Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра вищої математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему ***“Розробка дидактичних матеріалів за темою "Класичні нерівності та їх використання для розв'язання задач"”***

Виконав:
студент групи МС-41 4 курсу
Спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»,
освітньо-професійна програма
«Математика та інформатика»
Рогачов Едуард Олексійович

Науковий керівник: *кандидат фіз.-мат наук, доцент Лисиця В. Т.*

Рецензент: канд. пед. наук, викладач математики, викладач вищої категорії, вчитель-методист, заступник директора КЗ “Харківський університетський ліцей” Харківської міської ради *Іванова О.Ю.*

Харків
2025 рік

Анотація

“Розробка дидактичних матеріалів за темою "Класичні нерівності та їх використання для розв'язання задач"”

У роботі проведено аналіз сучасних тенденцій використання нерівностей для розв’язування задач у курсі шкільної математики. Розроблено методичні матеріали щодо розв’язання рівнянь способами, які не використовуються в класичній шкільній літературі, а саме розв’язування рівнянь за допомогою класичних нерівностей.

Автором надано обґрунтування важливості розуміння учнями альтернативних підходів до вирішення таких важливих задач математики як рівняння. Проведено порівняльний аналіз змісту навчального матеріалу з теми “Рівняння” в підручниках для закладів загальної середньої освіти. Запропоновано форми організації позакласної навчальної роботи з застосуванням класичних нерівностей. Представлено розробку навчальних матеріалів та завдань з поданої теми для вчителів та учнів закладів загальної середньої освіти. Детально розібрано ключові приклади і запропоновано задачі для самостійної роботи.

Ключові слова: *класичні нерівності, методи розв’язування рівнянь, рівняння, нова Українська школа, альтернативні методи, середнє квадратичне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє гармонічне*.

ABSTRACT

Development of didactic materials on the topic "Classical inequalities and their using for solving problems"

The paper analyzes modern trends in the use of inequalities to solve problems in the school mathematics course. Methodological materials have been developed on solving equations using methods not used in classical school literature, namely, solving equations using classical inequalities.

The author provides a justification for the importance of students' understanding of alternative approaches to solving such important mathematical problems as equations. A comparative analysis of the content of educational material on the topic of "Equations" in textbooks for secondary education institutions is carried out. Forms of organizing extracurricular educational work using classical inequalities are proposed. The development of educational materials and tasks on the given topic for teachers and students of secondary education institutions is presented. Key examples are analyzed in detail and tasks for independent work are proposed.

Keywords: *classical inequalities, methods for solving equations, equations, new Ukrainian school, alternative methods, square root mean, geometric mean, arithmetic mean, harmonic mean.*

ЗМІСТ

ВСТУП…………………………………………………………………….	5
РОЗДІЛ І. КЛАСИЧНІ СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ 1.1. Класичні середні величини та їх застосування…………………..	9
1.2. Співвідношення між класичними середніми величинами……….	17
РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ 2.1. Методичні рекомендації до розв’язування рівнянь і нерівностей...	22
2.2. Задачі на доведення…………………………………………………..	25
2.3. Задачі на розв’язування рівнянь………………………………..	35
ВИСНОВКИ……………………………………………………………..	39
ЛІТЕРАТУРА…………………………………………………………	40
ДОДАТКИ……………………………………………………………….	43

ВСТУП

У сучасному курсі шкільної математики рівняння і нерівності займають важливе місце як з точки зору теоретичної підготовки учнів, так і практичного застосування математичних знань. З самого початку вивчення алгебри школярі знайомляться з поняттям рівняння, його структурою, методами розв'язування, а також з можливістю використання рівнянь для опису реальних ситуацій.

Актуальність та ступінь дослідження проблеми. Актуальність теми дослідження полягає в тому, що рівняння — це універсальний математичний інструмент, який широко використовується не лише в межах шкільного курсу, але й у повсякденному житті, у природничих та суспільних науках. Систематичне й методично грамотне вивчення цієї теми є необхідною умовою для формування математичної компетентності, розвитку логічного мислення та підготовки учнів до складання ДПА, НМТ та ЗНО. Крім того, розв'язування рівнянь сприяє розвитку логічного й аналітичного мислення, формує в учнів уміння самостійно мислити, будувати математичні моделі та знаходити оптимальні шляхи розв'язання задач. Тому рівнянням у шкільних підручниках приділяється значна увага. Зазначимо, що одними з найбільш популярних підручників з математики в сучасних українських школах є підручники таких авторів, як Істер О.С., Єргіна О.В. [1-4], Нелін Є.П [5-6], Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. [7-10], Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Сердюк З.О., Коломієць О.М. [11-12], Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. [13-16].

Здійснивши аналіз вказаних підручників можна відмітити, що в підручнику [1-4] спостерігається поступове введення в тему "Рівняння" та великий акцент на текстових задачах, на наочності та логічному мисленні і його розвитку, робота [5-6] відрізняється більшим акцентом на систематичному вивченні, використанні функцій та відповідно графічних методах, у [7-10] здійснюється більш класичне подання матеріалу та чітку сформовану структуру з поступовим ускладненням завдань, в роботі [11-12] використовується багато інтерактивного подання та велика кількість завдань з різним рівнем складності, що створює більш індивідуальний підхід до кожного учня та спонукає до великої кількості самостійної роботи, особливістю підручника [13-16] можна назвати звернення до історичного контексту й велику кількість теоретичних обґрунтувань.

Як ми бачимо кожен підручник має свою унікальність, свою новизну та різні підходи до вирішення тих чи інших рівнянь, проте основні шляхи вирішення в основному співпадають в усіх підручниках. В цій роботі звертається увага на інший можливий метод розв’язування рівнянь – метод розв’язування рівнянь за допомогою класичних нерівностей математики. Цей метод відмінний від всіх класичних методів з перерахованих вище підручників та допоможе учням подивитися на розв’язання рівнянь з іншого боку. Він не зустрічається у шкільних підручниках, та й загалом знайти літературу пов'язану з ним важко й в інших відкритих джерелах. Саме тому ця розробка, може підвищити ефективність викладання рівнянь у школі, використовуватись, як на уроках, так і для позакласної роботи та бути гарним методичним матеріалом для вчителів та учнів.

Зазначимо, що вивченню проблеми використання нерівностей у шкільному курсі математики приділялась увага і раніше. Зокрема можна зазначити роботи [17,18]. Але у вказаних джерелах опір зроблено на власне нерівності. У цих роботах розглядаються методичні прийоми попередження помилок при вивченні теми «Нерівності» в основній школі. Також наведено визначення середніх величин і основні класичні нерівності, такі як нерівність Коші, а також приклади їх застосування. Можна вказати низку інших навчально методичних посібників, де розглядаються розв'язання рівнянь і нерівностей за допомогою еквівалентних перетворень [19-21].

У даній роботі наводяться способи розв’язування нестандартних рівнянь з використанням класичних нерівностей.

Об’єкт дослідження. Процес навчання математики в загальноосвітній школі.

Предмет дослідження. Методи розв'язування задач з теми «Рівняння» у шкільному курсі математики.

Мета дослідження: Проаналізувати місце та значення теми «Рівняння» у шкільному курсі математики, дослідити методи її викладання та запропонувати нові методи розв’язування задач для удосконалення навчального процесу з цього розділу.

