

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

258183/53

Ж-14088

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 53

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК 34

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

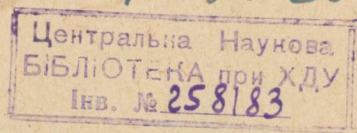
ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 53

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК 34

к-14038



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков

1970

В вестник включены статьи, освещающие отдельные вопросы теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изучаются краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных в случае специальных областей, краевые задачи для некоторых конкретных дифференциальных уравнений в частных производных; приближенные методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными и постоянными коэффициентами. Рассматриваются некоторые классы мероморфных и субгармонических функций. Изучается структура конечных групп и операторов. Исследуются стохастические и дифференциальные уравнения и соответствующие уравнения для плотностей распределения вероятностей.

Редакционная коллегия:

Проф. Н. И. Ахиезер (ответственный редактор), проф. В. А. Марченко, проф. А. В. Погорелов, доц. А. А. Янцевич (ответственный секретарь).

Редактор Е. П. Иващенко
Техредактор Г. П. Александрова
Корректор Ж. Л. Бялая

Сдано в набор 20/VI 1969 г. Подписано к печати 30/III 1970 г.
БЦ 50069. Формат $70 \times 108^{1/16}$. Объем 10 физ. печ. л.,
14,0 усл. печ. л., 10,8 уч.-изд. л. Зак. 9-278.
Тираж 500. Цена 97 коп.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в тип. № 16
Областного управления по печати. Харьков, 3,
ул. Университетская, № 16. Зак. 1569.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ПРИЗНАКОВ КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

Ю. А. Палант

Мы рассматриваем здесь полиномиальные пучки операторов

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j, \quad (1)$$

где $A_j \in \mathfrak{S}_\infty \subset \mathfrak{S}_\infty$ — класс вполне непрерывных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Условимся называть вектор-функцию $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{H}$ *производящей функцией* цепочки из собственного и присоединенных к нему векторов пучка*, отвечающих характеристическому числу λ_0 , если $\varphi(\lambda)$ аналитична в точке λ_0 , $\varphi(\lambda_0) \neq 0$ и $L(\lambda)\varphi(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ имеет корень некоторой кратности $k+1$. Коэффициенты φ_j ($j = 0, 1, \dots, k$) в разложении

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_j \quad (2)$$

образуют упомянутую цепочку. Для описания цепочек достаточно пользоваться производящими полиномами. Коэффициенты φ_j ($j = k+1, k+2, \dots$) в (2) несущественны.

Образуем пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$, являющееся ортогональной суммой n экземпляров данного пространства $\mathfrak{H}$. Каждую производящую функцию $\varphi(\lambda)$ цепочки из $k+1$ векторов пучка $L(\lambda)$ сопоставим с вектор-функцией

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ \lambda\varphi(\lambda) \\ \dots \\ \lambda^{n-1}\varphi(\lambda) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{H}}. \quad (3)$$

Тогда n -кратную полноту системы собственных и присоединенных векторов пучка (1) [1] можно понимать следующим образом: пусть вектор $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathfrak{H}}$ таков, что для каждой $\tilde{\varphi}(\lambda)$, отвечающей цепочке из $k+1$ векторов и характеристическому числу λ_0 , функция $(\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi})$ имеет $k+1$ -кратный корень $\lambda = \lambda_0$; тогда $\psi = 0$.

* Определение этих цепочек см. в работах [1] и [2].

§ 1. Линейные пучки, связанные с полиномиальным

Полиномиальный пучок (1) сопоставим с линейным пучком

$$\tilde{L}(\lambda) = \tilde{I} - \tilde{A}_0 - \lambda \tilde{A}_1, \quad (4)$$

действующим в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$. Здесь $\tilde{I}$ — единичный оператор, а $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ — операторы, заданные с помощью матриц

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} & & A_n \\ I & & \\ & I & \\ & & \ddots \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Для того чтобы вектор-функция

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_0(\lambda) \\ \varphi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{H}},$$

была производящей для линейного пучка $\tilde{L}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_0(\lambda)$ была производящей для $L(\lambda)$ и чтобы (с точностью до несущественных слагаемых) выполнялись равенства

$$\varphi_j(\lambda) = \lambda \varphi_{j-1}(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — производящая функция для пучка $\tilde{L}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$\tilde{L}(\lambda) \tilde{\varphi}(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{H}}$$

имеет $k+1$ -кратный корень при $\lambda = \lambda_0$ ($k+1$ — длина соответствующей цепочки). Тогда нуль $\lambda = \lambda_0$ не меньшей кратности имеют компоненты этой вектор-функции

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda) - \sum_{j=0}^n A_j \varphi_j(\lambda), \\ \varphi_1(\lambda) - \lambda \varphi_0(\lambda), \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(\lambda) - \lambda \varphi_{n-2}(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда получается, что (с точностью до несущественных слагаемых) выполнены равенства

$$\varphi_j(\lambda) = \lambda \varphi_{j-1}(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

и

$$\varphi_0(\lambda) - \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j \varphi_0(\lambda) = L(\lambda) \varphi_0(\lambda)$$

имеет при $\lambda = \lambda_0$ корень кратности $k+1$.

Достаточность доказывается повторением тех же рассуждений в обратном порядке.

Лемма 1 устанавливает соответствие между производящими функциями пучков $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) \longleftrightarrow \tilde{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ \lambda \varphi(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \varphi(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка $\tilde{L}(\lambda)$ эквивалентна n -кратной полноте для пучка $L(\lambda)$. Этим автор пользовался в работе [3].

Рассмотрим теперь пучки более специального вида:

$$L(\lambda) = I - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i T_i H^i - \lambda^n H^n, \quad (5)$$

$$K(\lambda) = I - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i H^i T_i - \lambda^n H^n, \quad (6)$$

где $T_i \in \mathfrak{S}_\infty$, $H \in \mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(H^*) = 0$. Сравним эти пучки и линейные пучки в $\mathfrak{H}$:

$$\hat{L}(\lambda) = \tilde{I} - \hat{T} - \lambda \hat{H}, \quad (7)$$

$$\check{K}(\lambda) = \tilde{I} - \check{T} - \lambda \check{H}, \quad (8)$$

где $\tilde{I}$ — единица в $\tilde{\mathfrak{H}}$ и операторы $\hat{T}$, $\hat{H}$, $\check{T}$, $\check{H}$ определяются матрицами

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_0 T_1 & \cdots & T_{n-1} \\ & 0 & \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} & & & H \\ H & & & \\ & H & & \\ & & \ddots & \\ & & & H \end{pmatrix}$$

$$\check{T} = \begin{pmatrix} T_0 & & & \\ T_1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ T_{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{H} = \begin{pmatrix} & & & H \\ & H & & \\ & & H & \\ & & & \ddots \\ H & & & & H \end{pmatrix}.$$

Аналогично лемме 1 устанавливаются следующие предложения.

Лемма 2. Для того чтобы вектор-функция

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_0(\lambda) \\ \varphi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{H}}$$

была производящей для пучка $\hat{L}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_0(\lambda)$ была производящей для пучка $L(\lambda)$ и (с точностью до несуществующих слагаемых) выполнялись равенства

$$\varphi_j(\lambda) = \lambda H \varphi_{j-1}(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Таким образом, между производящими функциями пучков $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$ устанавливается соответствие

$$\varphi(\lambda) \longleftrightarrow \hat{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ \lambda H \varphi(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} H^{n-1} \varphi(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. Для того чтобы вектор-функция

$$\check{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_0(\lambda) \\ \psi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(\lambda) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{H}}$$

была производящей для пучка $\check{K}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_0(\lambda)$ была производящей для пучка $K(\lambda)$ и (с точностью до несущественных слагаемых) выполнялись условия

$$\begin{aligned} \varphi_j(\lambda) &= T_j \varphi_0(\lambda) + \lambda H \varphi_{j+1}(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n-2), \\ \varphi_{n-1}(\lambda) &= T_{n-1} \varphi_0(\lambda) + \lambda H \varphi_0(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, между производящими функциями пучков $K(\lambda)$ и $\check{K}(\lambda)$ устанавливается соответствие

$$\varphi(\lambda) \longleftrightarrow \check{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ (T_1 + \lambda H T_2 + \dots + \lambda^{n-1} H^n) \varphi(\lambda) \\ (T_2 + \lambda H T_3 + \dots + \lambda^{n-2} H^n) \varphi(\lambda) \\ \vdots \\ (T_{n-1} + \lambda H) \varphi(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ниже мы выясняем, что построенные линейные пучки могут играть роль при изучении кратной полноты для пучков (5) и (6).

Теорема 1. Пусть

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j H^j - \lambda^n H^n,$$

где $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$, $H \in \mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(H^*) = 0$ $(I - T_0)^{-1} \in \mathfrak{K}$.

Тогда полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка $\hat{L}(\lambda)$ эквивалентна n -кратной полноте для $L(\lambda)$.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 соответствие между производящими функциями пучков $\tilde{L}(\lambda)$ и $\hat{L}(\lambda)$, связанных с данным пучком $L(\lambda)$, определяется формулой

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \mathcal{H} \tilde{\varphi}(\lambda), \quad (9)$$

где

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} I \\ H \\ \vdots \\ H^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Допустим, что система собственных и присоединенных векторов пучка $\tilde{L}(\lambda)$ полна. Пусть $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{H}}$ и для каждой производящей функции $\varphi(\lambda)$ уравнение

$$(\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = 0$$

имеет $k+1$ -кратный нуль при $\lambda = \lambda_0$ ($k+1$ — длина цепочки, λ_0 — характеристическое число пучка $\tilde{L}(\lambda)$). Учитывая (9), можем это уравнение переписать в виде

$$(\mathcal{K}\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = (\tilde{\varphi}(\lambda), \mathcal{K}^*\tilde{\psi}) = 0,$$

откуда в силу полноты для пучка $\tilde{L}(\lambda)$ следует

$$\mathcal{K}^*\tilde{\psi} = 0,$$

а так как $\mathfrak{Z}(\mathcal{K}^*) = 0$ (ибо $\mathfrak{Z}(H^*) = 0$), то $\tilde{\psi} = 0$, т. е. система собственных и присоединенных векторов пучка $\tilde{L}(\lambda)$ полна в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Допустим теперь, что есть полнота для пучка $\hat{L}(\lambda)$. Рассмотрим операторы в $\hat{\mathfrak{H}}$:

$$V_p = \begin{pmatrix} T_1 H & T_2 H^2 & \dots & T_p H^p & T_{p+1} H^p & \dots & T_{n-1} H^p & H^p \\ I & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & I & \end{pmatrix}$$

$$(p = 1, 2, \dots, n-1).$$

$$Q = \begin{pmatrix} (I - T_0)^{-1} & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix},$$

$$U_p = QV_p QV_{p-1} \dots QV_1.$$

Заметим, что $\mathfrak{Z}(V_p^*) = \mathfrak{Z}(Q^*) = \mathfrak{Z}(U_p^*) = 0$.

Методом индукции можно проверить формулу

$$U_p \hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^p} \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ \lambda \varphi(\lambda) \\ \dots \\ \lambda^p \varphi(\lambda) \\ \lambda^{p+1} H \varphi(\lambda) \\ \dots \\ \lambda^{n-1} H^{n-p-1} \varphi(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^p} \begin{pmatrix} (I - T_0)^{-1} [L(\lambda)]^p \varphi(\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1.$$

Пользуясь (11) при $p = n - 1$ и обозначая $U_{n-1} = U$, получаем

$$U\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \tilde{\varphi}(\lambda) - \tau(\lambda), \quad (12)$$

где $\tau(\lambda)$ имеет $k + 1$ -кратный корень $\lambda = \lambda_0$.

Пусть вектор $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathfrak{H}}$ таков, что для каждой производящей функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ цепочки из $k + 1$ векторов пучка $\tilde{L}(\lambda)$ уравнение

$$(\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = 0$$

имеет $k + 1$ -кратный корень $\lambda = \lambda_0$. Согласно (12), это верно и для функции

$$(U\hat{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = (\hat{\varphi}(\lambda), U^*\tilde{\psi}),$$

отсюда в силу полноты для пучка $\hat{L}(\lambda)$ получается $U^*\tilde{\psi} = 0$, $\tilde{\psi} = 0$. Это означает полноту для $\tilde{L}(\lambda)$, т. е. n -кратную полноту для $L(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть

$$K(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j H^j T_j - \lambda^n H^n,$$

где $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$, $H \in \mathfrak{S}_\infty$, $(I - T_0)^{-1} \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(H^*) = 0$.

Тогда полнота системы собственных и присоединенных векторов пучка $\tilde{K}(\lambda)$ эквивалентна n -кратной полноте для пучка $K(\lambda)$.

Доказательство. Согласно леммам 1 и 3, связь между производящими функциями линейных пучков $\tilde{K}(\lambda)$ и $K(\lambda)$ можно установить с помощью формулы

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \mathcal{K} \tilde{\varphi}(\lambda), \quad (13)$$

где

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T_1 & HT_2 & \dots & H^{n-1}T_{n-1} & H^n \\ T_2 & HT_3 & \dots & H^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{n-1} & H & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathfrak{Z}(\mathcal{K}^*) = 0$, то из полноты для $\tilde{K}(\lambda)$ следует полнота для $K(\lambda)$.

Допустим теперь, что известна полнота для $\tilde{K}(\lambda)$. Рассмотрим операторы в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & H & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & H^{n-1} & \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & (I - T_0)^{-1} & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{pmatrix}, \dots$$

$$Q_{n-1} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & \\ & & & & (I - I_0)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & HT_1 & I & \\ & & I & \\ & & & \ddots \\ & & & & I \end{pmatrix}, \dots, V_{n-2} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \\ OH^{n-2}T_{n-2} \dots HT_1 I \end{pmatrix},$$

$$U_p = Q_p V_{p-1} Q_{p-1} \dots V_1 Q_1 \mathcal{K}, \quad (p = 1, 2, \dots, n-1).$$

Заметим, что операторы, сопряженные к построенным, аннулируются только в нуле.

По индукции легко проверяется формула

$$U_p \check{\varphi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda) \\ \frac{1}{\lambda} \varphi(\lambda) \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda^p} \varphi(\lambda) \\ \frac{1}{\lambda^{p+1}} [I - T_0 - \lambda HT_1 - \dots - \lambda^p H^p T_p] \varphi(\lambda) \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda^{n-1}} [I - T_0 - \lambda HT_1 - \dots - \lambda^{n-2} H^{n-2} T_{n-2}] \varphi(\lambda) \end{pmatrix} + \tau_p(\lambda),$$

где $\tau_p(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{H}}$ имеет при $\lambda = \lambda_0$ корень кратности $k+1$ (длина цепочки).

Полагая $p = n-1$, $U_{n-1} = U$, $\tau_{n-1}(\lambda) = \tau(\lambda)$, имеем

$$U \check{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \tilde{\varphi}(\lambda) + \tau(\lambda). \quad (14)$$

Пусть вектор $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{H}}$ таков, что для каждой производящей функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$ пучка $\tilde{K}(\lambda)$ уравнение

$$(\tilde{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = 0$$

имеет $k+1$ -кратный корень $\lambda = \lambda_0$ ($k+1$ — длина цепочки). Согласно (14), это верно и для функции

$$(U \check{\varphi}(\lambda), \tilde{\psi}) = (\check{\varphi}(\lambda), U^* \tilde{\psi}),$$

откуда в силу полноты для пучка $\tilde{K}(\lambda)$ получается $U^* \tilde{\psi} = 0$, $\tilde{\psi} = 0$. Это означает полноту для пучка $\tilde{K}(\lambda)$, или n -кратную полноту для $K(\lambda)$.

§ 2. Некоторые приложения

Имеют место следующие предложения.

Теорема 3. Система собственных и присоединенных векторов пучка

$$L(\lambda) = I - T - \lambda H$$

полна в $\mathfrak{H}$, если $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор со спектром на лучах $\arg \lambda = \frac{\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$); $T \in \mathfrak{S}_\infty$, $(I - T)^{-1} \in \mathfrak{K}$ и выполняется какое-либо из условий $TH \in \mathfrak{S}_p$ или $HT \in \mathfrak{S}_p$.

Теорема 4. Пусть $A = H(I + S)$, где $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор со спектром на лучах

$$\arg \lambda = \frac{\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1); \quad S \in \mathfrak{S}_\infty \text{ и } (I + S)^{-1} \in \mathfrak{R}.$$

Пусть выполняется одно из условий $SH \in \mathfrak{S}_p$ или $HS \in \mathfrak{S}_p$. Тогда система корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Так как эти теоремы эквивалентны [2, стр. 320], достаточно доказать одну из них.

Доказательство теоремы 4. Обозначим через $\mathfrak{H}_0$ ортогональное дополнение к линейной оболочке корневых подпространств оператора A и через P — ортопроектор из $\mathfrak{H}_0$ в $\mathfrak{H}$. Известно [2, стр. 34], что $\mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно A и оператор $A_1 = PAP$ вольтерров. Поэтому оператор-функция

$$R(\lambda) = (I - \lambda A_1)^{-1} = P(I - \lambda A)^{-1}P + I - P$$

является целой.

Обозначим через G_α область $\left| \arg \lambda - \frac{\pi k}{n} \right| \geq \alpha$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$). Выберем $\alpha < \frac{\pi}{np}$. Из равенства

$$(I - \lambda A)^{-1} = (I - T)(I - (I - \lambda H)^{-1}T)^{-1}(I - \lambda H)^{-1},$$

где $T = (I + S)^{-1} - I$, пользуясь леммой М. В. Келдыша, получаем

$$|(I - \lambda A)^{-1}| = O(1), \quad (\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in G_\alpha),$$

а поэтому при тех же условиях

$$|R(\lambda)| = O(1).$$

Далее

$$A_1^n = P(H + HS)^n P = PH^n P + PMP,$$

где $PH^n P$ — самосопряженный оператор. Оператор A_1^n — вольтерров; его мнимая компонента —

$$(A_1^n)_J = (PMP)_J \in \mathfrak{S}_p,$$

если $HS \in \mathfrak{S}_p$. Согласно теореме В. И. Мацаева [4], $A_1^n \in \mathfrak{S}_p$. Поэтому оператор-функция $(I - \lambda^n A_1^n)^{-1}$ является целой порядка не выше np . Это же верно и для

$$R(\lambda) = (I - \lambda^n A_1^n)^{-1}(I + \lambda A_1 + \dots + \lambda^{n-1} A_1^{n-1}).$$

Применяя к $R(\lambda)$ в области, дополнительной к G_α , теорему Фрагмена—Линделефа, получаем, что $R(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости. Отсюда $R(\lambda) = R(0) = I$, а поэтому $A_1 = 0$, $\mathfrak{H}_0 = 0$, т. е. линейная оболочка системы корневых векторов оператора A есть плотное в $\mathfrak{H}$ множество.

В случае $SH \in \mathfrak{S}_p$ полнота устанавливается для оператора $(I + S)H$, подобного A , откуда [2, стр. 317] следует полнота и для A .

Из теорем 1, 2, 3 вытекает

Теорема 5. Пусть $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор и при некотором натуральном n оператор H^n самосопряженный.

Тогда система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j H^j - \lambda^n H^n,$$

$$K(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j H^j T_j - \lambda^n H^n$$

n -кратно полна в $\mathfrak{H}$, если $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$, $(I - T_0)^{-1} \in \mathfrak{R}$, и при некотором $p > 0$ выполняются какие-либо из условий $HT_j \in \mathfrak{S}_p$ или $T_j H \in \mathfrak{S}_p$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$).

Теорема М. В. Келдыша [1] отличается от этой более жестким условием $H \in \mathfrak{S}_p$. Теорема 5 близка к результату автора [3]. Установленные здесь предложения являются обобщениями теоремы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2, стр. 321] для линейных пучков, элементы доказательства которой были использованы нами при получении теоремы 4.

Отметим, что теорему В. И. Мацаева [5] о полноте для пучка $I - T - \lambda H$ при условиях $T \in \mathfrak{S}_\infty$, $H = H^* \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный оператор можно, пользуясь его же методом, обобщить на случай, когда $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — нормальный оператор со спектром на лучах $\arg \lambda = \frac{\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$). Отсюда с привлечением теорем 1 и 2 получается n -кратная полнота для пучков $L(\lambda)$ и $K(\lambda)$ при условиях $(I - T_0)^{-1} \in \mathfrak{R}$, $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$ ($j = 0, 1, \dots, n$); $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор и H^n — самосопряженный. Этот результат (без ограничения $(I - T_0)^{-1} \in \mathfrak{R}$) впервые получил другим методом Е. З. Могольский [6].

§ 3. Теоремы о полноте для пучков с нормальным оператором конечного нижнего порядка

Нижним порядком оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ называется число

$$p = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(t; A)}{\ln t},$$

где $\nu(t; A)$ — количество чисел $s_k^{-1}(A)$, меньших t . Множество операторов конечного нижнего порядка содержит классы $\mathfrak{S}_p$.

В. И. Мацаевым и автором получены следующие предложения.

Теорема 6. Система собственных и присоединенных векторов пучка

$$L(\lambda) = I - T - \lambda H$$

полна в $\mathfrak{H}$, если H — полный нормальный оператор конечного нижнего порядка со спектром на лучах $\arg \lambda = \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а оператор $T \in \mathfrak{S}_\infty$.

Теорема 7. Пусть $A = H(I + S)$, где H — полный нормальный оператор конечного нижнего порядка со спектром на лучах $\arg \lambda = \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). $S \in \mathfrak{S}_\infty$ и $(I + S)^{-1} \in \mathfrak{R}$. Тогда система корневых векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

В случае $H = H^*$ этот результат содержится в работе В. И. Мацаева [7] как следствие более общей теоремы.

При условии $(I - T)^{-1} \in \mathfrak{R}$, выполнения которого можно добиться сдвигом параметра $\lambda \rightarrow \lambda + a$, сформулированные предложения эквивалентны.

Доказательство теоремы 7. Пусть $\mathfrak{H}_0$ — ортогональное дополнение к линейной оболочке корневых подпространств оператора A ; P — орто-

проектор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_0$. Тогда $\mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно A и оператор $A_1 = PAP$ — вольтерров. Поэтому оператор-функция

$$R(\lambda) = (I - \lambda A_1)^{-1} = P(I - \lambda A)^{-1}P + I - P$$

целая. Обозначим через G_α область

$$|\arg \lambda - \alpha_k| > \alpha \quad (k = 1, 2, \dots, n; \alpha < \frac{\pi}{np}).$$

Как выяснено в доказательстве теоремы 4,

$$|R(\lambda)| = O(1) \quad (\lambda \in G_\alpha, \lambda \rightarrow \infty).$$

Обозначая через $M(r)$ величину

$$M(r) = \max_{|\lambda| \leq r} |R(\lambda)|$$

и пользуясь оценкой резольвенты из работы В. И. Мацаева [8], имеем

$$\ln M(r) \leq c(\varepsilon) \left(1 + \int_0^{r(1+\varepsilon)} \frac{\nu(t; A_1)}{t} dt \right), \quad \varepsilon > 0.$$

Далее из неравенств

$$s_k(A_1) = s_k(PAP) \leq s_k(A) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

следует

$$\nu(t; A_1) \leq \nu(t; A),$$

а из неравенств

$$s_k(H) \leq |(1+S)^{-1}| s_k(A) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

следует, что при некотором $c > 0$

$$\nu(t; A) \leq \nu(ct; H),$$

и поэтому

$$\nu(t; A_1) \leq \nu(ct; H).$$

Следовательно,

$$\ln M(r) \leq c(\varepsilon) \left(1 + \int_0^{r(1+\varepsilon)} \frac{\nu(ct; H)}{t} dt \right)$$

и

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} &\leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \ln \left[1 + \int_0^{r(1+\varepsilon)} \frac{\nu(ct; H)}{t} dt \right] \leq \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \ln \left[\nu(cr(1+\varepsilon); H) \int_1^{r(1+\varepsilon)} \frac{dt}{t} \right] \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r; H)}{\ln r} = p < \infty, \end{aligned}$$

т. е. целая оператор-функция $R(\lambda)$ имеет конечный нижний порядок. Применяя к $R(\lambda)$ в области, дополнительной к G_α , принцип Фрагмена-Линделфа, получаем, что $R(\lambda)$ ограничена всюду, откуда $R(\lambda) = R(0) = I$, поэтому $\mathfrak{H}_0$ — нулевое подпространство. Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 и 6 следует

Теорема 8. Пусть H — полный нормальный оператор конечного нижнего порядка со спектром на нескольких лучах, исходящих из нуля; опе-

раторы $T_j \in \mathfrak{S}_\infty$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Тогда система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j H - \lambda^n H^n,$$

$$K(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j H^j T_j - \lambda^n H^n$$

n -кратно полна в $\mathfrak{H}$.

Отметим, что в теореме М. В. Келдыша [1] на оператор H наложено более жесткое условие $H \in \mathfrak{S}_p$.

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Мацаеву и А. С. Маркусу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. «Докл. АН СССР», т. 77, № 1, 11—14, 1951.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Изд-во «Наука», М., 1965.
3. Ю. А. Палант. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. «Докл. АН СССР», т. 141, № 3, 558—560, 1961.
4. В. И. Мацаев. О вольтеровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных. «Докл. АН СССР», т. 139, № 4, 810—814, 1961.
5. В. И. Мацаев. Об одном классе вполне непрерывных операторов. «Докл. АН СССР», т. 139, № 3, 548—552, 1961.
6. Е. З. Могульский. О полноте собственных и присоединенных векторов операторного пучка. «Докл. АН СССР», т. 183, № 4 (1968), 775—777.
7. В. И. Мацаев. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов. «Докл. АН СССР», т. 155, № 2, 273—276, 1964.
8. В. И. Мацаев. Об одном методе оценки резольвенты несамосопряженных операторов. «Докл. АН СССР», т. 154, № 5, 1034—1037, 1964.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ СО СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. Я. Хрусьов

Для того чтобы дать представление о круге задач, которым посвящена данная работа, рассмотрим сначала два характерных примера.

