,  $w_{x,y,z}$  - прискорення рідини,  $Z_i$  – компоненти об'ємної сили,  $\sigma, \tau$  - компоненти тензора напружень рідкого середовища. Співвідношення між компонентами тензора напружень і тензорів деформацій (або швидкостей деформацій) визначаються гіпотезами щодо рідкого середовища. У загальному випадку ці співвідношення можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{V}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  - перший і другий коефіцієнти в'язкості,  $\vec{V}$  - вектор швидкостей рідини.

Оскільки припускається, що рідина є нестисливою, то виконана умова збереження об'єму

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння руху для нестисливого рідкого середовища приймають вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Якщо припустити, що рідина є також ідеальною, то відсутні дотичні компоненти тензора напружень, тобто відсутній девіатор напружень, і тензор напружень є кульовим. Середнє арифметичне значення нормальних напружень, що діють на трьох взаємно-перпендикулярних площадках, що проходять через одну точку, взяте з протилежним знаком, вважають гідродинамічним тиском  $p$  в

цій точці. Знак мінус ставиться тут умовно, і показує, що в рідині завжди маємо справу з тиском (а не розтягуванням), спрямованим всередину об'єму. Таким чином,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

і рівняння (2.4) приймають вид

$$\rho_l w_x = Z_1 - \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \rho_l w_y = Z_2 - \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \rho_l w_z = Z_3 - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Далі будемо розглядати ідеальну нестисливу рідину, рух якої є безвихровим (потенційним). Відзначимо, що згідно з теоремою Томсона, при русі ідеальної нестисливої рідини під дією потенційних сил, циркуляція швидкості за замкнутим рідким контуром не змінюється за часом. Це означає, наприклад, що рух рідини, що почався зі стану спокою, залишається потенційним в усі наступні моменти часу.

Припустимо, що об'ємні сили мають потенціал. Тоді справедливі умови теореми Томсона. Відповідні прискоренням  $a_x(t), a_z(t)$  компоненти об'ємної сили дорівнюють

$$Z_1 = -\rho_l a_x(t), \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = -\rho_l g - \rho_l a_z(t).$$

Тоді  $\mathbf{Z} = -\rho_l \text{grad}(a_x(t)x + gz + a_z(t)z)$ , отже, об'ємні сили в цьому випадку мають потенціал, який дорівнює  $-\rho_l(a_x(t)x + gz + a_z(t)z)$ .

Залежність складових прискорення тільки від часу обумовлюється великими розмірами театру (зони) землетрусу в порівнянні з розмірами ємностей, що розглядаються. Співвідношення (2.4) приймають вид

$$\rho_l \mathbf{w} = -\text{grad}(p + \rho_l a_x(t)x + \rho_l gz + \rho_l a_z(t)).$$

Таким чином, прискорення руху ідеального нестисливого рідкого середовища завжди мають потенціал.

Будемо розглядати задачу в лінійному формулюванні, тобто нехтуємо добутками швидкостей на їх похідні. Тоді співвідношення (2.4) приймають форму

$$\rho_l \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_l a_x(t)x, \quad \rho_l \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho_l \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_l a_z(t)z - \rho_l gz. \quad (2.5)$$

Для визначення тиску з боку рідини на оболонку (з урахуванням дії об'ємних сил) служить лінеаризований інтеграл Коші-Лагранжа.

Сформулюємо крайову задачу для рівняння Лапласа у вигляді

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0. \quad (2.6)$$

Тут  $\mathbf{n}$  – одинична зовнішня нормаль до поверхні,  $p_0$  – атмосферний тиск,  $\zeta = \zeta(3. x, y, t)$  – невідома функція, що описує положення та рух вільної поверхні. Тобто маємо крайову задачу відносно невідомого потенціалу  $\Phi$ , що пов'язаний кінематичною граничною умовою з функцією  $\zeta(x, y, t)$ .

## 2.2. Наявність покриття вільної поверхні

Як ефективний демпфер для зменшення амплітуди плескань може бути використано плавучу кришку (див. рис. 2.1). Динамічну поведінку такої кришки будемо описувати, виходячи з рівняння руху мембрани. При цьому на вільній поверхні треба задати умову рівності швидкостей рідини та мембрани.

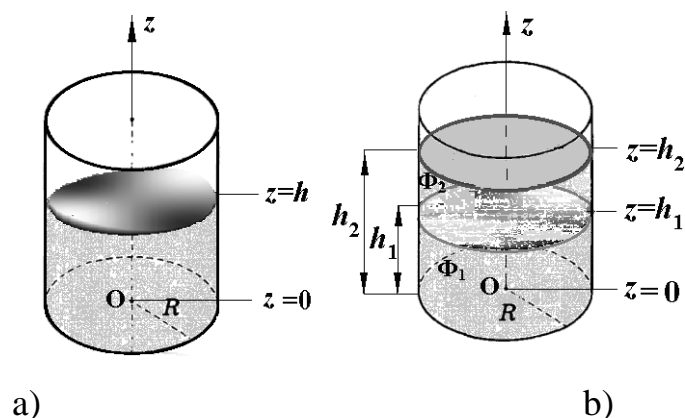


Рисунок 2.1 – Оболонка з мембраною

Розглядається жорстка циліндрична оболонка, вільна поверхня якої покрита мембраною. Вважається, що оболонка заповнена ідеальною нестисливою рідиною, рух якої, індукований зовнішніми впливами, вважається безвихровим. На циліндричній стінці  $r=R$  та на дні резервуара  $z=0$  умови непротікання формуються таким чином:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, r = R \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, z = 0.$$

Щоб сформулювати граничну умову на вільній поверхні, розглянемо рівняння руху мембрани

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{p}{T},$$

де  $w$  – нормальне переміщення мембрани, м;

$T$  – натяг на одиницю довжини, Н/м;

$\mu$  – маса на одиницю площини, кг;

$p$  – тиск рідини на поверхню мембрани, Н/м<sup>2</sup>.

Далі сформульовані граничні умови для переміщення мембрани при  $r = R$ :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = w = 0.$$

На вільній поверхні рідини нормальні компоненти швидкості рідини та мембрани повинні бути рівними

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Також на вільній поверхні має виконуватись динамічна умова у вигляді

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g w. \quad (2.7)$$

Отже, сформульовано зв'язану крайову задачу для визначення невідомих функцій  $\varphi$  та  $w$ .

Розв'язання цієї задачі дозволяє дослідити як змінюється рівень вільної поверхні рідини в баку за наявності покриття у вигляді мембрани.

### 2.3. Метод заданих форм

Зобразимо невідомі функції  $\Phi$  та  $\zeta$  в циліндричних координатах у вигляді рядів:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^m \cos(3.l\theta) \sum_{k=1}^n d_{kl}(t) \zeta_k(r), \quad (2.8)$$

$$\Phi(3.r, \theta, z, t) = \sum_{l=0}^m \cos(3.l\theta) \sum_{k=1}^{n_2} \dot{d}_{kl}(3.t) \varphi_k(r, z) \quad (2.9)$$

Тут  $\varphi_k(r, z)$ ,  $\zeta_k(r)$ - базисні функції, між якими на вільній поверхні існує такий зв'язок [16]:

$$\left. \frac{\partial \varphi_k(r, z)}{\partial n} \right|_{z=H} = \zeta_k(r). \quad (2.10)$$

При цьому функції  $\psi_{kl} = \varphi_{kl}(r, z) \cos(l\theta)$  мають задовольняти рівнянню Лапласа.

Припускаючи гармонічний характер зміни коефіцієнтів  $d_{kl}(t)$  за часом  $d_{kl}(t) =$

$D_{kl} \exp(i\omega_{kl} t)$ , отримаємо з (2.10) співвідношення

$$\frac{\partial \psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\omega_{kl}^2}{g} \psi_{kl}, \quad (2.11)$$

яке приводить до спектральної крайової задачі відносно  $\psi_{kl}$  [16]. Після знаходження розв'язку спектральної задачі отримуємо базисні функції  $\varphi_{kl}(r, z)$  та  $\zeta_k(r)$  та власні частоти  $\omega_{kl}$ .

### 3. КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З МЕМБРАНОЮ

У цьому розділі розглядаються вільні коливання рідини в циліндричному резервуарі з гнучкою мембраною, що покриває вільну поверхню (див. рис. 2.1а). Розглянемо жорстку циліндричну ємність і припустимо, що рідина в ємності ідеальна і нестислива, а рух рідини безвихровий. Тоді відносна швидкість рідини  $V$  має потенціал  $\vec{\Phi} = \bar{\Phi}(r, \theta, z, t)$  тож  $V = \nabla \bar{\Phi}$ .