Завдання дослідження:

1. Визначити теоретичні засади вивчення рівнянь у шкільному курсі математики.
2. Проаналізувати зміст та обсяг теми «Рівняння» на різних етапах навчання у загальноосвітніх школах.
3. Описати основні методи розв’язування рівнянь, що використовуються в школі.
4. Розглянути типові труднощі учнів у засвоєнні теми та шляхи їх подолання.
5. Запропонувати методичні рекомендації щодо підвищення ефективності викладання рівнянь.

Для досягнення мети та вирішення завдань застосовуються такі **методи дослідження:** теоретичні – аналіз науково-педагогічних та методичних джерел; аналіз, синтез, класифікація, систематизація, узагальнення методів дослідження і розв’язування рівнянь у шкільному курсі математики; емпіричні – спостереження, тестування, вивчення письмових робіт учнів.

Наукова новизна полягає у тому, що цей метод розв’язування рівнянь не викладається у шкільних підручниках, в яких більше уваги приділяється класичним перетворенням. Ця розробка допоможе розширити відомості про способи розв’язування рівнянь, збагатити методичну базу та покращити ефективність викладання даної теми у загальноосвітніх закладах.

Теоретична значення дослідження полягає в тому, що набули подальшого розвитку методи розв’язання рівнянь у шкільному курсі математики.

Практична значущість результатів дослідження. Рівняння застосовуються у фізиці, хімії, економіці, інформатиці та повсякденному житті. Наприклад, розв’язування задач на рух, роботу, відсотки чи фінанси часто потребує складання й розв’язання рівнянь. Опанування рівнянь є необхідною умовою для подальшого вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, систем рівнянь, математичного моделювання тощо. Рівняння стабільно присутні в тестах зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Високий рівень знань з цієї теми — запорука успішного складання іспиту.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, 2-х розділів, 5 підрозділів, висновків, списку використаних джерел (22 найменувань) та додатку. Загальний обсяг роботи становить 45 сторінок, із них − 30 сторінок основного текст.

Апробація результатів: Деякі результати роботи представлено у роботі [22]. За темою дипломної роботи було проведено заняття для учнів 9 класу КЗ “Нижньобишкинська ЗОШ І-ІІ ступенів”.

РОЗДІЛ 1. КЛАСИЧНІ СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ

У даному розділі розглянемо класичні середні величини, їх застосування та зв’язки між ними.

1.1. Класичні середні величини та їх застосування

Середнє арифметичне

Мабуть найбільш популярною середньою величиною є середнє арифметичне. Ідея обчислення середнього значення кількох величин з'явилася ще у стародавні часи. Перші згадки про середнє арифметичне з'явились приблизно за 2000 років до нашої ери. Стародавні дослідники помічали, що для того, щоб передбачити рух зірок чи планет, краще брати "усереднене" значення багатьох спостережень. Значно пізніше, XVI-XVII століттях в Європі середнє арифметичне стали систематично застосовувати в астрономії. Видатні астрономи Тихо Браге і Йоганн Кеплер, спостерігали за рухами небесних тіл і розуміли: вимірювання завжди трохи помиляються через неточність інструментів. Щоб зменшити вплив випадкових похибок, вони брали середнє арифметичне з багатьох вимірювань. Пізніше, у XVIII сторіччі, середнє арифметичне стало важливим елементом теорії ймовірностей і статистики (Лаплас, Гаусс), коли вивчали розподіл похибок у вимірюваннях.

Означення

Середнім арифметичним величин $x_1, x_2, ..., x_n$ називається величина

$A = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

Про перші використання середнього арифметичного ми вже згадали. Наведемо інші використання середнього арифметичного.

Статистика та соціологія

Підрахунок середньої зарплати в країні чи компанії, визначення середнього віку населення регіону, аналіз результатів опитувань (коли вивчаються кількісні характеристики).

Освіта

Вирахування середнього балу учня чи студента, аналіз результатів тестів і контрольних робіт тощо.

Економіка та фінанси

Середня вартість товарів на ринку, розрахунок середнього прибутку підприємства за певний період.

Наука та техніка

Обробка результатів експериментів (наприклад, середня температура під час вимірювань), усереднення даних у фізичних, біологічних і технічних дослідженнях.

Спорт

Підрахунок середньої кількості забитих голів на матч, аналіз середньої швидкості бігуна чи велосипедиста.

Медицина

Визначення середньої тривалості лікування, аналіз середнього віку пацієнтів із певною хворобою.

Треба зазначити, що не завжди використання середнього значення може доцільним та ефективним. Так, середнє значення температури тіла пацієнтів у лікарні не дасть розумних результатів.

Середнє геометричне

Середнє геометричне має таку ж давню історію, як і середнє арифметичне, але використовувалось воно в інших ситуаціях. У стародавній Греції, зокрема у піфагорійській школі, середнє геометричне використовувалось у дослідженнях пропорцій (особливо в архітектурі). Часто виникала потреба в обчисленні значення, яке було б пропорційним середнім між двома числами.

Означення

Середнім геометричним чисел $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ називається величина

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Ідея середнього геометричного згадувалась ще в **«Началах» Евкліда** (III сторіччя до нашої ери) як поняття середнього пропорційного між відрізками.

В елементарній геометрії: висота, опущена на гіпотенузу прямокутного трикутника – середнє геометричне проекцій катетів на гіпотенузу. Цей факт часто використовується для розв'язування геометричних задач.

У ***Середньовіччі*** середнє геометричне використовували в математиці, коли працювали із задачами на швидкість, ріст населення або в теорії пропорцій.

Середнє квадратичне

Означення

Середнім квадратичним чисел $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ називається величина

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

У різноманітних застосуваннях використовується ***середнє квадратичне відхилення (стандартне відхилення)***:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \underline{x}\right)^2}$$

N – кількість елементів у вибірці

x_i – елементи вибірки,

$\underline{x}$ – середнє арифметичне значення вибірки.

Стандартне відхилення є важливою мірою варіативності або розкиду даних. Воно визначає середнє значення відстані між окремими значеннями і середнім арифметичним у вибірці. Стандартне відхилення використовується для вимірювання, як широко або вузько розподілені значення навколо середнього.

Стандартне відхилення має широке застосування в різних сферах, де необхідно оцінити ступінь варіативності або розсіювання даних від середнього значення. Використовується у наступних галузях:

Фінанси та економіка

У фінансових ринках стандартне відхилення використовується для оцінки волатильності активів (акцій, облігацій та інших фінансових інструментів). Чим вище стандартне відхилення відносно середнього прибутку, тим більша ризикованість інвестиції, оскільки вказує на можливі великі коливання ціни активу. У фінансах часто використовують концепцію ***коефіцієнта варіації****,* який є відношенням стандартного відхилення до середнього значення.

Медицина

У медицині стандартне відхилення застосовується для аналізу розподілу параметрів здоров'я пацієнтів, таких як кров'яний тиск, рівень цукру в крові або температура тіла. Це дозволяє лікарям оцінити, чи є в пацієнта відхилення від нормальних показників, що може свідчити про проблеми зі здоров'ям. Наприклад, якщо значення тиску або температури в більшості пацієнтів сильно відрізняються від середнього, це може бути симптомом епідемії або спалаху захворювання.

Спорт

Стандартне відхилення в спорті використовується для аналізу результатів спортсменів і визначення їхньої стабільності. Наприклад, в бігу, плаванні чи інших видах спорту вимірювання стандартного відхилення дозволяє оцінити, наскільки стабільні або непередбачувані результати спортсмена. Низьке стандартне відхилення свідчить про стабільність результатів, тоді як велике відхилення може вказувати на коливання в рівні виконання.