1. Пусть $\Omega_{F^{(n)}}$ — область, лежащая в m -мерном пространстве R_m ($m \geq 3$) и являющаяся дополнением к замкнутому множеству $F^{(n)}$, а $F^{(n)}$ строится следующим образом. В R_m выбираются независимо друг от друга n точек x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), так что вероятность выбора одной точки из области $Q \subset R_m$ равна $\int_Q f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, и $\int_{R_m} f(x) dx = 1$. Затем каждая точка x_i также независимо друг от друга накрывается замкнутым шаром $F_i^{(n)}$ с центром в x_i , ньютонова емкость которого есть случайная величина с функцией распределения $\sigma^{(n)}(t) = \sigma(n \cdot t)$. Заметим, что емкость C шара в R_m связана с его радиусом R простым соотношением: $C = (m-2) \omega_m R^{m-2}$, ω_m — площадь поверхности единичной сферы в R_m .

Положим $F^{(n)} = \bigcup_{i=1}^n F_i^{(n)}$ и $\Omega_{F^{(n)}} = R_m \setminus F^{(n)}$. Тогда множество $F^{(n)}$ — случайное. Зафиксируем произвольную реализацию множества $F^{(n)}$ и рассмотрим в области $\Omega_{F^{(n)}}$ краевую задачу

$$\Delta u^{(n)}(x) + k^2 u^{(n)}(x) = \psi(x), \quad x \in \Omega_{F^{(n)}},$$

$$u^{(n)}(x) = U(x), \quad x \in \partial\Omega_{F^{(n)}},$$

$$u^{(n)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

где $\text{Im } k > 0$, $\int_{R_m} |\psi(x)|^2 dx < \infty$, $U(x)$ — непрерывная и ограниченная в R_m функция; $\partial\Omega_{F^{(n)}}$ — граница области $\Omega_{F^{(n)}}$.

Как известно, решение $u^{(n)}(x)$ такой задачи существует. Доопределим его на множестве $F^{(n)}$, положив $u^{(n)}(x) = U(x)$ при $x \in F^{(n)}$. Построенная таким образом функция $u^{(n)}(x)$, очевидно, зависит от множества $F^{(n)}$ и, следовательно, $u^{(n)}(x)$ — случайная функция. Однако, как будет показано в этой работе, если n достаточно велико, то $u^{(n)}(x)$ по вероятности близко в метрике $L_2(R_m)$ (а при $n \rightarrow \infty$ сходится) к неслучайной функции $u(x)$, которую можно найти, решая в R_m дифференциальное уравнение

$$\Delta u(x) - \varphi(x) u(x) + k^2 u(x) = \psi(x) - \varphi(x) U(x),$$

где $\varphi(x) = f(x) \int_0^\infty t d\sigma(t)$, при нулевом условии на бесконечности.

2. Пусть Ω — ограниченная область в R_m , а множество $F^{(n)}$ строится так же, как в задаче 1.

Положим $\Omega_{F^{(n)}} = \Omega \setminus F^{(n)}$ и рассмотрим оператор $-\Delta$, определенный на множестве функций $u(x)$, обращающихся в нуль на границе области $\Omega_{F^{(n)}} (u(x) \in W_2^1(\Omega_{F^{(n)}}) \cap W_2^2(\text{лок}))$. Пусть $0 < \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots$ — последовательность собственных значений этого оператора, пронумерованных с учетом кратности. Так как область $\Omega_{F^{(n)}}$ зависит от множества $F^{(n)}$, выбор которого есть случайное событие, то $\lambda_j^{(n)}$ — случайные величины. Однако оказывается, что при достаточно больших n $\lambda_j^{(n)}$ по вероятности близки (при $n \rightarrow \infty$ стремятся) к собственным значениям λ_j (отмеченным тем же номером: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$) оператора $-\Delta + \varphi(x) \left(\varphi(x) = f(x) \int_0^\infty t d\sigma(t) \right)$, опреде-

ленного на функциях, равных нулю на границе области Ω ($u(x) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\text{лок})$). При этом ортогональные суммы собственных подпространств, соответствующих сходящимся собственным значениям, также сходятся (равномерно) по вероятности. Как видно из приведенных примеров, в данной работе рассматриваются вопросы, связанные с краевой задачей Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца в областях Ω_F специального вида. Область Ω_F образуется в результате выбрасывания по фиксированной области $\Omega \subset R_m$ замкнутого множества F ($\Omega_F = \Omega \setminus F$), причем выбор F определяется некоторым вероятностным законом.

Поскольку решение такой краевой задачи зависит от F , то оно случайное. В работе устанавливаются условия, при которых это решение по вероятности сходится к неслучайной функции $u(x)$ и выводится дифференциальное уравнение для $u(x)$. Это уравнение получается путем «введения» в исходное дифференциальное уравнение потенциала $\varphi(x)$, который выражается через вероятностные характеристики емкостей частей множества F . Функцию $u(x)$ можно найти, решая полученное уравнение во всей области Ω при нулевом условии на границе Ω .

Доказательство этого результата в основном состоит из получения оценки для разности соответствующих функций Грина и установления «правильности» распределения множества F в области Ω . Это сделано соответственно в § 1 и § 2. Вопросы, рассматриваемые в § 1, тесно связаны с работами [1, 2].

Автор выражает признательность проф. В. А. Марченко за постоянное внимание к работе и ряд полезных советов.

§ 1. Оценки функций Грина

Пусть в R_m задана произвольная область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ (в частности, Ω может совпадать с R_m) и некоторое ограниченное замкнутое множество F , лежащее в Ω и регулярное относительно задачи Дирихле (т. е. в области $R_m \setminus F$ краевая задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции). Выбросим из Ω множество F и рассмотрим в области $\Omega_F = \Omega \setminus F$ функцию Грина $G_F(x, y; \nu)$ краевой задачи:

$$\Delta_x G_F(x, y; \nu) - \nu^2 G_F(x, y; \nu) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega_F, \quad (1a)$$

$$G_F(x, y; \nu) = 0, \quad x \in \partial\Omega_F, \quad (1б)$$

$$G_F(x, y; \nu) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1в)$$

где $\nu \geq 0$, причем, если $\nu = 0$, то область Ω будем считать ограниченной. (Условие (1в) относится к неограниченным областям).

Доопределим $G_F(x, y; v)$ нулем на множестве F , т. е. положим $G_F(x, y; v) = 0$, когда $x \in F$ или $y \in F$. Рассмотрим еще функцию Грина $G_\varphi(x, y; v)$ такой задачи:

$$\Delta_x G_\varphi(x, y; v) - (\varphi(x) + v^2) G_\varphi(x, y; v) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad (2a)$$

$$G_\varphi(x, y; v) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2б)$$

$$G_\varphi(x, y; v) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2в)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная, ограниченная в Ω , неотрицательная функция и $\int_\Omega \varphi(x) dx < \infty$, а v — то же, что и в уравнении (1а).

Пусть D — произвольная ограниченная подобласть Ω . Введем в рассмотрение норму

$$\|G_F - G_\varphi\|_D = \int_D \left(\int_\Omega |G_F(x, y; v) - G_\varphi(x, y; v)| dx \right) dy. \quad (3)$$

Целью этого параграфа является получение оценки для $\|G_F - G_\varphi\|_D$ в зависимости от вида множества F и функции $\varphi(x)$.

Обозначим через $G(x, y; v)$ функцию Грина краевой задачи (2а) — (2б) — (2в) при $\varphi(x) \equiv 0$.

Тогда, как легко видеть, функцию Грина $G_\varphi(x, y; v)$ можно представить в виде

$$G_\varphi(x, y; v) = G(x, y; v) - \int_\Omega G(x, \xi; v) \rho(\xi, y; v) d\xi, \quad (4)$$

где

$$\rho(x, y; v) = \varphi(x) G_\varphi(x, y; v). \quad (4')$$

Разобьем пространство R_m на кубы K_α (замкнутые) со стороной $h < 1$. Пусть $\{K_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ — некоторое множество кубов K_α , удовлетворяющих таким условиям:

1) множество $T_\Lambda = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ находится на некотором положительном рас-

стоянии t от границы области Ω ,

2) ньютонова емкость множеств $F \cap K_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$) не равна нулю, т. е. $C(F \cap K_\alpha) > 0$ при $\alpha \in \Lambda$.

Напомним, что ньютонова емкость $C(E)$ компакта $E \subset R_m$ определяется следующим образом [3]:

$$C(E) = \max \mu(E),$$

где максимум берется по множеству мер μ , сосредоточенных на E и таких, что

$$\frac{1}{(m-2)\omega_m} \int_E \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{m-2}} \leq 1,$$

$\omega_m = \frac{2(V\pi)^m}{\Gamma(m/2)}$ — площадь поверхности единичной сферы в R_m . Мера γ , на которой достигается этот максимум, называется равновесной мерой компакта E . Существование такой меры доказано в [3].

На каждом из выделенных множеств $F \cap K_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$) распределим единичную массу так, чтобы полученная при этом мера на $F \cap K_\alpha$ была равна

$$\mu^\alpha = \frac{1}{C(F \cap K_\alpha)} \gamma_\alpha,$$

где γ_α — равновесная мера $F \cap K_\alpha$. Тогда во всех регулярных точках множества $F \cap K_\alpha$ будет выполняться равенство [3]

$$\frac{1}{(m-2)\omega_m} \int_{F \cap K_\alpha} \frac{d\mu_\alpha(\xi)}{|x-\xi|^{m-2}} = \frac{1}{C(F \cap K_\alpha)}. \quad (5)$$

Если $F \cap K_\alpha$ имеет иррегулярные точки (они могут появиться на пересечении F с гранями куба K_α), то в них это равенство может не выполняться. Но, так как все точки множества F по условию регулярны, то оно обязательно выполняется на пересечении F с открытым кубом K_α , т. е. на множестве $F \cap (K_\alpha \setminus \partial K_\alpha)$. Кроме того, всюду [3]

$$\frac{1}{(m-2)\omega_m} \int_{F \cap K_\alpha} \frac{d\mu_\alpha(\xi)}{|x-\xi|^{m-2}} \leq \frac{1}{C(F \cap K_\alpha)}. \quad (5')$$

Обозначим через $\{K_\alpha, \alpha \in Y\}$ такое подмножество $\{K_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, в которое войдут кубы K_α ($\alpha \in \Lambda$), находящиеся на расстоянии $R > 3\sqrt{mh}$ от точки y , и рассмотрим функцию

$$G_F^h(x, y; \nu) = G(x, y; \nu) - \sum_{\alpha \in Y} q_\alpha(y) \int_{F \cap K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\mu_\alpha(\xi), \quad (6)$$

где $q_\alpha(y) = \int_{K_\alpha} \rho(\xi, y; \nu) d\xi$, а $\rho(x, y; \nu)$ определяется формулой (4').

Получим оценки для норм $\|G_F^h - G_F\|_D$ и $\|G_F^h - G_\varphi\|_D$, откуда будет вытекать необходимая нам оценка для нормы $\|G_F - G_\varphi\|_D$. Будем сначала оценивать норму $\|G_F^h - G_F\|_D$. Для этого в каждом кубе K_α ($\alpha \in \Lambda$) выделим меньший куб K'_α с тем же центром и стороной $h' = h - 2r$, $h \gg r > 0$ (см. рисунок).

Выберем произвольным куб K_β ($\beta \in Y$) и представим функцию $G_F^h(x, y; \nu)$ при $x \in K'_\beta$ в виде

$$G_F^h(x, y; \nu) = G_\varphi(x, y; \nu) - q_\beta(y) \int_{F \cap K_\beta} G(x, \xi; \nu) d\mu_\beta(\xi) + G_\beta^h(x, y; \nu) - G_\varphi(x, y; \nu), \quad (7)$$

где

$$G_\beta^h(x, y; \nu) = G(x, y; \nu) - \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha \in Y}} q_\alpha(y) \int_{F \cap K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\mu_\alpha(\xi).$$

Получим оценку для разности $G_\beta^h(x, y; \nu) - G_\varphi(x, y; \nu)$:

$$\begin{aligned} |G_\beta^h(x, y; \nu) - G_\varphi(x, y; \nu)| &\leq \sum_{\alpha \neq \beta} \left| \int_{K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| + \\ &+ \int_{Q(y, \beta)} G(x, \xi; \nu) \rho(\xi, y; \nu) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

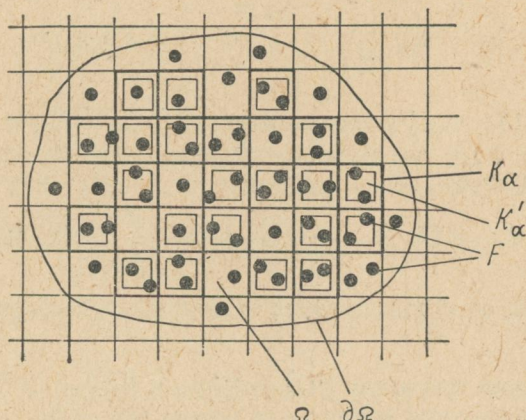
Здесь введены обозначения $Q(y, \beta) = \Omega \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha \in Y}} K_\alpha$ и

$$d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) = \begin{cases} \rho(\xi, y; \nu) d\xi - q_\alpha(y) d\mu_\alpha(\xi), & \alpha \in Y, \\ 0, & \alpha \notin Y \end{cases} \quad (8')$$

Так как $\int_{K_\alpha} d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) = 0$, то имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \left| \int_{K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| \leq \sum_{\alpha \neq \beta}' \left| \int_{K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| + \sum_{\alpha}'' \left| \int_{K_\alpha} u_\alpha(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right|, \quad (9)$$

где сумма $\sum'$ распространяется на те K_α , которые пересекаются с шаром радиуса $2\sqrt{mh}$ с центром в точке x , а $\sum''$ — на все остальные; $u_\alpha(x, \xi; \nu) = G(x, \xi; \nu) - G(x, \xi_\alpha; \nu)$, x_α — центры кубов K_α .



Для дальнейшего рассмотрения необходимо отметить следующие свойства функций Грина $G_\varphi(x, y; \nu)$ и $G(x, y; \nu)$, которые вытекают из формул (4) и (4') известного представления $G(x, y; \nu)$, через фундаментальное решение $H(|x - y|, \nu)$ уравнения (1a) и явного вида $H(|x - y|, \nu)$ [5]:

$$0 \leq G_\varphi(x, y; \nu) \leq G(x, y; \nu); \quad (10)$$

$$G(x, y; \nu) = \frac{e^{-\nu\theta|x-y|}}{(m-2)\omega_m|x-y|^{m-2}}(1 + g(x, y)). \quad (11)$$

Здесь функция $g(x, y)^*$ ограничена в $\Omega \times \Omega$, имеет ограниченные производные по $y \in \Omega$ и при $|x - y| \rightarrow 0$

$$g(x, y) = 0(|x - y|), \quad (11')$$

причем последние два свойства $g(x, y)$ выполняются равномерно, если y принадлежит некоторой области, находящейся на положительном расстоянии от границы области Ω ; θ — произвольное положительное число, меньшее 1. Буквой θ мы будем в этом параграфе обозначать произвольное число $0 < \theta < 1$. Обратимся к оценке суммы $\sum'$ в (9). Так как в этой сумме $|x - \xi| \leq 3\sqrt{mh} < R \leq |\xi - y|$, то $|\xi - y| > \frac{1}{2}|x - y|$. Поэтому из формул (4'), (8'), (10) и (11) вытекает такое неравенство для вариации меры $\sigma_\alpha(\xi, y)$ на кубе K_α :

$$\text{var } \sigma_\alpha(K_\alpha, y) < \frac{2^{m-1}}{(m-2)\omega_m} \max_{x \in \Omega} [\varphi(x)(1 + g(x, y))] h^m e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|} |x-y|^{m-2}.$$

* $g(x, y)$ зависит еще от m, ν и θ .

Отсюда, учитывая, что при $x \in K'_\beta$ $|\xi - x| \geq r$, в силу (11) получаем

$$\left| \sum_{\alpha \neq \beta} \int_{K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| < A \frac{h^m}{r^{m-2}} e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|} |x-y|^{m-2}, \quad (12)$$

$A = \text{const}$. Буквой A мы будем обозначать постоянные, не зависящие от h, r, R и множеств F и T_Δ , а буквой A_t — постоянные, также не зависящие от этих параметров, но зависящие от расстояния t — от множества T_Δ до границы области Ω .

Оценим теперь вторую сумму в (9). Пользуясь формулами (4'), (8'), (10) и (11), получаем, что для любого $\xi \in K_\alpha$ ($\alpha \in Y$)

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in K_\alpha} |u_\alpha(x, \xi; \nu)| &< A_t h \frac{e^{-\nu\theta(|x-\xi| - \sqrt{mh})}}{(|x-\xi| - \sqrt{mh})^{m-1}}, \\ \text{var } \sigma_\alpha(K_\alpha, y) &< Ah^m \frac{e^{-\nu\theta(|\xi-y| - \sqrt{mh})}}{(|\xi-y| - \sqrt{mh})^{m-2}}, \end{aligned}$$

откуда вытекает такое неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha}'' \int_{K_\alpha} u_\alpha(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| &< A_t h \int_{\Omega(x, y)} \frac{e^{-\nu\theta(|x-\xi| - \sqrt{mh})}}{(|x-\xi| - \sqrt{mh})^{m-1}} \times \\ &\times \frac{e^{-\nu\theta(|\xi-y| - \sqrt{mh})}}{(|\xi-y| - \sqrt{mh})^{m-2}} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\Omega(x, y) = \Omega \cap \{ \xi : |x-\xi| \geq 2\sqrt{mh}, |\xi-y| \geq 3\sqrt{mh} \}.$$

Так как в области $\Omega(x, y)$ $|x-\xi| - \sqrt{mh} \geq \frac{1}{2}|x-\xi|$ и $|\xi-y| - \sqrt{mh} > \frac{1}{2}|\xi-y|$, то

$$\sum_{\alpha}'' \left| \int_{K_\alpha} u_\alpha(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| < A_t h \int_{\Omega} \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}(|x-\xi| + |\xi-y|)}}{|x-\xi|^{m-1} |\xi-y|^{m-2}} d\xi. \quad (13)$$

Имеет место следующая

Лемма. Пусть Ω — произвольная область в пространстве R_m и $0 < \lambda < m$, $0 < \mu < m$, $C \geq 0$, причем, если $C = 0$ и $\lambda + \mu \leq m$, то Ω ограничена. Тогда при всех x и y

$$\int_{\Omega} \frac{e^{-C(|x-\xi| + |\xi-y|)}}{|x-\xi|^\lambda |\xi-y|^\mu} d\xi \leq \begin{cases} B \frac{e^{-C|x-y|}}{|x-y|^{\lambda+\mu-m}}, & \lambda + \mu > m, \\ B \frac{e^{-C|x-y|} (1 + |x-y|^{[m-\lambda-\mu]+1})}{|x-y|^{[m-\lambda-\mu]+1-(m-\lambda-\mu)}}, & \lambda + \mu \leq m, \end{cases}$$

где $B = \text{const}$; $[a]$ — означает целую часть числа a .

Очевидно, эта лемма является некоторым обобщением известной теоремы о свертке ядер со слабой особенностью [4], хотя при $C = 0$ и $\lambda + \mu \leq m$ этот результат слабее. Доказательство леммы легко проводится точно таким же способом, как и доказательство теоремы.

Поскольку θ — произвольное число $0 < \theta < 1$, то из (13) и леммы следует, что при всех $m \geq 3$

$$\sum_{\alpha}'' \left| \int_{K_\alpha} u_\alpha(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| < A_t h \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|}}{|x-y|^{m-2}},$$

откуда, учитывая (12) и (9), получаем оценку для первого слагаемого в (8)

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \left| \int_{K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\xi \sigma_\alpha(\xi, y) \right| < \left(A_t h + A \frac{h^m}{r^{m-2}} \right) \frac{e^{-\frac{\nu_0}{2} |x-y|}}{|x-y|^{m-2}}. \quad (14)$$

Оценивая второе слагаемое в (8) также с помощью формул (4'), (10) и (11), будем иметь

$$\int_{Q(y, \beta)} G(x, \xi; \nu) \rho(\xi, y; \nu) d\xi \leq A \int_{Q(y, \beta)} \frac{e^{-\nu_0(|x-\xi| + |\xi-y|)}}{|x-\xi|^{m-2} |\xi-y|^{m-2}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Полагая $\varphi(\xi) = \varphi^p(\xi) \varphi^q(\xi)$ ($p+q=1$) и применяя неравенство Гельдера при $p = (m-2)(m-1)^{-1}$ и $q = (m-1)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q(y, \beta)} G(x, \xi; \nu) \rho(\xi, y; \nu) d\xi \leq \\ & \leq A \left\{ \int_{Q(y, \beta)} \frac{e^{-\frac{\nu_0}{p}(|x-\xi| + |\xi-y|)}}{|x-\xi|^{m-1} |\xi-y|^{m-1}} \varphi(\xi) d\xi \right\}^p \left\{ \int_{Q(y, \beta)} \varphi(\xi) d\xi \right\}^q, \end{aligned}$$

откуда в силу ограниченности $\varphi(\xi)$, леммы и неравенства $R > 3\sqrt{mh}$ вытекает окончательная оценка

$$\int_{Q(y, \beta)} G(x, \xi; \nu) \rho(\xi, y; \nu) d\xi < A \left(R^{\frac{m}{m-1}} + \sqrt[m-1]{\int_{Q \setminus T_A} \varphi(\xi) d\xi} \right) \frac{e^{-\frac{\nu_0}{2} |x-y|}}{|x-y|^{m-2}}. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь при $x \in F \cap K'_\beta$ ($\beta \in Y$) разность $g_\beta(x, y; \nu) = G_\varphi(x, y; \nu) - q_\beta(y) \int_{K_\beta} G(x, \xi; \nu) d\mu_\beta(\xi)$. Так как $q_\beta(y) = \int_{K_\beta} \rho(x, y; \nu) dx$, то в силу (4), (5), (10), (11) и (11') имеем

$$\begin{aligned} |g_\beta(x, y; \nu)| & \leq G_\varphi(x, y; \nu) \left| 1 - \frac{\Phi_\beta}{C(F \cap K_\beta)} \right| + G_\varphi(x, y; \nu) \frac{\Phi_\beta}{C(F \cap K_\beta)} 0(h) + \\ & + |\tilde{u}_\beta(x, y; \nu)| \frac{\Phi_\beta}{C(F \cap K_\beta)} (1 + 0(h)), \end{aligned} \quad (16)$$

где введены обозначения $\Phi_\beta = \int_{K_\beta} \varphi(x) dx$, $\tilde{u}_\beta(x, y; \nu) = G_\varphi(x, y; \nu) - G_\varphi(\tilde{x}_\beta, y; \nu)$, $\tilde{x}_\beta \in K_\beta$. Пользуясь формулами (4), (4') и (11) и вспоминая, что при $x \in K'_\beta$ ($\beta \in Y$) $|x-y| \geq R > 3\sqrt{mh}$, нетрудно установить

$$|\tilde{u}_\beta(x, y; \nu)| < A_t \frac{h}{R} \frac{e^{-\frac{\nu_0}{2} |x-y|}}{|x-y|^{m-2}}.$$

Учитывая это неравенство, а также (10) и (11), из (16) получаем при $x \in F \cap K'_\beta$ ($\beta \in Y$)

$$|g_\beta(x, y; \nu)| \leq \left\{ A \left| 1 - \frac{\Phi_\beta}{C(F \cap K_\beta)} \right| + A_t \left(h + \frac{h}{R} \right) \frac{\Phi_\beta}{C(F \cap K_\beta)} \right\} \frac{e^{-\frac{\nu_0}{2} |x-y|}}{|x-y|^{m-2}}. \quad (17)$$

Неравенства (18), (14), (15) и (17) дают возможность оценить функцию $u_F^h(x, y; \nu) = G_F(x, y; \nu) - G_F^h(x, y; \nu)$ при $x \in F \cap T'_Y$, где $T'_Y = \bigcup_{\alpha \in Y} K'_\alpha$.

Действительно, так как $G_F(x, y; \nu) = 0$ при $x \in F$, то из формулы (7) в силу этих неравенств следует, что при $x \in F \cap T'_Y$

$$|u_F^h(x, y; \nu)| < (A\varepsilon_1(y) + A_i\varepsilon_2(y)) \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|}}{|x-y|^{m-2}},$$

где

$$\varepsilon_1(y) = \max_{\alpha \in Y} \left| 1 - \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \right| + \sqrt[m-1]{\int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \Phi(x) dx} + R^{\frac{m}{m-1}} + \frac{h^m}{r^{m-2}},$$

$$\varepsilon_2(y) = h + \max_{\alpha \in Y} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \left(h + \frac{h}{R} \right); \quad \Phi_\alpha = \int_{K_\alpha} \Phi(x) dx. \quad (18)$$

Исходя из формул (6), (11) и неравенств (5'), (10), нетрудно также получить грубую оценку для $u_F^h(x, y; \nu)$, верную всюду в R_m . Поскольку $G(x, y; \nu) \geq G_F(x, y; \nu) \geq 0$, то из (6) имеем

$$|u_F^h(x, y; \nu)| < G(x, y; \nu) + \left(\sum'_{\alpha \in Y} + \sum''_{\alpha \in Y} \right) q_\alpha(y) \int_{F \cap K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\mu_\alpha(\xi),$$

где сумма $\sum'$ распространяется на те K_α , которые пересекаются с шаром радиуса $2\sqrt{mh}$ с центром в точке x , а $\sum''$ — на все остальные ($\alpha \in Y$).

Из (11), (10) и (5) следует, что

$$\sum'_{\alpha \in Y} q_\alpha(y) \int_{F \cap K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\mu_\alpha(\xi) \leq A \max_{\alpha \in Y} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|}}{|x-y|^{m-2}}.$$

Вторая сумма оценивается с помощью (10), (11) и леммы аналогично сумме $\sum''$ в (9):

$$\sum''_{\alpha \in Y} q_\alpha(y) \int_{F \cap K_\alpha} G(x, \xi; \nu) d\mu_\alpha(\xi) < A \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|}}{|x-y|^{m-2}}.$$

Следовательно, всюду в R_m

$$|u_F^h(x, y; \nu)| < A \left(1 + \max_{\alpha \in Y} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \right) \frac{e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|}}{|x-y|^{m-2}}.$$

Так как θ — произвольное число $0 < \theta < 1$, то в этих неравенствах функцию $e^{-\frac{\nu\theta}{2}|x-y|} |x-y|^{2-m}$ можно заменить фундаментальным решением $H_\theta(|x-y|, c)$ уравнения $\Delta u - c^2 u = 0$, где c равно, например, $\frac{1}{3}\nu$. Это непосредственно вытекает из явного вида $H(|x-y|, c)$.