Тут використовується лінійна теорія коливань рідини. У сформульованих вище припущеннях потенціал швидкості задовольняє рівнянню Лапласа

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (3.1)$$

Для потенціалу швидкості формулюється наступна крайова задача (КЗ). У області рідини він задовольняє рівняння Лапласа (3.1). На стінці і на дні циліндричного резервуара умови непроникності формулюються так:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Щоб сформулювати граничну умову на вільній поверхні, розглянемо спочатку таке рівняння руху мембрани:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{p}{T}, \quad (3.3)$$

де  $w$  – прогин мембрани,  $T$  – натяг на одиницю довжини,  $\mu$  – маса одиниці площі мембрани,  $p$  – тиск рідини на мембрану.

Наступні граничні умови сформульовані для прогинів мембрани при  $r = R$ :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = w = 0. \quad (3.4)$$

На вільній поверхні рідини при рівності нормальних складових швидкостей рідини і мембрани має виконуватися

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (3.5)$$

а також динамічну граничну умову

$$p = -\rho \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} - \rho g w. \quad (3.6)$$

Отже, ми маємо об'єднану крайову задачу (3.1)-(3.6) для оцінки невідомих функцій  $\Phi$  і  $w$ .

Розглянемо гармонічні коливання і припустимо, що

$$\bar{\Phi}(r, \theta, z, t) = \tilde{\Phi}(r, \theta, z) e^{i\bar{\omega}t},$$

$$\tilde{\Phi}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_m(r, z) \cos(m\theta). \quad (3.7)$$

Використовуючи метод розділення змінних, отримуємо

$$\tilde{\Phi}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m\left(\frac{k_{mn}r}{R}\right) \cosh\left(\frac{k_{mn}z}{R}\right) \cos m\theta, \quad (3.8)$$

де  $k_{mn}$  є нулями першої похідної функції Бесселя  $J'_m(kr)=0$  у  $r=R$ .

З (3.6) маємо такий вираз для тиску:

$$p = e^{i\bar{\omega}t} \left[ -\rho i \bar{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m\left(\frac{k_{mn}r}{R}\right) \cos(m\theta) \cosh\left(\frac{k_{mn}h}{R}\right) \right] - \rho g w.$$

Для гнучкої мембрани ми припускаємо це

$$w = w_1(r, \theta) e^{i\bar{\omega}t}. \quad (3.9)$$

Слід зазначити, що товщина мембрани незначна. Використовуючи наведені вище рівняння для  $p$  і  $w$  у рівнянні мембрани (3.4), ми отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\mu \bar{\omega}^2 - g\rho}{T} \right) w_1 = \\ & = \frac{i\rho \bar{\omega}}{T} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m\left(\frac{k_{mn}r}{R}\right) \cos(m\theta) \cosh\left(\frac{k_{mn}h}{R}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

яке є неоднорідним диференціальним рівнянням. Рішення для мембранних прогинів рівняння. (3.10) має такий вигляд:

$$w(r, \theta, t) = e^{i\bar{\omega}t} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{i\rho \bar{\omega} R^2}{T} \right) \cosh\left(\frac{k_{mn}h}{R}\right) \frac{J_m\left(\frac{k_{mn}r}{R}\right) \cos m\theta}{[c^2 - k_{mn}^2]} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m\left(\frac{cr}{R}\right) \cos m\theta \right], \quad c^2 = \frac{\mu \bar{\omega}^2 - \rho g}{T} \quad (3.11)$$

Умова (3.5) при  $z = h$  дає

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{k_{mn}}{R} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \cos m\theta = (i\bar{\omega}) \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\bar{\omega} R^2}{T} A_{mn} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \left[ \frac{\cos m\theta}{c^2 - k_{mn}^2} \right] \right] + (i\bar{\omega}) \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \cos m\theta. \quad (3.12)$$

Використовуючи умову  $w = 0$  при  $r = R$  з (3.5), отримуємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{i\rho\bar{\omega} R^2}{T} \right) \frac{J_m(k_{mn}) \cos m\theta}{[c^2 - k_{mn}^2]} \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(c) \cos m\theta = 0 \quad (3.13)$$

Отже, ми маємо рівняння (3.12) і (3.13) для визначення невідомих коефіцієнтів  $A_{mn}, B_m$  і невідома частота  $\bar{\omega}$ .

Для фіксованого режиму  $m$  усічені ряди отримують як

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{J_m(k_{mn})}{[c^2 - k_{mn}^2]} \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \left( \frac{i\rho\bar{\omega} R^2}{T} \right) + B_m J_m(c) = 0, \quad (3.14)$$

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{k_{mn}}{R} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) =$$

$$\bar{\omega} \sum_{n=1}^N \frac{i\bar{\omega} R^2}{T} A_{mn} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \frac{1}{[c^2 - k_{mn}^2]} + i\bar{\omega} B_m J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right). \quad (3.15)$$

Є постійні коефіцієнти перед невідомими  $A_{mn}, B_m$ ,  $n = 1, \dots, N$  у рівнянні (3.14), а змінні в рівнянні (3.15), тому ми повинні вибрати  $N$  точок, включаючи кінцеві точки в  $0 \leq r \leq R$  а саме,

$$r_i = (3.Ri)/(3.N - 1), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

на вільній поверхні для задоволення рівняння (3.15). Тоді отримуємо наступні  $N+1$  однорідних алгебраїчних рівнянь у коефіцієнтах  $\mathbf{X} = A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mN}, B_m$ :

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{J_m(k_{mn})}{[c^2 - k_{mn}^2]} \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \left( \frac{i\rho\bar{\omega} R^2}{T} \right) + B_m J_m(c) = 0, \quad (3.16)$$

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{k_{mn}}{R} J_m \left( \frac{k_{mn} R n_1}{N-1} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) =$$

$$i\bar{\omega} \sum_{n=1}^N \frac{i\bar{\omega} R^2}{T} A_{mn} J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right) \cosh \left( \frac{k_{mn} h}{R} \right) \frac{1}{[c^2 - k_{mn}^2]} + i\bar{\omega} B_m J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right). \quad (3.17)$$

У (3.17) припускаємо, що  $n_1 = 0, 1, \dots, N-1$ .

У матричній формі систему (3.16)-(3.17) можна записати у вигляді

$$\mathbf{H}_1(\bar{\omega}) \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} = A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mN}, B_m. \quad (3.18)$$

Умова нетривіального розв'язку системи (3.18) дає нелінійне частотне рівняння (з рівність детермінанта системи нулю)

$$\det(\mathbf{H}_1(3. \bar{\omega})) = 0 \quad (3.19)$$

для оцінки частот  $\bar{\omega}$ .

### 3.1. Коливання рідини в циліндричних резервуарах з внутрішніми гнучкими мембранами

Розглянуто вільні коливання рідини в циліндричному резервуарі з внутрішньою гнучкою мембраною, (див. рис. 2.1б). Передбачається, що нестислива і нев'язка рідина здійснює безвихровий рух у резервуарі, область інтегрування розділена на дві підобласті внутрішньою гнучкою мембраною, яка встановлена на висоті  $h_1$ . Перша підобласть рідини обмежена дном, нижньою частиною циліндричної стінки та гнучкою мембраною. Швидкість рідини в цій області описується потенціалом  $\bar{\Phi}_1$ . Друга підобласть рідини обмежена гнучкою мембраною, верхньою частиною циліндричної стінки та вільною поверхнею. Швидкість рідини в цій області описується потенціалом  $\bar{\Phi}_2$ .

Для визначення цих потенціалів сформульовано дві КЗ. Отже, для потенціалу ми маємо рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_1 = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1. \quad (3.20)$$

з такими умовами непроникності стінок і днища:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial r} = 0, r = R, \quad 0 < z < h_1, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial z} = 0, z = 0. \quad (3.21)$$

Для потенціалу ми маємо аналогічну КЗ з рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_2 = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (3.22)$$

і наступні умови непроникності на циліндричній стінці:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad h_1 < z < h_2. \quad (3.23)$$

На вільній поверхні  $z = h_2$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial z} = 0. \quad (3.24)$$

Сформулюємо граничні умови на гнучкій мембрані при  $z = h_1$ , розглянемо рівняння руху мембрани наступним чином:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} (p_1 - p_2), \quad (3.25)$$

де  $p_1, p_2$  це тиск рідини на мембрану в двох підобластях.

Умови непроникності при  $z = h_1$  наступні:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.26)$$

Додаткові граничні умови сформульовані для прогинів мембрани, при  $r = R$

$$w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.27)$$

Для компонентів тиску при  $z = h_1$  ми вважаємо

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} = 0, \quad p_2 = -\rho \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} \quad (3.28)$$

Припускаючи що

$$\bar{\Phi}_k(r, \theta, z, t) = \Phi_k(r, \theta, z) e^{i\bar{\omega}t}, \quad k = 1, 2, \quad (3.29)$$

Вставивши вирази (3.28) для  $p_k$  ( $k = 1, 2$ ) у рівняння мембрани (3.25). та враховуючи рівняння (3.20), (3.22), отримуємо при  $z = h_1$

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{\bar{\omega}^2 \mu}{T} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} (\Phi_2 - \Phi_1),$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} + \frac{\bar{\omega}^2 \mu}{T} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3.30)$$

Припускаючи що

$$\Phi_k(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^k(r, z) \cos m \theta \quad (3.31)$$

і використовуючи метод розділення змінних, отримуємо

$$\bar{\Phi}_1(r, \theta, z, t) = e^{i\bar{\omega}t} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \cosh \left( \frac{k_{mn} z}{R} \right) \cos m \theta \right], \quad (3.32)$$

$$\bar{\Phi}_2(r, \theta, z, t) = e^{i\bar{\omega}t} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} z}{R} \right) + C_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} z}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \cos m \theta \right]. \quad (3.33)$$

де  $k_{mn}$  є нулями першої похідної функції Беселя  $J'_m(kr) = 0$  при  $r=R$ .