Освіта

У навчанні стандартне відхилення застосовується для аналізу результатів тестів і екзаменів. Наприклад, якщо в класі деякі учні показують дуже високі бали, а інші — дуже низькі, то стандартне відхилення буде велике, що вказує на великий розкид оцінок. Це може сигналізувати про необхідність корекції методів викладання або додаткових занять для учнів з низькими результатами.

Наука та техніка

Вчені використовують стандартне відхилення для обробки експериментальних даних. Це дозволяє їм оцінити точність і надійність своїх вимірювань. Наприклад, при вимірюванні фізичних величин, таких як температура, швидкість або маса, стандартне відхилення вказує на ступінь розсіювання результатів від середнього значення, що є критичним для підтвердження точності наукових досліджень.

Маркетинг та соціологія

В маркетингових дослідженнях стандартне відхилення допомагає оцінити рівень задоволеності споживачів або вивчити поведінку покупців. Наприклад, якщо більшість споживачів надають позитивні відгуки про товар, але є кілька негативних, то стандартне відхилення може показати варіативність у думках. Це може допомогти компанії виявити слабкі місця в своїй стратегії або продукті.

Інженерія та виробництво

В інженерії стандартне відхилення використовується для оцінки якості виробів і процесів. Наприклад, у виробництві компонентів для машин або електронних пристроїв стандартне відхилення може вказувати на варіативність розмірів деталей. Якщо відхилення занадто велике, це може призвести до дефектів або несправностей в кінцевих продуктах. Тому стандартне відхилення є критичним інструментом для забезпечення високої якості.

Астрономія

Як і в історії, де астрономи, такі як Тихо Браге та Йоганн Кеплер, використовували середнє арифметичне для обчислення орбіт планет, так і стандартне відхилення застосовується для оцінки точності спостережень. Астрономи використовують стандартне відхилення для обробки спостережних даних, таких як вимірювання відстаней до зірок або вимірювання світла з різних джерел, щоб оцінити, наскільки надійні ці вимірювання .

Середнє гармонічне

Середнє гармонічне пов'язане з поняттям гармонічної четвірки точок, яке широко використовується у проективній геометрії.

Означення

Чотири точки A, B, C, D, що лежать на одній прямій, утворюють ***гармонічну четвірку*** (позначається як (A, B, C, D)), якщо

$$(A,\ B,\ C,\ D) = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = -\ 1,$$

де $\vec{AC}, \vec{CB}, \vec{AD}, \vec{DB}$ – направлені відрізки.

В геометрії доводиться, якщо точки A, B, C, D утворюють гармонічну четвірку, то

$$d = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)},$$

де d=AB, $d_1 = AC,\ d_2 = AD.$

Означення

Величина $d = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)}$ називається ***середнім гармонійним*** величин d_1 і d_2. Очевидно, що цю величину можна записати як: $d = \frac{2}{\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)}$.

Це означення поширюється на n чисел $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$.

Означення

Величина $H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$ називається ***середнім гармонійним*** величин $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$.

Середнє гармонічне є особливим типом середнього, яке застосовується, коли потрібно обчислити середнє значення величин, що є оберненими або мають інверсний характер. З математичної точки зору, середнє гармонічне може бути інтерпретовано через геометричний зміст як середнє величин, зворотні яких використовуються для обчислення цього середнього.

Геометрична інтерпретація:

Якщо уявити величини $x_1, x_2..., \ x_n$ як відрізки або довжини, то середнє гармонічне можна інтерпретувати як певний тип "впливу" цих відрізків, де їх зворотні значення мають більший вплив на результат, ніж самі величини.

Фінанси та економіка

Середнє гармонічне часто застосовується для обчислення середнього темпу росту, наприклад, при обчисленні середньорічного доходу або середнього обсягу продажів за кілька років. Воно дозволяє правильно обробляти показники, де важливе врахування великих варіацій у величинах, як, наприклад, ціни на акції або валові доходи.

Фізика та техніка

У фізиці середнє гармонічне використовується для розрахунку середніх швидкостей або часу, коли важливий час, що витрачається на різні етапи. Наприклад, якщо обчислюється середня швидкість об'єкта, що рухається різними швидкостями на різних ділянках, то середнє гармонічне дозволяє отримати точніший результат.

Медицина

Середнє гармонічне застосовується для аналізу медичних даних, наприклад, для обчислення середнього тиску в судинах або середньої дозування ліків, коли результат залежить від обернених значень параметрів (наприклад, час між прийомами ліків).

Екологія

Середнє гармонічне використовується для розрахунку середніх значень у екологічних дослідженнях, зокрема, для оцінки середніх рівнів забруднення в певному регіоні. Це дозволяє зберігати коректний результат, враховуючи нерівномірний розподіл забруднення.

Транспорт

Середнє гармонічне використовується для розрахунку середньої швидкості об'єктів, що рухаються, особливо в ситуаціях, коли важливо враховувати час і відстань між різними точками руху. Наприклад, для обчислення середньої швидкості по кількох ділянках з різними швидкостями.

Спорт

У спортивних змаганнях середнє гармонічне може використовуватись для визначення середньої ефективності спортсменів у різних дисциплінах, де час на окремих етапах або результат кожного спортсмена сильно варіюються.

1.2. Співвідношення між класичними середніми величинами

У даному підрозділі виведемо співвідношення між класичними середніми величинами: середнім арифметичним A, середнім геометричним G, середнім квадратичним Q, середнім гармонійним H. Ці величини пов'язані нерівностями:

$$H \leq G \leq A \leq Q \tag{1}$$

Ці нерівності називаються нерівностями середніх, і вони завжди виконуються для будь-яких двох додатних чисел.

Будемо також використовувати ще одну нерівність, яка часто зустрічається при розв'язуванні задач:

$a + \frac{1}{a} \geq 2$, якщо $a>0$ і $a + \frac{1}{a} \leq -2$, якщо $a<0$. (2)

При цьому рівність $a + \frac{1}{a} = 2$ досягається тільки при a=1, а $a + \frac{1}{a} = - 2$ тільки при a= -1.

Доведемо ці нерівності.

Нерівність $S_h \leq S_g$ - нерівність між середнім гармонійним та середнім геометричним:

$S_h = \frac{2ab}{a+b}$, $S_g = \sqrt{ab}$,

Потрібно довести:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \tag{3}$$

оскільки $a, b > 0$, можемо помножити обидві сторони на $a + b > 0$ (нерівність зберігається):

$$2ab \leq \sqrt{ab} \cdot (a + b)$$

Щоб спростити, розділимо обидві сторони на $\sqrt{ab} > 0$:

$$\frac{2ab}{\sqrt{ab}} \leq a + b \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b$$

Піднесемо обидві сторони до квадрата (оскільки обидві сторони додатні, нерівність зберігається):

$$\left(2\sqrt{ab}\right)^2 \le (a + b)^2 \Rightarrow 4ab \le (a + b)^2$$

Розкриємо праву частину:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Тоді:

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

Перенесемо всі члени в одну сторону:

$$0 \le a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Оскільки $(a - b)^2 \ge 0$, нерівність виконується, причому рівність досягається, коли $(a - b)^2 = 0$, тобто $a = b$. Отже:

$S_h \le S_g$, з рівністю при $a = b$.