Таким образом, окончательно имеем

$$|u_F^h(x, y; \nu)| < A \left(1 + \max_{\alpha \in Y} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \right) H\left(|x-y|, \frac{\nu}{3}\right) \text{ всюду в } R_m \quad (19)$$

и

$$|u_F^h(x, y; \nu)| < (A\varepsilon_1(y) + A_i\varepsilon_2(y)) H\left(|x-y|, \frac{\nu}{3}\right) \text{ при } x \in F \cap T'_Y,$$

где $\Phi_\alpha = \int_{K_\alpha} \Phi(x) dx$, $T'_Y = \bigcap_{\alpha \in Y} K'_\alpha$, а $\varepsilon_1(y)$ и $\varepsilon_2(y)$ — определяются формулами (18).

Выделим в каждом кубе K'_a ($a \in \Lambda$) меньший куб K''_a (открытый) с тем же центром и стороной $h'' = h' - 2r_1 = h - 2r - 2r_1$ и введем функцию $\chi_y(x)$, непрерывную в R_m , удовлетворяющую всюду неравенствам $0 \leq \chi_y(x) \leq 1$ и принимающую на множествах $T''_Y = \bigcap_{a \in Y} K''_a$ и $R_m \setminus T'_Y$ значения

$$\chi_y(x) = \begin{cases} 0 & x \in T''_Y, \\ 1 & x \in R_m \setminus T'_Y. \end{cases}$$

Обозначим через $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ решения уравнения $\Delta u - \nu^2 u = 0$ в области $R_m \setminus F$, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow \infty$ и принимающие соответственно граничные значения $H(|x - y|, \frac{\nu}{3})$ и $H(|x - y|, \frac{\nu}{3}) \chi_y(x)$ при $x \in \partial(R_m \setminus F)$.

Здесь $y \in \Omega$ — параметр. Доопределим эти функции на множестве F , положив $u_1(x, y) = H(|x - y|, \frac{\nu}{3})$ и $u_2(x, y) = H(|x - y|, \frac{\nu}{3}) \chi_y(x)$ при $x \in F$.

Так как граничные значения функций $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) в области $R_m \setminus F$ неотрицательны, то в силу принципа максимума $u_i(x, y) \geq 0$ при $x \in R_m \setminus F$.

Далее, функции $w_i(x) = H(|x - y|, \frac{\nu}{3}) - u_i(x, y)$ на границе области $R_m \setminus F$ также неотрицательны, стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$, а в области $R_m \setminus F$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta w_i(x) - \nu^2 w_i(x) = \psi(x, y),$$

где

$$\psi(x, y) = -\delta(x, y) - \frac{8}{9} \nu^2 H(|x - y|, \frac{\nu}{3}) < 0.$$

Отсюда в силу обобщенного принципа максимума [5] следует, что $w_i(x, y) \geq 0$ и, значит, $u_i(x, y) \leq H(|x - y|, \frac{\nu}{3})$ при $x \in R_m \setminus F$.

Таким образом, всюду в R_m

$$0 \leq u_i(x, y) \leq H(|x - y|, \frac{\nu}{3}). \quad (20)$$

Рассмотрим функцию

$$w(x) = (A\varepsilon_1(y) + A_i\varepsilon_2(y) u_1(x, y) + \\ + A \left(1 + \max_{a \in Y} \frac{\Phi_a}{C(F \cap K_a)}\right) u_2(x, y) - u_F^h(x, y; \nu), \quad (21)$$

где постоянные A и A_i те же, что в (19).

Из определения $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ и $G_F(x, y; \nu)$ формулы (6) и неравенства (19) следует, что $w(x)$ удовлетворяет в области $\Omega_F = \Omega \setminus F$ уравнению $\Delta w - \nu^2 w = 0$, стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ (для неограниченных Ω), неотрицательна на множестве F , и

$$\lim_{x \rightarrow \partial \Omega_F} w(x) \geq 0^*.$$

Отсюда, пользуясь принципом максимума, заключаем, что $w(x) \geq 0$ всюду в Ω .

* Функция $w(x)$, вообще говоря, не непрерывна. Она может иметь разрывы в иррегулярных точках множеств $F \cap K_a$ ($a \in Y$) и при $x = y \in F$.

Учитывая это, из (21) получим оценку для нормы $\|u_F^h\|_D$ (3):

$$\|u_F^h\|_D < (A\varepsilon_1 + A_t\varepsilon_2)\|u_1\|_D + A\left(1 + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)}\right)\|u_2\|_D, \quad (22)$$

$$\varepsilon_1 = \max_{\alpha \in \Lambda} \left| 1 - \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \right| + \sqrt[m-1]{\int_{\Omega \setminus T_\Lambda} \varphi(x) dx} + R^{\frac{m}{m-1}} + \frac{h^m}{r^{m-2}}, \quad (22')$$

$$\varepsilon_2 = h + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \left(h + \frac{h}{R} \right); \quad \Phi_\alpha = \int_{K_\alpha} \varphi(x) dx.$$

Так как $u_2(x, y) \geq 0$, то

$$\|u_2\|_D = \int_{\Omega} \left(\int_D u_2(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega} v_D(x) dx,$$

где

$$v_D(x) = \int_D u_2(x, y) dy.$$

Здесь изменение порядка интегрирования законно в силу (20) и теоремы Фубини.

Из свойств функции $u_2(x, y)$ следует, что $v_D(x)$ непрерывна в R_m , удовлетворяет в области $R_m \setminus F$ уравнению $\Delta v - v^2 = 0$, стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, а на множестве F принимает значение

$$v_D(x) = \int_D H\left(|x - y|, \frac{v}{3}\right) \chi_y(x) dy,$$

откуда, учитывая конструкцию $\chi_y(x)$ и вид $H\left(|x - y|, \frac{v}{3}\right)$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} v_D(x) &\leq AR^2 \quad \text{при } x \in F \cap T_\Lambda'', \\ v_D(x) &\leq A \quad \text{при } x \in F \setminus (F \cap T_\Lambda''), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$T_\Lambda'' = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha''.$$

Для дальнейшего отметим некоторые свойства равновесной меры [3]. Пусть γ — равновесная мера компакта $E \subset R_m$. Тогда ньютонов потенциал этой меры

$$U(x) = \frac{1}{(m-2)\omega_m} \int_E \frac{d\gamma(\xi)}{|x - \xi|^{m-2}}$$

непрерывен всюду, кроме иррегулярных точек множества E , а в регулярных точках E $U(x) = 1$. Кроме того, полная равновесная мера множества E равна его емкости, т. е. $\gamma(E) = C(E)$.

Предположим, что множество принадлежит некоторому кубу K^h со стороной h , и рассмотрим функцию

$$V_E(x) = \int_E H(|x - \xi|, v) d\gamma(\xi).$$

Так как при малых $|x - \xi|$

$$H(|x - \xi|, v) = \frac{|x - \xi|^{2-m}}{(m-2)\omega_m} (1 + O(|x - \xi|^2)),$$

то из отмеченных свойств меры γ вытекает, что функция $V_E(x)$ непрерывна всюду, кроме иррегулярных точек множества E , а в регулярных

точках E выполняется неравенство $V_E(x) \geq a(h) > 0$, причем постоянная $a(h)$ не зависит от $E \subset K^h$, и $a(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$.

Обозначим через γ_α и γ'_α равновесные меры множеств $F \cap K_\alpha$ и $F \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)$ и введем функции

$$V_\alpha(x) = \int_{F \cap K_\alpha} H(|x - \xi|, v) d\gamma_\alpha(\xi),$$

$$V'_\alpha(x) = \int_{F \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)} H(|x - \xi|, v) d\gamma'_\alpha(\xi).$$

Очевидно, все сказанное о $V_E(x)$ относится также к $V_\alpha(x)$ и $V'_\alpha(x)$.

Рассмотрим функцию

$$v(x) = \frac{A}{a(h)} R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(x) + \frac{A}{a(h)} \left(\sum_{\alpha \in \bar{\Lambda}} V_\alpha(x) + \sum_{\alpha \in \Lambda} V'_\alpha(x) \right) - v_D(x), \quad (24)$$

где постоянная A та же, что и в (23).

Из свойств $V_\alpha(x)$, $V'_\alpha(x)$ и $v_D(x)$ и неравенств (23) следует, что $v(x)$ в области $R_m \setminus F$ удовлетворяет уравнению $\Delta v - v^2 v = 0$, стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow F} v(x) \geq 0.$$

Последнее неравенство требует более подробного пояснения для иррегулярных точек множеств $F \cap K_\alpha$. Пусть $x \rightarrow x_\beta$ и x_β — иррегулярная точка $F \cap K_\beta$. Так как множество F регулярно, то точка x_β должна лежать на пересечении F с границей куба K_β . Следовательно, она принадлежит сразу нескольким множествам вида $F \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)$ ($\alpha \in \Lambda$) или $F \cap K_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$). Отсюда, пользуясь свойством полуаддитивности емкости и критерием Винера [3], заключаем, что точка x_β является регулярной хотя бы для одного из этих множеств, а значит, соответствующая функция $V'_\alpha(x)$ или $V_\alpha(x)$ непрерывна в этой точке и принимает в ней значение большее, чем $a(h)$. Поэтому из (23) и (24) имеем $\lim_{x \rightarrow x_\beta} v(x) \geq 0$.

В силу принципа максимума из указанных свойств функции $v(x)$ следует, что $v(x) \geq 0$ всюду, и, значит,

$$v_D(x) \leq \frac{A}{a(h)} R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(x) + \frac{A}{a(h)} \left(\sum_{\alpha \in \bar{\Lambda}} V_\alpha(x) + \sum_{\alpha \in \Lambda} V'_\alpha(x) \right).$$

Отсюда, пользуясь определением функций $V_\alpha(x)$, $V'_\alpha(x)$ и учитывая, что полная равновесная мера множества равна его емкости, получим

$$\|u_2\|_D = \int_{\mathbb{R}^n} v_D(x) dx \leq A \left[\sum_{\alpha \in \bar{\Lambda}} C(F \cap K_\alpha) + \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)) + R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) \right].$$

Это неравенство совместно с неравенствами (20) и (22) позволяет установить оценку для нормы $\|G_F - G_F^h\|_D = \|u_F^h\|_D$

$$\|G_F - G_F^h\|_D \leq A\varepsilon_1 + A_i\varepsilon_2 + A \left(1 + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)} \right) \left[\sum_{\alpha \in \bar{\Lambda}} C(F \cap K_\alpha) + \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)) + R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) \right],$$

где ε_1 и ε_2 определяются формулами (22'). Здесь постоянные A и A_t не зависят от $K_\alpha'' \subset K_\alpha'$. Поэтому устремляя r_1 к r и учитывая, что емкость непрерывна справа [3], т. е. $C(F \cap (K_\alpha \setminus K_\alpha'')) \rightarrow C(F \cap (K_\alpha \setminus K_\alpha'))$ при $r_1 \rightarrow r$, будем иметь

$$\|G_F - G_F^h\|_D < A\varepsilon_1 + A_t\varepsilon_2 + A\left(1 + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)}\right) \left[\sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap (K_\alpha \setminus K_\alpha')) + R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) \right].$$

Исходя из формул (4), (4'), (6) и (11), непосредственным подсчетом нетрудно получить аналогичную оценку для нормы $\|G_F^h - G_\varphi\|_D$. Она имеет вид

$$\|G_F^h - G_\varphi\|_D < A\left(R^m + \int_{\Omega/T_\Lambda} \varphi(x) dx\right) + A_th.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\|G_F - G_\varphi\|_D \leq \|G_F - G_F^h\|_D + \|G_F^h - G_\varphi\|_D < \\ < A\left\{\max_{\alpha \in \Lambda} \left|1 - \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)}\right| + \sqrt[m-1]{\int_{\Omega/T_\Lambda} \varphi(x) dx} + \int_{\Omega/T_\Lambda} \varphi(x) dx + \right. \\ \left. + R^{\frac{m}{m-1}} + R^m + \frac{hm}{r^{m-2}} + \left(1 + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)}\right) \left[\sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap (K_\alpha \setminus K_\alpha')) + R^2 \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F \cap K_\alpha) \right] \right\} + \\ + A_t\left\{h + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F \cap K_\alpha)}\left(h + \frac{h}{R}\right)\right\}, \quad \Phi_\alpha = \int_{K_\alpha} \varphi(x) dx. \quad (25)$$

Заметим, что постоянная A не зависит от h , r , R и множеств F и T_Λ , а постоянная A_t также не зависит от этих параметров, но зависит от расстояния t от множества T_Λ до границы области Ω .

§ 2. О сходимости функций Грина по вероятности

1. Пусть при каждом n ($n = 1, 2, \dots$) множество $F = F^{(n)}$, рассматриваемое в § 1, является случайным в том смысле, что задано такое вероятностное пространство $\mathfrak{M}^{(n)}$, элементарным событием в котором есть реализация некоторого множества $F^{(n)}$ в области Ω . Тогда функция Грина $G_{F^{(n)}}(x, y; \nu)$ задачи (1a) — (1b), соответствующая $F^{(n)}$, будет также случайной.

В этом параграфе, исходя из неравенства (25), будет показано, что при некоторых условиях $G_{F^{(n)}}(x, y; \nu)$ по вероятности сходится при $n \rightarrow \infty$ к неслучайной функции $G_\varphi(x, y; \nu)$, которая определяется формулами (2a) — (2b).

Построим последовательность подразделений пространства R_m на кубы K_α^s со стороной $h = r_s$ ($s = 1, 2, \dots$, $r_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$). Будем предполагать, что каждый куб предыдущего подразделения состоит из целого числа кубов

последующего, и стороны кубов этих подразделений связаны соотношением $r_s = N_s r_{s+1}$, причем целые числа N_s таковы, что $r_s \sim r_{s+1}^{\frac{m-2}{m-1}}$ при $s \rightarrow \infty$.

Для каждого подразделения введем функцию

$$\Phi_{F(n)}^s(x) = \sum_a \frac{C(F(n) \cap K_a^s)}{\text{mes}(\Omega \cap K_a^s)} \chi_a^s(x), \quad (26)$$

где $\chi_a^s(x)$ — характеристическая функция множества $\Omega \cap K_a^s$, $C(F(n) \cap K_a^s)$ — ньютонова емкость $F(n) \cap K_a^s$. Обозначим через $P(A^{(n)})$ вероятность события $A^{(n)}$ в $\mathfrak{M}(n)$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная, ограниченная в Ω и суммируемая функция, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r_s \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\int_{\Omega} |\Phi_{F(n)}^s(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon\right) = 1.$$

Тогда для любой ограниченной области $D \subset \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|G_{F(n)} - G_{\varphi}\|_D < \varepsilon) = 1,$$

где норма $\|G_{F(n)} - G_{\varphi}\|_D$, определяется формулой (3).

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\eta > 0$ найдутся такие s и n , что одновременно будут выполняться неравенства

$$P\left(\int_{\Omega} |\Phi_{F(n)}^s(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon_1\right) > 1 - \eta, \quad (27)$$

$$P\left(\int_{\Omega} |\Phi_{F(n)}^{s+1}(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon_1\right) > 1 - \eta. \quad (27')$$

В силу (26) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Phi_{F(n)}^s(x) - \varphi(x)| dx &\geq \sum_a \left| C(F(n) \cap K_a^s) - \int_{K_a^s} \varphi(x) dx \right| \geq \\ &\geq \sum_a' \left| 1 - \frac{C(F(n) \cap K_a^s)}{\Phi_a^s} \right| \Phi_a^s, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Phi_a^s = \int_{K_a^s} \varphi(x) dx$, а сумма $\sum'$ распространяется на те кубы K_a^s , для которых $\Phi_a^s > 0$.

Из множества кубов, входящих в сумму $\sum'$, выделим максимальное (по числу элементов) подмножество $\{K_a^s \mid a \in \Lambda^s\}$, удовлетворяющее таким условиям:

1)

$$\max_{a \in \Lambda^s} \left| 1 - \frac{C(F(n) \cap K_a^s)}{\Phi_a^s} \right| < V_{\varepsilon_1};$$

2) расстояние от множества $T_{\Lambda^s} = \bigcup_{a \in \Lambda^s} K_a^s$ до границы области Ω больше некоторого положительного числа t .

Положим

$$\varepsilon_2 = \sum_{t \in K_a^s} \int \varphi(x) dx,$$

где сумма $\sum$ берется по всем кубам K_a^s , находящимся от $\partial\Omega$ на расстоянии $\leq t$.

Очевидно, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и $r_s \rightarrow 0$.

Из неравенств (27), (28) и условий 1), 2) следует, что

$$P\left(\sum_{\alpha \in \Lambda^s} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^s) < \varepsilon_1 + \int_{\Omega} \varphi(x) dx\right) > 1 - \eta, \quad (29)$$

$$P\left(\int_{\Omega \setminus T_{\Lambda^s}} \varphi(x) dx < \sqrt{\varepsilon_1} + \varepsilon_2\right) > 1 - \eta \quad (30)$$

и при $\varepsilon_1 < \frac{1}{4}$

$$\max_{\alpha \in \Lambda^s} \left| 1 - \frac{\Phi_\alpha^s}{C(F^{(n)} \cap K_\alpha^s)} \right| < 2\sqrt{\varepsilon_1}. \quad (31)$$

Обозначим через $\{K_\alpha^{s+1}, \alpha \in \Lambda^{s+1}\}$ множество кубов K_α^{s+1} , принадлежащих кубам $K_\alpha^s (\alpha \in \Lambda^s)$ и прилегающих к их границе, а через $\{K_\alpha^{s+1}, \alpha \in \Lambda_1^{s+1}\}$ — множество кубов, накрывающих область $\Omega \setminus T_{\Lambda^s}$.

Из определения функции $\Phi_{F^{(n)}}^{s+1}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \Phi_{F^{(n)}}^{s+1}(x) - \varphi(x) \right| dx &\geq \left| \sum_{\alpha \in \Lambda^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}) - \sum_{\alpha \in \Lambda^{s+1}} \int_{K_\alpha^{s+1}} \varphi(x) dx \right| + \\ &+ \left| \sum_{\alpha \in \Lambda_1^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}) - \int_{\Omega \setminus T_{\Lambda^s}} \varphi(x) dx \right|, \end{aligned}$$

откуда в силу (27') и (30) следует

$$P\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_1^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}) < \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1} + \varepsilon_2\right) > 1 - 2\eta \quad (32)$$

и

$$P\left(\sum_{\alpha \in \Lambda^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}) < \varepsilon_1 + \varepsilon_3\right) > 1 - \eta, \quad (33)$$

где

$$\varepsilon_3 = \sum_{\alpha \in \Lambda^{s+1}} \int_{K_\alpha^{s+1}} \varphi(x) dx.$$

Так как $r_s \sim r_{s+1}^{\frac{m-2}{m-1}} \gg r_{s+1}$, то $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ при $r_s \rightarrow 0$. Обратимся теперь к неравенству (25). Положим в нем $F = F^{(n)}$, $K_\alpha = K_\alpha^s$, $\Lambda = \Lambda^s$ и $h = r_s$, $r = r_{s+1}$, $R = \sqrt{r_s}$. Тогда будем иметь $\frac{h}{R} = \sqrt{r_s}$, $\frac{h^m}{r^{m-2}} \sim r_s (r_s \rightarrow 0)$ и в силу полуаддитивности емкости

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F^{(n)} \cap K_\alpha) &\leq \sum_{\alpha \in \Lambda_1^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}), \\ \sum_{\alpha \in \Lambda} C(F^{(n)} \cap (K_\alpha \setminus K_\alpha^s)) &\leq \sum_{\alpha \in \Lambda^{s+1}} C(F^{(n)} \cap K_\alpha^{s+1}). \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь неравенствами (25) и (29)—(33) при выбранных r_s и n и $\varepsilon_1 < \frac{1}{4}$, получим

$$P(\|G_F - G_\varphi\|_D < \Delta) > 1 - 2\eta,$$

где

$$\Delta = A\left(\varepsilon_2 + m^{-1}\sqrt{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_1}}\right) + A\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1} + \varepsilon_3 + r_s + r_s^{\frac{m}{2}} + r_s^{\frac{m}{2(m-1)}}\right) + A_t(r_s + \sqrt{r_s}).$$

Так как $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ r_s \rightarrow 0}} \varepsilon_2 = 0$, $\lim_{r_s \rightarrow 0} \varepsilon_3 = 0$, а ε_1 и η при $r_s \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ можно выбрать сколь угодно малыми, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|G_F - G_\varphi\|_D < \varepsilon) = 1.$$

Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь один тип областей $\Omega^{(n)} = \Omega \setminus F^{(n)}$, для которого выполняются условия теоремы 1.

Пусть множество $F^{(n)}$ строится следующим образом.

а) В заданной области $\Omega \subset R_m$ выбирается независимо друг от друга n точек $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, так что вероятность выбора одной точки из области $Q \in \Omega$ равна $\int_Q f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная ограниченная в Ω

неотрицательная функция и $\int_\Omega f(x) dx = 1$. Затем каждая точка x_i также независимо друг от друга покрывается произвольным замкнутым связным множеством $F_i^{(n)}$, ньютонова емкость которого $C(F_i^{(n)})$ есть случайная величина с функцией распределения $\sigma_n(t) = \sigma(nt)$.

Будем предполагать, что выполняются такие условия:

$$b) \quad \int_0^\infty t^m d\sigma(t) = A_m < \infty,$$

с) множества $F_i^{(n)}$ регулярны относительно задачи Дирихле и

$$d_i^{(n)} < a [C_i^{(n)}]^{\frac{1}{m-2}},$$

где $d_i^{(n)}$ — диаметр $F_i^{(n)}$; $C_i^{(n)} = C(F_i^{(n)})$ — емкость; $a > 0$. В остальном формы множеств $F_i^{(n)}$ произвольны и определяются каким-нибудь вероятностным законом.

Положим $F^{(n)}$ равно объединению всех множеств $F_i^{(n)}$, полностью лежащих в области Ω ($F^{(n)} = \bigcup F_i^{(n)}$).

Тогда имеет место

Теорема 2. Если выполнены условия а), б), с), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\int_\Omega |\Phi_{F^{(n)}}^r(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon\right) = 1,$$

где $\varphi(x) = f(x) \int_0^\infty t d\sigma(t)$, а $\Phi_{F^{(n)}}^r(x)$ определяется формулой (26).

Доказательство. Установим сначала некоторые факты относительно емкостей $C_i^{(n)}$ множеств $F_i^{(n)}$ и их расположения. Обозначим через

$S_\tau^{(n)}$ событие в $\mathfrak{M}^{(n)}$, состоящее в том, что емкости $C_i^{(n)}$ всех множеств $F_i^{(n)}$ меньше, чем $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau}{m-2}}$.

В силу условий а) и б) вероятность этого события легко оценивается при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(S_\tau^{(n)}) &= \left(\int_0^{n^{-\tau}} d\sigma(nt) \right)^n = \left(1 - \int_{n^{1-\tau}}^{\infty} d\sigma(t) \right)^n \gg \\ &\gg \left(1 - \frac{A_m}{[n^{1-\tau}]^m} \right)^n \sim 1 - \frac{A_m}{n^{m(1-\tau)-1}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Обозначим через N_n минимальное число множеств $F_i^{(n)}$ ($i \in I_1$), которые нужно выбросить из области Ω , чтобы оставшиеся множества находились друг от друга на расстояниях больших, чем $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau}{m-2}}$. Оценим условную вероятность $P(N_n > l | S_\tau^{(n)})$ события $N_n > l$ ($l \leq n-1$) при условии, что произошло событие $S_\tau^{(n)}$. Непосредственный подсчет этой вероятности с учетом а) и с) приводит к неравенству

$$\begin{aligned} P(N_n > l | S_\tau^{(n)}) &< \sum_{k=[l]+1}^n C_n^k B^k n^{k(1-\frac{m\tau}{m-2})}, \\ B &= \frac{\omega_m}{m} (1 + 2a)^m \max f(x). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$, получаем

$$P(N_n > l | S_\tau^{(n)}) < \frac{B^{[l]+1} n^{p([l]+1)}}{([l]+1)!} \sum_{k=0}^{n-[l]+1} \left(\frac{B n^p}{[l]+1} \right)^k,$$

где

$$p = \frac{m(2-\tau)-4}{m-2}.$$

Положив здесь $l = n^{p+\theta}$ ($\theta > 0$) и оценивая $([l]+1)!$ с помощью формулы Стирлинга, при больших n находим

$$P(N_n > n^{p+\theta} | S_\tau^{(n)}) < \left(\frac{Be}{n^\theta} \right) n^{p+\theta}. \quad (35)$$

Выберем теперь τ так, чтобы выполнялись неравенства $\frac{m-2}{m-1} < \tau < \frac{m-1}{m}$.

Тогда для достаточно малых $\theta > 0$ будем иметь $p + \theta - \tau < 0$. При этих значениях τ и θ из неравенств (34) и (35) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i \in I_1} C_i^{(n)} < \varepsilon\right) = 1. \quad (36)$$

Заметим, что через $\{F_i^{(n)}, i \in I_1\}$ обозначено минимальное (по числу элементов) множество множеств $F_i^{(n)}$, которые нужно выбросить из Ω , чтобы в оставшемся множестве $\{F_i^{(n)}, i \in I_2\}$ расстояния между любыми $F_i^{(n)}$ и $F_j^{(n)}$ были больше, чем $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau}{m-2}}$. Пусть пространство R_m подразделено на кубы K'_α со стороной r . Оценим емкости множеств $F^{(n)} \cap K'_\alpha$. Для этого воспользуемся известным соотношением между емкостью множества и емкостями его частей. Пусть множество E состоит из частей E_i , находящихся друг

от друга на положительных расстояниях r_{ij} ($E = UE_i$). Тогда имеет место неравенство (см., например [2])

$$\sum_i C(E_i) \geq C(E) \geq \sum_i C(E_i) - \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \frac{C(E_i) C(E_j)}{r_{ij}^{m-2}}.$$

Пользуясь этим неравенством и полуаддитивностью емкости, запишем

$$\sum_i^a C_i^{(n)} \geq C(\cup_i F_i^{(n)}) \geq \sum_i^a C_i^{(n)} - \sum_{i \in I_1}^a C_i^{(n)} - \sum_{\substack{i, j \in I_2 \\ i \neq j}}^a \frac{C_i^{(n)} C_j^{(n)}}{(r_{ij}^{(n)})^{m-2}}, \quad (37)$$

где верхний значок a означает, что суммирование производится только по тем $F_i^{(n)}$, которые накрывают точки $x_i \in K_a^r \setminus \partial K_a^r$.

