Ортогональний та унітарний оператори

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

1 Унітарний та ортогональний оператори.

Означення 1.1 *Лінійний оператор* $f : L \to L$ *в евклідовому (відповідно, унітарному) просторі називаєтся ортогональним, якщо він має обернений і обернений збігається із спряженим.*

Теорема 1.1 *Лінійний оператор* f *в евклідовому (відповідно, унітарному) просторі* L *є ортогональним (відповідно, унітарним) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* $x, y \in L$ *виконується рівність*

$$(f(x), f(y)) = (x, y). \tag{1}$$

Доведення. За визначенням спряженого оператора, для любого оператора f і для будь-яких векторів x, y виконується рівність

$$(f(x), f(y)) = (x, (f^* \cdot f)(y)). \tag{2}$$

Отже, коли оператор є ортогональним (відповідно, унітарним), тобто має обернений і $f^* = f^{-1}$, тоді із (2) випливає (1).

Якщо для будь-яких векторів виконується рівність (1), тоді для будь-яких векторів виконується рівність $(x, y) = (x, (f^* \cdot f)(y)$ і, відповідно, рівність $(x, y - (f^* \cdot f)(y) = 0$. Остання рівність повинна виконуватися і для вектора $x = y-(f^* \cdot f)(y)$. Таким чином,

$$(y-(f^*\cdot f)(y), y-(f^*\cdot f)(y)) = 0, \quad y-(f^*\cdot f)(y) = 0, \quad y = (f^*\cdot f)(y).$$

З останньої рівності випливає, що оператор f має обернений і цей обернений збігається із спряженим.

■

Наслідок 1.1 (із теореми (1.1)) *Обмеження ортогонального (відповідно, унітарного) оператора на інваріантний підпростір також є ортогональним (відповідно, унітарним) оператором.*

Доведення. Дійсно, якщо рівність (1) виконується для всіх векторів x, y лінійного простору, то вона виконується і для всіх векторів підпростору.

■

Теорема 1.2 (про властивість власних чисел ортогонального і унітар *Модуль власного числа ортогонального (відповідно, унітарного) оператора дорівнює 1.*

Доведення. Беремо ненульовий власний вектор a ортогонального чи унітарного оператора f і підраховуємо (a, a):

$$(a, a) = (f(a), f(a)) = (\lambda a, \lambda a) = |\lambda|^2(a, a).$$

Оскільки $(a, a) > 0$, то рівність $(a, a) = |\lambda|^2(a, a)$ можна скоротити на (a, a) і одержати $|\lambda|^2 = 1$.

■

Теорема 1.3 *Ортогональне доповнення до інваріантного підпростору ортогонального (відповідно, унітарного) оператора є інваріантним підпростором.*

Доведення. Нехай f ортогоналний чи унітарний оператор, U — його інваріантний підпростір і $V = U^{\perp}$ ортогональне доповнення до U. Потрібно довести, що для будь-якого $y \in V$ буде $f(y) \in V$, тобто для будь-якого $x \in U$ буде виконуватися рівність $(f(y), x) = 0$.

Дійсно, нехай $x \in U, \quad y \in V$. Тоді за наслідком 1.1 із теореми 1.1 буде $f^{-1}(x) \in U$ і

$$(f(y), x) = (y, f^{-1}(x)) = 0.$$

■

Теорема 1.4 (про властивість власних векторів ортогонального і уні
Власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогонального (відповідно, унітарного) оператора взаємно ортогональні.

Доведення. Нехай f ортогональний чи унітарний оператор, λ_1, λ_2 — два його різні власні числа і e_1, e_2 — два власні вектори, що відповідають цим власним числам, тобто

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1, \qquad f(e_2) = \lambda_2 e_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Тоді

$$(e_1, e_2) = (f(e_1), f(e_2)) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) = \lambda_1 \overline{\lambda_2} (e_1, e_2).$$

Припущення $(e_1, e_2) \neq 0$ дозволяє записати

$$\lambda_1 \overline{\lambda_2} = 1.$$

Звідси, враховуючи, що $\lambda_2 \overline{\lambda_2} = 1$, одержуємо суперечність: $\lambda_1 = \lambda_2$.

■

Теорема 1.5 (спектральна теорема для унітарних операторів)
Для унітарного оператора існує ортонормований базис, що складаєтьcя із власних векторів.

Доведення. Спочатку доводимо, що сума власних підпросторів є увесь простір. Дійсно, якби це було не так, то сума власних підпросторів як інваріантний підпростір мав би ненульове ортогональне доповнення, яке саме (згідно теореми 1.3) є інваріантним підпростором в якому є ненульовий власний вектор, що суперечить тому, що всі власні вектори знаходяться у сумі всіх власних підпросторів.

Далі вибираємо в кожному власному підпросторі ортонормований базис. Об'єднуємо ці базиси одержуємо базис всього простору. Вектори із одного власного підпростору ортогональні за вибором. А вектори із різних власних підпросторів ортогоналні за теоремою про властивість власних векторів унітарного оператора.