Використав умови на вільній поверхні при  $z = h_2$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial z} = 0$$

і враховуючи при  $z = h_1$  наступну граничну умову

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial z},$$

ми отримуємо усічені ряди для фіксованого числа  $m$

$$\sum_{n=1}^N \frac{k_{mn}}{R} g \left( B_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) + C_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^N \bar{\omega}^2 \left( B_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) + C_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{k_{mn}}{R} J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{k_{mn}}{R} \left( B_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + C_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right), \\
& \sum_{n=1}^N A_{mn} \left[ \left( \left( \frac{k_{mn}}{R} \right)^3 + \frac{\bar{\omega}^2 k_{mn} \mu}{T} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right] J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} \left( B_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + C_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} r}{R} \right).
\end{aligned}$$

Тоді вибираємо  $N$  точок, включаючи кінцеві точки у  $0 \leq r \leq R$  на вільній поверхні, а саме  $r_i = (Ri)/(N-1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  і отримати наступні  $3N$  однорідні алгебраїчні рівняння в коефіцієнтах  $\mathbf{Y} = A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mN}, B_{m1}, B_{m2}, \dots, B_{mN}, C_{m1}, C_{m2}, \dots, C_{mN}$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \frac{k_{mn}}{R} g \left( B_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) + C_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right) - \\
& - \sum_{n=1}^N \bar{\omega}^2 \left( B_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) + C_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_2}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right) = 0,
\end{aligned}$$

для  $n_1 = 0, 1, \dots, N-1$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{k_{mn}}{R} J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{k_{mn}}{R} \left( B_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + C_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right),
\end{aligned}$$

для  $n_1 = 0, 1, \dots, N-1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_{mn} \left[ \left( \left( \frac{k_{mn}}{R} \right)^3 + \frac{\bar{\omega}^2 k_{mn} \mu}{T} \right) \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right] J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right) = \\ = \sum_{n=1}^N \frac{\rho \bar{\omega}^2}{T} \left( B_{mn} \cosh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) + C_{mn} \sinh \left( \frac{k_{mn} h_1}{R} \right) \right) J_m \left( \frac{k_{mn} n_1}{N-1} \right), \end{aligned}$$

для  $n_1 = 0, 1, \dots, N-1$ .

У матричній формі цю систему можна записати як

$$\mathbf{H}_2(\bar{\omega}) \mathbf{Y} = 0. \quad (3.34)$$

Умова нетривіального розв'язку системи (3.34) дає нелінійне частотне рівняння (з рівність детермінанта системи нулю)

$$\det(\mathbf{H}_2(\bar{\omega})) = 0 \quad (3.35)$$

для оцінки частот  $\bar{\omega}$ .

## 4. Аналіз результатів

### 4.1. Валідаційне дослідження

Чисельні результати отримано двома методами. Спочатку ми отримуємо частоти  $\omega$  для обох розглянутих задач шляхом розв'язування нелінійних рівнянь (19),(35) з використанням комбінації методів Ньютона та параболічної інтерполяції [4]. Для підтвердження отриманих результатів ми також використовували методи, засновані на зв'язаних методах кінцевих і граничних елементів [3], [8], [11].

Розглянемо жорсткий циліндричний резервуар, частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Припустимо, що радіус циліндра дорівнює  $R = 0.5m$  і рівень наповнення  $h = 1m$ . Нехай густина рідини буде  $\rho = 998kg/m^3$ .

Щоб засвідчити наші чисельні результати, ми порівнюємо дані для першої неосесиметричної частоти, отримані методами граничних (МГЕ) і скінченних (МСЕ) елементів з аналітичними значеннями [2], отриманими за формулою

$$\omega_k = \sqrt{g \frac{\mu_k}{R} \tanh\left(\frac{\mu_k}{R} H\right)} / 2\pi$$

де  $\mu_k$  є коренями рівняння  $J_1'(\mu_k) = 0$ ,  $J_1(x)$  є функцією Бесселя першого роду.

Порівняння чисельних результатів, отриманих методом граничних елементів (МГЕ) та методами скінченних елементів (МСЕ) з аналітичними, наведено в таблиці 4.1.

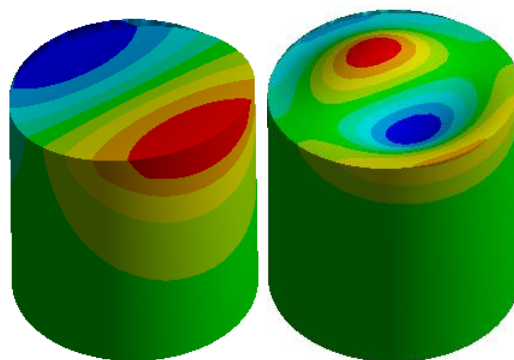
Таблиця 4.1

Порівняння чисельних та аналітичних результатів, частота, Hz

Метод	Моди коливань, n			
	1	2	3	4
МГЕ, 40 елементів	0.95582	1.62832	2.05986	2.41284
МГЕ, 400 елементів	0.95598	1.62779	2.05979	2.41245
МСЕ, 12000 елементів	0.95576	1.62739	2.05986	2.41223
Аналітичне рішення	0.95597	1.62777	2.05970	2.41198

Результати демонструють хорошу узгодженість. У МГЕ застосовуються одновимірні елементи з постійною апроксимацією густин. Слід зазначити, що розглянута частота є найнижчою частотою коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі.

Основні форми коливань рідини показані на рисунку 4.1.



a) 0.9557 Hz

b) 1.6273 Hz

Рисунок 4.1. Основні форми та частоти пульсацій рідини в циліндричному

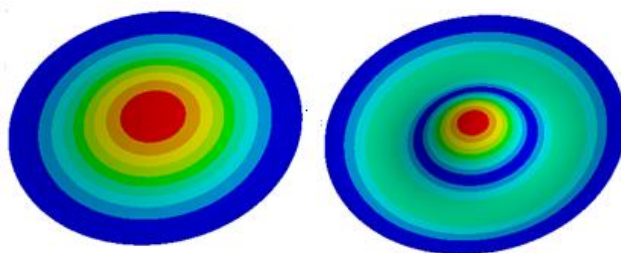
резервуарі.

Далі розглянемо коливання гнучких мембран з різних матеріалів без взаємодії з рідиною. Розглянемо коливання затиснутої кремнієвої мембрани радіусом  $R = 0.5\text{м}$  товщина  $h_m = 0.001\text{м}$ , щільність матеріалу  $\rho_m = 2800\text{кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 50\text{МПа}$ , Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.49$ . Також ми розглядаємо пластикову мембрану ЕВА з радіусом  $R = 0.5\text{м}$ , товщина  $h_m = 0.001\text{м}$ , щільність матеріалу  $\rho_m = 950\text{кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 24,5\text{МПа}$ , Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.48$

Гранична задача розв'язується для наступного рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.36)$$

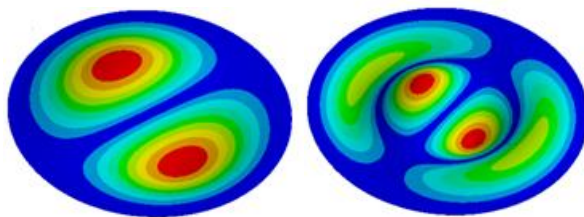
з граничними умовами (2.5). Перші режими силіконової та ЕВА-пластикової мембран, що відповідають осесиметричним та неосесиметричним коливанням, показані на рис. 4.2 та рис. 4.3, відповідно.