Пусть Q — произвольная область в Ω . Рассмотрим случайную величину $\zeta_Q^{(n)} = \sum_{x_i \in Q} C_i^{(n)}$. В силу неравенства Чебышева имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\zeta_Q^{(n)} - M(\zeta_Q^{(n)})| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\zeta_Q^{(n)})}{\varepsilon^2},$$

где M и D — соответственно математическое ожидание и дисперсия $\zeta_Q^{(n)}$. Непосредственным подсчетом находим

$$\begin{aligned} M(\zeta_Q^{(n)}) &= \int_Q f(x) dx \int_0^\infty t d\sigma(t), \\ D(\zeta_Q^{(n)}) &= \frac{1}{n} \int_Q f(x) dx \left[\int_0^\infty t^2 d\sigma(t) - \int_Q f(x) dx \left(\int_0^\infty t d\sigma(t) \right)^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{A}{n} \int_Q f(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$P\left(\left|\zeta_Q^{(n)} - c \int_Q f(x) dx\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{A}{n\varepsilon^2} \int_Q f(x) dx, \quad (38)$$

где $c = \int_0^\infty t d\sigma(t)$, $A = A \frac{2}{m}$.

Применяя это неравенство к областям $K_a^r \setminus \partial K_a^r$ и учитывая, что они не пересекаются, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\max_a \left| \sum_i^a C_i^{(n)} - c \int_{K_a^r} f(x) dx \right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (39)$$

Обратимся теперь к оценке случайной величины

$$\zeta_a^{(n)} = \sum_{\substack{i, j \in I_a \\ i \neq j}}^a \frac{C_i^{(n)} C_j^{(n)}}{(r_{ij}^{(n)})^{m-2}} = \sum_{i \in I_a}^a C_i^{(n)} \sum_{\substack{j \in I_a \\ j \neq i}}^a \frac{C_j^{(n)}}{(r_{ij}^{(n)})^{m-2}}. \quad (40)$$

Пусть произошло событие $S_\tau^{(n)}$ ($\max_i C_i^{(n)} < n^{-\tau}$). Тогда в силу условия (с) $d_i^{(n)} < a \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\tau}{m-2}}$, и из неравенства $|x_i - x_j| < r_{ij}^{(n)} + d_i^{(n)} + d_j^{(n)}$ следует, что $|x_i - x_j| < (1 + 2a) r_{ij}^{(n)}$. Отсюда вытекает, что для тех реализаций множества $F^{(n)}$, когда происходит событие $S_\tau^{(n)}$,

$$\sum_a \xi_a^{(n)} \leq X^{(n)} = b \sum_i C_i^{(n)} \sum_{\substack{j \neq i \\ |x_i - x_j| < \sqrt{m} r}} \frac{C_j^{(n)}}{|x_i - x_j|^{m-2}},$$

где $b = (1 + 2a)^{m-2}$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} P(\sum_a \xi_a^{(n)} < \varepsilon) &\geq P(S_\tau^{(n)} \cap \{\sum_a \xi_a^{(n)} < \varepsilon\}) \geq \\ &\geq P(S_\tau^{(n)} \cap \{X^{(n)} < \varepsilon\}) \geq P(X^{(n)} < \varepsilon) - P(\overline{S_\tau^{(n)}}), \end{aligned}$$

$\overline{S_\tau^{(n)}}$ — событие противоположное $S_\tau^{(n)}$.

Так как $X^{(n)} \geq 0$, то

$$P(X^{(n)} < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X^{(n)})}{\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$P\left(\sum_a \xi_a^{(n)} < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{M(X^{(n)})}{\varepsilon} - P(\overline{S_\tau^{(n)}}). \quad (41)$$

Здесь математическое ожидание $M(X^{(n)})$ имеет оценку

$$\begin{aligned} M(X^{(n)}) &= \\ &= b n (n-1) \left(\int_0^\infty t d\sigma(nt)\right)^2 \int_{\Omega} f(x_2) \left(\int_{\substack{x_2 - x_1 < \sqrt{m} r}} \frac{f(x_1)}{|x_2 - x_1|^{m-2}} dx_1\right) dx_2 < A r^2. \end{aligned} \quad (41')$$

Пусть K^L — куб со стороной L , составленный из кубов K_α^r , так что $K^L = \bigcup_{\alpha \in \Lambda^L} K_\alpha^r$, и

$$\varepsilon_L = c \int_{\Omega \setminus K^L} f(x) dx, \quad c = \int_0^\infty t d\sigma(t). \quad (42)$$

Очевидно, $\varepsilon_L \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$.

Применяя неравенство (38) к области $Q = \Omega \setminus K^L$ и учитывая, что

$$\sum_{x_i \in \Omega \setminus K^L} C_i^{(n)} = \sum_{\alpha \in \Lambda^L} \sum_i^\alpha C_i^{(n)}, \text{ будем иметь для любого } \varepsilon_1 > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{\alpha \in \Lambda^L} \sum_i^\alpha C_i^{(n)} < \varepsilon_1 + \varepsilon_L\right) = 1.$$

Далее, из (37), (39), (36), (40) и (34), (41), (41') следует, что для любых положительных L , r , ε_1 и ε_2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{\alpha \in \Lambda^L} \left|C\left(\bigcup_i^\alpha F_i^{(n)}\right) - c \int_{K_\alpha^r} f(x) dx\right| < \varepsilon_1 \frac{L^m}{r^m} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geq 1 - \frac{A r^2}{\varepsilon_2}.$$

Учитывая (34) и (38), нетрудно установить, что при любых $r > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{\alpha} \left| C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) - C \left(\bigcup_i {}^a F_i^{(n)} \right) \right| < \varepsilon_1 \right) = 1,$$

откуда, полагая $\varepsilon_1 = \frac{r^m}{L^m} \varepsilon < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$, окончательно получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{\alpha \in \Lambda^L} C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) < \varepsilon + \varepsilon_L \right) = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{\alpha \in \Lambda^L} \left| C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) - c \int_{K_{\alpha}^r} f(x) dx \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{Ar^2}{\varepsilon}. \quad (43)$$

Теперь, пользуясь определением функции $\Phi_{F^{(n)}}^r(x)$, запишем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \Phi_{F^{(n)}}^r(x) - c f(x) \right| dx &= \sum_{\alpha} \int_{K_{\alpha}^r} \left| \frac{C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r)}{\text{mes}(\Omega \cap K_{\alpha}^r)} - c f(x) \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in \Lambda^L} \left| C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) - c \int_{K_{\alpha}^r} f(x) dx \right| + \sum_{\alpha \in \Lambda^L} c \int_{K_{\alpha}^r} f(x) dx + \\ &+ \sum_{\alpha \in \Lambda^L} C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) + \sum_{\alpha \in \Lambda^L} c \int_{K_{\alpha}^r} |f(x) - \bar{f}_{\alpha}| dx, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\bar{f}_{\alpha}$ — среднее значение функции $f(x)$ в $\Omega \cap K_{\alpha}^r$. В силу непрерывности $f(x)$ последнее слагаемое в этом неравенстве при любом L стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Поэтому из (42), (43) и (44) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\int_{\Omega} \left| \Phi_{F^{(n)}}^r(x) - c f(x) \right| dx < \varepsilon \right) = 1, \quad c = \int_0^{\infty} t d\sigma(t)$$

и тем самым теорема доказана.

§ 3. Некоторые приложения

Пусть $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство функций, определенных в области Ω и имеющих в Ω суммируемый квадрат модуля.

Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ интегральные операторы G^{φ} и $G^{(n)}$, ядрами которых служат соответственно функции Грина $G_{\varphi}(x, y; \sqrt{\nu})$ и $G_{F^{(n)}}(x, y; \sqrt{\nu})$. т. е. для любой функции $f \in L_2(\Omega)$

$$G^{\varphi} f(x) = \int_{\Omega} G_{\varphi}(x, y; \sqrt{\nu}) f(y) dy,$$

$$G^{(n)} f(x) = \int_{\Omega} G_{F^{(n)}}(x, y; \sqrt{\nu}) f(y) dy.$$

Напомним, что по определению (§ 1) $G_{F^{(n)}}(x, y; \sqrt{\nu}) \equiv 0$ при $x \in F^{(n)}$ или $y \in F^{(n)}$.

Обозначим через $\{H_t^{\varphi}\}$ и $\{H_t^{(n)}\}$ — спектральные семейства операторов G^{φ} и $G^{(n)}$ [6] и пусть $H^{\varphi}(\delta) = H_{t_2}^{\varphi} - H_{t_1}^{\varphi}$ и $H^{(n)}(\delta) = H_{t_2}^{(n)} - H_{t_1}^{(n)}$, где $\delta = (t_1, t_2)$ — интервал с концами t_1, t_2 .

Как и в § 2, будем предполагать, что множество $F^{(n)}$ — случайное. Тогда оператор $G^{(n)}$, а значит, и операторы $H_t^{(n)}$ и $H^{(n)}(\delta)$ — случайные, так как они зависят от выбора $F^{(n)} \subset \Omega$.

Пусть B и $B^{(n)}$ — некоторые ограниченные операторы в $L_2(\Omega)$, причем $B^{(n)}$ зависит от множества $F^{(n)}$.

Будем обозначать

$B^{(n)} \xrightarrow{P} B$ (сильная сходимость по вероятности), если для любого $f \in L_2(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|B^{(n)}f - Bf\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon) = 1,$$

и $B^{(n)} \xRightarrow{P} B$ (равномерная сходимость по вероятности), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|B^{(n)} - B\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon) = 1,$$

Теорема 1'. Если выполняются условия теоремы 1, то

a) $G^{(n)} \xRightarrow{P} G^\varphi$,

b) для любого t , не принадлежащего точечному спектру оператора B^φ ,

$$H_t^{(n)} \xrightarrow{P} H_t^\varphi,$$

c) для любого интервала $\delta = (t_1, t_2)$, концы которого не принадлежат спектру оператора,

$$H^{(n)}(\delta) \xRightarrow{P} H^\varphi(\delta).$$

Доказательство. Пользуясь определением операторов $G^{(n)}$ и G^φ , запишем

$$(G^{(n)} - G^\varphi)f(x) = \int_{\Omega} \{u^{(n)}(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{u^{(n)}(x, y)\}^{\frac{1}{2}} f(y) dy,$$

где

$$u^{(n)}(x, y) = G_{F^{(n)}}(x, y; \sqrt{V}) - G_\varphi(x, y; \sqrt{V}).$$

Отсюда, применяя неравенство Буняковского и учитывая, что $u^{(n)}(x, y) = u^{(n)}(y, x)$, получаем

$$\|G^{(n)} - G^\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq \max_{\xi \in \Omega} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |u^{(n)}(x, y)| dx \right) |u^{(n)}(y, \xi)| dy. \quad (45)$$

Пусть

$$v^{(n)}(y) = \int_{\Omega} |u^{(n)}(x, y)| dx.$$

Тогда из теоремы 1 и формулы (3) следует, что для любой ограниченной области $D \subset \Omega$ и любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{mes } D \cap \{y : v^{(n)}(y) > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2) = 1.$$

Поэтому, учитывая еще неравенство

$$|u^{(n)}(x, y)| \leq H(|x - y|, \sqrt{V}) \leq A \frac{e^{-\theta \sqrt{V}|x - y|}}{|x - y|^{m-2}}, \quad (A - \text{const}, \theta > 0),$$

из (45) получаем

$$G^{(n)} \xRightarrow{P} G^\varphi$$

и, таким образом, (a) доказано.

Доказательство (b) и (c) вытекает из (a) и следующего замечания. Предположим, что выбрана такая последовательность множеств $F^{(n)} (n \rightarrow \infty)$, для которой оператор $G^{(n)}$ равномерно сходится к G^φ :

$$G^{(n)} \Rightarrow G^\varphi.$$

Тогда, как известно [6], будем иметь

$$H_t^{(n)} \rightarrow H_t^\varphi \text{ (сильно сходится)}$$

для любого t , не принадлежащего точечному спектру оператора G^φ и

$$H^{(n)}(\delta) \Rightarrow H^\varphi(\delta) \text{ (равномерно сходится)}$$

для любого интервала $\delta = (t_1, t_2)$, концы которого не принадлежат спектру оператора G^φ .

Пусть (b) или (c) не выполняется. Тогда, как легко видеть, существует такая последовательность множеств $F^{(n_k)} (n_k \rightarrow \infty)$, для которой соответственно $H_t^{(n_k)} \not\rightarrow H_t^\varphi$ или $H^{(n)}(\delta) \not\Rightarrow H^\varphi(\delta)$ и в то же время в силу (a) $G^{(n_k)} \Rightarrow G^\varphi$. Но это противоречит сделанному замечанию. Теорема доказана.

Для дальнейшего необходимо ввести некоторые обозначения.

$L_2(\Omega^{(n)})$ — гильбертово пространство функций, определенных в области $\Omega^{(n)} = \Omega \setminus F^{(n)}$ и имеющих там суммируемый квадрат модуля. Очевидно, $L_2(\Omega^{(n)})$ — подпространство $L_2(\Omega)$.

$P^{(n)}$ — оператор проектирования на $L_2(\Omega^{(n)})$.

$A^{(n)}$ — замыкание оператора $-\Delta$, определенного на дважды непрерывно дифференцируемых в области $\Omega^{(n)}$ функциях, равных нулю на границе $\Omega^{(n)}$ и вне некоторой сферы. Как известно, $A^{(n)}$ — самосопряженный положительный оператор в $L_2(\Omega^{(n)})$, и область определения его совпадает с классом функций

$$\overset{0}{W}_2^1(\Omega^{(n)}) \cap W_2^2(\text{лок}) \subset L_2(\Omega^{(n)}).$$

A^φ — замыкание оператора $-\Delta + \varphi(x)$, определенного на дважды непрерывно дифференцируемых в области Ω функциях, обращающихся в нуль на границе Ω и вне некоторой сферы. Функция $\varphi(x)$ — та же, что в уравнении (2a). Так как $\varphi(x) \geq 0$, то A^φ — самосопряженный, положительный оператор в $L_2(\Omega)$ и область определения его совпадает с классом функций

$$\overset{0}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\text{лок}) \subset L_2(\Omega).$$

$\{E_\lambda^{(n)}\}$ и $\{E_\lambda^\varphi\}$ — спектральные семейства операторов $A^{(n)}$ и A^φ . Так как операторы A^φ и $A^{(n)}$ — положительные, то при $\nu > 0$ существуют ограниченные самосопряженные операторы $R_\nu^\varphi = (A^\varphi + \nu E)^{-1}$ и $R_\nu^{(n)} = (A^{(n)} + \nu E)^{-1}$, причем первый из них действует в пространстве $L_2(\Omega)$, а второй — в его подпространстве $L_2(\Omega^{(n)})$; E — тождественный оператор.

Пусть $\{N_t^\varphi\}$ и $\{N_t^{(n)}\}$ — спектральные семейства операторов R_ν^φ и $R_\nu^{(n)}$. Нетрудно установить, что

$$E_\nu^\varphi = E - N_t^\varphi \text{ и } E_\nu^{(n)} = E - N_t^{(n)}, \text{ где } t = \frac{1}{\nu + \lambda}. \quad (46)$$

Как известно, операторы $R_\nu^{(n)}$ и R_ν^φ являются интегральными операторами в пространствах $L_2(\Omega^{(n)})$ и $L_2(\Omega)$, и ядрами их служат соответственно функции Грина краевых задач (1a)–(1c) и (2a)–(2c), если в уравнениях (1a) и (2a) заменить ν^2 на ν и положить $F = F^{(n)}$. Поэтому $R_\nu^\varphi = G^\varphi$ и $R_\nu^{(n)} P^{(n)} = G^{(n)}$ и, следовательно, $N_t^\varphi = H_t^\varphi$ и $N_t^{(n)} P^{(n)} = H_t^{(n)}$.

Таким образом, из (46) получаем

$$E_{\lambda}^{\varphi} = E - H_t^{\varphi} \text{ и } E_{\lambda}^{(n)} P^{(n)} = P^{(n)} - H_t^{(n)}, \text{ где } t = \frac{1}{\nu + \lambda}. \quad (46')$$

Покажем, что в условиях теоремы 1

$$P^{(n)} \xrightarrow{P} E. \quad (47)$$

Очевидно, достаточно показать, что мера множества $F^{(n)}$ стремится по вероятности к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Пусть Q — некоторое замкнутое множество в R_m , диаметр которого равен $d(Q)$. Тогда из определения емкости $C(Q)$ легко получить грубую оценку

$$\text{mes } Q \leq \frac{d^2(Q)}{2(m-2)\omega_m} C(Q).$$

Разбивая пространство R_m на кубы K_{α}^r со стороной r и пользуясь этой оценкой, находим

$$\text{mes } F^{(n)} = \sum_{\alpha} \text{mes } (F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r) \leq \frac{nr^2}{2(m-2)\omega_m} \sum_{\alpha} C(F^{(n)} \cap K_{\alpha}^r),$$

где r может быть выбрано сколь угодно малым.

Отсюда в силу условия теоремы 1 следует, что для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{mes } F^{(n)} < \epsilon) = 1,$$

и, таким образом, сильная сходимость по вероятности оператора $P^{(n)}$ к E доказана.

Объединяя полученные результаты (теорема 1' и формулы (46) и (47)), будем иметь следующую теорему.

Теорема 3. Если выполняются условия теоремы 1, то для любого λ , не принадлежащего точечному спектру оператора A^{φ} ,

$$E_{\lambda}^{(n)} P^{(n)} \xrightarrow{P} E_{\lambda}^{\varphi},$$

и для любого интервала $\delta = (t_1, t_2)$, концы которого не принадлежат спектру оператора A^{φ} ,

$$E_{\lambda}^{(n)}(\delta) P^{(n)} \xrightarrow{P} E^{\varphi}(\delta).$$

Из этой теоремы и теоремы 2 (§ 2) вытекают доказательства утверждений задач 1 и 2, рассмотренных во введении.

Задача 1 требует пояснений, если «граничная» функция $U(x) \equiv 0$. Здесь будет приведено доказательство для одного частного случая, когда $U(x)$ удовлетворяет условиям $\Delta U(x) \in L_2(R_m)$ и $U(x) \in L_2(R_m)$. В этом случае функцию $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$, построенную в задаче 1, можно представить в виде

$$u^{(n)}(x) = U(x) + v^{(n)}(x),$$

причем $v^{(n)}(x) \equiv 0$ при $x \in F^{(n)}$, а в области $\Omega_{F^{(n)}}$ $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$ есть решение такой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta v^{(n)}(x) + k^2 v^{(n)}(x) &= -g(x), & x \in \Omega_{F^{(n)}}, \\ v^{(n)}(x) &= 0, & x \in \partial\Omega_{F^{(n)}}, \\ v^{(n)}(x) &\rightarrow 0, & x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где

$$g(x) = -\psi(x) + \Delta U(x) + k^2 U(x).$$

Таким образом,

$$A^{(n)} u^{(n)} - k^2 u^{(n)} = P^{(n)} g, \quad g = g(x) \in L_2(R_m)$$

и, следовательно,

$$u^{(n)} = U + \int_0^\infty \frac{dE_\lambda^{(n)} P^{(n)} g}{\lambda - k^2}, \quad U = U(x).$$

Так как $\operatorname{Im} k > 0$, то отсюда в силу теорем 2 и 3 вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|u^{(n)} - u\|_{L_2(R_m)} < \varepsilon) = 1,$$

где

$$u = U + \int_0^\infty \frac{dE_\lambda^\varphi g}{\lambda - k^2}, \quad \varphi(x) = f(x) \int_0^\infty t d\sigma(t).$$

Легко видеть, что функция $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$A^\varphi u - k^2 u = A^\varphi U - k^2 U + g$$

или

$$\Delta u(x) - \varphi(x) u(x) + k^2 u(x) = \psi(x) - \varphi(x) U(x) \quad x \in R_m,$$

что и требовалось доказать.

В качестве еще одного приложения теоремы 3 рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta u^{(n)}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(n)}(x, t), & x \in \Omega_{F^{(n)}}, \quad t > 0, \\ u^{(n)}(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega_{F^{(n)}}, \quad t > 0, \\ u^{(n)}(x, 0) &= U(x), \quad \frac{\partial u^{(n)}(x, 0)}{\partial t} = V(x) & x \in \Omega_{F^{(n)}}. \end{aligned}$$

Пусть $\Omega_{F^{(n)}} = R_m \setminus F^{(n)}$, а множество $F^{(n)}$ — случайное (§ 2 п. 1). Будем предполагать, что множества $F^{(n)}$ и функции $U(x)$ и $V(x)$ таковы, что для каждой реализации $F^{(n)}$ решение этой задачи $u^{(n)}(x, t)$ существует. Положим $u^{(n)}(x, t) \equiv 0$ при $x \in F^{(n)}$.

Имеет место такая

Теорема. Если выполняются условия теоремы 1, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\int_{R_m} |u^{(n)}(x, t) - u(x, t)|^2 dx < \varepsilon\right) = 1,$$

где $u(x, t)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \Delta u(x, t) - \varphi(x) u(x), \quad x \in R_m, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= U(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = V(x), \quad x \in R_m. \end{aligned}$$

Аналогичную теорему можно сформулировать также для уравнения теплопроводности.

Полученные результаты справедливы и для двумерного пространства ($m = 2$), но роль ньютоновой емкости в этом случае играет винеровская емкость [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», т. 65 (107); 3 (1964), 458—472.
 2. Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в областях со сложной границей. «Зап. механико-матем. факультета ХГУ и Харьковск. матем. о-ва», т. 32, 3—16. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
 3. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Изд-во «Наука», 1966.
 4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 5. Физматгиз. 1959.
 5. Р. Курант. Уравнения с частными производными. Изд-во «Мир», 1964.
 6. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Изд-во иностр. лит., 1954.
-

О ПРОСТЫХ ОПЕРАТИВАХ

Л. М. Глускин

Оперативом называется множество S с одной всюду определенной n -арной операцией:

$$s_1 s_2 s_3 \dots s_n = s \quad (s_i, s \in S).$$

В настоящей статье, как и в [1, 2], изучаются позиционные оперативы (см. ниже п. 1.2) — класс оперативов с тождествами (2), (3) типа ассоциативности (к этому классу относятся, в частности, полугруппы и полугруды).

Позиционный оператив, как и полугруппу, в значительной мере можно описать семейством его главных факторов [4], каждый из которых либо i -прост (не содержит собственных идеалов), либо нильпотентен.

В отличие от полугрупп, для позиционного оператива при $n > 2$ понятие идеала как гомоморфного прообраза нуля не совпадает с понятием двустороннего идеала. Основными результатами настоящей статьи являются теоремы § 2 и 3 о разложении i -простого p -оператива в объединение его двусторонних идеалов, не имеющих отличных от нуля общих элементов.

Среди i -простых оперативов выделен естественный класс j -простых оперативов (§ 4) — аналог полугрупп без нильпотентных идеалов. Связанные с ними результаты использованы автором для получения аналога теоремы Сушкевича — Риса — Клиффорда о строении вполне простых полугрупп.

При изучении позиционных оперативов особую роль играют так называемые π -оперативы (п. 1.2). Этому классу алгебр в настоящей статье посвящены § 5 и часть § 4. В § 5 изучается симметрия в π -оперативах, главным образом в ассоциативах и альтернативах — n -арных аналогах полугрупп и полугруд.

§ 1. Позиционные оперативы

1.1. Если A_i — непустые подмножества оператива S , то через $A_1 A_2 \dots A_n$ обозначим множество всех произведений $a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i \in A_i$. Если при этом одно из подмножеств A_i (например, A_1) содержит единственный элемент a , то будем писать $A_1 A_2 \dots A_n = a A_2 \dots A_n$. Если $A_{t+1} = A_{t+2} = \dots = A_{t+k} = A$, то обозначим $A_1 A_2 \dots A_n = A_1 A_2 \dots A_t \times \times A^k A_{t+k+1} \dots A_n$; A^0 — пустой символ. Обозначим далее $(A_1 A_2 \dots A_n) \times \times A_{n+1} \dots A_{2n-1} = A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$. (Иногда вместо $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k \dots A_n$ будем писать $A_1 A_2 \dots A_{k-1} \times A_k A_{k+1} \dots A_n$).

Непустое подмножество A оператива S называется (k) -идеалом, если $S^{k-1} A S^{n-k} \subseteq A$. Множество A , являющееся (k) -идеалом при $k = 1, 2, \dots, n$, называется идеалом оператива S ; при $k = 1$ и $k = n$ — двусторонним идеалом. Если оператив S содержит такой элемент 0 , что $\{0\}$ является идеалом, то 0 называется нулем оператива S .

Оператив S , содержащий более одного элемента, назовем i -простым, если он не содержит собственных идеалов и не изоморфен оператору

$$V_n = \{0, a\},$$

где 0 — нуль и $a^n = 0$.