Таким чином, ми побудували ортонормований базис всього простору, що складається із власних векторів унітарного оператора.

■

Теорема 1.6 (спектральна теорема для ортогональних операторів) *Якщо f ортогональний оператор на евклідовому лінійному просторі L, то L можна представити у вигляд ортогональної суми одновимірних і двовимірних інваріантних підпросторів.*

Доведення.

Доведення проводимо методом від протилежого. Припустимо, що L не розкладається у ортогональну суму одновимірних і двовимірних інваріантних підпросторів. Тоді віділимо в L максимальну суму U одновимірних і двовимірних інваріантних підпросторів (жоден більший підпростір уже не розкладається в таку суму). Сума інваріантних підпросторів знову є інваріантним підпростором. Тому за теоремою 1.3 також ортогональне доповнення $U^{\perp}$ до U є інваріантним підпростором. Якщо $U^{\perp}$ має одновимірний чи двовимірний інваріантний підпростір

$V \subseteq U^{\perp}$, тоді $U + V \supset U$ є ортогональною сумою одновимірних і двовимірних інваріантних підпросторів, що суперечить допущенню про максимальність U. Отже $U^{\perp}$ не має ні одновимірних ні двовимірних інваріантних підпросторів.

Теорема буде доведена, коли ми переконаємося, що таке є неможливим, тобто

Лема 1.1 *Для кожного ортогонального оператора f на ненульовому проосторі L в L існує одновимірний або двовимірний інваріантний підпростір.*

Доведення. При доведенні лема використовується так званий “процес комплексифікації“.

В процесі коплексифікації за евклідовим лінійним просторм L і ортогональним оператором $f : L \to L$ будуються унітарний простір L_1 і унітарний оператор $f_1 : L_1 \to L_1$ наступним чином: $L_1 = L + iL = \{z = x + iy | x \in L, y \in L\}$,

$$z = x + iy \in L_1 \Rightarrow f_1(z) = f_1(x + iy) = f(x) + if(y).$$

Операції в L_1 вводяться природним чином, перевірка лінійності простору L_1 лінійного оператора f_1 не повинні викликати труднощів. Перевірими унітарність f_1.

Для $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) - i(x_1 y_2) + i(x_2 y_1) + (x_2 y_2) =$$

$$(f(x_1), f(x_2)) - i(f(x_1), f(y_2)) + i(f(x_2) f(y_1)) + (f(x_2), f(y_2)) = (f_1(x_1 + iy_1), f_1(x_2$$

Перевірка унітарності закінчена.

Унітарний оператор f_1 має власне число λ і власний вектор $c = a + ib \neq 0$ і $f_1(c) = f(a) + if(b) = \lambda(a + ib)$.

У випадку, коли λ — дійсне число, буде $f(a) = \lambda a, \quad f(b) = \lambda b$, тобто f має власний вектор і, відповідно, одновимірний інваріантний підпростір.

Розглянемо випадко, коли вектори a, b лінійно залежні (для визначеності, нехай $a = \alpha b, \alpha \in \mathbb{R}$.) Тоді вектор

$$c = a + ib = \alpha b + ib = (\alpha + i)b$$

є власним для f_1. Звідси випливає, що вектор b є власним для f_1, а звідси випливає, що вектор b є власним для f. Отже і в цьому випадку лінійний оператор f має ненульовий власний вектор і, відповідно, одновимірний інваріантний підпростір.

Лишилося розглянути випадок, коли λ не є дійсним числом — $\lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$, а вектори a, b лінійно незалежні. В цьому випадку

$$f_1(c) = (a + ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha).$$

Тому

$$f(a) = a\alpha - b\beta, \qquad f(b) = a\beta + b\alpha. \tag{3}$$

Рівності 3 доводять, що лінійна оболонка векторів a, b є двовимірним інваріантним підпростором оператора f в лінійному упросторі L.

■

Лема доведена, а з нею закінчене доведення і всієї теореми.

■

2 Унітарні та ортогональні матриці.

Якщо A — матриця, то позначимо через A^T транспоновану до A матрицю а через $\overline{A}$ — матрицю, що комплексно спряжена до A.

Означення 2.1 *Комплексна матриця A називається унітарною, якщо виконується рівність*

$$A \cdot \overline{A}^T = E, \quad \overline{A}^T = A^{-1}. \tag{4}$$

Означення 2.2 *Дійсна матриця A називається ортогональною, якщо виконується рівність*

$$A \cdot A^T = E, \quad A^T = A^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 2.1 *Кожна ортогональна матриця є матрицею деякого ортогонального оператора в ортонормованому базисі. Матриця кожного ортогонального оператора в ортонормованому базисі ортогональна. Кожна уніратна матриця є матрицею деякого унітарного оператора. Матриця кожного унітарного оператора в ортормованому базисі унітарна.*

Доведення. Оскільки і ортогональний і унітарний оператори зберігають скалярний добуток, то вони переводять вектори ортонормованого базису в вектори ортонороомованого базису.