що доводиться перетворенням $4ab \le (a + b)^2$, яке еквівалентно $0 \le (a - b)^2$.

Нерівність між середнім геометричним та середнім арифметичним:

$$Sg = \sqrt{ab}, \quad Sa = \frac{(a + b)}{2}$$

Потрібно довести:

$$\sqrt{ab} \le \frac{(a + b)}{2} \qquad (4)$$

Підносимо обидві сторони до квадрата (оскільки обидві сторони додатні):

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 \le \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \Rightarrow ab \le \frac{(a + b)^2}{4}$$

Помножимо обидві сторони на 4:

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

Перенесемо всі члени в одну сторону:

$$0 \le a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Оскільки $(a - b)^2 \ge 0$, нерівність виконується, з рівністю при $a = b$. Отже:

$S_g \le S_a$, з рівністю при $a = b$.

Доведемо нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним:

$$S_a = \frac{a+b}{2},\ S_g = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Потрібно довести:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{5}$$

Підносимо обидві сторони до квадрата:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Ліва частина:

$$\frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b}{4}$$

Отже, нерівність має вигляд:

$$\frac{a^2+2ab+b}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Помножимо обидві сторони на 4:

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$2(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Перенесемо всі члени в одну сторону:

$$2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \geq 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Оскільки $(a - b)^2 \geq 0$, нерівність виконується, з рівністю при $a = b$. Отже: $S_a \leq S_g$, з рівністю при $a = b$.

Нерівність Коші-Буняковського:

Для будь-яких наборів чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

$((\Sigma\,(a_i^2))\,(\Sigma\,(b_i^2))) \geq (\Sigma\,(a_i b_i))^2$,

(6)

де $a_i, b_i \in R$, і рівність досягається, коли вектори $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $(b_1, b_2, ..., b_n)$ колінеарні, або один з них є нульовим. Доведення:

Розглянемо опорні нерівності для кожного і:

$\left(a_i - \lambda b_i\right)^2 \geq 0$, де λ — довільне дійсне число. Розкриємо квадрат:

$(a_i - \lambda b_i)^2 = a_i^2 - 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2 \geq 0$

Розглянемо суму цих нерівності для всіх i від 1 до n:

$$\Sigma\,(a_i^2 - 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2) \geq 0$$

Розкриваємо суму:

$$\Sigma\, a_i^2 - 2\lambda\, \Sigma\, a_i b_i + \lambda^2\, \Sigma\, b_i^2 \geq 0$$

Позначимо:

$$A = \Sigma\, a_i^2,\ B = \Sigma\, b_i^2,\ C = \Sigma\, a_i b_i$$

Тоді нерівність має вигляд:

$$A - 2\lambda C + \lambda^2 B \geq 0$$

Це квадратичний вираз відносно λ:

$$f(\lambda) = B\lambda^2 - 2C\lambda + A$$

Оскільки f(λ) ≥ 0 для всіх λ, квадратична функція або невід'ємна, або дорівнює нулю. Для цього дискримінант квадратного тричлена має бути не більшим за нуль:

$$\Delta = (-2C)^2 - 4 \cdot B \cdot A = C^2 - 4AB \leq 0$$

Спрощуємо:

$$4C^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow C^2 \leq AB$$

Отже:

$$\Sigma\left(a_i b_i\right)^2 \leq \Sigma\left(a_i^2\right)\Sigma\left(b_i^2\right)$$

Це і є нерівність Коші-Буняковського. Рівність досягається, коли $\Delta = 0$, тобто $C^2 = AB$, що відповідає колінеарності векторів $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$ і $(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)$, або коли A = 0 чи B = 0 (тобто один із векторів нульовий).

Зв'язок із середніми:

Нерівність Коші-Буняковського є узагальненням, яке лежить в основі нерівностей між середніми. Наприклад, для $n = 2$, підставивши $a_1 = a$, $a_2 = b$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, отримуємо:

$$(a^2\ +\ b^2)(1^2\ +\ 1^2) \geq (a \cdot 1\ +\ b \cdot 1)^2 \Rightarrow (a^2\ +\ b^2) \cdot 2 \geq (a\ +\ b)^2$$

що еквівалентно: $a^2\ -\ 2ab\ +\ b^2\ \geq 0$

а це підтверджує $S_g \geq S_a$.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Методичні рекомендації до розв'язування задач з використанням нерівностей

Як вже було зазначено, у шкільному курсі математики приділяється значна увага розв'язуванням рівнянь і нерівностей. Різноманіття видів рівнянь і нерівностей вимагає і різних підходів до їх розв'язання. Але є етапи, які необхідно виконувати для будь-яких задач. Перш за все треба:

1. Знайти область визначення виразів (область допустимих значень), які входять у рівняння або нерівності.
2. Визначити, до якого відомого типу рівнянь або нерівностей відноситься задача.
3. Провести аналіз методів, які можуть застосовуватись при розв'язуванні аналогічних задач.

Розглянемо рівняння, яке записано у вигляді

$$f(x)=g(x) \tag{7}$$

Одним з ефективних методів розв'язування таких рівнянь є наступний. Якщо якимось чином вдасться довести, що $f(x)\geq C$, а $g(x)\leq C$, де C одна і та ж стала величина, тоді розв'язують окремо рівняння:

$$f(x) = C \tag{8}$$

$$g(x) = C \tag{9}$$

Нехай $M = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ – множина розв'язків рівняння (8), $N = \{x'_1, x'_2, ..., x'_l\}$ – множина розв'язків рівняння (9). Тоді розв'язками рівняння (7) буде множина $M\cap N$. Якщо ця множина буде порожньою, то рівняння (8) розв'язків не має. Використовуючи класичні нерівності можна доводити або розв'язувати інші нерівності.

Почнемо з найпростіших прикладів, для розв'язування яких використовуються класичні нерівності.

Однією з найвідоміших класичних нерівностей є нерівність:
$a + \frac{1}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$, причому рівність досягається, коли a=1; $a + \frac{1}{a} \leq -2$, якщо $a < 0$, причому рівність досягається, коли a= – 1. Ця нерівність може ефективно використовуватись при розв'язуванні, доведенні, конструюванні рівнянь і нерівностей. У даній нерівності в якості a може бути цілий вираз. Розглянемо приклад:

Довести, що при будь-якому x виконується нерівність:

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq 2.$$

Зазначимо, що $x^2 + x + 1 > 0$ для будь-яких x. Якщо позначити $\sqrt{x^2 + x + 1} = a$, тоді задану нерівність можна записати у вигляді $\frac{a^2+1}{a} \geq 2$. Останню нерівність можна переписати у вигляді $a + \frac{1}{a} \geq 2$, що й доводить задану нерівність.

Цією ж класичною нерівністю можна скористатись і для розв'язування рівняння: $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 2$. Знову ж як і при доведення нерівності позначаємо $\sqrt{x^2 + x + 1} = a$. Тоді наше рівняння набуває вигляду $a + \frac{1}{a} = 2$. Рівність досягається тільки коли a=1. Отримуємо, що $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$, і тоді x=0 або x=1. Очевидно, що задане рівняння може бути розв'язане іншим шляхом, але при використанні класичної нерівності ми досягаємо результату найбільш коротким шляхом.

Наведемо приклад, коли можна скористатись нерівністю Коші.