1.2. Всюду в дальнейшем через J_n будем обозначать отрезок натурального ряда $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $p = \{\rho_k\}_{k=1}^n$ — семейство взаимно однозначных отображений ρ_k множества J_{2n-1} на себя таких, что

$$\rho_1 = \rho_n = \varepsilon \quad (1)$$

(ε — тождественная подстановка). Оператив S называется позиционным оператором, ассоциированным с семейством p (или, короче, p -оперативом), если при любых $k \in J_n$, $x_i \in S$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_{k-1} (x_k x_{k+1} \dots x_{k+n-1}) x_{k+n} \dots x_{2n-1} = \\ = x_{\rho_k} x_{\rho_{k^2}} \dots x_{\rho_k(2n-1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Позиционный оператор S называется π -оперативом, если при любых $k \in J_n$, $j \in J_{2n-1}$

$$k \leq j \leq k+n-1 \leftrightarrow k \leq \rho_k j \leq k+n-1^*.$$

Иначе говоря, π -оперативу S можно отнести семейство $\pi = \{\sigma_k, \pi_k\}_{k=1}^n$ подстановок σ_k, π_k множества J_n таких, что $\pi_1 = \pi_n = \sigma_1 = \sigma_n = \varepsilon$, $\sigma_k k = k$ и для любых $x_i, y_j \in S$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_{k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{k+1} \dots x_n = \\ = x_{\sigma_k} x_{\sigma_{k^2}} \dots x_{\sigma_k(k-1)} y_{\pi_k} y_{\pi_{k^2}} \dots y_{\pi_k \sigma_k(k+1)} \dots x_{\sigma_k n}. \end{aligned} \quad (3)$$

π -оператив называется ассоциативом, если $\sigma_k = \pi_k = \varepsilon$ при всех $k \in J_n$; альтернативом, если n нечетно и все $\sigma_k = \pi_{2j+1} = \varepsilon$, $\pi_{2j} = \tau$, где

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В статьях [1, 2] использованы такие обозначения: np -оператив, $n\pi$ -оператив, n -ассоциатив, n -альтернатив. В настоящей статье обозначения несколько упрощены, поскольку аридность операции n всюду считается фиксированной.

π -оператив S назовем π^* -оперативом, если $\pi_i \{1, n\} = \{1, n\}$ при любом $i \in J_n$. Всякий ассоциатив или альтернатив является, очевидно, π^* -оперативом. В работах [1, 2] рассмотрен еще один класс π^* -оперативов.

1.3. Обозначим через $\langle x \rangle$ наименьший положительный вычет числа x по модулю $n-1$ и определим далее следующие преобразования множества J_n : при любых $k, i \in J_n$

$$\xi_k i = \langle \rho_k^{-1}(i + k - 1) \rangle.$$

Если S — π -оператив, то $\xi_k i = \langle \pi_k^{-1} i + k - 1 \rangle$.

1.4. Для любого непустого подмножества A p -оператива S обозначим

$$(A)_1 = S^{n-1} A S^{n-1}, (A)_k = S^{k-1} A S^{n-k} \quad (k = 2, 3, \dots, n-1).$$

* В статье употребляются следующие обозначения математической логики: $\exists$ — квантор существования, $\forall$ — квантор всеобщности, $\rightarrow$ — импликация, $\leftrightarrow$ — эквивалентность, $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция.

Если $A = \{a\}$, то вместо $(\{a\})_i$ будем всюду в дальнейшем писать $(a)_i$. В силу (1), (2) каждое подмножество $(A)_i$ является двусторонним идеалом оператора S . Из (2) и п. 1.3. для любых $i = 2, 3, \dots, n-1$, $k \in J_{n-1}$ имеем

$$S^{k-1} (S^{i-1} A S^{n-i}) S^{n-k} \subseteq S^{\xi_k i-1} A S^{n-\xi_k i}.$$

Точно так же, обозначая $\xi_k 1 = k'$, $\xi_k n = k^*$, $\xi_k^* = \eta_k$,

$$\begin{aligned} S^{k-1} (S^{n-1} A S^{n-1}) S^{n-k} &\subseteq S^{k'-1} (S^{n-1} A) S^{n-k'}, \\ S^{k-1} (S^{n-1} A S^{n-1}) S^{n-k} &\subseteq S^{k^*-1} (A S^{n-1}) S^{n-k^*} \end{aligned}$$

и при $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma + \delta = n-1$ или $\gamma = \delta = n-1$

$$\begin{aligned} S^{k-1} (S^\gamma A S^\delta) S^{n-k} &= S^{k-1} (S^\gamma A S^{\gamma+\delta-1}) S^{n-k} = \\ &= S^{k-1} ((S^\gamma A S^\delta) S^{n-1}) S^{n-k} \subseteq S^{k'-1} (S^\gamma A S^\delta) S^{n-k'}, \\ S^{k-1} (S^\gamma A S^\delta) S^{n-k} &\subseteq S^{k^*-1} (S^\gamma A S^\delta) S^{n-k^*}. \end{aligned}$$

Если $S^n = S$, то все включения переходят здесь в равенства, кроме того при $\alpha_i \neq 0$ из (1)–(2) следует

$$S^{\alpha_1} (S^{\alpha_2} A S^{\alpha_3}) S^{\alpha_4} = S^{n-1} (S^{\alpha_1} (S^{\alpha_2} A S^{\alpha_3}) S^{\alpha_4}) S^{n-1}$$

и в терминах подмножеств все выведенные выше соотношения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} ((A)_i)_k &= (A)_{\xi_k i} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ ((A)_1)_k &= (A)_{\xi_k n} = (A)_{\eta_k 1}, \\ ((A)_i)_k &= ((A)_i)_{k'} = (A)_{\eta_k i} \quad (i \in I_{n-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

§ 2. Разложение на двусторонние идеалы

2.1. Лемма. Если S i -простой оператор, то $S^n = S$.

Доказательство. S^n является, очевидно, идеалом оператора S . Допустим, что $S^n = \{0\}$ (если S содержит нуль 0). Тогда идеалом является множество $A = \{a, 0\}$, где a — любой элемент из $S \setminus \{0\}$, и, так как $A \neq \{0\}$, то $S = A$. Но оператор A изоморфен оператору V п. 1.1, а, по предположению, оператор S является i -простым. Следовательно, $S^n = S$.

2.2. Лемма. Для любого ненулевого элемента a из i -простого оператора S

$$S = \bigcup_{i \in J_{n-1}} (a)_i.$$

Доказательство. Множество $U(a) = \bigcup_{i \in J_{n-1}} (a)_i$ является в силу (4) идеалом оператора S . Если бы $U(a) = \{0\}$, то множество $U'(a) = \{a\} \cup a S^{n-1} \cup S^{n-1} a$ было бы ненулевым идеалом оператора S , т. е. $U'(a) = S$. Из п. 2.1 тогда следует

$$S = S^n = S(\{a\} \cup a S^{n-1} \cup S^{n-1} a) S^{n-2} \subseteq U(a) = \{0\}.$$

Это противоречит i -простоте оператора S . Следовательно, $U(a) = S$.

2.3. Пусть a — фиксированный ненулевой элемент i -простого p -оператора S ; γ_a — следующая эквивалентность на множестве J_{n-1} :

$$i \gamma_a j \leftrightarrow (a)_i = (a)_j. \quad (5)$$

Из (4)–(5) следует, что эквивалентность γ_a согласована с системой преобразований η_k (п. 1.4): при любых $i, j \in J_{n-1}$, $k \in J_n$

$$i \gamma_a j \leftrightarrow (\eta_k i) \gamma_a (\eta_k j). \quad (6)$$

Обозначим через $\bar{i}$ класс эквивалентности γ_a , содержащий индекс $i \in J_{n-1}$, через $\bar{J}_a$ — множество всех классов $\bar{i}$ (т. е. фактор-множество J_{n-1}/γ_a). Если $j \in \bar{i}$, то будем писать $(a)_j = (a)_{\bar{i}}$. Пусть далее $\bar{w}_a$ — тот из классов $\bar{i}$, для которого $(a)_i = \{0\}$, и $\Gamma_a = \bar{J}_a \setminus \{\bar{w}_a\}$.

В силу (6) каждое преобразование η_k порождает некоторое преобразование η_k множества $\bar{J}_a$: через $\bar{\eta}_k \bar{i}$ обозначим класс $\bar{j} \in \bar{J}_a$, содержащий множество $\eta_k \bar{i}$ всех элементов $\eta_k j$, где $j \in \bar{i}$. Естественно, что $H = \{\eta_k\}_{k=1}^{n-1}$ является семейством преобразований множества $\bar{J}_a$ — среди преобразований $\bar{\eta}_k$ могут быть и одинаковые.

Из (4) при любых $i \in J_n$, $j, k \in J_{n-1}$ следует $((a)_i)_j = (a)_{\eta_k \eta_j i} = (a)_{\eta_{\eta_k j} i}$, т. е.

$$\forall j, k \in J_{n-1} (\eta_k \eta_j i) \gamma_a (\eta_{\eta_k j} i).$$

Отсюда имеем

$$\forall j, k \in J_{n-1} \eta_k \eta_j = \eta_{\eta_k j}. \quad (7)$$

2.4. Теорема. Каждое преобразование $\bar{\eta}_k$ взаимно однозначно отображает множество $\bar{J}_a$ на себя, причем $\eta_k \Gamma_a = \Gamma_a$.

Доказательство. Пусть $r = \xi_k n$, обозначим через L и L' следующие подмножества множества J_{2n-1} :

$$\begin{aligned} j \in L &\leftrightarrow j \in J_{n-1} \wedge \exists i \in J_n j_a (\xi_r i), \\ j \in L' &\leftrightarrow \exists i \in L j \equiv i \pmod{n-1}. \end{aligned}$$

Из (1) и $S^n = S$, обозначая $i_k = \rho_r^{-1} i$, при $i = r, r+1, \dots, n+r-1$, получим, как и в п. 1. 4,

$$S^{r-1} (S^{i-r} a S^{n-i+r-1}) S^{n-r} = S^{i_k-1} a S^{2n-1-i_k}. \quad (8)$$

Аналогично, при $i = 1, 2, \dots, r-1$

$$S^{i-1} a S^{r-i-1} (S^n) S^{n-r} = S^{i_k-1} a S^{2n-1-i_k}, \quad (9)$$

а при $i = n+r, n+r+1, \dots, 2n-1$

$$S^{r-1} (S^n) S^{i-n-r} a S^{2n-1-i} = S^{i_k-1} a S^{2n-1-i_k}. \quad (10)$$

Обозначим $i = j+r-1$; если j пробегает все n различных значений из J_n , то i пробегает в (8) множество $J_{n+r-1} \setminus J_{r-1}$. При этом индекс i_k принимает в силу (4) значения из L' . Пусть, кроме того, в формулах (9) и (10) i принимает все различные значения из $L' \cap (J_{r-1} \cup (J_{2n-1} \setminus J_{n+r-1}))$; их $l = |L'|$, если $1 \in L, r \in L$ или $1 \in L, r \notin L$; $l+1$, если $1 \in L, r \in L$; $l-1$, если $1 \notin L, r \in L$. Индекс i_k пробегает при этом (в силу взаимной однозначности подстановки ρ_r) все различные значения из L' — их $2l$, если $1 \in L$, и $2l+1$, если $1 \notin L$. Сравнивая эти количества, получим относительно l одно из уравнений

$$\begin{aligned} n+l &= 2l+1, \quad n+l+1 = 2l+1, \\ n+l &= 2l, \quad n+l-1 = 2l. \end{aligned}$$

Во всех случаях получаем $l = n$ или $l = n-1$. Первое решение не подходит, поскольку $l \leq n-1$; следовательно, $l = n-1, L = J_{n-1}$, т. е. $\eta_k \bar{J}_a = \bar{J}_a$.

Если бы η_k отображало два различных класса $\bar{i}, \bar{j}$ в один класс $\bar{s}$, то в силу $\eta_k \bar{J}_a = \bar{J}_a$, какой-нибудь из классов $\bar{r}$ должен был бы отображаться

в объединение по крайней мере двух различных классов $\bar{s}, \bar{t}$, что противоречит (6). Следовательно, каждое преобразование $\bar{\eta}_k$ множества $\bar{J}_a$ взаимно однозначно.

Из $S^{k-1}OS^{n-k} = \{0\}$ следует, что $\bar{\eta}_k \bar{w}_a = \bar{w}_a$ при любом $k=1, 2, \dots, n$. Из взаимной однозначности преобразования $\bar{\eta}_k$ теперь вытекает, что $\eta_k \bar{\Gamma}_a = \Gamma_a$ при $k=1, 2, \dots, n$.

2.5. Теорема. Пусть a — произвольный ненулевой элемент i -простого p -оператива S . Тогда

$$S = \bigcup_{\bar{i} \in \Gamma_a} (a)_{\bar{i}}, \quad (11)$$

где все $(a)_{\bar{i}}$ являются двусторонними идеалами оператива S , не зависящими от выбора элемента a ; $(a)_{\bar{i}} \cap (a)_{\bar{j}} = \{0\}$ при $\bar{i} \neq \bar{j}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество всех подмножеств $\Delta \subseteq \Gamma_a$ таких, что

$$B_\Delta = \bigcap_{\bar{i} \in \Delta} (a)_{\bar{i}} \neq \{0\}. \quad (12)$$

Из п.2.2. следует, что $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ и, значит, $m = \max_{\Delta \in \mathfrak{D}} |\Delta| \neq 0$.

Пусть B_Δ — какое-либо из множеств (12), для которых $|\Delta| = m$; I — подмножество J_{n-1} , состоящее из всех $k \in J_{n-1}$ таких, что $(B_\Delta)_k \neq \{0\}$; $C = \bigcup_{k \in I} B_{\Delta_k}$, где $\Delta_k = \bar{\eta}_k \Delta$. Покажем, что $C = S$.

В самом деле, для всякого $k \in J_{n-1}$ из (12) и (4) следует

$$(B_\Delta)_k = (\bigcap_{\bar{r} \in \Delta} (a)_{\bar{r}})_k \subseteq \bigcap_{\bar{r} \in \Delta} ((a)_{\bar{r}})_k = \bigcap_{\bar{r} \in \Delta} (a)_{\bar{\eta}_k \bar{r}} = B_{\Delta_k}. \quad (13)$$

Если $(B_{\Delta_k})_r = \{0\}$ при некоторых $\Delta_k \in \mathfrak{D}$, $r \in J_{n-1}$, то очевидно $(B_{\Delta_k})_r \subseteq C$. Если же $(B_{\Delta_k})_r \neq \{0\}$, то из (13), (7) имеем

$$(B_{\Delta_k})_r \subseteq B_{\bar{\eta}_r \Delta_k} = B_{\bar{\eta}_r \bar{\eta}_k \Delta} = B_{\bar{\eta}_{rk} \Delta} \subseteq C \quad (14)$$

и C — ненулевой идеал оператива S , т. е. $C = S$.

$|\bar{\eta}_k \Delta| = m$ для любого $k \in I$, поскольку каждое преобразование $\bar{\eta}_k$ взаимно однозначно (см. п. 2.4.). Если бы $B_{\Delta_k} \cap B_{\Delta_r} \neq \{0\}$ и $B_{\Delta_k} \neq B_{\Delta_r}$ при каких-либо $k, r \in I$, то отсюда следовало бы $\Delta_k \cup \Delta_r \in \mathfrak{D}$; тем более $\Delta_k \in \mathfrak{D}$, $\Delta_r \in \mathfrak{D}$, причем $\Delta_k \neq \Delta_r$. Тогда из $|\Delta_k| = |\Delta_r| = m$ вытекает $|\Delta_k \cup \Delta_r| > m$, что противоречит определению m . Таким образом, $B_{\Delta_k} \cap B_{\Delta_r} = \{0\}$ при $B_{\Delta_k} \neq B_{\Delta_r}$.

Из $S = C$ следует, что элемент $a \in S$ содержится в некотором подмножестве B_{Δ_k} ; но тогда при любом $r \in J_{n-1}$, в силу (14), $(a)_r \subseteq (B_{\Delta_k})_r \subseteq B_{\Delta_s}$, где $s = \eta_r k$. Из (12) теперь следует, что при всяком $k \in I$ $B_{\Delta_k} = (a)_s$, где s — любой элемент из Δ_k . Но тогда при любых $\bar{i}, \bar{j} \in \Gamma_a$ либо $(a)_{\bar{i}} = (a)_{\bar{j}}$, либо $(a)_{\bar{i}} \cap (a)_{\bar{j}} = \{0\}$.

Пусть b — любой ненулевой элемент из S , отличный от a . В силу (11) $b \in (a)_s$ при некотором $s \in J_{n-1}$, а вследствие (4), $(b)_i \subseteq (a)_{\eta_i s}$ при любом $i \in J_{n-1}$. С другой стороны, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что S является объединением своих подмножеств $(b)_j$, и каждое подмножество $(a)_i$ содержится в некотором $(b)_j$. При $i \neq j$ либо $(b)_i \cap (b)_j = \{0\}$, либо $(b)_i = (b)_j$. Поэтому каждое подмножество $(b)_j$ совпадает с некоторым подмножеством $(a)_i$ (и наоборот).

Как было отмечено в п. 1.4, каждое подмножество $(a)_i$ является двухсторонним идеалом оператора S .

2.6. Вернемся теперь к рассмотрению преобразований $\bar{\eta}_k$, определенных в п. 2.3. В отличие от п. 2.3 мы будем при всяком $k \in J_{n-1}$ рассматривать лишь ограничение $\bar{\eta}_k$ преобразования $\bar{\eta}_k$ на множестве Γ_a (т. е. такое преобразование $\bar{\eta}_k$, что $\bar{\eta}_k \bar{i} = \bar{\eta}_k \bar{i}$ для всякого $\bar{i} \in \Gamma_a$). Кроме того, совокупность G_a всех преобразований $\bar{\eta}_k$ будем рассматривать не как семейство, а как множество преобразований.

Теорема. Пусть S — i -простой p -оператив, a — его произвольный ненулевой элемент. Тогда G_a является транзитивной группой взаимно однозначных отображений множества Γ_a на себя.

Доказательство. В п. 2.4. показано, что каждое преобразование $\bar{\eta}_k \in G_a$ взаимно однозначно отображает множество Γ_a на себя. Вследствие (7), G_a замкнуто относительно суперпозиции преобразований и, следовательно, является, группой.

Пусть $\bar{i}, \bar{j}$ — произвольные элементы из Γ_a . По теореме п. 2.5, S имеет вид (11). С другой стороны, из i -простоты оператора S , как и в п. 2.5, следует, что $S = \bigcup_{k \in J_n} ((a)\bar{\eta})_k = \bigcup_{k \in J_n} (a)_{\bar{\eta}_k \bar{i}}$. Следовательно, существует такое преобразование $\bar{\eta}_k$, что $\bar{\eta}_k \bar{i} = \bar{j}$, т. е. группа G_a транзитивна.

§ 3. Умножение двухсторонних идеалов

3.1. В силу п. 2.6 для любой пары элементов $j \in J_{n-1}$, $\bar{k} \in \Gamma_a$ существует (вообще говоря, не единственный) индекс $r = (k, j) \in J_{n-1}$ такой, что $\eta_{jr} \in \bar{k}$. Поскольку $\eta_{11} = \xi_1 = \varepsilon$, из п. 1.3, 2.3 следует $(k, 1) \gamma_a(k, n) \gamma_a k$; поэтому можно считать, что $(k, 1) = (k, n) = k$ при любом $k \in J_n$.

Лемма. Пусть a — произвольный ненулевой элемент i -простого p -оператива S . Тогда для любых $k, k_j \in J_n$

$$(a)_{(k, 1)} (a)_{(k, 2)} \dots (a)_{(k, n)} = (a)_k, \quad (15)$$

$$(a)_k (a)_{k_2} (a)_{k_3} \dots (a)_{k_n} = \{0\}, \text{ если } k_j \notin \bar{(k, j)}. \quad (16)$$

Доказательство. Из п. 1.4 следует, что для любых $j, k_j \in J_{n-1}$

$$S^{i-1} (a)_{k_j} S^{n-i} = ((a)_{k_j})_j = (a)_{\eta_{jk_j}},$$

$$S^{n-1} (a)_{k_j} = (a)_{k_j} S^{n-1} = (a)_{k_j},$$

а отсюда имеем

$$(a)_{k_1} (a)_{k_2} \dots (a)_{k_n} \subseteq \bigcap_{j=1}^n S^{i-1} (a)_{k_j} S^{n-i} = \bigcap_{j=1}^n (a)_{\eta_{jk_j}}. \quad (17)$$

Если $\eta_{jk_j} \in \bar{k}_1$, то по теореме п. 2.4 $(a)_{\eta_{jk_j}} \cap (a)_{k_1} = \{0\}$. Из взаимной однозначности преобразований $\bar{\eta}_j$ (см. п. 2.4) следует теперь

$$\eta_{jk_j} \in \bar{k} \leftrightarrow (a)_{k_j} = (a)_{(k, j)} \leftrightarrow k_j \in \bar{(k, j)}.$$

Вместе с (17) это доказывает справедливость соотношения (16).

С другой стороны, $(a)_k = (a)_k S^{n-1} = (a)_k S S \dots S$ при любом $k \in J_{n-1}$. Отсюда из (11) и (16) вытекает (15).

3.1.1. Если S — i -простой π -оператив (см. п. 1.2.4), то можно считать, что

$$(k, j) = \begin{cases} \pi_{j^*} (k - j^* + 1) & \text{при } j^* \leq k, \\ \pi_{j^*} (k - j^* + n) & \text{при } j^* > k. \end{cases}$$

В самом деле, из п. 1.3 имеем $\eta_j(k, j) = \xi_{j^*}(k, j) = \langle k \rangle = k$ при любых $j \in J_{n-1}$, $k \in \Gamma_a$.

В общем случае, когда S — i -простой p -оператив, при $j^* \leq p_{j^*}k$ можно считать, что $(k, j) \equiv p_{j^*}k - j^* + 1 \pmod{n-1}$. Впрочем, явное выражение для (k, j) нам в дальнейшем не понадобится.

3.2. Лемма. Пусть S — i -простой p -оператив, для которого

$$\bigvee_{x \in S \setminus \{0\}} (x)_1 \neq \{0\}. \quad (18)$$

Тогда для любых $a \in S \setminus \{0\}$, $\bar{k} \in \bar{J}_a$ все двусторонние идеалы $(a)_{\bar{k}}$ минимальны, $a \in (a)_1$ и $(a)_k = (a)_{\varepsilon_k \cdot n} = (a)_{\eta_k 1}$.

Доказательство. Пусть b — произвольный элемент из $(a)_i$. Множество $[b] = \{b\} \cup bS^{n-1} \cup S^{n-1}b$ является, очевидно, главным двусторонним идеалом оператора S , порожденным элементом b (пересечением всех двусторонних идеалов, содержащих b). Следовательно, $[b] \subseteq (a)_i$; в частности, $(b)_1 \subseteq (a)_i$. Вследствие (18), $(b)_1 \neq \{0\}$, и, по теореме п. 2.4, $(b)_1 = (a)_i$. Из $(b)_1 \subseteq [b] \subseteq (a)_i$ вытекает тогда, что $[b] = (a)_i$.

Всякий двусторонний идеал B оператора S является объединением некоторого множества его главных двусторонних идеалов $(a)_i$; все $(a)_i$ являются, таким образом, минимальными двусторонними идеалами оператора S .

Из (11) следует $a \in (a)_{\bar{i}}$ при некотором $\bar{i} \in \Gamma_a$. Тогда, как и выше, $[a] \subseteq (a)_i$, в частности, $(a)_1 \subseteq (a)_i$. Из $(a)_1 \neq \{0\}$ и теоремы п. 2.5 следует $(a)_1 = (a)_{\bar{i}}$, $a \in (a)_1$.

Из $a \in (a)_1$ вытекает $(a)_k \subseteq ((a)_1)_k$; если при этом $(a)_k \neq \{0\}$, то, как и выше, $(a)_k = ((a)_1)_k$. Остается лишь воспользоваться вторым соотношением (4).

3.3. Пусть S — произвольный i -простой π -оператив. По лемме п. 2.1 $S^{n-1}SS^{n-1} = S$; поэтому элемент a в лемме п. 3.1 можно выбрать так, чтобы $(a)_1 = S^{n-1}aS^{n-1} \neq \{0\}$, т. е. $\bar{1} \in \Gamma_a$. Обозначим

$$A_j = (a)_{(k, j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Разумеется $\{A_j\}_{j=1}^{n-1}$ является, как и $\{(a)_i\}_{i=1}^n$, семейством двусторонних идеалов оператора S .

Из (15) при $k = 1$ имеем

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_1. \quad (19)$$

Определим следующие преобразования σ'_k множества J_n : при любых $k, j \in J_n$

$$\sigma'_k i = \begin{cases} \langle p_k i \rangle & \text{при } i < k \text{ (см. п. 1.3),} \\ i & \text{при } i = k, \\ \langle p_k(i + n - 1) \rangle & \text{при } i > k. \end{cases}$$

Если S — π -оператив, то $\sigma'_k i = \sigma_k i$ при $i < n$ (см. п. 1.2).

Теорема. При любых $k, i \in J_{n-1}$

$$A_k = A_k A_{\varepsilon_k 2} A_{\varepsilon_k 3} \dots A_{\varepsilon_k(n-1)} A_k = A_{\varepsilon_k} A_{\varepsilon_k 2} \dots A_{\varepsilon_k n}, \quad (20)$$

$$A_{\sigma'_k i} = A_i,$$

$$A_k A_{k_2} A_{k_3} \dots A_{k_n} = \{0\} \text{ при } A_{k_j} \neq A_{\varepsilon_{k_j}}. \quad (21)$$

Доказательство. При $n \leq k \leq 2n-1$ обозначим $A_k = A_{\langle k \rangle}$. Из леммы п. 3.1 вытекает возможность представить A_k в виде $A_k = C_k C_{k+1} \dots C_{k+n-1}$, где C_i ($k \leq i \leq k+n-1$) — двусторонние идеалы $(a)_j$. Пусть, кроме того, $C_i = A_i$ при $i \leq k-1$ или $i \geq k+n$. Из (19), (3) имеем

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k A_{k+1} \dots A_{n-1} A_n = C_1 C_2 \dots C_{k-1} (C_k C_{k+1} \dots \dots C_{k+n-1}) C_{k+n} C_{k+n+1} \dots C_{2n-1} = C_{\rho_k}^{-1} \dots C_{\rho_k}^{-1} C_{2n-1}.$$

Но $A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n A_{n+1} \dots A_{2n-1}$ и по лемме п. 3.1 $C_{\rho_k}^{-1} = A_i$ при $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, т. е.

$$\forall i \in J_{2n-1} C_i = A_{\rho_k}^{-1} i. \quad (22)$$

Отсюда при $i \leq k$ или $k+n-1 \leq i \leq 2n-1$ следует $A_i = A_{\rho_k}^{-1} i$, $A_i = A_{\rho_k}^{-1} i = A_{\langle \rho_k i \rangle}$. Положив здесь $i = j+n-1$, если $k+n \leq i \leq 2n-1$, получим $A_j = A_{\langle \rho_k (j+n-1) \rangle}$ при $k+1 \leq j \leq n$. Вместе с $A_i = A_{\langle \rho_k i \rangle}$ при $i \leq k-1$ это дает $A_{\sigma_k^{-1} i} = A_i$ при любом $i \in J_n$.