а) 0.2893 Hz

б) 1.1262 Hz

Рисунок 4.2 Дві перші форми та частоти осесиметричних коливань пластикових мембран



a) 0.6020 Hz

b) 1.722 Hz

Рисунок 4.3 Дві перші форми та частоти коливань першої гармоніки пластикових мембран

Підхід МГЕ-МСЕ також використовується для моделювання гідропружних частот у вертикальному циліндричному резервуарі радіусом  $R=1\text{м}$  з пружною мембраною вільної поверхні. Частоти  $\omega^2_{ij}R/g$ , пов'язані з першими трьома модами коливань, що відповідають осесиметричним коливанням  $i = 0; j = 1,2,3$ , і неосесиметричним коливанням  $i = 1$  та  $j = 1,2,3$  при різних рівнях наповнення,  $h/R$ , в межах від 0,1 до 0,5 для густини рідини, що дорівнює  $\rho=1000\text{кг/м}^3$ , були розраховані для порівняння з даними [45]. Результати отримані для  $\mu=1\text{кг/м}^2$  та  $T=10\text{Н/м}$ . Таблиці 2 і 3 показують перші нормалізовані частоти для різних кількостей окружної моди  $i$ , при різних рівнях заповнення та відносну різницю  $\delta$  між розчинами, отриманими запропонованим методом і даними з [45].

Таблиця 4.2

Порівняння нормованих гідропружних частот у вертикальному циліндричному резервуарі,  $i=0$

$h/R$	$\omega^2_{01}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{02}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{03}R/g$	$\delta$
0.1	1.412	0.005	4.727	0.006	9.503	0.006
0.2	2.567	0.005	7.310	0.006	11.921	0.006
0.3	3.432	0.005	7.713	0.006	12.012	0.006

$h/R$	$\omega^2_{01}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{02}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{03}R/g$	$\delta$
0.4	3.994	0.004	8.102	0.005	12.231	0.005
0.5	4.100	0.004	8.106	0.004	12.452	0.004

Таблиця 4.3.

Порівняння нормованих гідропружних частот у вертикальному циліндричному резервуарі,  $i=1$

$h/R$	$\omega^2_{11}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{12}R/g$	$\delta$	$\omega^2_{13}R/g$	$\delta$
0.1	1.102	0.006	5.028	0.008	10.209	0.009
0.2	2.516	0.006	6.997	0.008	12.644	0.009
0.3	2.720	0.006	7.510	0.008	12.836	0.009
0.4	2.873	0.005	7.523	0.006	12.837	0.007
0.5	3.015	0.004	7.533	0.004	12.837	0.005

Розглянемо зв'язані коливання мембрани та рідини в циліндричних резервуарах. Припустимо, що гнучка мембрана встановлена в циліндричний резервуар, або покриває вільною поверхнею, (див. рис. 2.1.). Досліджуються як кремнієві, так і пластикові мембрани ЕВА. На рис. 4.4 показано зміну значень частот для осесиметричних коливань пластикової мембрани ЕВА та рідини в залежності від рівня установки  $h_1$ , (див. рис. 2.1б) та (рис. 2.1а). Система «Рідина-Мембрана» здійснює зв'язані коливання, і взаємний вплив обох компонентів достатній.

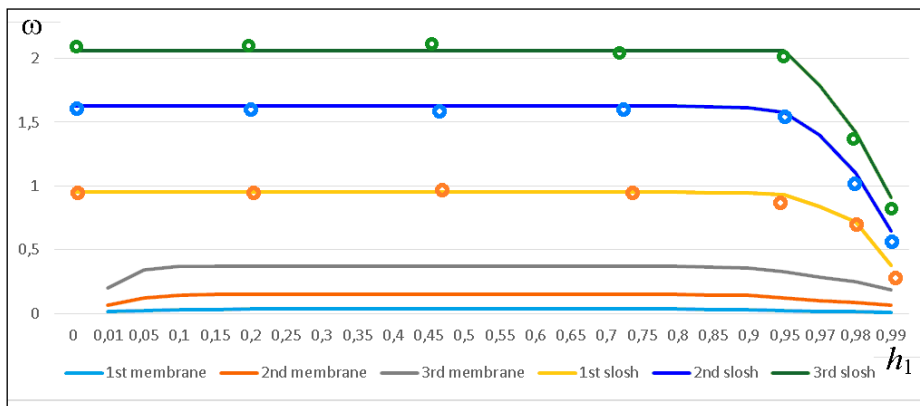


Рисунок 4.4 Перші власні частоти пластикової мембрани ЕВА та вільної поверхні рідини ( $\omega$ ) через рівень встановлення мембрани ( $h_1$ )

Як випливає з чисельного моделювання, якщо мембрана встановлена всередині циліндра, то найважливішим параметром, що впливає на результат, є висота  $h_1$  установки мембрани. Якщо мембрана встановлена на значній відстані від вільної поверхні, то частота плескання практично не змінюється, а точніше трохи збільшується. Це явище чітко показано на (див. рис. 4.5), між значенням рівня встановлення мембрани 0 і 0,85. Суцільні лінії відповідають розрахункам, виконаним за допомогою програмного забезпечення МГЕ-МСЕ, точки відповідають розрахункам, виконаним за допомогою аналітичного підходу, описаного вище, з  $N = 40$ . Можна побачити, що результати добре збігаються. Різниця між аналітичними та числовими результатами становить близько 0,001. Коли мембрана знаходиться поблизу вільної поверхні, частота плескання значно падає, наближаючись до частот мембрани. Що наочно демонструє (див. рис. 4.5), в інтервалі від 0,85 до 0,99 значень рівня установки мембрани.

Також в залежності від вертикального розташування мембрани змінюються і режими плескання.

Коли мембрана розміщена на вільній від рідини поверхні, режими і частоти мембрани різко змінюються. Замість осесиметричного режиму, режим першої

гармоніки стає відповідним найнижчій частоті, (див. рис. 4.4 б).

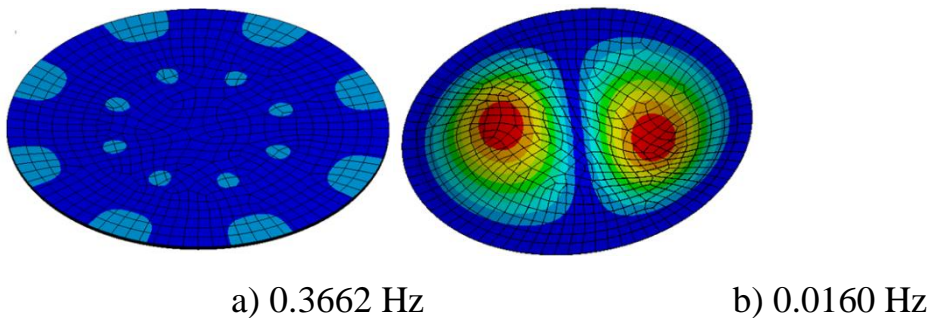


Рисунок 4.4. Перші форми і частоти:

- а) перша форма і частота плескання на рівні установки мембрани 0,99 м,
- б) перша форма і частота мембрани, що покриває вільну поверхню рідини

Частоти мембрани, встановленої в рідині, значно знижуються завдяки доданій масі рідини. Найнижча частота мембрани досягається, коли мембрана знаходиться біля днищ циліндра. Зі збільшенням рівня монтажу (встановлення) мембрани її частота збільшується до рівня 0,5м. Далі частота мембрани знижується до рівня її встановлення на вільній поверхні рідини, де відбувається різке зниження частоти мембрани. При установці мембрани на поверхню рідини частота плескання і частота мембрани прагнуть бути рівними.

Силіконова мембрана, встановлена в заповненому рідиною циліндричному резервуарі, демонструє аналогічні характеристики.

На рис. 4.5 показано зміну значень частот Силіконової мембрани та рідини в залежності від рівня установки  $h_1$ .

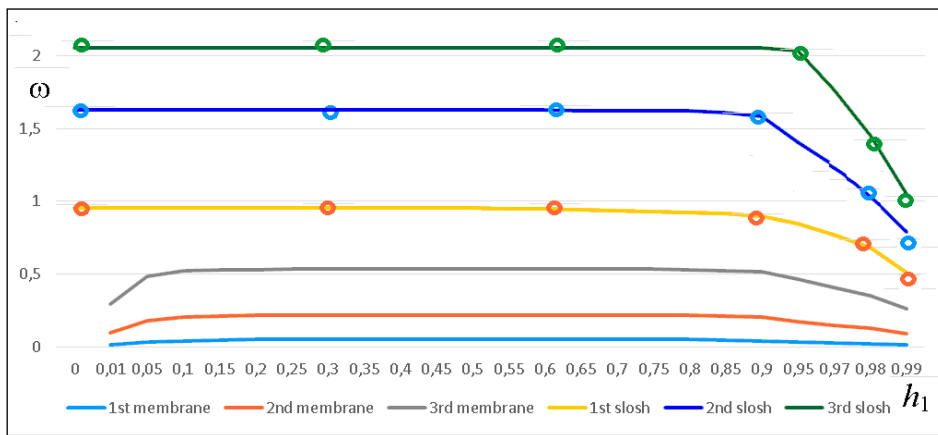


Рисунок 4.5. Перші власні частоти силіконово-пластикової мембрани та вільної поверхні рідини ( $\omega$ ) через рівень установки мембрани ( $h_1$ )

Очікується, що поведінка системи «Рідина-Мембрана» не буде відрізнятися від попереднього випадку з пластиком ЕВА. Лише числові значення отриманих частот зазнали певних змін через зміну властивостей матеріалу мембрани.