Розв'язати рівняння:

$$\frac{\sqrt{x^2-x+4}+\sqrt{x^2+x+2}}{2} = \sqrt[4]{(x^2 - x + 4)(x^2 + x + 2)}.$$

Відомо, що $x^2 - x + 4 > 0$, $x^2 + x + 2 > 0$. Позначимо:

$a = \sqrt{x^2 - x + 4}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 2}$. Тепер наше рівняння може бути записано у вигляді: $\frac{a+b}{2} = \sqrt{a \cdot b}$. Згідно з нерівністю Коші це можливо тільки у випадку, коли $a = b$. Отже маємо: $\sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{x^2 + x + 2}$. Після піднесення до квадрату обох частин останнього рівняння і приведення подібних членів знаходимо: $x=1$.

2.2. Задачі на доведення

У даному підрозділі ми доведемо деякі нерівності, які зустрічаються при розв'язуванні задач. При доведенні будемо використовувати класичні нерівності.

Задача 1.

Довести нерівність:

$$(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})\geq 4, a > 0, b > 0. \quad (10)$$

Рівність досягається тільки при $a = b$.

Доведення.

Розкриємо дужки у лівій частині нерівності:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Вираз $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ - сума додатних взаємно обернених чисел.

Отже, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\geq 2$, причому рівність досягається, коли $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, тобто $a = b$. Нерівність доведено.

Задача 2.

Довести нерівність:

$\left(a_1 + a_2 + a_3\right)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3})\geq 9$ для $a_1, a_2, a_3 > 0$,

(11)

причому рівність досягається тільки при $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доведення.

Як і в задачі 1 розкриємо дужки:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) = 3 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + (\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2})$$

Кожен вираз в дужках праворуч є сумою додатних взаємно обернених чисел. Тоді:

$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2$; $\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \geq 2$, $\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \geq 2$, причому всі рівності досягаються при $a_1 = a_2 = a_3$.

Таким чином, $3 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}\right) \geq 9$.

Задача 3.

Довести нерівність:

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \qquad (12)$$

при $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, причому рівність досягається тільки при $a_1 = \ldots = a_n$

Доведення.

Доведемо нерівність методом індукції. Для $n = 1$ нерівність очевидна. Для $n = 2, n = 3$ нерівність доведено у задачах 1, 2.

Припустимо, що нерівність справедлива при $n = k - 1$:

$\left(a_1 + \ldots + a_{k-1}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}}\right) \geq (k - 1)^2$.

Розглянемо:

$$\left(a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k\right)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k}\right) =$$

$$=(\left(a_1 + \ldots + a_{k-1}\right) + a_k\Big)\left(\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}}\right) + \frac{1}{a_k}\right).$$

Для спрощення обчислень позначимо:

$$A = a_1 + \ldots + a_{k-1},\ B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_{k-1}},$$

тоді ліву частину нерівності запишемо як

$\left(A + a_k\right)\left(B + \frac{1}{a_k}\right) = AB + \frac{1}{a_k}A + a_k B + 1.$ За припущенням індукції: $AB \geq (k - 1)^2$

Розглянемо

$$\frac{1}{a_k}A + a_kB = \left(\frac{a_1}{a_k} + \frac{a_2}{a_k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) + \left(a_k\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{a_k}{a_{k-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_k} + \frac{a_k}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_k} + \frac{a_k}{a_2}\right) + \dots + \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k-1}}\right) \geq 2(k - 1).$$

Отже: $\left(a_1 + \dots + a_k\right)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k}\right) = AB + \frac{1}{a_k}A + a_kB + 1 \geq$

$\geq (k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 = (k - 1 + 1)^2 = k^2$, що й треба було довести.

Зауваження:

Зазначимо, що $a_1 + \dots + a_n = nA$, $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{H}$, де А - середнє арифметичне, Н - середнє гармонійне чисел $a_1, \dots, a_n$. Тоді задану нерівність можна записати як $n^2\frac{A}{H} \geq n^2$ звідки $A \geq H$, що є ще одним доведенням нерівності між середнім арифметичним і середнім гармонійним.

Задача 4.

Довести, що якщо

$a > 0,\ b > 0,$ то має місце нерівність $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ (13)

Розв'язання:

Нехай $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y$

Скористаємось нерівністю $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Тоді $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Помножимо обидві частини на $x + y \geq 0$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\cdot(x + y) \geq 2\cdot(x + y)$$

$$\frac{x^2}{y} + x + y + \frac{y^2}{x} \geq 2x + 2y$$

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$$

Або, повернувшись до заміни, маємо $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b},$ або $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a},$ що і необхідно було довести.

Задача 5.

Довести, що якщо $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

Доведення:

Якщо $x + y + z = 1$, то $\frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$

Але, відповідно до нерівності між середнім квадратичним та середнім арифметичним,

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$$

Тоді

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Або

$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, що і необхідно було довести.

Задача 6.

Довести, що якщо $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, то має місце нерівність

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2 \qquad (14)$$

Доведення:

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = a^2 + \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{a} + b^2 + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + \frac{c^3}{b} + c^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}\right) + \left(\frac{a^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + \left(\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b}\right)$$

Скористаємось нерівністю $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Тоді

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} = ab\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \geq ab \cdot 2 = 2ab$$

Аналогічно

$$\frac{a^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2ac;\ \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b} \geq 2bc$$

Звідки

$$a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}\right) + \left(\frac{a^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + \left(\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b}\right) \geq$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Або $\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2$, що і необхідно було довести.

Задача 7.

Довести, що якщо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 +\ldots + a_n^2 = 1$ і $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 +\ldots + b_n^2 = 1$, то мають місце нерівності $-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 +\ldots + a_nb_n \leq 1$. (15)

Доведення:

Скористаємось нерівністю Коші-Буняковського

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Оскільки $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 +\ldots + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ і

$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 +\ldots + b_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$, то

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 +\ldots + a_nb_n\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 1\cdot1 = 1$$

Позначимо $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 +\ldots + a_nb_n = s$.

Маємо

$s^2 \leq 1 \Rightarrow (s - 1)(s + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq s \leq 1$

або

$-1 \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n \le 1$, що і необхідно було довести.

Задача 8.

Довести що для будь-яких натуральних m та n має місце нерівність

$$\sqrt[n+m]{m^n \cdot n^m} \le \frac{m+n}{2}. \qquad (16)$$

Доведення.

$$m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ разів}} \qquad n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ разів}}$$

Розглянемо набір чисел, що містить числа m в кількості n штук та числа n в кількості m штук.

Тоді середнє арифметичне всіх цих чисел рівне

$$\frac{\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n \text{ разів}} + \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m \text{ разів}}}{n+m} = \frac{mn+nm}{n+m} = \frac{2nm}{n+m}$$

Тоді, відповідно до нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним,

$$\sqrt[n+m]{m^n \cdot n^m} \le \frac{2nm}{n+m}.$$

Розглянемо тепер вираз

$$\frac{2nm}{n+m} - \frac{m+n}{2} = \frac{4nm-(n+m)^2}{2(n+m)} = \frac{4nm-n^2-2mn-m^2}{2(n+m)} = \quad = \frac{-n^2+2mn-m^2}{2(n+m)} = \frac{-(n-m)^2}{2(n+m)}$$

Оскільки n,m – натуральні, то $\frac{-(n-m)^2}{2(n+m)} \le 0$. Але тоді

$$\frac{2nm}{n+m} - \frac{m+n}{2} \le 0 \Rightarrow \frac{2nm}{n+m} \le \frac{m+n}{2}$$

Звідки

$\sqrt[n+m]{m^n \cdot n^m} \le \frac{2nm}{n+m} \le \frac{m+n}{2}$, що і необхідно було довести.