Положив в (22) $i = k, k+1, \dots, k+n-1$, получим по определению п. 1.3

$$A_k = C_k C_{k+1} \dots C_{n+k-1} = A_{\rho_k}^{-1} k A_{\rho_k}^{-1} (k+1) \dots A_{\rho_k}^{-1} (n+k-1) = A_{\langle \rho_k^{-1} k \rangle} A_{\langle \rho_k^{-1} (k+1) \rangle} \dots A_{\langle \rho_k^{-1} (n+k-1) \rangle} = A_{\varepsilon_k} A_{\varepsilon_k^2} \dots A_{\varepsilon_k^n}.$$

Из теоремы п. 2.5 вытекает теперь

$$A_{\varepsilon_k} = A_{\varepsilon_k^n} = A_k. \quad (23)$$

Справедливость формулы (21) следует из леммы п. 4.3.

Заметим, что из сопоставления настоящей теоремы и леммы п. 3.1 вытекает формула

$$\forall k \in J_{n-1}, i \in J_n A_{\varepsilon_k i} = (a)_{(k), i}.$$

3.4. Введем следующую эквивалентность δ на множестве J_{n-1} : для любых $i, j \in J_{n-1}$ $i \delta j$ тогда и только тогда, когда $A_i = A_j$.

Теорема. При любых $i, j, k \in J_n$

$$(\xi_j \xi_k i) \delta (\xi_{\varepsilon_k j} i), (\sigma_k \xi_j i) \delta (\xi_j i).$$

Доказательство. Пусть j, k — любые индексы из J_{n-1} , $s = \xi_j k$. Введем обозначения: $B_i = A_{\varepsilon_j i}$ при $i \in J_n$, $B_i = B_{\langle i \rangle}$ при $i \geq n$; $C_i = B_i$ при $i \leq k-1$ или $i \geq k+n$, $C_i = A_{\varepsilon_i (i-k+1)}$ при $k \leq i \leq k+n-1$. Как и в доказательстве теоремы п. 3.3, получим $C_i = B_{\rho_k}^{-1} i$ при любом $i \in J_{2n-1}$ и, в частности, при всяком $i \leq k-1$ или $i \geq k+n-1$

$$B_i = B_{\rho_k}^{-1} i (= B_{\rho_k i}),$$

т. е. $B_{\sigma_k^{-1} i} = B_i$ при любом $i \in J_n$. С другой стороны, из определения B_i при любом $i \in J_n$ имеем $A_{\varepsilon_s i} = C_{i-k+1} = B_{\varepsilon_k i} = A_{\varepsilon_j \varepsilon_k i}$ и $A_{\varepsilon_j i} = A_{\sigma_k^{-1} \varepsilon_j i}$.

3.5. **Теорема.** Все классы эквивалентности δ состоят из одного и того же числа элементов.

Доказательство. В п. 3.3. показано, что

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_{k-1} (A_{\varepsilon_k} A_{\varepsilon_k^2} \dots A_{\varepsilon_k^n}) A_{k+1} \dots A_{n-1} A_1 = A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k \dots A_{n-1} A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k A_{k+1} \dots A_{n-1} A_1$$

Отсюда, из $A_{\varepsilon_{kn}} = A_k$ (см. п. 3.3), из (3) и теоремы 3.3 следует, что семейство $\{A_{\varepsilon_{k1}}, A_{\varepsilon_{k2}} \dots A_{\varepsilon_{k(n-1)}}\}$ при любом k совпадает с семейством $\{A_1, A_2, \dots A_{n-1}\}$. Разумеется, двусторонний идеал A_i встречается в этих семействах одинаковое число раз, но не на одних и тех же местах.

По теореме п. 3.3 $(A_{\varepsilon_{ki}})_i = A_k$ при любых $i, k \in J_{n-1}$. Поэтому при всяких $i, k, s \in J_{n-1}$

$$A_{\varepsilon_{ki}} = A_{\varepsilon_{si}} \rightarrow A_k = A_s.$$

Следовательно, если $A_k \neq A_s$, то в разложении этих двусторонних идеалов в виде (20) идеал A_j не может встречаться на одинаковых местах.

Пусть оператив S содержит точно t различных двусторонних идеалов A_k ; обозначим через λ_j количество элементов в классе эквивалентности δ , содержащем элемент j . Тогда из приведенных выше рассуждений следует $t\lambda_j \leq n-1$. С другой стороны, объединение всех классов эквивалентности δ равно J_{n-1} , $\sum \lambda_j = n-1$, а это было бы невозможно, если бы при каком-либо j мы имели $\lambda_j < \frac{n-1}{t}$. Значит, $\lambda_j = \frac{1}{t}(n-1)$ при любом j .

Из приведенного ниже (в п. 5.6) примера видно, что в отличие от γ_a эквивалентность δ не согласована с преобразованиями ξ_k или η_k (см. (6)).

3.6. Пусть S — произвольный p -оператив. Множество $\mathfrak{P}(S)$ всех подмножеств оператива S является, очевидно, p -оперативом относительно операции, полученной распространением операции в S на $\mathfrak{P}(S)$: для любых подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq S$ их произведением является множество $X_1 X_2 \dots X_n$ (см. п. 1.1)¹.

Из п. 3.3. следует, что подмножество $\mathfrak{A}$ оператива $\mathfrak{P}(S)$, состоящее из $\{0\}$ и всех различных двусторонних идеалов A_i , является подоперативом $\mathfrak{P}(S)$ и, в частности, p -оперативом.

Следует учесть, что подстановки p_k не определяются для p -оператива единственным способом — подобные примеры приведены в статьях [1, 2].

Теорема. Оператив $\mathfrak{A}$ является π^* -оперативом (см. п. 1.2), для которого все $\sigma_j = \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим через Γ_k совокупность всех подстановок α множества J_{2n-1} , обладающих следующими свойствами: 1) для любого семейства $\{B_i\}_{i=1}^{2n-1}$ двусторонних идеалов $B_i = A_{\varepsilon_j(i)}$

$$B_1 = B_{\alpha_1} B_{\alpha_2} \dots B_{\alpha_{(2n-1)}}$$

и 2) $B_{\alpha_i} = B_i = B_{\alpha_{-i}}$ при $i \leq k$ или $i \geq k+n-1$.

Пусть $k \in J_{n-1}$, $\alpha_0 = p_k$, $j' = j$ при $j \leq k$ и $j' = j+n-k$ при $k+1 \leq j \leq n+1$. Допустив, что подстановки α_i при $i \leq j-1$ нами уже построены, подстановку α_j осуществим таким образом: $\alpha_j j' = j'$, $\alpha_j (\alpha_{j-1}^{-1} j') = \alpha_{j-1} j'$ и $\alpha_j i = \alpha_{j-1} i$ во всех остальных случаях. Нетрудно проверить, что подстановка α_j получена из α_{j-1} умножением на транспозицию $(j', \alpha_{j-1} j')$.

Из доказательства теоремы п. 3.4 следует, что $\alpha_0 = p_k \in \Gamma_k$. Предположим, что $\alpha_s \in \Gamma_k$ при $s \leq j-1$. Тогда $B_{\alpha_i} = B_{\alpha_{j-1}^{-1} i} = B_i$ при $i \neq j'$, $i \neq \alpha_{j-1}^{-1} j'$, $B_{\alpha_{j'}} = B_{j'}$, $B_{\alpha_j (\alpha_{j-1}^{-1} j')} = B_{\alpha_{j-1} j'} = B_{j'} = B_{\alpha_{j-1}^{-1} j'}$ (в силу $\alpha_{j-1} \in \Gamma_k$ и по построению подстановки α_j). Кроме того, разложение $B_{\alpha_1} B_{\alpha_2} \dots B_{\alpha_j (\alpha_{j-1}^{-1} j')} B_{\alpha_{j-1} j'} B_{\alpha_{j-1}^{-1} j'}$ получено из $B_1 = B_{\alpha_{j-1}^{-1} 1} B_{\alpha_{j-1}^{-1} 2} \dots B_{\alpha_{j-1}^{-1} (2n-1)}$ перестановкой одинаковых двусторонних идеалов $B_{j'}$ и $B_{\alpha_{j-1} j'}$, и, следовательно, $\alpha_j \in \Gamma_k$.

¹ $\mathfrak{P}(S)$ называется глобальным оперативом для оператива S [3].

Обозначим $a_{n+1} = a$; по построению, $ai = i$ при $i \leq k$ или $i \geq k + n - 1$. Пусть $\{D_i\}_{i=1}^{2n-1}$ — произвольное семейство двусторонних идеалов A_j , $D =$

$$= D_{\rho_k 1} D_{\rho_k 2} \dots D_{\rho_k (2n-1)}, \quad D' = D_{a1} D_{a2} \dots D_{a(2n-1)}, \quad D'' = \\ = D_1 D_2 \dots D_{k-1} (D_k D_{k+1} \dots D_{k+n-1}) D_{k+n} \dots D_{2n-1}.$$

Если $D \neq \{0\}$, то в силу п. 3.3, 3.4, $D = D_1 = A_j$ при некотором j , и

$$\forall i \in J_{2n-1} D_{\rho_k i} = A_{\varepsilon_j \langle i \rangle}. \quad (24)$$

По доказанному выше, в этом случае $D = D'$.

Пусть теперь $D = \{0\}$. Если бы $D' \neq \{0\}$, то из теоремы п. 3.3 следовало бы $D' = D_{a1} (= D_1) = A_j$, $D_{ai} = A_{\varepsilon_j \langle i \rangle}$; вместе с (24) это дало бы $D_{\rho_k i} = D_{ai}$ при любом i , т. е. $D' = D$, и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, в любом случае $D' = D$ и, в силу (3), $D'' = D'$. Таким образом, в тождестве (3) для оператива $\mathfrak{A}$ подстановку ρ_k можно заменить подстановкой α . Остается лишь заметить, что по построению $ai = i$ при $i \leq k$ или $i \geq k + n - 1$. По определению (см. п. 1.2) это и означает, что $\mathfrak{A}$ является π^* -оперативом.

§ 4. j -простые p -оперативы

4.1. i -простой оператив называется j -простым, если

$$\forall a \in S \setminus \{0\}, i \in J_n S^{i-1} a S^{n-i} \neq \{0\}.$$

Ниже (см. п. 4.5) выделен естественный класс p -оперативов, в котором условие j -простоты вытекает из i -простоты.

Теорема. Пусть S — j -простой p -оператив. Тогда для любого элемента $a \in S \setminus \{0\}$

$$S = \bigcup_{i \in J_{n-1}} (a)_i,$$

где все $(a)_i$ — минимальные двусторонние идеалы оператива S . Кроме того,

$$\forall i, k \in J_{n-1} ((a)_i)_k = (a)_{\varepsilon_k i}, \quad (25)$$

$$\forall k \in J_{n-1} (a)_{\varepsilon_k n} = (a)_{\varepsilon_k 1} = (a)_k. \quad (26)$$

Доказательство. Для j -простого p -оператива $\bar{\omega}_a = \emptyset$ независимо от выбора элемента a и, следовательно, $\Gamma_a = \bar{J}_a$ (п. 2.3).

Для любого элемента $a \in S \setminus \{0\}$ по определению существует хотя бы один элемент $b \in a S^{n-1} \setminus \{0\}$, причем $S^{n-1} b \neq \{0\}$. Но $S^{n-1} b \subseteq S^{n-1} a S^{n-1} = (a)_1$; следовательно, $(a)_1 \neq \{0\}$ для любого $a \in S \setminus \{0\}$. Из п. 2.5, 3.2 вытекает теперь первое утверждение теоремы.

Из $[a] = (a)_1$ (см. п. 3.2) следует $a S^{n-1} \subseteq (a)_1$, $(a)_{\varepsilon_k 1} = (a S^{n-1})_k \subseteq ((a)_1)_k$, а из п.п. 1.3 и 2.4 — $(a)_{\varepsilon_k 1} = ((a)_1)_k$. При $i \neq 1$ формула (25) доказана в п. 1.3.

В конце п. 3.2 показано, что $(a)_k = ((a)_1)_k$. Вместе с $(a)_{\varepsilon_k 1} = ((a)_1)_k$ (и аналогично доказываемым соотношениям $(a)_{\varepsilon_k n} = ((a)_1)_k$) это приводит к формуле (26).

4.2. **Теорема.** Если S — i -простой p -оператив без нуля, то S не содержит собственных двусторонних идеалов; $S = (a)_i$ для любого $a \in S$.

В самом деле, введем в множестве $S_0 = S \cup \{0\}$ такое действие: для любых $x_i \in S$ произведение $x_1 x_2 \dots x_n$ сохраняет свое значение в S_0 ; если же хотя бы один из элементов x_i равен 0, то будем считать, что

$x_1 x_2 \dots x_n = 0$. Относительно этого действия S_0 является j -простым p -оперативом и по теореме п. 3.3 — объединением своих минимальных двусторонних идеалов A_i^* .

Допустим, что S_0 содержит различные минимальные двусторонние идеалы A_i^* и A_k^* ; тогда $A_i^* \cap A_k^* = \{0\}$. С другой стороны, множество A_i всех ненулевых элементов из A_i^* является минимальным двусторонним идеалом оператива S_0 . При этом $A_i S^{n-2} A_k \subseteq A_i \cap A_k$, $A_i \cap A_k \neq \emptyset$, $A_i^* \cap A_k^* \neq \{0\}$. Следовательно, S^* содержит точно один двусторонний идеал A^* , т. е. $S = A$.

По теореме п. 2.5, $S = (a)_i$ для любого $a \in S$, $i \in J_{n-1}$.

4.3. Теорема. Для любых элементов x_i из j -простого p -оператива S и произвольного $i \in J_{n-1}$ либо

$$A_i x_2 x_3 \dots x_{n-1} A_i \neq \{0\}, \text{ либо } A_i x_2 \dots x_{n-1} A_i = A_i.$$

Теорема следует из п. 3.3 и 4.1. $A_i x_2 x_3 \dots x_{n-1} A_i$ является двусторонним идеалом оператива S , содержащимся в его минимальном двустороннем идеале A_i .

4.4. Теорема. Если S — j -простой π -оператив, то все классы $\bar{i}$ (п. 2.3) состоят из одного и того же количества индексов $j \in J_{n-1}$.

Доказательство. По теореме п. 4.1 $(a)_{\xi_k 1} = (a)_{\xi_k n} = (a)_k$ и, следовательно, $\xi_k 1 \in \bar{k}$, $\xi_k n \in \bar{k}$. С другой стороны, по определению п. 1.3

$$\xi_k (\pi_k 1) = \xi_k (\pi_k n) = k. \quad (27)$$

Из п. 1.3 следует $\xi_k J_n = J_{n-1}$. Вследствие (25), соотношение (6) можно переписать в виде

$$\forall i, j, k \in J_{n-1} \quad i \gamma a j \rightarrow (\xi_k i) \gamma a (\xi_k j).$$

Вместе с $\xi_k 1 \in \bar{k}$, $\xi_k n \in \bar{k}$ это дает

$$\xi_k (\bar{1} \cup \{n\}) = \bar{k} \quad (28)$$

и $\{\pi_k 1, \pi_k n\} \subseteq \bar{1} \cup \{n\}$. Пусть класс $\bar{1}$ состоит из l элементов; тогда множество $\bar{1} \cup \{n\}$ содержит точно $l + 1$ элементов. Из (28) и (27) вытекает теперь, что класс $\bar{k}$ состоит точно из l элементов.

4.5. Теорема. Всякий i -простой π^* -оператив (см. п. 1.2) j -прост.

Доказательство. Покажем, что для любого ненулевого элемента a из i -простого π^* -оператива S и любых $i, j \in J_{n-1}$ существует индекс $k \in J_{n-1}$ такой, что $(\xi_k i) \gamma a j$ (см. п. 1.3, 2.3).

Из $\pi_i \{1, n\} = \{1, n\}$ и (3) следует $\xi_i 1 = \xi_i n = i$ при любом $i \in J_{n-1}$; $\eta_i = \xi_i$ (см. п. 1.4) и, вследствие (4),

$$\forall a \in S \setminus \{0\} \quad ((a)_1)_i = (a)_i.$$

Пусть теперь $i \neq 1$. Преобразование ξ_i множества J_n индуцирует на J_{n-1} взаимно однозначную подстановку. В разложении этой подстановки на независимые циклы, в силу $\xi_i 1 = i$, элементы 1 и i входят в один цикл. Поэтому существует элемент $i_1, i_2, \dots, i_r \in J_{n-1}$ ($i_0 = i, i_r = 1$) такие, что $\xi_i i_{j-1} = i_j$. Из (4) следует $((a)_{i_j})_i = (a)_{i_{j+1}}$; с другой стороны, $((a)_i)_i = (a)_i$ и по индукции $((a)_i)_{i_j} = (((a)_i)_{i_{j-1}})_i = ((a)_{i_j})_i = (a)_{i_{j+1}}$. Следовательно, $((a)_i)_{i_{r-1}} = (a)_{i_r} = (a)_1$; отсюда, из (4) и $\xi_j 1 = j$, обозначая $\xi_{i_{r-1}j} = k$, получим

$$((a)_i)_k = (((a)_i)_{i_{r-1}})_j = ((a)_1)_j = (a)_j.$$

Допустим теперь, что $(a)_i = \{0\}$ при некотором $i \in J_{n-1}$. Если j — произвольный индекс из J_{n-1} , то найдется $k \in J_{n-1}$ такой, что $((a)_i)_k = (a)_j$ и, следовательно, $(a)_j = \{0\}$. Как и в п. 2.4, имеем тогда $S = \{a\} \cup aS^{n-1} \cup S^{n-1}a$ и $S = S^n = \{0\}$. Следовательно, $(a)_i \neq \{0\}$ при любом i , и S j -прост.

Теорема. Пусть t — наибольший собственный (отличный от $n-1$) делитель числа $n-1$. Если i -простой π -оператив S содержит больше чем t различных двусторонних идеалов A_i , то он является π^* -оперативом, в котором при любых $i \in J_n$, $j, k \in J_{n-1}$

$$\sigma_k\{1, n\} = \{1, n\}, \quad \sigma_k i = i \quad (1 < i < n), \\ \xi_j \xi_k = \xi_{j \cdot k}.$$

Доказательство. По теореме п. 3.5, количество t различных двусторонних идеалов A_i (или, что то же самое, количество различных классов эквивалентности δ) является делителем числа $n-1$. По условию теоремы, $t = n-1$ и каждый класс этой эквивалентности состоит точно из одного элемента. По теореме п. 3.3, $A_{\xi_k 1} = A_{\xi_k n} = A_k$ при любом k ; следовательно, $\xi_k 1 = \xi_k n = k$.

Из п. 1.3 для всякого π -оператива S имеем

$$V_{i, j \in J_n} \xi_k i = \xi_k j \leftrightarrow \{i, j\} = \{\pi_k 1, \pi_k n\}$$

и, следовательно, $\pi_k\{1, n\} = \{1, n\}$ при любом $k \in J_n$.

Из п. 3.4 следует при любых $i \in J_n$, $j, k \in J_{n-1}$

$$\xi_j \xi_k i = \xi_{j \cdot k} i, \quad \sigma'_k j i = \xi_j i.$$

Первое из этих равенств дает $\xi_j \xi_k = \xi_{j \cdot k}$. Положив во втором из них $i = 1$, получим $\sigma'_k j = j$. Отсюда, по определению σ'_k (см. п. 3.3), имеем $\sigma_k i = i$ при $i \neq 1, n$, $\sigma_k\{1, n\} = \{1, n\}$.

§ 5. Симметрия в π -оперативах

5.1. Обозначим через T подмножество J_{n-1} , состоящее из всех t таких, что $\pi_{t+1} = \varepsilon$.

Теорема¹. Пусть S — π -оператив, $S^n = S$ и все $\sigma_i = \varepsilon$. Тогда $\pi_{t+k} = \pi_k$ при любых $t \in T$, $k \leq n-t+1$. Наименьший индекс $t' \in T$ является делителем всех $t \in T$ (и в частности, делителем числа $n-1$).

Доказательство. Из (3) и $\pi_{t+1} = \sigma_t = \varepsilon$ имеем при любых $x_i, y_i \in S$

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \dots x_t x_{t+1} \dots x_{t+k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{t+k+1} \dots x_{t+n} x_{t+n+1} \dots x_{2n-1} = \\ & = x_1 x_2 \dots x_t (x_{t+1} \dots x_{t+k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{t+k+1} \dots x_{t+n}) x_{t+n+1} \dots x_{2n-1} = \\ & = x_1 x_2 \dots x_t (x_{t+1} \dots x_{t+k-1} y_{\pi_{k1}} y_{\pi_{k2}} \dots y_{\pi_{kn}} x_{t+k+1} \dots x_{t+n}) x_{t+n+1} \dots x_{2n-1} = \\ & = x_1 x_2 \dots x_{t+k-1} y_{\pi_{k1}} y_{\pi_{k2}} \dots y_{\pi_{kn}} x_{t+k+1} \dots x_{2n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая $x_n x_{n+1} \dots x_{2n-1} = x'_n$, получим

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \dots x_{t+k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{t+k+1} \dots x_{n-1} x'_n = \\ & = x_1 x_2 \dots x_{t+k-1} y_{\pi_{k1}} y_{\pi_{k2}} \dots y_{\pi_{kn}} x_{t+k+1} \dots x_{n-1} x'_n. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $\pi_{t+k} = \pi_k$, поскольку x'_n (в силу $S^n = S$) является произвольным элементом из S .

¹ Эта теорема обобщает лемму п. 2.5 статьи [2].

Отсюда вытекает, что $\pi_{k+rt} = \pi_k$ при любом $k \leq n - rt$. Пусть теперь $t \in T$, $t = rt' + s$, где $0 \leq s < t'$. Если бы $s \neq 0$, то мы имели бы $\pi_s = \pi_{rt'+s} = \pi_{t'} = \varepsilon$, что противоречит предположению о минимальности t' . Следовательно, $s = 0$, $t = rt'$. Теорема доказана.

5.2. Всюду в п. 5.2—5.4 через S обозначен i -простой π -оператив; A_i — его двусторонние идеалы в разложении (19); n — арность операции в S ; l — наименьшее целое положительное число такое, что в разложении (19) $A_{l+1} = A_1$ и $\pi_{l+1} = \varepsilon$ (в крайнем случае $l = n - 1$).

Теорема. $A_{i+l} = A_i$ при любом i ($1 \leq i \leq n - l$); l является делителем числа $n - 1$.

Доказательство. Из п. 3.3 и (3) следует (поскольку $\pi_{l+1} = \varepsilon$ и A_{n-l} — двусторонний идеал)

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_l (A_1 A_2 \dots A_{n-l} A_1) A_{l+2} \dots A_{n-l} A_1 = \\ = A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_{n-l-1} A_{n-l}.$$

Продолжая точно так же, получим

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_{n-2l}$$

и т. д., т. е. $A_{i+l} = A_i$ при любом $i \leq n - l$. Если бы l не являлось делителем числа $n - 1$ (n — арность операции), то мы получили бы таким образом $A_r = A_1$, где r — остаток от деления $n - 1$ на l , $r < l$, что противоречит определению l . Таким образом,

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_l \dots A_1 A_2 \dots A_l A_1. \quad (29)$$

5.3. **Теорема.** Пусть S — i -простой ассоциатив. Тогда все двусторонние идеалы $A_1, A_2, \dots, A_l$ (см. теорему п. 5.2) различны и при любом $k \leq l$

$$A_k = A_k A_{k+1} \dots A_l A_1 A_2 \dots A_l A_1 \dots A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_k. \quad (30)$$

Доказательство. Справедливость разложения (30) следует из теорем п. 3.3 и 5.2. Если $A_i = A_k$ при $i < k \leq l$, то из (19) и (30) имеем

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_i A_{i+1} \dots A_{n-1} A_1 = A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_k A_{i+1} \dots A_{n-1} A_1 = \\ = A_1 A_2 \dots A_{i-1} (A_k A_{k+1} \dots A_{l+1} A_1 A_2 \dots A_l A_1 A_2 \dots A_k) A_{i+1} \dots A_1$$

и вследствие (3), $A_{k-i+1} = A_1$, что противоречит минимальности l . Следовательно, все двусторонние идеалы A_i ($1 \leq i \leq l$) различны.

5.4. **Теорема.** Пусть S — i -простой альтернатив (см. п. 1.2). Тогда l четно, разложение (19) для нечетных k имеет вид (30), для четных —

$$A_k = A_k A_{k-1} \dots A_1 A_l A_{l-1} \dots A_2 A_1 A_l \dots A_1 A_l A_{l-1} \dots A_{k+1} A_k. \quad (31)$$

При этом либо $A_1, A_2, \dots, A_l$ различны, либо $A_i = A_k$ тогда и только тогда, когда $i + k \equiv 1 \pmod{l}$.

Доказательство. Справедливость формул (30), (31) вытекает из п. 3.3 и 5.2. Как и в п. 5.3, для любых различных нечетных (или различных четных) индексов i, k ($\leq l$) из минимальности l имеем $A_i \neq A_k$. Из п. 1.2 и $\pi_{l+1} = \varepsilon$ (см. п. 5.2) следует, что l четно.

Обозначим через J множество всех четных индексов $i \in J_{n-1}$ таких, что $A_i = A_1$. Если J не пусто, то по теореме п. 5.2 существует (единственный) индекс $j \in J \cap \{1, 2, \dots, l\}$. Из (30), (31), (3) следует $A_i = A_k$ при $i + k = l + 1$ или $i + k = j + n$. Вместе с теоремой п. 5.2 это дает $A_i = A_k$ при $i + k \equiv j + 1 \pmod{l}$.

Допустим теперь, что $A_i = A_k$, где i — нечетный индекс $< l$, k — четный $\leq l$.

Вставив в (29) выражение (31) для $A_k = A_i$, получим в силу (29) $A_{i+k-1} = A_1$, и J не пусто. Если $k \leq j$, то по доказанному $A_{j+1-k} = A_k = A_i$. Индекс $j+1-k$ нечетен, $1 \leq j+1-k < l$ и, следовательно, $j+1-k = i$, $i+k = j+1$. Если же $k > j$, то аналогично покажем, что $i+k = j+1$.