Як і раніше, суцільні лінії відповідають розрахункам, виконаним за допомогою програмного забезпечення МГЕ-МСЕ, точки відповідають розрахункам, виконаним за аналітичним підходом, описаним вище, з  $N = 40$ . Різниця між аналітичними та числовими результатами становить близько 0,001. У порівнянні з коливаннями рідини в резервуарі без мембран, можна побачити, що для розглянутих матеріалів найнижчі частоти системи є мембранними.

У разі розміщення мембрани безпосередньо на вільній поверхні, частоти і форми плескання практично збігаються з режимами і частотами мембрани, рис. 4.5, де і представлені форми і частоти цієї сполученої системи «Рідина-Мембрана».

## 5. Гасіння плескань при сейсмічному навантаженні

### 5.1. Формулювання задачі

Значення тиску  $p$  на стінках оболонки було визначено з лінеаризованого інтегралу Бернуллі за формулою:

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0 + a_s(t)x, \quad (5.1)$$

в якому  $\Phi$  є потенціалом швидкості,  $g$  це прискорення сили тяжіння,  $z$  координата точки рідини, виміряна у вертикальному напрямку,  $\rho_l$  це щільність рідини,  $p_0$  це атмосферний тиск,  $a_s(t)$  – функція, що характеризує зовнішній вплив (горизонтальне сейсмічне прискорення). У рівнянні (5.1) значення  $g$   $z$  є гравітаційним потенціалом, тому тиск еквівалентний тиску навколишнього середовища, тобто.  $p = p_0$ .

Отже, на вільній поверхні рідини повинні виконуватися такі кінематичні та динамічні умови:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0, \quad (5.2)$$

де функція  $\zeta$  описує форму і положення вільної поверхні.

Таким чином, для потенціалу швидкості отримано наступну крайову задачу  $\nabla^2 \Phi = 0$ ;  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0$ ;  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ ;  $p - p_0|_{S_0} = 0$ ;  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + a_s(t)x \right|_{S_0} = 0$ . (5.3)

Визначили потенціал швидкостей  $\Phi$  і функцію  $\zeta$ , встановлено висоту підйому вільної поверхні та визначено тиск рідини на стінки оболонки. Було представлено потенціал  $\Phi$  у формі

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \phi_k. \quad (5.4)$$

Для функцій  $\phi_k$ , були розглянуті такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \phi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad (5.5)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (5.6)$$

Друге відношення в рівнянні (5.6) продиференціювали на  $t$  і підставили в отриману рівність  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  з першого співвідношення.

Далі це було представлено як функції  $\phi_k$  як  $\phi_k(x, y, z, t) = \exp(i\chi_k t)\phi_k(x, y, z)$ . Отримано задачу власних значень, і на вільній поверхні буде виконуватися наступна рівність

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \phi_k. \quad (5.7)$$

Для рівня вільної поверхні отримано вираз:

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \phi_k}{\partial n}. \quad (5.8)$$

У циліндричній системі координат вирази для шуканих функцій отримали наступним чином  $\phi_k(r, z, \theta) = \phi_k(r, z) \cos l \theta$ . Тут  $l$  є гармонічне число. Таким чином, частоти і моди вільних коливань для різних  $\alpha$  були розглянуті окремо. Це було представлено  $\phi$  як сума потенціалів простого і подвійного шару

$$2\pi\Phi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS. \quad (5.10)$$

Де  $S = S_1 \cup S_0$ ; точки  $P$  та  $P_0$  належать поверхні  $S$ , та  $|P - P_0|$  це декартова відстань між точками  $P$  та  $P_0$ . Рівняння (5.10) є наслідком третьої тотожності Гріна у випадку, коли точка  $P_0$  належить до поверхні  $S$ . Це інтегральна форма рівняння Лапласа, і вона буде використана тут у чисельній реалізації методу

граничних елементів. Задовольняючи граничні умови, отримано наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \\ - \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Тут для зручності значення потенціалу на вільній поверхні позначено як  $\varphi_0$ , та  $\varphi_1$  на стінках оболонки.

Для розв'язання цієї системи сингулярних інтегральних рівнянь застосовано метод граничних елементів. Таким чином, визначено режими та частоти власних коливань бака. Надалі ці режими розглядаються як основні функції.

Наступний етап дослідження був присвячений моделюванню вимушених коливань. Визначити основні співвідношення для  $d_k$  було замінено основні функції у вирази для рівняння потенціалу швидкості та рівняння форми вільної поверхні. Отриманий ряд підставлено в граничну умову на вільній поверхні:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t))\zeta + a_x(t)x \right|_{S_0} = 0.$$

Оскільки в циліндричній системі координат,  $x = r\cos\theta$ , суттєвою буде тільки перша гармоніка, тільки вона врахована для  $l=1$ . Далі була проведена кореляція на вільній поверхні  $S_0$

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \phi_k + (g + a_z(t)) \sum_{k=1}^M \frac{\chi_k^2}{g} d_k \phi_k + a_x(t)r = 0. \quad (5.12)$$

Помноживши це рівняння скалярно на  $\phi_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) і використовуючи ортогональність власних форм, отримано систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{d}_k + \frac{\chi_k^2}{g} (g + a_z(t)) d_k + a_x(t) F_k = 0, \quad F_k = \frac{(r, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (5.13)$$

Передбачається, що перед горизонтальним навантаженням бак перебував у спокої. Тоді рівняння (5.13) було розв'язано при нульових початкових умовах. Цей чисельний розв'язок дозволяє нам отримати історію зв'язку для рівня вільної поверхні  $\zeta$ , а також тиску  $p$ , отриманий за формулою

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t)) \zeta \right) + p_0 + a_x(t) x. \quad (5.14)$$

З рівняння (5.14) можна зробити висновок, що у випадку горизонтальних сейсмічних коливань внесок у досліджувані значення  $\zeta$  та  $p$  робить лише перша гармоніка.

## 5.2. Числові результати

Як приклад, пружна циліндрична оболонка радіусом  $R = 1$  м і рівень заповнення  $H = 1$  м під дією сейсмічного навантаження з різними параметрами. Вважалося, що товщина оболонки  $h = 0.01$  м, Модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , щільність матеріалу оболонки  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, щільність рідини  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Вважається, що оболонка жорстко закріплена на контурі, тобто граничні умови такі:  $u_r = u_z = u_\theta = 0$  при  $z=0$  та  $r=R$ , (Див. Мал.1.).

На першому етапі було застосовано лінійну формулу. Як було показано в роботі (21), нелінійні ефекти, пов'язані з прослизанням наповнювача, мають найбільший вплив на демпфування коливань. Але для аналізу максимального рівня підйому рідини можна було б обмежитися лінійною постановкою задачі. Перш за все, необхідно отримати власні режими коливань рідини, тобто отримати систему основних функцій. Як уже зазначалося, нас цікавить перша гармоніка ( $l=1$ ). Слід зазначити, що осесиметрична гармоніка ( $l=0$ ) також буде

залучена до розгляду, якщо спостерігається навіть дуже мала вертикальна складова сейсмічного навантаження. На рис. 5.1 показано перші три режими коливань, що відповідають цим гармонікам.

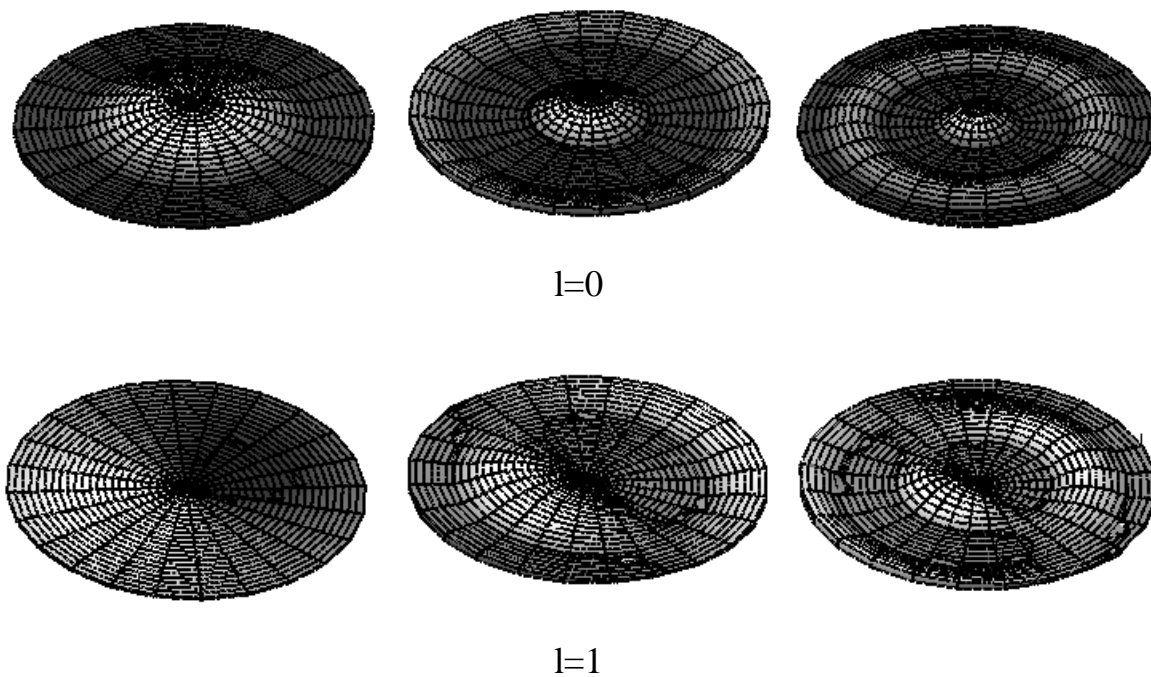


Рисунок 5.1 Перші моди осесиметричних та неосесиметричних коливань вільної поверхні

У таблиці 5.1 наведено найнижчі частоти коливань вільної поверхні рідини та стінок резервуара.