Задача 9.

Довести, що добуток кількох додатних змінних множників, сума яких стала, має найбільше значення при рівності множників.

Доведення:

Нехай маємо числа x_1, x_2, ..., x_n.

Відповідно до нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним, маємо

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

За умовою сума всіх чисел є сталою

Нехай $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$.

Тоді $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{C}{n}$, або $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \leq \left(\frac{C}{n}\right)^n$.

Таким чином, бачимо, що добуток множників не перевищує деякого числа $\left(\frac{C}{n}\right)^n$. Причому, поклавши $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{C}{n}$, будемо мати

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \frac{C}{n} \cdot \frac{C}{n} \cdot ... \cdot \frac{C}{n} = \left(\frac{C}{n}\right)^n.$$

Тобто при рівності множників добуток набуде максимально можливого значення, що і потрібно було довести.

Доведено.

Ця задача має практичне застосування:

Нехай у нас є огорожа фіксованої довжини *2l.* Якими мають бути розміри прямокутної ділянки, щоб площа була максимальною?

Для розв'язання цієї задачі скористаємось задачею 9.

Нехай розміри прямокутної ділянки a і b. Тоді $(a+b) = l$.

Площа ділянки. $S = ab$. Максимальне значення добутку, тобто площа ділянки, буде при $a = b = \frac{l}{2}$.

Задача 10.

Довести, що сума m додатних змінних, добуток яких сталий, має найменше значення при рівності змінних.

Доведення:

Нехай маємо числа $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$.

Відповідно до нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним, маємо

$$\frac{x_1+x_2+...+x_m}{m} \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m}$$

За умовою добуток всіх чисел є сталим

Нехай $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m = C$. Тоді $\frac{x_1+x_2+...+x_m}{m} \geq \sqrt[m]{C}$, або

$x_1 + x_2 + ... + x_m \geq m\sqrt[m]{C}$. Таким чином, сума не менша, ніж число $m\sqrt[m]{C}$.

Поклавши $x_1 = x_2 = ... = x_m = \sqrt[m]{C}$ будемо мати

$x_1 + x_2 + ... + x_m = \underbrace{\sqrt[m]{C} + \sqrt[m]{C} + ... + \sqrt[m]{C}}_{m \text{ разів}} = m\sqrt[m]{C}$.

Тобто при рівності змінних між собою сума досягає найменшого можливого значення, що і необхідно було довести.

Ця задача, як і попередня, має практичне застосування.

Нехай нам треба обгородити прямокутну ділянку заданої площі S. Якими повинні бути розміри ділянки, щоб огорожа мала найменший периметр?

Розв’язання.

Нехай розміри ділянки a і b. Периметри ділянки буде 2(a+b). Оскільки $S=ab$ є стала величина, то згідно задачі 10 сума (a+b) буде мінімальною, коли $a = b$, тобто коли ділянка буде квадратною.

Задача 11.

Довести, що якщо m і n – раціональні додатні числа, x і y додатні, то має місце нерівність $x^m y^n \le \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$. Знайти найменше значення $x + y$, якщо$x^m y^n = c$.

Доведення:

Оскільки m і n – раціональні додатні числа, то можемо покласти $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$, де p, q, r, s – натуральні.

Нехай t – НСК(q,s). Тоді

$$m = \frac{p\cdot\frac{t}{q}}{t},\ n = \frac{r\cdot\frac{t}{s}}{t},$$

Покладемо

$M = p\cdot\frac{t}{q}$, $N = r\cdot\frac{t}{s}$. Оскільки t кратне q і s, то M,N – натуральні.

Тоді $m + n = \frac{M+N}{t}$

Розглянемо M чисел $a = \frac{x}{M}$ та N чисел $b = \frac{y}{N}$.

Тоді їх середнє арифметичне дорівнює $\frac{Ma+Nb}{M+N} = \frac{x+y}{M+N}$.

Середнє геометричне дорівнює $\sqrt[M+N]{a^M b^N} = \sqrt[M+N]{\left(\frac{x}{M}\right)^M \left(\frac{y}{N}\right)^N}$

Відповідно до нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним, будемо мати

$$\frac{x+y}{M+N} \ge \sqrt[M+N]{\left(\frac{x}{M}\right)^M \left(\frac{y}{N}\right)^N}$$

Підносимо обидві частини нерівності до степеня $M + N$:

$$\left(\frac{x+y}{M+N}\right)^{M+N} \geq \left(\frac{x}{M}\right)^{M}\left(\frac{y}{N}\right)^{N}$$

Або

$$\left(\frac{x+y}{M+N}\right)^{M+N} M^{M} \cdot N^{N} \geq x^{M} y^{N}$$

Повернувшись до заміни, будемо мати

$$x^{p\cdot\frac{t}{q}} y^{r\cdot\frac{t}{s}} \leq \left(\frac{x+y}{p\cdot\frac{t}{q}+r\cdot\frac{t}{s}}\right)^{p\cdot\frac{t}{q}+r\cdot\frac{t}{s}} \left(p\cdot\frac{t}{q}\right)^{p\cdot\frac{t}{q}} \cdot \left(r\cdot\frac{t}{s}\right)^{r\cdot\frac{t}{s}}$$

Підносимо обидві частини нерівності до степеня $\frac{1}{t}$.

Тоді $x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{r}{s}} \leq \left(\frac{x+y}{p\cdot\frac{t}{q}+r\cdot\frac{t}{s}}\right)^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} \left(p\cdot\frac{t}{q}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(r\cdot\frac{t}{s}\right)^{\frac{r}{s}}$, або

$x^{m} y^{n} \leq \left(\frac{x+y}{mt+nt}\right)^{m+n} (mt)^{m} \cdot (nt)^{n}$, звідки

$x^{m} y^{n} \leq \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \cdot \frac{1}{t^{m+n}} \cdot t^{m+n} m^{m} \cdot n^{n}$, або

$x^{m} y^{n} \leq \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^{m} \cdot n^{n}$, що і необхідно було довести.

Якщо $x^{m} y^{n} = c$, то $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^{m} \cdot n^{n} \geq c$, звідки $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \geq \frac{c}{m^{m}\cdot n^{n}}$, або

$\frac{x+y}{m+n} \geq \left(\frac{c}{m^{m}\cdot n^{n}}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, тоді $x + y \geq (m + n)\left(\frac{c}{m^{m}\cdot n^{n}}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

Таким чином, найменше можливе значення $x + y$ дорівнює $(m + n)\left(\frac{c}{m^{m}\cdot n^{n}}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, що й треба було довести.

2.3. Задачі на розв'язування рівнянь

У даному підрозділі ми розглянемо метод розв'язання рівнянь, який використовує класичні нерівності.

Задача 12.

Розв'язати рівняння: $\left(x + \sqrt{3x - 2}\right)\left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{3x-2}}\right)\right) = 4$

О.Д.З.: $\{3x - 2 > 0,\ x > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$.

Розв'язання.

Введемо позначення: що $a = x,\ b = \sqrt{3x - 2}$.

Тоді задане рівняння матиме вигляд $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)=4$.