Якщо A_f — матриця оператора f в деякому ортонормованому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то в дійсному просторі на перетині $i-$го рядка і $j-$го стовпчика матриці $A_f \cdot A_f^T$ стоїсть $(f(e_i), f(e_j))$. А в комплесному просторі на перетині $i-$го рядка і $j-$го стовпчика матриці $A_f \cdot \overline{A_f}^T$ стоїть $(f(e_i), f(e_j))$.

З цих фактів і випливає твердження теореми.

■

Теорема 2.2 *Дійсна (відповідно, комплексна) матриця C є ортогональною (відповідно, унітарною) тоді і тільки тоді, коли вана є матрицею переходу від ортонормованого базису до ортонормованого.*

Доведення. Твердження випливає з того, що кожну невироджену матрицю C можна розглядати як матрицю переходу від деякого ортонормованого базису $e_1, e_2, ldots, e_n$ до іншого базису $u_1, u_2, \ldots, u_n$. А в такому випадку матриця

$$D = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \ldots & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \ldots & (u_2, u_n) \\ \ldots & & & \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_2) & \ldots & (u_n, u_n) \end{pmatrix}$$

є добутком $D = C^T C$ в дійсному просторі і $D = C^T \overline{C}$ в комплексному просторі.

■

Із спектральних теорем для унітарного і для ортогонального операторів випливають відповідні теореми для ортогональних та унітарних матриць.

Теорема 2.3 *Для кожної унітарної матриці A існує унітарна матриця C така, що матриця $c^{-1}AC = B$ діагональна і по діагоналі стоять комплексні числа, модуль яких дорівнє 1.*

Доведення. За матрицю C можна взяти матрицю переходу до ортоормованого базису із власних векторів матриці A.

■

Теорема 2.4 *Для кожної ортогональної матриці A існує ортогональна матриця C така, що матриця $C^{-1}AC = B$ блочно діагональна*

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & C \end{pmatrix},$$

причому по диагоналі стоять або $+1$, або -1, або матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Доведення. Для доведення вважаємо ортогональну матрицю A матрицею ортогонального оператора f. Розкладаємо лінійний простір в ортогональну суму одновимірних та двовимірних інваріантних підпросторів. Будуємо новий базис, що утворюється об'єднанням ортонормованих базисів побудованих підпросторів. Тоді за матрицю C можна взяти матрицю переходу до цього нового ортонормованого базису.

■

3 Приклади.

Приклад 3.1 *Привести ортогональну матрицю*

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

до канонічного вигляду.

Задана матриця вже знаходиться в канонічному вигляді:

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \sin\varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}}.$$

Приклад 3.2 *Привести ортогональну матрицю*

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

до канонічного вигляду.

Шукаємо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} - \lambda & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Далі шукаємо ртонормований базис із власних векторів матриці A.

Коренями характеристичного многочлена є $+1$ та -1. Шукаємо власний вектор, (x, y), який відповідає власному чилу $+1$. Для цього розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} - 1 & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{13} & -3 \\ -3 & -2 - \sqrt{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{13})x - 3y = 0.$$

Базис простору розв'язків останнього рівняння — $(3, 2 - \sqrt{13})$. Нормуємо одержаний вектор і записуємо перший вектор із ортонормованого базису, що складається із власний веторів матриці A:

$$e_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{26 - 4\sqrt{13}}}, \frac{2 - \sqrt{13}}{\sqrt{26 - 4\sqrt{13}}} \right).$$

Другий базисний ветор повинен бути ортогональним до першого. Тому його можна записати без обчислень:

$$e_2 = \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{\sqrt{26 - 4\sqrt{13}}}, \frac{3}{\sqrt{26 - 4\sqrt{13}}} \right).$$

Записуємо координати одержаних векторів по стовпчиках

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}} & \frac{-2+\sqrt{13}}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}} \\ \frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}} & \frac{3}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}} \end{pmatrix}.$$

Канонічним виглядом матриці A буде матриця

$$B = C^{-1}AC = C^{T}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.3 *Привести ортогональну матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix}$$

до канонічного вигляду.

Шукаємо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Шукаємо власний вектор, (x, y), який відповідає власному чилу $+1$. Для цього розв'язуємо систему рівнянь

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \qquad (6)$$

При розв'язуванні рівняння (6) будемо користуватися наступними тригонометричними формулами

$$1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad 1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Виписані тригонометричні формули дозволяють переписати рівняня (6) наступним чином

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\varphi}{2} & 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & -2\cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \qquad (7)$$

З останньої однорідної системи двох рівнянь з двома невідомими (що записана у матричному вигляді) (7) одержуємо перший власний вектор

$$e_1 = \left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Другий власний вектор можна одержати як перпендикулярний до першого

$$e_2 = \left(-\sin\frac{\varphi}{2}, \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

Оскільки вектори e_1, e_2 уже нормовані, то їх нормувати не потрібно і можна зразу писати матрицю переходу до ортонормованого базису із власних векторів:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

Канонічним виглядом матриці A буде матриця

$$B = C^{-1}AC = C^{T}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Покажчик