Таблиця 5.1.

## Найнижчі частоти коливань циліндричної оболонки

Частота, Hz запропоновано МГЕ	Частота, Hz аналітичні значення (13)	Гармоніки, номер частоти	Тип вібрації
0.6418	0.6418	1, 1	плескання
0.9739	0.9739	0, 1	плескання
1.1509	1.1510	1, 2	плескання
1.3208	1.3209	0, 2	плескання
1.4564	1.4566	1, 3	плескання
1.7054	1.7058	1, 4	плескання
1.7096	1.7099	0, 1	вібрація дна
1.9212	1.9215	1, 5	плескання

Встановлено, що нижчими частотами коливань заповненого рідиною резервуара із заданими механічними та геометричними характеристиками є частоти плескання. Частотні спектри коливань вільної поверхні та пружних стінок розділені. Однак, якщо припустити, що дно оболонки є пружним, можна виявити, що для достатньо тонких оболонок частота коливань дна є порівнянною (і навіть дуже близькою) до однієї з фундаментальних частот. Про це свідчать результати табл. 1, а саме можна побачити, що частота коливань дна  $\omega_{14} = 1.7054 \text{ Hz}$  дуже близька до частоти вісесиметричних коливань дна  $\omega_{01} = 1.7096 \text{ Hz}$ . Отже, ці результати свідчать про необхідність врахування першої та нульової гармонік при аналізі коливань з урахуванням пружності стінок резервуара (32,33). Це призводить до наступного представлення невідомих, як у роботі (34).

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k, \quad \Phi = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^N d_k \varphi_{2k}, \quad \zeta = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^N d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}$$

додавши рівняння другого порядку отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \ddot{c}_l(t) + \Omega_l^2 c_l(t) = & + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) (\varphi_{2k}, u_l) + a_x(t)(x, u_l) + a_z(t)(z, u_l) = 0, \\ \ddot{d}(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + (1 + a_z(t)/g) \chi_k^2(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + \sum_{k=1}^N c_k \left( \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}, \varphi_{2l} \right) + \\ & a_x(t)(x, \varphi_{2l}) = 0. \end{aligned}$$

З цих рівнянь, невідомі залежні від часу функції  $c_k(t)$  та  $d_k(t)$  будуть отримані. Для їх однозначного визначення використано початкові умови у вигляді

$$c_k(0) = c_k, \quad \dot{c}_k(0) = c_{k1}, \quad d_k(0) = d_k, \quad \dot{d}_k(0) = d_{k1}$$

Досліджено вимушені коливання пласта при заданому сейсмічному навантаженні.

У таблиці 5. 2 наведено прискорення для заданої сили землетрусу.

Таблиця 5.2.

## Рівень прискорення через сейсмічність

Магнітуда	5	6	7	8	9	10
Максимальний рівень прискорення (у частках від g)	0.025	0.050	0.100	0.200	0.400	0.800

Характерна частота землетрусу в 6 балах дорівнює 2Hz.

Система диференціальних рівнянь та початкові дані отримані з урахуванням всього частотного спектру, наведеного в таблиці 5.1. Початкові умови наступні:

$$c_k(0) = 0, \dot{c}_k(0) = 0, d_k(0) = 0, \dot{d}_k(0) = 0.$$

Крім того, припускалося, що перед землетрусом заповнений рідиною резервуар перебував у стані спокою.

Далі розглянуто зв'язану задачу про коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці, вільна поверхня якої покрита тонкою пружною мембраною. Припускаючи, що між рідиною і пружною оболонкою немає зазору, динамічну граничну умову на межі розділу рідинної області і пружної мембрани можна записати у вигляді

$$\rho_m h_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T \Delta^2 w = -\rho_l \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g + a_z(t))w - a_x(t)x, \quad (5.15)$$

Де  $w$  це прогин пружної пластини,  $t$  це час, і  $T$  це напруга, і  $\rho_m, h_m$  це, густина та товщина мембрани відповідно. Права частина (18) - це тиск рідини, що діє на еластичну оболонку, який отримано з лінеаризованого рівняння Бернуллі.

Лінеаризована кінематична умова на поверхні розділу фаз може бути записана як

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5.16)$$

На жорстких бокових стінках і дні резервуара застосовано непроникну граничну умову

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0$$

Потенціал  $\Phi$  задовольняє рівнянню Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

Крім того, накладалися граничні умови на контур мембрани. Найчастіше використовувалися затиснуті, вільні та просто підтримувані умови. Для затисненого контуру використовується умова Діріхле, а саме  $w(R) = 0$ , а для вільного контуру задіяно умову Ньюмана  $\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ . Саме цю умову слід обрати для адекватного опису плаваючого покриття.

Для чисельного розв'язання використано метод заданих форм. Спочатку з рівняння були отримані частоти і моди мембрани без взаємодії з рідиною

$$\rho_m h_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + T \Delta^2 w = 0$$

Потім відбулася представлення для  $w$

$$w = \sum_{k=1}^M c_k w_k,$$

де  $w_k$  є їхніми власними мембранними режимами. Для функції  $\Phi$  було використано в наступному представленні:

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{c}_k \phi_k,$$

де функції  $\phi_k$  є розв'язками наступних крайових задач:

$$\nabla^2 \phi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial w_k}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \right|_{S_1} = 0.$$

штучна акселерограма була побудована для  $a_x(t)$ . Рисунок (5.2а) демонструє  $a_x(t)$  для землетрусу з магнітудою 6 балів і характерною частотою, що дорівнює 2Hz, а на рисунку (5.2b) показано зміну рівня вільної поверхні в часі. Тут ми розглядаємо резервуар без покриття мембрани.