Обозначив $A'_i = A_{j+1-i}$ при $i \leq j$ и $A'_i = A_{l+j+1-i}$ при $j+1 \leq i \leq l$, получим из (30) (в силу $A_j = A_1$) для A'_1 разложение типа (29), где $A'_i = A'_k$ при $i+k \equiv 1 \pmod{l}$. Теорема доказана.

5.6. В случае произвольных π -оперативов периодичность типа (30), (31) в разложениях (19) идеалов A_i , вообще говоря, может и не вытекать из периодичности разложения A_1 . Это видно из следующего примера. Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_i = \pi_1 = \pi_3 = \varepsilon, \quad \pi_2 = \pi_5 = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если S содержит 3 двусторонних идеала A_i , то из п. 3.3 следует, что их разложения (20) должны иметь вид

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 A_2 A_3 A_1 A_2 A_3 A_1, \quad A_2 = A_2 A_1 A_1 A_3 A_3 A_2 A_2, \\ A_3 &= A_3 A_3 A_2 A_2 A_1 A_1 A_3. \end{aligned}$$

Этот же пример показывает, что в отличие от эквивалентностей γ_a , эквивалентность δ может быть и не согласована с семейством преобразований ξ_i (даже в случае j -простых операторов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глушкин. О позиционных операторах. «Докл. АН СССР», 157, № 4, 767—770 (1964).
2. Л. М. Глушкин. Позиционные операторы. «Мат. сб.», 68 (110), № 3, 444—472 (1965).
3. В. В. Вагнер. Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. 1. Саратов, 1965, 3—178.
4. Л. М. Глушкин. Минимальные идеалы операторов. «Математические записки Уральского университета», 7, № 3 (1969), 56—60.
5. Л. М. Глушкин. О позиционных операторах. II. «Докл. АН СССР», 182 № 5, 1000—1003 (1968).
6. Л. М. Глушкин. Минимальные бидеалы оператора. «Изв. вузов. Математика», № 10 (77), 30—41 (1968).
7. Л. М. Глушкин. К теореме Сушкевича-Риса. I. «Вестн. Харьковского университета. Сер. механ.-мат.», 35 (1970).
8. Л. М. Глушкин. К теореме Сушкевича-Риса. II. «Вестн. Харьковского университета. Сер. механ.-мат.», 36.

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРЕБЕНЧАТОЙ СТРУКТУРЕ

Г. Н. Гестрин

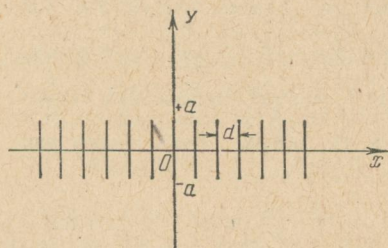
Введение

В статье проведено строгое изучение известной задачи о рассеянии плоской электромагнитной волны периодической решеткой, встречающейся в литературе под названием «ножевой». Близкие вопросы рассматривались в ряде работ физиков (Карльсон и Хейнс [1], Уайтхед [2], Хурд [3], Миттра [4], Авдеев и Воскресенский [5]). Метод настоящей работы сходен с применяемыми в [4] и [5]. Его формальные основания вместе с точной постановкой задачи изложены в § 1. В § 2 и 4 проведено изучение бесконечных систем линейных уравнений, которые являются основным средством исследования разрешимости задачи. В § 3 дается доказательство того, что волны, длинные по сравнению с характерными размерами структуры (периодом и шириной ленты), почти полностью отражаются. Всюду, кроме этого параграфа, волновое число k предполагается комплексным ($\text{Im } k > 0$), что позволяет легко использовать известные факты о единственности решения уравнения Гельмгольца.

Автор признателен В. А. Марченко за ряд полезных советов, способствовавших улучшению текста.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть на решетку, образованную бесконечно-тонкими идеально проводящими металлическими лентами $x = md$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $|y| < a$; $-\infty < z < +\infty$, сечение которой плоскостью XOY изображено на рисунке, набегают плоская электромагнитная волна



$$\begin{aligned} E_x^{(0)} &= 0; & E_y^{(0)} &= 0; & E_z^{(0)} &= e^{-iky}, \\ H_x^{(0)} &= e^{-iky}; & H_y^{(0)} &= 0; & H_z^{(0)} &= 0 \\ (k &= k_1 + ik_2; & k_1 &> 0; & k_2 &> 0). \end{aligned}$$

Требуется определить рассеянное поле. Так как естественно предположить, что рассеянное решеткой поле имеет компоненты E_z , H_x , H_y , то достаточно определить его электрическую компоненту $E_z^{(1)}(x, y)$, которая должна быть подчинена следующим требованиям:

$$1) \Delta E_z^{(1)}(x, y) + k^2 E_z^{(1)}(x, y) = 0; \quad (1.1)$$

во всей плоскости XOY , исключая отрезки $x = md$ ($m = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$), $|y| < a$;

$$2) E_z^{(1)}(x + d, y) = E_z^{(1)}(x, y); \quad E_z^{(1)}(-x, y) = E_z^{(1)}(x, y); \quad (1.2)$$

$$3) E_z^{(1)}(0, y) = -e^{-iky}, \quad |y| < a; \quad (1.3)$$

4) $E_z^{(1)}(x, y)$ и $\frac{\partial E_z^{(1)}(x, y)}{\partial y}$ стремятся к нулю при $y \rightarrow \pm \infty$ равномерно относительно x ;

5) для каждой конечной области D плоскости XOY

$$\iint_D (|E_z^{(1)}|^2 + |\text{grad } E_z^{(1)}|^2) dx dy < +\infty. \quad (1.4)$$

Условия 3), 4) и 5) выражают равенство нулю электрической составляющей полного поля на металле, наличие поглощения и конечность энергии поля в каждой конечной области пространства соответственно. Единственность решения задачи 1) — 5) обосновывается с помощью хорошо известного метода (см., например, [6] стр. 479—483), легко приспособляемого к данному случаю. Будет показано, что всем перечисленным требованиям можно удовлетворить, подбирая функцию $E_z^{(1)}(x, y)$ в виде

$$E_z^{(1)}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \varphi(\eta) d\eta \cos \frac{2m\pi x}{d}, \quad (1.5)$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0; \\ 2 & \text{при } m > 0; \end{cases} \quad S_m = \begin{cases} -ik & \text{при } m = 0^*; \\ \sqrt{-k^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}} & \text{при } m > 0, \end{cases}$$

а $\varphi(\eta)$ — неизвестная функция из пространства L_p ($p > 1$) непрерывная во внутренних точках. Из оценки

$$\left| \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \varphi(\eta) d\eta \right| < \frac{1}{q^q} \|\varphi\|_{L_p} \frac{1}{(\text{Re } s_m)^q} \quad (1.6)$$

($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) вытекает равномерная сходимость ряда (1.5) во всей полосе $0 \leq x \leq d$. Кроме того, нетрудно видеть, что $E_z^{(1)}(x, y)$ экспоненциально убывает при $y \rightarrow \pm \infty$. Пусть D — любая область, лежащая в полосе $0 < x < d$, и $V(x, y)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция, равная нулю в некоторой граничной полосе этой области. Умножая (1.5) на $\Delta V + k^2 V$ и интегрируя почленно, получим

$$\begin{aligned} & \iint_D E_z^{(1)}(x, y) \{\Delta V + k^2 V\} dx dy = \\ & = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \iint_D V(x, y) \varphi_1(y) \cos \frac{2m\pi x}{d} dx dy^{**}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

* Ветвь функции $\sqrt{Z^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}}$ определяется разрезами, идущими от точек $\pm \frac{2m\pi i}{d}$

$k \pm i\infty$ соответственно и значением в нуле, равным $\frac{2m\pi}{d}$. При этом для любого Z

$\text{Re} \sqrt{Z^2 + \frac{4m^2\pi^2}{d^2}} > 0$.

** $\varphi_1(y) = \varphi(y)$ при $|y| < a$ и равна нулю при $|y| > a$.

Правая часть (1.7) представляет собой сумму косинус-коэффициентов Фурье гладкой функции, равной нулю около концов интервала $(0, d)$. Отсюда следует равенство нулю левой части (1.7) и, таким образом, $E_z^{(1)}(x, y)$ является обобщенным, а значит и обычным решением уравнения Гельмгольца во всей плоскости за исключением упомянутых отрезков. Условие 3) приводит к интегральному уравнению для определения функции $\varphi(\eta)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \varphi(\eta) d\eta = -e^{-iky}, \quad |y| < a. \quad (1.8)$$

Разрешимость последнего в классе L_p , где p можно считать любым числом, меньшим двух, доказывается в следующих параграфах, где будет дана проверка и пункта 5).

Заметив, что оператор в левой части уравнения (1.8) преобразует четную функцию в четную, а нечетную — в нечетную, возьмем вместо (1.8) пару уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m|y-\eta|} \begin{cases} \varphi_1(\eta) \\ \varphi_2(\eta) \end{cases} d\eta = \begin{cases} \cos ky \\ \sin ky, \end{cases} \quad (1.9)$$

через решения которой φ_1 и φ_2 функция φ выразится очевидной формулой $\varphi(\eta) = -\varphi_1(\eta) + i\varphi_2(\eta)$. Ищем решения (1.9) в виде

$$\varphi_{1,2}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} (e^{q_n \eta} \pm e^{-q_n \eta}) \quad (1.10)$$

с неизвестными коэффициентами A_n, B_n , определив показатели q_n формулой

$$q_n = \sqrt{-k^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{d^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)^*. \quad (1.11)$$

Формальная подстановка (1.10) в (1.9) с учетом разложения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\delta_m}{-k^2 - q_n^2 + \frac{4m^2 \pi^2}{d^2}} = \frac{d \operatorname{cth} \frac{d}{2} \sqrt{-k^2 - q_n^2}}{\sqrt{-k^2 - q_n^2}}$$

приводит к равенствам

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} e^{-s_m a} (e^{s_m y} \pm e^{-s_m y}) \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n - s_m} \mp \frac{e^{-q_n a}}{q_n + s_m} \right) = \begin{cases} \cos ky \\ \sin ky, \end{cases} \quad (1.12)$$

которым можно удовлетворить, если A_n и B_n выбрать как решения систем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \left(\frac{e^{q_n c}}{q_n - s_m} \pm \frac{e^{-q_n a}}{q_n + s_m} \right) = \begin{cases} -\frac{ik}{2} e^{-ika} \delta_{m0} \\ \frac{k}{2} e^{-ika} \delta_{m0}. \end{cases} \quad (1.13)$$

* Ветвь функции $\sqrt{z^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{d^2}}$ определяется так же, как и для $\sqrt{z^2 + \frac{4n^2 \pi^2}{d^2}}$, $\operatorname{Re} \sqrt{z^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{d^2}} > 0$.

Системы (1.13) будут объектом дальнейшего исследования. Подстановка $\varphi(\eta)$ в (1.5) дает следующие выражения для полного поля $E_z(x, y)$:

$$E_z(x, y) = \begin{cases} \frac{d^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n(e^{q_n y} + e^{-q_n y}) - iB_n(e^{q_n y} - e^{-q_n y})\} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{d}}{2n+1}; \\ |y| < a; \quad 0 \leq x \leq d; \\ e^{-iky} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} e^{-s_m(y-a)} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) + \right. \\ \left. + i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{q_n - s_m} \right) \right) \cos \frac{2m\pi x}{d}; \quad y > a; \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} e^{s_m(y+a)} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) - \right. \\ \left. - i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{q_n - s_m} \right) \right) \cos \frac{2m\pi x}{d}; \quad y < -a. \end{cases} \quad (1.14)$$

Полагая

$$A_n = e^{-q_n a} C_n, \quad B_n = e^{-q_n a} D_n, \quad (1.15)$$

перепишем уравнения (1.13) так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \end{Bmatrix}}{s_m - q_n} = \mp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2q_n a} \begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \end{Bmatrix}}{s_m + q_n} + \delta_{m0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ik}{2} e^{-ika} \\ -\frac{k}{2} e^{-ika} \end{array} \right\}. \quad (1.16)$$

Системы (1.16) неудобны как для нахождения из них C_n и D_n , так и для исследования. Мы заменим их сейчас другими, более подходящими для этих целей. Введем следующие функции комплексного аргумента w :

$$R_1(w) = e^{H(w)} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{q_j} \right) e^{\frac{w}{q_j}}; \quad R_2(w) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{s_j} \right) e^{\frac{w}{s_j}}, \quad (1.17)$$

где

$$H(w) = w \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s_j} - \frac{1}{q_j} \right).$$

Рассмотрим системы уравнений

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \end{Bmatrix} &= \pm \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \cdot \frac{e^{-2q_r a}}{q_n + q_r} \begin{Bmatrix} C_r \\ D_r \end{Bmatrix} + \\ &+ \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{R_1(s_0)}{R_2'(s_0)} \cdot \frac{1}{q_n - s_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ik}{2} e^{-ikn} \\ -\frac{k}{2} e^{-ikn} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Связь между (1.18) и (1.16) основывается на двух предположениях. Во-первых, допустим, что функции

$$\frac{R_2(w)}{R_1(w)(s_m - w)(w + q_r)} \quad \text{и} \quad \frac{R_2(w)}{R_1(w)(w - s_0)(s_m - w)}$$

имеют вычеты на бесконечности, равные нулю, во-вторых, системы (1.18) имеют решения, достаточно хорошо убывающие с ростом номера r . При этих предположениях из (1.18) следует

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{C_n\}}{s_m - q_n} &= \pm \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_r)} \cdot \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \cdot \frac{1}{(s_m - q_n)(q_n + q_r)} \right) e^{-2q_r a} \{C_r\} + \\ &+ \frac{R_1(s_0)}{R_2'(s_0)} \left\{ -\frac{k}{2} e^{-ika} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{1}{(q_n - s_0)(s_m - q_n)} = \\ &= \mp \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_2(-q_r)}{R_1(-q_r)} \cdot \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \cdot \frac{e^{-2q_r a}}{s_m + q_r} \{C_r\} + \left\{ \frac{ik}{2} e^{-ika} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{2} e^{-ika} \right\} \delta_{m0}, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.16). Убывание решений C_r , D_r должно обеспечить перестановку суммирования в последних рядах. В следующем параграфе мы будем пользоваться первым из указанных предположений, отнеся его обоснование на конец работы. Положив

$$C_n = \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{R_1(s_0)}{R_2'(s_0)} \cdot \frac{ike^{-ika}}{2} X_n; \quad D_n = -\frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{R_1(s_0)}{R_2'(s_0)} \cdot \frac{ke^{-ika}}{2} Y_n, \quad (1.19)$$

приходим к окончательным системам для X_n и Y_n :

$$\begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \end{Bmatrix} = \pm \sum_{r=0}^{\infty} \frac{Q_r(k) e^{-2q_r a}}{q_n + q_r} \begin{Bmatrix} X_r \\ Y_r \end{Bmatrix} + \frac{1}{q_n - s_0}, \quad (1.20)$$

где

$$Q_r(k) = \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \cdot \frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)}. \quad (1.21)$$

§ 2. Исследование системы уравнений (1.20)

Пользуясь разложениями

$$\begin{aligned} \cos \frac{d}{2} \sqrt{k^2 + \omega^2} &= \cos \frac{kd}{2} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{q_j^2} \right); \\ \sin \frac{d}{2} \sqrt{k^2 + \omega^2} &= \frac{k \sin \frac{kd}{2}}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{s_j^2} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

нетрудно получить формулы

$$\frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)} = \frac{(-1)^{r+1} 2\pi (2r+1) \cos \frac{kd}{2}}{d^2 q_r} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q_r}{s_j} \right) \left(1 + \frac{q_r}{q_j} \right); \quad (2.2)$$

$$Q_r(k) = -\frac{k \sin kd}{dq_r} \left\{ \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q_r}{s_j} \right) \left(1 + \frac{q_r}{q_j} \right) \right\}^2. \quad (2.3)$$

Нам понадобятся оценки этих двух величин при $r \rightarrow \infty$. С этой целью рассмотрим произведение

$$J_r = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} \quad (2.4)$$

и предположим сначала, что $k > 0$ ($k \neq \frac{m\pi}{d}$; $m = 1, 2, \dots$). Тогда

$$J_r = \prod_{i < \frac{kd}{2\pi}} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} \cdot \prod_{\frac{kd}{2\pi} < j < r} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} \cdot \prod_{j=r+1}^{\infty} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} \quad (2.5)$$

Первое произведение здесь при $r \rightarrow \infty$ имеет предел $C_1(k) = \prod_{i < \frac{kd}{2\pi}} \frac{s_j}{q_j}$. Мно-

жители третьего произведения не превосходят единицы, так как при $j > \frac{kd}{2\pi}$ $s_j < q_j$. Чтобы оценить среднее произведение, возьмем функцию

$$g(k) = \frac{\sqrt{a_2^2 - k^2} + \sqrt{b^2 - k^2}}{\sqrt{a_1^2 - k^2} + \sqrt{b^2 - k^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 - k^2}}{\sqrt{a_2^2 - k^2}} \\ \left(a_1 = \frac{2j\pi}{d}; \quad a_2 = \frac{(2j+1)\pi}{d}; \quad b = \frac{(2r+1)\pi}{d} \right).$$

Заметив, что

$$g'(k) = \frac{k \sqrt{a_2^2 - k^2} + \sqrt{b^2 - k^2}}{(a_2^2 - k^2)(\sqrt{a_1^2 - k^2} + \sqrt{b^2 - k^2})} \times \\ \times \left(-\frac{\sqrt{a_1^2 - k^2}}{\sqrt{b^2 - k^2}} - \frac{\sqrt{a_2^2 - k^2}}{\sqrt{a_1^2 - k^2}} + \frac{\sqrt{a_2^2 - k^2}}{\sqrt{b^2 - k^2}} + \frac{\sqrt{a_1^2 - k^2}}{\sqrt{a_2^2 - k^2}} \right) < 0,$$

имеем

$$\prod_{\substack{\frac{kd}{2\pi} < j < r \\ i < \frac{kd}{2\pi}}} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} < \prod_{\frac{kd}{2\pi} < j < r} \frac{2(j+r)+2}{2j+2r+1} \cdot \frac{2j}{2j+1} = \frac{4^{2r} (r!)^2 (2r)! (2r+2)!}{2((r+1)!)^2 (4r+1)!} \times \\ \times \prod_{j=1}^{\frac{kd}{2\pi}} \frac{2(j+r)+1}{2(j+r)+2} \cdot \frac{2j+1}{2j} \cong \frac{\sqrt{2\pi r(r+1)}}{\sqrt{4r+1}} \cdot \frac{1}{r+1} \prod_{j=1}^{\frac{kd}{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2j} \right). \quad (2.6)$$

Если kd мало, то вместо произведения в правой части (2.6) следует взять единицу. В общем случае, обозначая его через $C_2(k)$, можно написать при больших r

$$|J_r| < \frac{\text{const } C_1(k) C_2(k)}{\sqrt{r}}. \quad (2.7)$$

Пусть теперь k комплексное число. Представляя J_r в виде

$$J_r = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{q_r}{q_j'}}{1 + \frac{q_r}{s_j'}} \cdot \prod_{j=0}^{\infty} \frac{q_j + q_r}{q_j' + q_r'} \cdot \frac{s_j' + q_r'}{s_j + q_r} \cdot \frac{q_j'}{q_j} \cdot \frac{s_j}{s_j'}, \quad (2.8)$$

где q' и s' получаются из соответствующих q и s отбрасыванием мнимой части k , мы видим, что к первому произведению применима оценка (2.7) с заменой k на $\operatorname{Re} k$, а второе можно оценить постоянной, не зависящей от r . Так как далее

$$\frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)} = -\frac{2\pi^2 (2r+1)^2 \cos \frac{kd}{2}}{q_r k d^3 \sin \frac{kd}{2}} J_r \text{ и } Q_r(k) = \frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)} J_r, \quad (2.9)$$

то

$$\left| \frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)} \right| < C(k) \sqrt{r} \text{ и } |Q_r(k)| < C(k). \quad (2.10)$$

Возвращаясь к системам (1.20) и полагая

$$a_{nr} = \frac{Q_r(k) e^{-2q_r a}}{q_n + q_r}, \quad (2.11)$$

видим, что

$$\begin{aligned} \sum_r |a_{rr}| &< \frac{1}{2} \sum_r \frac{|Q_r(k)| e^{-2\operatorname{Re} q_r a}}{|q_r|} < \frac{1}{2} C(k) \cdot \sum_r \frac{e^{-2\operatorname{Re} q_r a}}{|q_r|} < +\infty; \quad (2.12) \\ \sum_r \sum_n |a_{nr}|^2 &< \sum_r \sum_n \frac{|Q_r(k)|^2 e^{-4\operatorname{Re} q_r a}}{|q_n + q_r|^2} < \\ &< C^2(k) \sum_r \sum_n \frac{e^{-4\operatorname{Re} q_r a}}{(\operatorname{Re} q_n + \operatorname{Re} q_r)^2} < C^2(k) \sum_r e^{-4\operatorname{Re} q_r a} \sum_n \frac{1}{(\operatorname{Re} q_n)^2} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При достаточно больших a неравенство (2.13), очевидно, уточняется

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nr}|^2 < 1 \quad (2.14)$$

и означает, что норма матрицы $\|a_{nr}\|$ как оператора в пространстве l_2 меньше единицы. В этом случае, учитывая, что столбец из свободных членов в (1.20) также принадлежит l_2 , мы можем заключить, что каждая из систем (1.20) имеет в l_2 единственное решение, находимое методом последовательных приближений*. Оценки (2.12) и (2.13), как известно (см., например, [7]) обеспечивают существование бесконечных определителей $|\delta_{nr} - a_{nr}|$ и $|\delta_{nr} + a_{nr}|$ и, если они не равны нулю, то у каждой из систем (1.20) есть единственное решение в l_2 , определяемое с помощью формул Крамера. Одной из основных целей настоящего параграфа и является установление того, что указанные определители отличны от нуля. Детали следующего ниже доказательства будут использованы и в других местах. Наше утверждение будет доказано, если мы убедимся в том, что всякое

* Здесь мы пользовались тем, что $\operatorname{Re} q_n > 0$.

решение однородных систем, соответствующих (1.20) и принадлежащее l_2 , может быть лишь тривиальным. Пусть

$$X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}, \dots\} \in l_2$$

и

$$X_n^{(0)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{Q_r(k) e^{-2q_r a}}{q_n + q_r} X_r^{(0)}. \quad (2.15)$$

Отсюда

$$q_n X_n^{(0)} \leq C(k) \cdot \frac{|q_n|}{\operatorname{Re} q_n} \sqrt{\sum_{r=0}^{\infty} e^{-4\operatorname{Re} q_r a}} \sqrt{\sum_{r=0}^{\infty} |X_r^{(0)}|^2} \leq C \|X^{(0)}\|_{l_2}, \quad (2.16)$$

и

$$|X_n^{(0)}| < \frac{C}{\operatorname{Re} q_n}. \quad (2.17)$$

Задав теперь величины

$$C_n^{(0)} = \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{R_1(S_0)}{R_2'(S_0)} \frac{ik e^{-ika}}{2} X_n^{(0)} \text{ и } A_n^{(0)} = e^{-q_n a} C_n^{(0)},$$

построим функцию

$$\varphi_1^{(0)}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} (e^{q_n \eta} + e^{-q_n \eta}). \quad (2.18)$$

Покажем, что $\varphi_1^{(0)}(\eta) \in L_p(-a, +a)$ с любым $p < 2$. Действительно, так как из (2.10) и (2.17) видно, что

$$|A_n^{(0)}| < C e^{-\operatorname{Re} q_n a} n^{-1/2}, \quad (2.19)$$

(C зависит от k), то, начиная с некоторого номера N_0 , для $\eta > 0$

$$|\psi_{N_0}(\eta)| = \sum_{N_0}^{\infty} |A_n^{(0)} (e^{q_n \eta} + e^{-q_n \eta})| < 2C \sum_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-\operatorname{Re} q_n (a-\eta)}}{\sqrt{n}}. \quad (2.20)$$

Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$, $\beta' > \frac{2}{1-2\varepsilon}$ и $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$. Применяя к (2.20) неравенство Гельдера, получим

$$|\psi_{N_0}(\eta)|^\beta < 2^\beta C^\beta \sum_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \operatorname{Re} q_n (a-\eta)}}{n^{\beta \varepsilon}} \left\{ \sum_{N_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta'(\frac{1}{2}-\varepsilon)}} \right\}^{\frac{\beta}{\beta'}}, \quad (2.21)$$

и далее, при любом $b < a$

$$\int_0^b |\psi_{N_0}(\eta)|^\beta d\eta < \operatorname{const} \sum_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-\beta \operatorname{Re} q_n a} (e^{\beta \operatorname{Re} q_n b} - 1)}{\beta \operatorname{Re} q_n n^{\beta \varepsilon}} < \operatorname{const} \sum_{N_0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} q_n n^{\beta \varepsilon}}, \quad (2.22)$$

откуда в силу произвольности b и ε и независимости правой части (2.22) от b приходим к требуемому выводу. Наконец, определим функцию $u_0(x, y)$:

$$u_0(x, y) = \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{s_m=-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m |y-\eta|} \varphi_1^{(0)}(\eta) d\eta \cos \frac{2m\pi x}{d}. \quad (2.23)$$

На основании замечания, сделанного в начале § 1, эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 \quad (2.24)$$

во всей плоскости xoy за исключением отрезков $x = md$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $|y| < a$. Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m - q_n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \cdot \frac{1}{q_n + q_r} \cdot \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \cdot e^{-2q_r a} C_r^{(0)} \quad (2.25)$$

и покажем, что суммирования в нем перестановочны. В самом деле, если r_0 и n_0 достаточно большие числа, то

$$\begin{aligned} \sum_{r=r_0}^{\infty} \left| \frac{R_1(-q_r)}{R_2(-q_r)} \right| e^{-2\operatorname{Re} q_r a} |C_r^{(0)}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{R_2(q_n)}{R_1'(q_n)} \right| \frac{1}{|q_n + q_r|} \cdot \frac{1}{|s_m - q_n|} < \\ < \operatorname{const} \sum_{r=r_0}^{\infty} \frac{e^{-2\operatorname{Re} q_r a}}{r} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty, \end{aligned} \quad (2.26)$$

что и означает возможность перестановки сумм в (2.25). В конце предыдущего параграфа было принято предположение о том, что вычеты функций $R_2(w) [R_1(w) (w - s_0) (s_m - w)]^{-1}$ и $R_2(w) [R_1(w) (s_m - w) (w + q_r)]^{-1}$ в бесконечности равны нулю. Как видно, в соединении с только что доказанной перестановочностью рядов в (2.25) следствием системы уравнений (2.15) будут соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} \left\{ \frac{e^{q_n a}}{q_n - s_m} - \frac{e^{-q_n a}}{q_n + s_m} \right\} = 0. \quad (2.27)$$

Если подставить (2.18) в (2.23), то, учитывая значения величин q_n (1.11), формулу (2.27) и оценку для $A_n^{(0)}$, получим при $x = 0$:

$$u_0(0, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} \int_{-a}^{+a} e^{-s_m |y - \eta|} \varphi_1^{(0)}(\eta) d\eta = 0; \quad |y| < a \quad (2.28)$$

и при любом x — формулы, подобные (1.14):

$$u_0(x, y) = \begin{cases} \frac{d^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} (e^{q_n y} + e^{-q_n y}) \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi x}{d}}{2n+1}; & |y| < a \quad 0 \leq x \leq d. \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} e^{-s_m(y-a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) \right) \cos \frac{2m\pi x}{d}; & y > a. \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{s_m} e^{s_m(y+a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) \right) \cos \frac{2m\pi x}{d}; & y < -a. \end{cases} \quad (2.29)$$

Две последние формулы показывают, что $u_0(x, y)$ экспоненциально убывает при $y \rightarrow \pm \infty$.