Скористаємось задачею 1: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\geq 4$, причому рівність досягається тільки при $a = b$. Отже, $x = \sqrt{3x - 2}$.

Підносимо обидві частини до квадрату. Отримаємо $x^2 = 3x - 2$, або $x^2 - 3x + 2 = 0$. Знаходимо: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Обидва корені входять в О.Д.З. Робимо перевірку.

Відповіді: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Задача 13.

Розв'язати рівняння:

$(1 - x)^5(1 + x)(1 + 2x)^2 = \frac{2+3x}{\sqrt{1 + 3x}} - 1$. Для $x - \frac{1}{3} < x < 1$

Розв'язання.

У даній задачі треба скористатись нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним у загальному вигляді:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \qquad (17)$$

причому рівність досягається, коли $a_1 = a_2 =... = a_n$.

Ліву частину ми можемо розглядати як добуток 8 чисел:

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1 - x, a_6 = 1 + x,\ a_7 = a_8 = 1 - 2x$

Тоді на підставі класичної нерівності (17) можемо стверджувати, що:

$$\sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2} =$$

$$\sqrt[8]{(1-x)(1-x)(1-x)(1-x)(1-x)(1+x)(1+2x)(1+2x)} \leq$$

$$\leq \frac{(1-x)\ldots+(1-x)+(1+x)+(1+2x)+(1+2x)}{8} = 1$$

Отже: $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \leq 1$, причому рівність, якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_8$ досягається при $x = 0$. Ліву частину заданого рівняння можемо записати у вигляді:

$$\frac{2+3x}{\sqrt{1+3x}} - 1 = \frac{1+3x+1}{\sqrt{1+3x}} - 1 = \sqrt{1+3x} + \frac{1}{\sqrt{1+3x}} - 1$$

При $x - \frac{1}{3} < x < 1$ вираз $\sqrt{1+3x} > 0$, отже: праворуч $\sqrt{1+3x} + \frac{1}{\sqrt{1+3x}} - 1 \geq 1$, оскільки $\sqrt{1+3x} + \frac{1}{\sqrt{1+3x}} \geq 2$. Причому рівність досягається при $\sqrt{1+3x} = 1$, тобто при $x = 0$. Таким чином, задане рівняння виконується тільки при $x = 0$.

Задача 14.

Розв'язати рівняння: $\left(x + \sqrt{5x - 6}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{5x-6}}\right) = 6 - \frac{4-x}{\sqrt{3-x}}$

Розв'язання.

Знайдемо О.Д.З:

$$\{x \neq 0\ ,\ 5x - 6 > 0, 3 - x > 0 \Rightarrow \frac{6}{5} < x < 3.$$

Зауважимо, що ліва частина рівняння має вигляд $(a + b)\ (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, де $a = x; b = \sqrt{5x - 6}$ і в області допустимих значень $a > 0$, $b > 0$. Отже, вираз ліворуч не менше ніж 4, причому дорівнює 4, при $a = b$. Вираз праворуч можна переписати у вигляді:

$$6 - \frac{4-x}{\sqrt{3-x}} = 6 - \left(\frac{3-x+1}{\sqrt{3-x}}\right) = 6 - \left(\sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)$$

В області допустимих значень $3x > 0$, тому $\sqrt{3 - x} + \frac{1}{\sqrt{3-x}} \geq 2$, причому рівність досягається при $3 - x = 1$, тобто при $x = 2$. Отже, права частина не більше 4, причому дорівнює 4 при $x = 2$. Ліва частина дорівнює 4 при $x = \sqrt{5x - 6}$.

Підносимо до квадрату обидві частини. Зайвих розв'язків при цьому не отримаємо, бо за О.Д.З. $x > 0$:

$$x^2 = 5x - 6,\ x^2 - 5x + 6 = 0$$

Розв'язуємо: $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$ Для лівої і правої частини спільне $x = 2.$ Перевірка дає правильну рівність.

Відповідь: $x = 2$.

Задача 15.

Розв'язати рівняння:

$$\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}} = 6 - \frac{25x^2-80x+89}{40-25x}.$$

Розв'язання.

Знаходимо область допустимих значень:

$1 - x^2 > 0,\ 40 - 25x \neq 0.$ Областю допустимих значень є множина х, які задовольняють нерівності $-1 < x < 1.$

Спростимо вираз у правій частині заданого рівняння. Поділимо чисельник і знаменник дробу на 25 і здійснимо перетворення:

$$\frac{25x^2-80x+89}{40-25x} = \frac{x^2-\frac{16}{5}x+\frac{89}{25}}{\frac{8}{5}-x} = \frac{\left(\frac{8}{5}-x\right)^2+1}{\frac{8}{5}-x} = \left(\frac{8}{5} - x\right) + \frac{1}{\left(\frac{8}{5}-x\right)}.$$

Зазначимо, що в області допустимих значень $\frac{8}{5} - x > 0.$ Отже вираз $\left(\frac{8}{5} - x\right) + \frac{1}{\left(\frac{8}{5}-x\right)} \geq 2.$ Але в такому випадку $6 - \frac{25x^2-80x+89}{40-25x} \leq 4.$ Причому рівність досягається, коли $\frac{8}{5} - x = 1$, тобто при $x = \frac{3}{5}$.

Доведемо тепер, що $\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 4.$

В області допустимих значень ліва частина останньої нерівності більша за нуль. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перепишемо у вигляді:

$$9x^2 - 30x + 25 \geq 16 - 16x^2, \text{ або } 25x^2 - 30x + 9 \geq 0.$$

Оскільки ліва частина нерівності є $(5x - 3)^2$, що й доводить нерівність. Причому рівність досягається при $x = \frac{3}{5}$. Таким чином розв’язком заданого рівняння є $x = \frac{3}{5}$.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі було здійснено дослідження класичних нерівностей та їх практичного застосування у розв’язанні задач різного рівня складності. У результаті виконаної роботи описано та проаналізовано основні класичні нерівності, зокрема нерівність Коші, нерівності між середнім арифметичним, геометричним, квадратичним. Наведено формулювання, доведення та геометричні і аналітичні інтерпретації.

Розглянуто приклади використання класичних нерівностей для доведення інших нерівностей. Показано, що правильне застосування нерівностей часто дозволяє суттєво спростити задачу або знайти найбільш ефективний шлях до її розв’язання.

Надано методичні вказівки для розв’язування задач з використанням класичних нерівностей.

Проаналізовано типові прийоми використання нерівностей у математичних доказах, включаючи метод оцінювання зверху/знизу, заміну змінних, а також використання екстремальних значень.

Здійснено добірку задач, у яких використання класичних нерівностей відіграє ключову роль. Задачі різняться за рівнем складності: від базових навчальних прикладів до задач підвищеної складності. Це підкреслює універсальність і практичну цінність класичних нерівностей.

Розроблені матеріали будуть доцільними у шкільної та позашкільної математичної освіти, оскільки такі задачі сприяють розвитку логічного, критичного та аналітичного мислення.