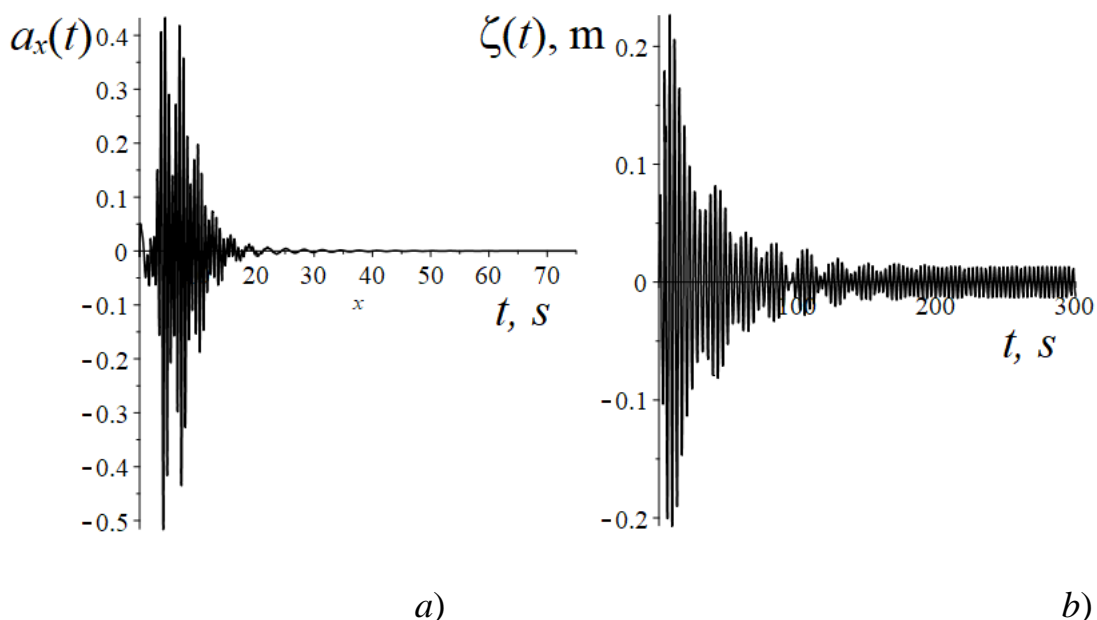
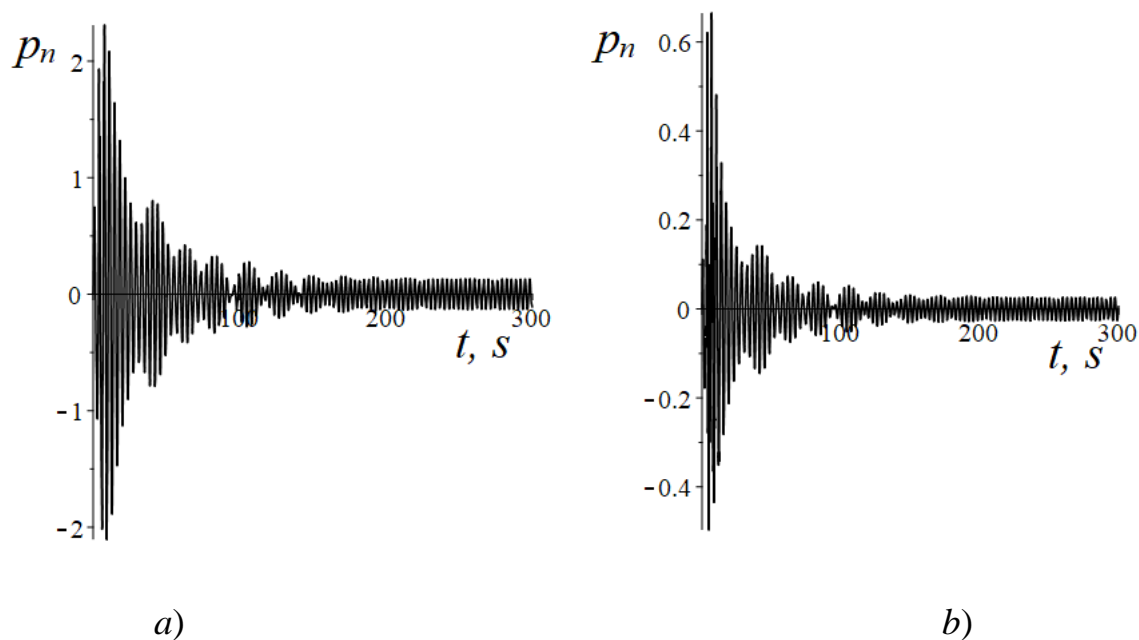


Рисунок 5.2. Акселерограма та рівень вільної поверхні в часі.

Як вертикальне прискорення ми розглядаємо  $a_z(t) = 0.005 \text{ м/с}^2$ . На рисунку (2б) показано часову залежність  $\zeta$  у точці з координатами  $r=R$ ,  $z=H$ ,  $\theta=0$ .

З чисельних результатів було зроблено висновок, що зміна рівня рідини близька до 0.4м. Така зміна може призвести до великого тиску на стінки резервуара. Нормований тиск  $p_n$  було розраховано за допомогою рівняння. Залежність  $p_n$  від часу зображено на Рисунку (5.3а). Для порівняння на рисунку (3б) можна побачити залежність  $p_n$  через час, якщо нехтувати ефектом зсуву. Та сама точка з координатами  $r=R$ ,  $z=H$ ,  $\theta=0$  була обрана для чисельного моделювання.



Малюнок 3. Часові історії  $p_n$

Отримані результати свідчать про необхідність зменшення рівня плескання. Для цього були використані різні демпфуючі пристрої. Серед них є горизонтальні та вертикальні перегородки, як запропоновано в роботі [30]. Встановлення перегородок призводить до зміщення частотного спектру. Але частоти збуджуючих сил в результаті штучних землетрусів, терористичних атак можуть мати широкий спектр.

В роботі (31) показано, що встановлення плаваючої кришки призводить до значної зміни частот.

Еластична мембрана була використана для зменшення плескання. Але тут були отримані залежні від часу рішення. Затиснута кремнієва мембрана з радіусом  $R = 1\text{ м}$ , товщина  $h_m = 0.001\text{ м}$ , щільність матеріалу  $\rho_m = 2800\text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 50\text{ МПа}$ , Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.49$  мав би бути застосований.

На рисунку (4а) показано порівняння зміни рівня вільної поверхні з мембраною в якості покриття та без неї, а на рисунку (5.4 б) показано залежність  $p_n$  від часу. Чорні лінії відповідають коливанням без покриття, а синіми лініями позначено криві, отримані за наявності еластичної мембрани, встановленої на рівні вільної поверхні.

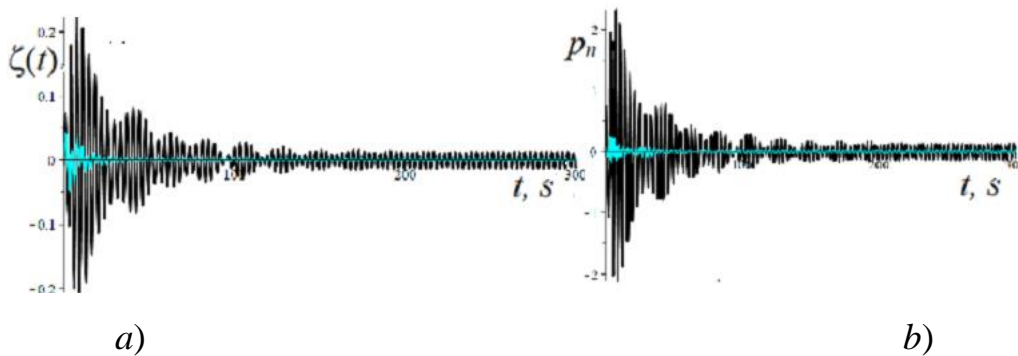


Рисунок 5.4. Часові історії  $\zeta$  та  $p_n$

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що встановлення мембрани призводить до значного зниження як рівня підняття вільної поверхні, так і тиску на стінки резервуара.

Ці дані можуть бути корисними при оцінці стійкості резервуарів при сейсмічних навантаженнях.

## ВИСНОВКИ

Розроблено математичну модель для оцінки впливу пружності перегородки. Гнучкі мембрани вважаються перегородками. Розглянуто дві крайові задачі в залежності від рівня установки перегородки. Внутрішня перегородка встановлюється на різних рівнях. Граничним рівнем установки є ватерлінія. У цьому випадку мембрану можна розглядати як покриття покрівлі. Ці дві крайові задачі вимагають різного підходу до їх вирішення. Для внутрішніх гнучких мембран метод суб-областей використовується як в аналітичному методі, так і в граничному та методі скінченних елементів. Проаналізовано зміни значень частот осесиметричних і першої гармонійних коливань пластикової мембрани з різних матеріалів і рідини в залежності від рівня установки.

Якщо мембрана встановлена на значній відстані від вільної поверхні, то частоти і режими плескання практично не змінюються, але частоти мембрани стають все меншими. Залежно від вертикального розташування мембрани змінюються і режими плескання. При низьких рівнях мембранної установки обидва режими і частоти плескання нагадують режими і частоти циліндричного бака без мембран. Коли мембрана знаходиться близько до вільної поверхні, моди останньої піддаються впливу мод мембрани і виглядають істотно інакше. Коли мембрана розміщена на вільній від рідини поверхні, режими і частоти мембрани різко змінюються. Замість осесиметричної моди стає мода першої гармоніки, що відповідає найнижчій частоті.

В результаті розміщення гнучкої мембрани безпосередньо на вільній поверхні рідини частоти і режими плескання мембрани і рідини повністю збігаються. Як випливає з чисельного моделювання, якщо мембрана встановлена всередині циліндра, то найважливішим параметром, що впливає на результат, є висота установки мембрани. Якщо мембрана встановлена на значній відстані від вільної поверхні, то частота плескання практично не змінюється, а точніше трохи

збільшується. Новизна запропонованого підходу полягає в можливості дослідження впливу пружних перегородок і дахів у резервуарах, наповнених рідиною. Виявлено залежності частот від рівня наповнення.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Salzman J. A. Lateral Sloshing in Cylinders under Low-Gravity Conditions / J. A. Salzman, Masica W. J. – Lewis Research Center Tech. Note, 1969. – 14 p.
2. Ibrahim R. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / Ibrahim R. – Cambridge University Press, 2005. – 998 p.
3. Cho N. H. McClamroch, and M. Reyhanoglu, Dynamics of Multibody Vehicles and Their Formulation as Nonlinear Control Systems / Cho N. H., Clamroch M., Reyhanoglu M. // Proceedings of American Control Conference. – 2000. – P. 3908-3912.
4. Olsen H. What is sloshing? / H. Olsen // Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas. – 1976. – P.12-25.
5. Gavrilyuk I. Weakly-nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank. / I. Gavrilyuk, M. Hermann, I. Lukovsky, O. Solodun, A. Timokha // Fluid Dynamics Research. – 2013. – Vol. 45. – P.1-30.
6. Ozdemir Z., Souli M., Fahjan Y. M. Numerical Evaluation of Nonlinear Response of Broad Cylindrical Steel Tanks under Multidimensional Earthquake Motion / Z. Ozdemir, M. F. Y. Souli, // Earthquake Spectra. – 2012. – Vol. 28, № 1. – P. 217-238.
7. Wang J. Sloshing reduction in a pitching circular cylindrical container by multiple rigid annular baffles / J. Wang, Ch. Wang, J. Liu // Ocean Engineering. – 2019. – Vol. 171, № 1. – P. 241–249.
8. Khezzar L. Water Sloshing in Rectangular Tanks: An Experimental Investigation & Numerical Simulation / L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh // International Journal of Engineering. 2010. – Vol. 3, № 2. – P. 174-184.
9. Ibrahim R.A.. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. –

10. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers / H.N. Abramson // *Applied Mechanics Reviews*. – 1963. – Vol. 16. – P. 501– 506.

11. Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers / H.N. Abramson // *NASA SP-106*, 1966. – 112 p.

12. Abramson H.N. The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers. NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T./ H.N. Abramson // Southwest Research Institute, 2000. – 238 p.

13. Chwang A.T. Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container / A.T. Chwang, K.H. Wang // *J. of Fluids Eng.* – 1984. – Vol. 106. – P. 233- 240,

14. Krutchenko D. V., Strelnikova E. A., Shuvalova Y. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», т. 35, С. 31-37, 2017, <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf>

15. Popov G. Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers / G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, G.H. Vatitas // *Journal of Mechanical Engineering Science*. – 1993. – Vol. 207 – P. 237–252.

16. Ye Z. Fluid Pressures in Partially Liquid-Filled Horizontal Cylindrical Vessels Undergoing Impact Acceleration/ Z. Ye, A.M. Birk // *Journal of Pressure Vessel Technology*. – 1994. – Vol. 116, № 4. – P. 449- 459.

17. Faltinsen O. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin, part 2. Effect of higher modes / O. Faltinsen, O. Rognebakke, N. Alexander, A.N. Timokha // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2005.– Vol. –523. – P. 199–218.

18. Sierikova O., Strelnikova E. and Degtyariov K., Strength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials, 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (3.KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, pp. 1-7, 2022, doi: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369

19. Kulczycki T. The shape of the fundamental sloshing mode in axisymmetric containers / T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, B. Siudeja // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2016. – Vol. 99, № 1. – P. 157-193.

20. Ravnik J. Boundary-domain integral method for vorticity transport equation with variable viscosity/ J.Ravnik J.Tibaut// *Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas.* – 2018. – Vol. 6, № 6. – P. 1087–1096.

21.Celebi M.S. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank / M.S. Celebi, H.Akyildiz // *Ocean Engineering*. – 2001. – Vol. 29. – P. 1527-1553.

22. Behshad A. A boundary element study for evaluation of the effects of the rigid baffles on liquid sloshing in rigid containers / A. Behshad, M. Shekari// *International Journal of Maritime Technology*. – 2018. – Vol. 10. – P. 45-54.

23.Faltinsen O.M. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape / O.M. Faltinsen, A.N Timokha. // *J. Fluid Mech.* – 2012. – Vol. 703. – P. 391–401.

24.Faltinsen O.M. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a squarebase basin. Part 3: base aspect ratio perturbations / O.M. Faltinsen, O.F. Rognebakke, A.N. Timokha // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2006. – Vol. 551. – P. 93-116.

25. Varchanis S. Asymmetric flows of complex fluids past confined cylinders: A comprehensive numerical study with experimental validation/ S. Varchanis, C. C. Hopkins, A. Q. Shen J. Tsamopoulos, S. Haward // *Phys. Fluids*. – 2020. – Vol. 32. – P. 53-93.

26. Wu C.H. Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank based on a finite element methods / C.H. Wu, Q.W. Ma, Taylor. R. Eatock // *Applied Ocean Research*. – 1998. – Vol. 20. – P. 337–355.

27. Krutchenko D. V., Strelnikova E. A., Shuvalova Y. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, сер. «Математичне

модельовання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», т. 35, С. 31-37, 2017, <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf>

28. Curadelli O. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement / O.Curadelli, D. Ambrosini, A. Mirasso, M. Amani //Journal of Fluids and Structures. – 2010. – Vol. 26 – P. 148–159. 63

29. Degtyariov K., Gnitko V., Kononenko Y., Kriutchenko D., Sierikova O., Strelnikova E. Fuzzy Methods for Modelling Earthquake Induced Sloshing in Rigid Reservoirs. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (3.KhPIWeek). (3.2022): 297-302. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466

30. Murawski K. Technical Stability of Very Slender Rectangular Columns Compressed by Ball-And-Socket Joints without Friction, Int. Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research, vol. 4(3.1), pp. 186-208, 2020. DOI: 10.3844/sgamrsp.2020.186.208

31. Avramov, K. V. and E. A. Strelnikova. (3.2014). Chaotic vibrations of plates two-sided interacting with flux of moving fluid. Int. Appl. Mech 50, 329-335.

32. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L. & Strelnikova, E. (3.2016). Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. J. of Basic and Appl. Research Int., 17(3.1), 75–87. ISSN: 2395-3438 (3.P), ISSN: 2395-3446 (3.O)..

33. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyarev K. Strength Characteristics of Liquid Storage Tanks with Nanocomposites as Reservoir Materials. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (3.KhPIWeek). (3.2022): 151-157. DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369

34. Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods. 2021 IEEE 2nd KhPI

Week on Advanced Technology (3.KhPIWeek). (3.2021): 351-356. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086

35. Lukovsky I.A. Multimodal method in sloshing / I.A. Lukovsky, A.N. Timokha//Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 220, № 3. – P. 239-253.

36. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations / E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, K., Degtyarev // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2020. –Vol. 111. – P. 78-87. doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

37. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles / V. Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova //Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2017. – Vol. 5, № 3. – P. 317–328.

38. Zhou D. Nonlinear sloshing of liquid in rigid cylindrical container with a rigid annular baffle: free vibration, / D. Zhou, J. D. Wang, W. Q. Liu// Nonlinear Dynamics. – 2014. –Vol. 78, № 4. – P. 2557–2576.

39. Shu C. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells / Shu C. // Int. J. Mech. Sci. – 1996.– Vol. 38, №8-9. – P. 935–949.

40. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks/ V.I. Gnitko, K.G. Degtyarev, V.V Naumenko, E.A. Strelnikova // International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2018. – Vol 6, № 6. – P. 976-988.

41. Karaiev A. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells / A. Karaiev, E. Strelnikova // Springer, Cham: Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2020. – P. 3-13. doi.org/10.1007/978-3-030- 50491-5\_1.

42. Choudhary N. Study on Liquid Sloshing in an Annular Rigid Circular Cylindrical Tank with Damping Device Placed in Liquid Domain/ N. Choudhary, S.N. Bora, E. Strelnikova // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2021. – DOI: 10.1007/s42417-021-00314-w

43. Choudhary N. Liquid vibrations in a container with a membrane at the free surface / N. Choudhary, E. Strelnikova // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2021. – Vol. 37. – P. 13-18. <https://doi.org/10.21595/vp.2021.21996>

44. Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations / E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2020. – Vol. 25, № 3. – P. 117-132. [doi.org/10.2478/ijame-2020-0038](https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038).

45. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations / E.A. Strelnikova, N. Choudhary, D.V. Kriutchenko, V.I. Gnitko, A.M. Tonkonozhenko // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2020. – Vol. 120 – P. 13-27. [doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024)

46. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova // *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. – 2020. – Vol. 11, № 1. – 2050003.

47. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells / V.I. Gnitko, K.G. Degtyariov, A.O. Karaiev, E.A. Strelnikova // *WIT Transactions on Engineering Sciences*. – 2019. – Vol. 126. – P. 189–200.

48. Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations / E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2020. – Vol. 25, № 3. – P. 117–132.

49. BEM analysis of gravitational-capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution / V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, M.L. Myronenko, E.A. Strelnikova // *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. – 2021. – Vol. 9, № 1. – P. 38–50.

50. Karaiev A. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method / A. Karaiev, E. Strelnikova // *Zeitschrift für Angewandte*

Mathematik und Mechanik. – 2021. – Vol. 101. – p.e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339

51. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes / N. Choudhary, N. Kumar, E. Strelnikova, V. Gnitko, D. Kriutchenko, K. Degtyariov // Journal of King Saud University Science. – 2021. – Vol. 33, № 8. – 101589.

52. Boundary element method analysis of boundary value problems with periodic boundary conditions/ V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, N. Choudhary, E.A. Strelnikova // WIT Transactions on Engineering Sciences. – 2021. – Vol. 131. – P. 31-44.