Обозначим через $G_{\varepsilon, \tau}$ прямоугольник, образованный прямыми $x = \pm \tau$, $y = \pm (a + \varepsilon)$. Из (2.29) непосредственно вытекают оценки

$$\begin{aligned} \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \left| \frac{\partial u_0(\tau, y)}{\partial x} \right| dy &< \text{const} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}; \\ \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} \left| \frac{\partial u_0(\tau, y)}{\partial x} \right| dy &< \text{const} \sum_{m_0}^{\infty} \frac{m}{|s_m|^2} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{|q_n + s_m|} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right); \\ \int_{-\tau}^{+\tau} \left| \frac{\partial u_0(x, a + \varepsilon)}{\partial y} \right| dx &< C\tau + C\tau \sum_{m_0}^{\infty} e^{-\varepsilon \text{Re } s_m} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{|q_n + s_m|} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где m_0 и n_0 можно считать большими числами, а постоянные — зависящими только от этих чисел. Так как при $m > m_0$

$$n > n_0 \quad |s_m - q_n| > \text{const} \left| m - n - \frac{1}{2} \right|,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{m_0}^{\infty} \frac{m}{|s_m|^2} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{|q_n + s_m|} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right) &< \\ &< \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\sqrt{m} (\ln m + \text{const})}{m - \frac{1}{2}} + \frac{\text{const}}{\sqrt{m}} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть $\tau < \varepsilon^2$. Тогда $m \sqrt{\tau} < m\varepsilon < e^{\varepsilon m}$ и

$$\begin{aligned} \tau \sum_{m_0}^{\infty} e^{-\varepsilon \text{Re } s_m} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{|q_n + s_m|} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right) &< \\ &< \text{const} \sqrt{\tau} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{|q_n + s_m|} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right). \end{aligned}$$

Оценки (2.30) не зависят от ε и δ . Отсюда можем заключить, что интеграл от модуля нормальной производной функции $u_0(x, y)$ по контуру прямоугольника $G_{\varepsilon, \tau}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ и $\tau < \varepsilon^2$ остается ограниченным.

Берем теперь прямоугольник D_R со сторонами $x = \pm \frac{d}{2}$, $y = \pm R$ и функцию $v_0(x, y, t) = \text{Re}(e^{-ickt} u_0(x, y))$. Полагая

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ |\text{grad } v_0|^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 \right\}$$

и интегрируя тождество

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \quad (2.31)$$

по области $D_R \setminus G_{\varepsilon, \tau}$, заметим, что интегралы по сторонам $x = \pm \frac{d}{2}$ равны нулю, а по сторонам $y = \pm R$ стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Устремим к нулю ε и τ . Тогда $v_0(x, y, t)$ на контуре прямоугольника $G_{\varepsilon, \tau}$ будет равномерно стремиться к нулю, и по только что сделанному замечанию

интеграл $\int \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial n} ds$ по границе $G_{s, \tau}$ обратится в нуль. В итоге мы получаем

$$\iint_{|x| < \frac{d}{2}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx dy = 0. \quad (2.32)$$

Остается только использовать упоминавшееся в начале предыдущего параграфа рассуждение, применяемое при доказательстве теоремы единственности ([6], стр. 479–483). Таким образом, оказывается $u_0(x, y) \equiv 0$. Обращаясь снова к формулам (2.29), видим, что все коэффициенты при косинусах должны быть равны нулю:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Вычтем из (2.33) (2.27)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} \frac{e^{q_n a} + e^{-q_n a}}{q_n^2 - s_m^2} = 0. \quad (2.34)$$

Обозначим $A_n^{(0)} (e^{q_n a} + e^{-q_n a})$ через $Z_n^{(0)}$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n^{(0)}}{(2n+1)^2 - (2m)^2} = 0 \text{ и } |Z_n^{(0)}| < \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}. \quad (2.35)$$

Умножая (2.35) на $(-1)^m \frac{\sin mx}{m}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) и суммируя по всем m от 0 до ∞ , получим

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m Z_n^{(0)}}{(2n+1)^2 - (2m)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin mx}{m((2n+1)^2 - (2m)^2)}. \quad (2.36)$$

Интегрируя разложение

$$(-1)^n \frac{\pi}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = \frac{1}{2n+1} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(n + \frac{1}{2} \right)}{(2n+1)^2 - 4m^2} \cos mx \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

от 0 до x , найдем

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin mx}{m((2n+1)^2 - 4m^2)} = \frac{-x}{2n+1} + (-1)^n \frac{\pi}{2} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{n + \frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Подставим (2.37) в (2.36)

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_n^{(0)} \left\{ \frac{x}{2(2n+1)^2} + (-1)^n \frac{\pi}{8} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2} \right\} = 0. \quad (2.38)$$

Наконец, умножив обе части (2.38) на $\sin \left(r + \frac{1}{2} \right) x$ и проинтегрировав от $-\pi$ до $+\pi$, найдем

* Перестановка суммирований здесь легко оправдывается.

$$-Z_r^{(0)} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n^{(0)}}{(2n+1)^2}, \quad (2.39)$$

т. е. $Z_r^{(0)}$ постоянно по r , что может быть согласовано с (2.35) только если $Z_r^{(0)} = 0$. Вместе с тем $A_n^{(0)} = 0$ для всех n и $X_n^{(0)} = 0$. Следовательно, всякое решение системы (2.15), принадлежащее пространству l_2 , может быть только тривиальным. Это и доказывает тот факт, что определитель $|\delta_{nr} - a_{nr}| \neq 0$. Таким образом, неоднородные системы (1.20) разрешимы в пространстве l_2 . Для их решений X_n и Y_n , очевидно, в точности будут верны оценки (2.17), а для соответствующих A_n и B_n — такая же оценка, как и для $A_n^{(0)}$. Суммируемость функций $\varphi_{1,2}(\eta)$, построенных по формулам (1.10), доказывается так же, как и для $\varphi_1^{(0)}(\eta)$, построенной в (2.18). Вслед за этим мы можем построить поле $E_z^{(1)}(x, y)$ по формуле (1.5) и оправдать представление полного поля $E_z(x, y)$ в виде (1.14). Все требования 1)–4) § 1 окажутся выполненными. Проверка условия 5) теперь производится следующим образом. Пусть D — любой прямоугольник, содержащий внутри себя отрезок $x=0$, $|y| < a$, а $G_{\varepsilon, \tau}$ — прямоугольник, с которым мы имели дело выше, и $D_{\varepsilon, \tau} = D \setminus G_{\varepsilon, \tau}$. По формуле Грина

$$\begin{aligned} \iint_D |\text{grad } E_z|^2 dx dy &= \lim_{\varepsilon, \tau \rightarrow 0} \iint_{D_{\varepsilon, \tau}} |\text{grad } E_z|^2 dx dy = \\ &= k^2 \iint_D |E_z|^2 dx dy + \lim_{\varepsilon, \tau \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon, \tau}} E_z \cdot \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} E_z \cdot \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ограниченность первого и третьего слагаемых в (2.40) очевидна.

$$\left| \int_{\Gamma_{\varepsilon, \tau}} E_z \cdot \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n} ds \right| < \max_{\Gamma_{\varepsilon, \tau}} |E_z| \int_{\Gamma_{\varepsilon, \tau}} \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right| ds, \quad (2.41)$$

и так как $\max_{\Gamma_{\varepsilon, \tau}} |E_z| \rightarrow 0$ при $\varepsilon, \tau \rightarrow 0$, а ограниченность интеграла в правой части (2.41) можно доказать, как в (2.30), то конечность энергии поля в D установлена.

§ 3. Случай длинноволнового поля

Здесь предполагается $k > 0$, $kd \ll 1$, $ka \ll 1$, $a > d$. Покажем, что при этих условиях имеет место почти полное отражение падающей волны решеткой. Так как при достаточно малых kd $\sqrt{-k^2 + \frac{(2r+1)^2 \pi^2}{d^2}} > \beta \times \frac{2r+1}{d} \pi$, где β можно считать близким к единице и не зависящим от r , k и d , то

$$\begin{aligned} |Q_r(k)| &= \frac{k \sin kd (2r+1)^2 \pi^2}{k^2 d^3 q_r \sin^2 \frac{kd}{2}} \cdot \frac{\left| 1 + \frac{q_r}{q_0} \right|^2}{\left| 1 + \frac{q_r}{s_0} \right|^2} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1 + \frac{q_r}{q_j}}{1 + \frac{q_r}{s_j}} \right|^{2*} < \\ &< \frac{2k (2r+1)^2 \pi^2 k^2}{k^2 d^3 \beta \frac{(2r+1) \pi}{d} \cdot \sin \frac{kd}{2}} \cdot \frac{4q_r^2}{q_r^2} \cdot \frac{1}{q_0^2} < \frac{8(2r+1)}{d \beta^3}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

* Здесь мы воспользовались тем, что при малых kd и $j > 0$ $s_j < q_j$.

Оценка (3.1) при больших r груба по сравнению с (2.10), но сейчас нам важно иметь в ней более точную зависимость от k и d . Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n^2} = d^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-k^2 d^2 + (2n+1)^2 \pi^2} < \frac{d^2}{\beta^2 \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{d^2}{8\beta^2}; \quad (3.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Q_r(k)|^2 e^{-4q_r a} \leq \frac{64}{d^2 \beta^6} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^2 e^{-\frac{4a\pi}{d}(2r+1)} < \frac{128}{d^2 \beta^6} e^{-\frac{4a\pi}{d}}. \quad (3.3)$$

Обозначив через A матрицу $\|a_{nr}\|$, на основании (3.2) и (3.3) можем написать

$$\|A\|_{l_2} \leq \sqrt{\sum_{r=0}^{\infty} |Q_r(k)|^2 e^{-4q_r a}} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n^2}} < \frac{4}{\beta^4} e^{-\frac{2a\pi}{d}}, \quad (3.4)$$

откуда видно, что, если $kd \ll 1$ и $a > d$, то

$$\|A\|_{l_2} < \frac{1}{8} \quad (3.5)$$

и из (1.20) следует

$$\begin{aligned} \|X\|_{l_2}^2 &\leq \|A\|_{l_2} \|X\|_{l_2}^2 + \|b\|_{l_2} \|X\|_{l_2} < \frac{5}{8} \|X\|_{l_2}^2 + \frac{1}{2} \|b\|_{l_2}^2, \\ \|X\|_{l_2}^2 &\leq \frac{4}{3} \|b\|_{l_2}^2 \leq \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{d^2}{6\beta^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

И наконец, оценивая компоненты вектора X через его норму, как в (2.16), с учетом неравенства (3.3), найдем

$$|X_n| < \begin{cases} \frac{Cd}{n} & \text{при } n > 0, \\ Cd & \text{при } n = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где постоянная C не зависит от n , k , d , и a . Далее,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_2(q_r)}{R_1'(q_r)} \right| &< \frac{2\pi^2 (2r+1)^2}{q_r k d^3 \sin \frac{kd}{2}} \cdot \frac{|q_0 + q_r|}{|s_0 + q_r|} \cdot \frac{|s_0|}{|q_0|} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{1 + \frac{q_r}{q_i}}{1 + \frac{q_r}{s_i}} < \\ &< \frac{2\pi^2 (2r+1)^2}{q_r k d^3 \sin \frac{kd}{2}} \cdot \frac{2q_r k}{q_r \beta \frac{\pi}{d}} \cdot \text{const} \frac{1}{\sqrt{r}} < \frac{\text{const} \sqrt{r}}{k d^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

причем константа в (3.8) не зависит от k и d . Здесь мы воспользовались формулой (2.6):

$$\left| \frac{R_2(q_0)}{R_1'(q_0)} \right| < \frac{4\pi^2 k}{q_0 k d^3 \sin \frac{kd}{2}} \cdot \frac{1}{|s_0 + q_0|} < \frac{c}{k d^2}; \quad (3.9)$$

$$\left| \frac{R_1(s_0)}{R_2'(s_0)} \right| = |s_0| \left| 1 - \frac{s_0}{q_0} \right| \prod_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1 - \frac{s_0}{q_i}}{1 - \frac{s_0}{s_i}} \right| \leq |s_0| \left(1 + \frac{kd}{\beta \pi} \right) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{kd}{8\pi \beta j^2} \right) < Ck. \quad (3.10)$$

* Через b обозначен вектор с компонентами $\frac{1}{q_n - s_0}$.

Из (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) окончательно следует

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n \\ B_n \end{array} \right\} < \begin{cases} \text{const} \frac{e^{-q_n a}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{k}{d} & \text{при } n \neq 0, \\ \text{const} \frac{k}{d} & \text{при } n = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Возьмем теперь формулу (1.14) при $y > a$ и рассмотрим входящую в нее сумму

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-s_m(y-a)}}{s_m} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} + \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) + i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_m} - \frac{e^{-q_n a}}{s_m - q_n} \right) \right) \times \\ &\quad \times \cos \frac{2m\pi x}{d}; \\ |\sum_1| &< \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{s_m} \left\{ \frac{k}{d} \left(\frac{1}{q_0 + s_m} + \frac{1}{|s_m - q_0|} \right) + \frac{k}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{q_n + s_m} + \frac{1}{|s_m - q_n|} \right) \right\} < \\ &< Ckd \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m(2m-1)} + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n+m} + \frac{1}{|m-n-\frac{1}{2}|} \right) \right\} = O(kd). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, при $y > a$ (1.14) дает

$$\begin{aligned} E_z(x, y) &= e^{-iky} + \frac{1}{s_0} e^{-s_0(y-a)} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_0} + \frac{e^{-q_n a}}{s_0 - q_n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n + s_0} - \frac{e^{-q_n a}}{s_0 - q_n} \right) \right) + O(kd) = e^{-iky} - \\ &- \frac{1}{ik} e^{ik(y-a)} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n - s_0} - \frac{e^{-q_n a}}{q_n + s_0} \right) + i B_n \left(\frac{e^{q_n a}}{q_n - s_0} + \frac{e^{-q_n a}}{q_n + s_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{e^{q_n a} + e^{-q_n a}}{q_n^2 - s_0^2} - 2s_0 i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(e^{q_n a} - e^{-q_n a})^*}{q_n^2 - s_0^2} \right) + O(kd) = \\ &= e^{-iky} - \frac{1}{ik} e^{ik(y-a)} \left(\frac{ik}{2} e^{-ika} + \frac{ik}{2} e^{-ika} \right) + \\ &+ 2e^{ik(y-a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(e^{q_n a} + e^{-q_n a})}{q_n^2 - s_0^2} \right) - i \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(e^{q_n a} - e^{-q_n a})}{q_n^2 - s_0^2} + \\ &+ O(kd) = e^{-iky} - e^{iky} + O(kd) + O(ka). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Формула (3.13) содержит основной результат настоящего параграфа: длинные волны почти полностью отражаются решеткой. Отметим, что этот результат будет верен не только при $a > d$, но и при менее ограничительном неравенстве.

* Здесь мы воспользовались формулами (1.13).

§ 4. Обоснование перехода от системы (1.20) к (1.13)

В конце § 1 мы видели, что переход от (1.20) к (1.13) основывался на предположении о том, что вычеты функций $\frac{R_2(w)}{R_1(w)(s_m - w)(w + q_r)}$ и $\frac{R_2(w)}{R_1(w)(w - s_0)(s_m - w)}$ в бесконечности равны нулю. В этом параграфе указанное предположение будет оправдано. Введем обозначение

$$s'_j = \frac{2j\pi}{d}; \quad q_j = \frac{(2j+1)\pi}{d}, \quad (4.1)$$

Очевидно, что при достаточно больших j

$$|s_j - s'_j| < \frac{\alpha}{j} \quad \text{и} \quad |q_j - q'_j| < \frac{\alpha}{j}, \quad (4.2)$$

где α — константа, зависящая только от k .

Пусть неравенства (4.2) имеют место при $j \geq m_0$. Тогда

$$\frac{R_2(w)}{R_1(w)} = \prod_{j=0}^{m_0-1} \frac{s_j - w}{q_j - w} \cdot \frac{q_j}{s_j} \cdot \prod_{j=m_0}^{\infty} \frac{s'_j - w}{q'_j - w} \cdot \frac{s_j - w}{s'_j - w} \cdot \frac{q'_j - w}{q_j - w} \cdot \frac{q'_j}{s'_j} \cdot \frac{q_j}{s_j} \cdot \frac{s'_j}{q'_j}. \quad (4.3)$$

Первое произведение в (4.3) при $w \rightarrow \infty$ равномерно стремится к конечному пределу

$$\prod_{m_0}^{\infty} \frac{|q_j|}{|s_j|} \frac{|s'_j|}{|q'_j|} = \prod_{m_0}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{q_j - q'_j}{q'_j} \right) \left(1 + \frac{s'_j - s_j}{s_j} \right) \right| \leq \prod_{m_0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{j|q'_j|} \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{\alpha}{j|s_j|} \right) < \text{const.}$$

Возьмем окружность $|w| = \left(2N + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{d}$, где N большое целое число. Для всех точек s'_j (как находящихся внутри, так и вне этого круга), очевидно, ближайшей на окружности будет точка $w = \left(2N + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{d}$, так что $|s'_j - w| > \left| s_j - \left(2N + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{d} \right|$. Далее,

$$|q_j - w| \geq |q'_j - w| - |q_j - q'_j| > \left| q'_j - \left(2N + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{d} \right| - \\ - \frac{\alpha}{j} > \frac{2}{3} \left| q'_j - \left(2N + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{d} \right|.$$

Поэтому

$$\ln \left| \prod_{m_0}^{\infty} \frac{s_j - w}{s'_j - w} \right| \leq \ln \prod_{m_0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\frac{\pi}{d} j \left| 2j - 2N - \frac{3}{2} \right|} \right) \leq \frac{\alpha d}{2\pi} \sum_{m_0}^{\infty} \frac{1}{j \left| j - N - \frac{3}{4} \right|} < \frac{C \ln N}{N}$$

и аналогично

$$\ln \left| \prod_{m_0}^{\infty} \frac{q'_j - w}{q_j - w} \right| < \frac{C \ln N}{N}.$$

Из этих замечаний следует, что на окружности $|\omega| = \left(2N + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{d}$ справедлива оценка

$$\left| \frac{R_2(\omega)}{R_1(\omega)} \right| < \text{const} \prod_{m_0}^{\infty} \frac{|s'_j - \omega|}{|q'_j - \omega|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|}. \quad (4.4)$$

Рассматривая далее квадрат модуля отдельного множителя в этом произведении как функцию от $u = \text{Re } \omega$, мы легко убедимся в том, что она убывает с ростом u , когда точки s'_j и q'_j лежат вне окружности, и, следовательно, все эти множители достигают своего наибольшего значения при $u = -R$ ($R = \left(2N + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{d}$). Поэтому

$$\begin{aligned} \prod_{N+1}^{\infty} \frac{|s'_j - \omega|}{|q'_j - \omega|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|} &\leq \prod_{N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{R}{s'_j}\right) \left(1 - \frac{R}{q'_j + R}\right) = \\ &= \prod_{N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\left(2N + \frac{3}{2}\right)}{2j \left(2j + 2N + \frac{5}{2}\right)}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Откуда

$$\ln \prod_{N+1}^{\infty} \frac{|s'_j - \omega|}{|q'_j - \omega|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|} < \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{j \left(j + N + \frac{5}{4}\right)} < \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \int_N^{\infty} \frac{dt}{t \left(t + N + \frac{5}{2}\right)} \rightarrow \ln \sqrt{2} \quad (4.6)$$

при $N \rightarrow \infty$;

$$\left| \frac{s'_N - \omega}{q'_N - \omega} \right| \cdot \frac{|q'_N|}{|s'_N|} < 2 \left| \frac{2N - \left(2N + \frac{3}{2}\right) e^{i\varphi}}{2N + 1 - \left(2N + \frac{3}{2}\right) e^{i\varphi}} \right| < 6. \quad (4.7)$$

Оценка (4.4) теперь упрощается еще больше:

$$\left| \frac{R_2(\omega)}{R_1(\omega)} \right| < \text{const} \prod_{m_0}^{N-1} \frac{|s'_j - \omega|}{|q'_j - \omega|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|}. \quad (4.8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \ln \prod_{m_0}^{N-1} \frac{|s'_j - \omega|}{|q'_j - \omega|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|} &= \frac{1}{2} \ln \prod_{m_0}^{N-1} \left(1 + \frac{q'_j - s'_j}{s'^2_j} \cdot \frac{q'_j (R^2 - us'_j) + s'_j (R^2 - uq'_j)}{q'^2_j - 2uq'_j + R^2}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{q'_j - s'_j}{s'^2_j} \cdot \frac{q'_j (R^2 - us'_j) + s'_j (R^2 - uq'_j)}{q'^2_j - 2uq'_j + R^2}. \end{aligned}$$

Полагая $u = R\alpha$, где $-1 \leq \alpha \leq +1$, и замечая, что

$$q'^2_j - 2uq'_j + R^2 = (R - \alpha q'_j)^2 + q'^2_j (1 - \alpha^2) \geq (R - \alpha q'_j)^2$$

и

$$R^2 - us'_j = R^2 - Ras'_j > 0, \quad R^2 - uq'_j = R^2 - Raq'_j > 0,$$

найдем, продолжая последнюю оценку,

$$\begin{aligned} \ln \prod_{m_0}^{N-1} \frac{|s'_j - w|}{|q'_j - w|} \cdot \frac{|q'_j|}{|s'_j|} &< \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{j + \frac{1}{2}}{j^2} \cdot \frac{\left(N - \alpha j + \frac{3 - \alpha}{4}\right)}{\left(N - \alpha j + \frac{3 - 2\alpha}{4}\right)^2} \leq \\ &\leq \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{j(N - |\alpha|j)} + \frac{N + \frac{3}{4}}{4} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{j^2(N - |\alpha|j)} + \\ &+ \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{j(N - |\alpha|j)^2} + \frac{N + \frac{3}{4}}{4} \cdot \sum_{m_0}^{N-1} \frac{2}{j^2(N - |\alpha|j)^2}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{N + \frac{3}{4}}{2} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{j(N - |\alpha|j)} &= \frac{N + \frac{3}{4}}{2N} |\alpha| \left\{ \frac{1}{|\alpha|} \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{j} + \sum_{m_0}^{N-1} \frac{1}{N - |\alpha|j} \right\} < \\ &< \frac{N + \frac{3}{4}}{2N} (\ln N + \text{const}) + \frac{N + \frac{3}{4}}{2N} \int_{m_0}^N \frac{dt}{\frac{N}{|\alpha|} - t} = \\ &= \frac{N + \frac{3}{4}}{2N} (\ln N + \text{const}) + \frac{N + \frac{3}{4}}{2N} \ln \frac{1 - \frac{|\alpha|(m_0 - 1)}{N}}{1 - |\alpha| + \frac{|\alpha|}{N}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Собирая (4.8), (4.9) и (4.10), получим окончательно

$$\left| \frac{R_2(w)}{R_1(w)} \right| < \text{const } N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \frac{1}{(1 - |\alpha|)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}, \quad (4.11)$$

где $|w| = \left(2N + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{d}$ и ε можно считать стремящимся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|w| = \left(2N + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{d}} \frac{R_2(w)}{R_1(w)} \frac{dw}{(s_m - w)(w + q_r)} \right| &< \frac{\text{const}}{N^2} N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \int \frac{|dw|}{(1 - |\alpha|)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \leq \\ &\leq \frac{\text{const } N^{\frac{3}{2} + \varepsilon}}{N^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - |\cos \theta|)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} = O\left(N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

что и доказывает наше утверждение. Одновременно завершается доказательство разрешимости задачи, сформулированной в § 1.

* Остальные суммы из (4.9) ограничены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carlson and Heins. The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates. "Quarterly of applied mathematics", 1947, 4, p. 313.
 2. E. A. N. Whitehead. The theory of parallel plate media for microwave lenses. "The Proceedings of the Institution of electrical engineers", v. 98. part III, № 52, p. 133—140, 1951.
 3. R. A Hurd. The propagation of an electromagnetic wave along an infinite corrugated surface. "Canadian Journal of Physics", December, 1954, № 12.
 4. Ray Mittra. The finite range Wiener-Hopf integral equation and a Boundary Value problem in a waveguide. "Ire transactions on antennas and propagation", December, 1959.
 5. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский. Излучение заряженной нити, движущейся равномерно вблизи гребенчатой структуры; общее решение. — «Радиотехника и электроника», т. XII, 3, М., 1967.
 6. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, М., 1962 г.
 7. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеоретиздат, М., 1949.
-