Результати дипломної роботи підтверджують важливість і доцільність вивчення класичних нерівностей не лише як теоретичного інструменту, але і як ефективного засобу для розв’язання широкого кола математичних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Істер О.С. Алгебра: підручник для 8-го класу закладів загальної середньої освіти / О.С.Істер.-Київ: Генеза, 2021.-270 с.
2. Істер О.С. Алгебра: підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів / О.С.Істер.-Київ: Генеза, 2017.-264 с.
3. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти / О.С.Істер, О.В.Єргіна.-Київ: Генеза, 2018.-448 с.
4. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підручник для 11-го класу закладів загальної середньої освіти / О.С.Істер, О.В.Єргіна.-Київ: Генеза, 2019.-416 с.
5. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10-го класу загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень/ Є.П.Нелін.-Ранок, 2018.-271 с.
6. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11-го класу загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень/ Є.П.Нелін.-Ранок, 2018.-271 с.
7. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 8-го класу закладів загальної середньої освіти / Аркадій Мерзляк, Михайло Якір-Харків: Гімназія, 2025.-261 с.
8. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір.- Харків: Гімназія, 2017.-272 с.
9. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір.-Харків: Гімназія, 2018.-256 с.
10. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу, профільний

рівень: підручник для 11-го класу закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін.- Харків: Гімназія, 2019.-352 с.

11. Тарасенкова Н.А.: Алгебра підручник для 8-го класу закладів загальної середньої освіти/ Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, З.О. Сердюк, О.М. Коломієць - Київ: Оріон, 2021.-293 с.

12. Тарасенкова Н.А.: Алгебра підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів/ Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, З.О. Сердюк, О.М. Коломієць - Київ: Оріон, 2017.-272 с.

13. Бевз Г.П., Бевз В.Г.: Алгебра підручник для 8-го класу закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г Бевз-Київ: Видавничий дім "Освіта", 2021.-256 с.

14. Бевз Г.П.: Алгебра підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів/ Г.П. Бевз, В.Г Бевз-Київ: Видавничий дім "Освіта", 2017.-272 с.

15. Бевз Г.П.: Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г Бевз, Н.Г. Владімірова-Київ: Видавничий дім "Освіта", 2018.-336 с.

16. Бевз Г.П.: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 11-го класу закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г Бевз, Н.Г.-Київ: Видавничий дім "Освіта", 2019.-272 с.

17. Босько Н.С. Розвиток умінь учнів доводити числові нерівності в профільній школі / Кваліфікаційна робота на ступінь магістра. Криворізький державний педагогічний університет, Кривий Ріг, 2021, 95 с.

URL: https://surli.cc/wapjnt (дата звернення: 01.02.2025).

18. Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б.Нерівності в шкільному курсі математики. Частина II /Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» / Київ: КНУ, 2022, 123 с.

https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/mp-nerivnosti-v-shkm-2022.06.01fin.pdf?utm_source (дата звернення 10.03.2025)

19. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності. Навчальний посібник / Тернопіль, 2018, 52 с.

https://dspace.wunu.edu.ua/bitstream/316497/33269/1/%D0%A5%D0%9E%D0%A5%D0%9B%D0%9E%D0%92%D0%90%20%D0%9B.%D0%93.%20%D0%86%D0%A0%D0%A0%D0%90%D0%A6%D0%86%D0%9E%D0%9D%D0%90%D0%9B%D0%AC%D0%9D%D0%86%20%D0%A0%D0%86%D0%92%D0%9D%D0%AF%D0%9D%D0%9D%D0%AF%20%D0%86%20%D0%9D%D0%95%D0%A0%D0%86%D0%92%D0%9D%D0%9E%D0%A1%D0%A2%D0%86.pdf?utm_source (дата звернення 18.04.2025)

20. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. / Харків: Основа, 2018, 255 с.

https://pap.at.ua/obdarovani/voronii_o_m_gotuemos_do_olimpiad_z_matematiki.pdf (дата звернення 15.04.2025)

21. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2013. 154 с.

22. Е.О. Рогачов. Розв’язування алгебраїчних рівнянь з використанням нерівностей / Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях. Тези доповідей XIX Міжнародної науково--практичної конференції студентів та молодих вчених, (6 - 7 травня 2025) с. 162 - 164

ДОДАТОК

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.

Розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{2-x}{\sqrt{1-x}}\right)^4 = (2 - 5x)(2 + x)(2 + 2x)^2$$

Вказівки:

Ліву частину рівняння можна записати у вигляді $\left(\sqrt{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^4$.

Вираз у дужках не менше 2, тоді увесь вираз ≥ 16. Використовуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, довести, що вираз праворуч ≤ 16. Рівність досягається при $x = 0$.

Задача 2.

Розв'яжіть рівняння: $\frac{2x^4}{\sqrt{2x^4-1}} + 3x^2 - 6x + 1 = 0$

Вказівки: Представити $\frac{2x^4}{\sqrt{2x^4-1}} = - 3x^2 + 6x - 1$.

Довести, що $\frac{2x^4}{\sqrt{2x^4-1}} \geq 2$, записавши ліву частину у вигляді $\sqrt{2x^4 - 1} + \frac{1}{\sqrt{2x^4-1}}$. Права частина: $- 3x^2 + 6x - 1 \leq 2$.

Відповідь: $x = 1$.

Задача 3.

Розв'язати рівняння: $\left(- x + \sqrt{- 4x - 3}\right)\left(\frac{1}{-x} + \frac{1}{\sqrt{-4x-3}}\right) = 4$

Вказівки: скористатись задачею №12. Врахувати О.Д.З.

Задача 4.

Розв'язати рівняння: $\left(|x| + \sqrt{4 - 3x}\right)\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{4-3x}}\right) = 4$

Вказівки: скористатись задачею №12. Зробити перевірку розв'язків.

Задача 5.

Знайти найменше значення функції:

$y = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$.

Вказівка: в чисельнику виділити множник $x^2 + x + 1$.

Задача 6.

Розв'язати рівняння:

$(|2x - 1| + \sqrt{4x + 1} + \frac{3}{|x-1|}) \cdot (\frac{1}{|2x-1|} + \frac{1}{\sqrt{4x+1}} + \frac{|x-1|}{3}) =$

$= - x^2 + 4x + 5$

Вказівки: позначимо через $a = |2x - 1|$, $b = \sqrt{4x + 1}$, $c = \frac{3}{|x-1|}$.

Тоді ліва частина рівняння має вигляд:

$(a + b + c) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ (Згідно з задачею 2).

Права частина буде не більше 9.

Рівність досягається при *x=2.*

Задача 7.

Розв'язати рівняння:

$\frac{x\cdot\sqrt{3x-8}}{\frac{x}{2}+\sqrt{3x-8}} = \sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{3}{2}x - 4}$.

Вказівки:

Позначимо через $a = \frac{x}{2}$, $b = \sqrt{3x - 8}$.

Тоді ліву частину рівняння можна записати, як

$\frac{2ab}{a+b}$, а праву як $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Далі скористатись нерівністю між середнім гармонійним і середнім квадратичним. Рівність при *a=b.*

Відповідь: *x=4, x=8.*

Задача 8.

Довести нерівність:

$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc \cdot (a + b + c)$.

Задача 9.

Довести, що якщо $a > 0, b > 0, c > 0,$ то виконується нерівність:

$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3.$

Задача 10.

Довести, що якщо $abc > 0,$ то виконується нерівність:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$

Задача 11.

Довести нерівність $a^k + \frac{1}{a^k} \geq a^{k-i} + \frac{1}{a^{k-i}}$, де

$a > 0$ і $k, s -$ цілі числа такі, що $0 \leq i \leq k$.

Задача 12.

Довести, що якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0,$ то виконується нерівність:

$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$