МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

В. О. Горькавий
Є. В. Петров

РІМАНОВА ГЕОМЕТРІЯ
Елементарні задачі та методи розв'язання

Навчально-методичний посібник

Харків – 2024

УДК 514
Г 71

Рецензенти:

В. Т. Лисиця – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики та інформатики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

Д. І. Власенко – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри теоретичної та прикладної інформатики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 8 від 21.05.2024 р.)

Горькавий В. О.

Г 71 Ріманова геометрія. Елементарні задачі та методи розв’язання : навчально-методичний посібник / В. О. Горькавий, Є. В. Петров. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. –92 с.

Навчально-методичний посібник призначено для проведення практичних занять та самостійної роботи з курсу ріманової геометрії.

УДК 514

Зміст

Вступ

Збірник містить елементарні базові задачі курсу ріманової геометрії з наступних тем: 1) ріманова метрика і перетворення координат, 2) довжина кривої, кут між кривими і площа/об'єм областей на рімановому многовиді, 3) ріманова метрика, що індукована зануренням, 4) геодезичні лінії та паралельне перенесення на многовидах з афінною зв'язністю, 5) зв'язність Леві-Чивіти, геодезичні лінії та паралельне перенесення на ріманових многовидах, 6) кривини ріманових многовидів, 7) поля Якобі уздовж геодезичних на ріманових многовидах. За кожною з вказаних тем представлено потрібний теоретичний матеріал, наведено приклад розв'язання конкретної задачі та сформульовано перелік задач для подальшого самостійного опрацювання.

Розв'язання запропонованих задач дозволить оволодіти основними методами безпосереднього обчислення фундаментальних геометричних конструкцій на ріманових многовидах, проілюструвати та закріпити теоретичний матеріал, конкретизувати зміст основоположних ідей, означень і тверджень ріманової геометрії.

Задачі можуть включатися в лекційні курси з ріманової геометрії та, в якості додаткового матеріалу, в курси з дифереренціальної геометрії. Також вони можуть бути використані в контрольних та індивідуальних завданнях або для самостійної роботи студентів.

Розв'язання більшості задач і проведення відповідних обчислень може бути виконане за допомогою стандартних комп'ютерних програм символьних математичних обчислень, що робить доцільним їх використання для вивчення і демонстрації розширених можливостей відповідних комп'ютерних програм в спеціальних курсах з прикладної геометрії.

Посібник містить перелік літератури, що може бути рекомендована до ознайомлення при розв'язанні наведених задач.

Назагал, збірник задач може бути корисним студентам, що слухають курси з диференціальної та/або ріманової геометрії на математичних факультетах університетів, а також усім студентам природничих спеціальностей, що цікавляться рімановою геометрією.

1 Ріманова метрика – означення

Нехай g – білінійна диференціальна форма на многовиді M^m. В локальних координатах $(u^1, ..., u^m)$ на многовиді M^m форма g задається у вигляді[1]

$$g = g_{ij} du^i du^j$$

і представляється матрицею коефіцієнтів (матрицею Грама)

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}.$$

Білінійна диференціальна форма на многовиді M^m є *псевдорімановою метрикою*, якщо вона є невиродженою і симетричною:

1) $\det G \neq 0$, тобто

$$\det \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \neq 0,$$

2) $G^t = G$, тобто

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}$$

або, що те ж саме $g_{ij} = g_{ji}$ для будь-яких i та j від 1 до m. Білінійна диференціальна форма g на многовиді M^m є *рімановою метрикою*, якщо вона є додатно визначеною і симетричною:

1) матриця G – додатно визначена, тобто, наприклад, виконуються умови (критерій Сильвестра)

$$g_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \det \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} > 0,$$

або усі власні значення матриці G (що дійсні в силу симетричності цієї матриці) є додатними;

2) $G^t = G$, тобто

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1m} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}.$$

[1]Тут і далі використовується *правило Ейнштейна*: якщо в тензорному запису якийсь індекс зустрічається двічі, один раз вгорі та один раз внизу, то за цим індексом мається на увазі сума. Наприклад, запис $g_{ij} du^i du^j$ означає $\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} du^i du^j$.

Задача-приклад. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ наступні білінійні диференціальні форми:

1) $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$
2) $g = du^1 du^2 + du^2 du^1$
3) $g = (du^1)^2 + 3du^1 du^2 - u^1 du^2 du^1 + (du^2)^2$
4) $g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2$

Проаналізувати, які з цих білінійних диференціальних форм є псевдорімановими метриками або рімановими метриками на площині $\mathbb{R}^2$.

Розв'язання.

1) Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої диференціальної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ця матриця є симетричною і додатно визначеною. Тому задана білінійна диференціальна форма g представляє собою ріманову метрику на площині $\mathbb{R}^2$.

2) Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої диференціальної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ця матриця є симетричною і невиродженою. Тому задана білінійна диференціальна форма представляє собою псевдоріманову метрику на площині $\mathbb{R}^2$.

В той же час, матриця G не є додатно визначеною, тому задана білінійна диференціальна форма g не є рімановою метрикою на площині $\mathbb{R}^2$.

3) Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої диференціальної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ця матриця не є симетричною. Тому задана білінійна диференціальна форма g не може представляти собою ні ріманову метрику, ані псевдоріманову метрику на площині $\mathbb{R}^2$.

4) Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої диференціальної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

Ця матриця є симетричною. Але вона не є невиродженою, оскільки $\det G = 0$ при $u^1 = 0$. Тому задана білінійна диференціальна форма g не представляє собою ні ріманову метрику, ані псевдоріманову метрику на площині $\mathbb{R}^2$.

Якщо ж замість площини $\mathbb{R}^2$ обмежитись якоюсь областю $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, що не містить точок з $u^1 = 0$, то тоді матриця G буде додатно визначеною, і тому задана білінійна диференціальна форма g буде представляти собою ріманову метрику на області Ω.

Задача 1.1. Обґрунтувати те, що наступні білінійні диференціальні форми, кожна з яких задана у відповідній області $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, є рімановими метриками:

1) *Евклідовий простір* $\mathbb{E}^m$, *декартові* координати

$$g = (du^1)^2 + \ldots + (du^m)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^m$$

2) *Евклідова площина* $\mathbb{E}^2$, *полярні* координати

$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2, \quad \Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0\big\}$$

3.1) *Двовимірна сфера* $\mathbb{S}^2$, *"географічні"* координати (тут і далі постійний параметр $r > 0$, якщо не вказане інше)

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\tfrac{\pi}{2} < u^1 < \tfrac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

3.2) *Тривимірна сфера* $\mathbb{S}^3$, *"географічні"* координати

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2 + r^2 \cos^2 u^1 \cos^2 u^2 (du^3)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{\pi}{2} < u^1, u^2 < \tfrac{\pi}{2}, 0 < u^3 < 2\pi\big\}$$

4.1) *Площина Лобачевського* (або *гіперболічна площина*) $\mathbb{H}^2$, *модель Пуанкаре у напівплощині*

$$g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2_+ = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\big\}$$

4.2) *Простір Лобачевського* (або *гіперболічний простір*) $\mathbb{H}^m$, *модель Пуанкаре у напівпросторі*

$$g = \frac{r^2}{(u^m)^2}(du^1)^2 + \ldots + \frac{r^2}{(u^m)^2}(du^m)^2,$$

$$\Omega = \mathbb{R}^m_+ = \big\{(u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{R}^m \mid u^m > 0\big\}$$

5) Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, *оріциклічні* кординати

$$g = (du^1)^2 + e^{-2u^1}(du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

6.1) Добуток двовимірної сфери та евклідової прямої $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$

$$g = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{\pi}{2} < u^1 < \tfrac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

6.2) Добуток площини Лобачевського і евклідової прямої $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$

$$g = (du^1)^2 + e^{-2u^1}(du^2)^2 + (du^3)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

7.1) Спеціальна *"терстонівська"* геометрія Nil

$$g = (du^1)^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2 - 2u^1 du^2 du^3 + (du^3)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

7.2) Спеціальна *"терстонівська"* геометрія Sol

$$g = e^{2u^3}(du^1)^2 + e^{-2u^3}(du^2)^2 + (du^3)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

7.3) Спеціальна *"терстонівська"* геометрія $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$

$$g = \frac{2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{2}{(u^2)}du^1 du^3 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \left\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\right\}$$

Задача 1.2. Обґрунтувати те, що наступні білінійні диференціальні форми, кожна з яких задана у відповідній області $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, є псевдорімановими метриками, але не є рімановими метриками:

1) *Псевдоевклідовий простір* $\mathbb{E}^{m_1,m_2}$, *декартові* координати

$$g = (du^1)^2 + \ldots + (du^{m_1})^2 - (du^{m_1+1})^2 - \ldots - (du^{m_1+m_2})^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

2) *Простір-час Лоренца – Мінковського* $\mathbb{E}^{1,3}$

$$g = (du^1)^2 - (du^2)^2 - (du^3)^2 - (du^4)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^4$$

3.1) *Площина де Сіттера* dS^2

$$g = -r^2(du^1)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

3.2) *Простір де Сіттера* dS^3

$$g = -r^2(du^1)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 \cos^2 u^2 (du^3)^2,$$

$$\Omega = \left\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{\pi}{2} < u^2 < \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

4.1) *Площина анті де Сіттера* AdS^2

$$g = r^2(du^1)^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

4.2) *Простір анті де Сіттера* AdS^3

$$g = r^2(du^1)^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 \cos^2 u^2 (du^3)^2,$$

$$\Omega = \left\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\tfrac{\pi}{2} < u^2 < \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

5) *Простір-час Шварцшильда* (де $r_0 > 0$)

$$g = \left(1 - \frac{r_0}{u^2}\right)(du^1)^2 - \left(1 - \frac{r_0}{u^2}\right)^{-1}(du^2)^2 - (u^2)^2(du^3)^2 - (u^2)^2 \sin^2 u^3 (du^4)^2,$$

$$\Omega = \left\{(u^1, \ldots, u^4) \in \mathbb{R}^4 \mid u^2 > r_0, 0 < u^3 < \pi\right\}$$

2 Ріманова метрика, що індукована зануренням

Нехай задане занурення $F : M^m \to N^n$ многовида M^m у рімановий многовид (N^n, g), яке в локальних координатах $(u^1, \dots, u^m)$ на M^m і $(v^1, \dots, v^n)$ на N^n представлене гладкими класу C^1 функціями

$$\begin{cases} v^1 = v^1(u^1, \dots, u^m) \\ \vdots \\ v^n = v^n(u^1, \dots, u^m) \end{cases}, \qquad Rank \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v^n}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^n}{\partial u^m} \end{pmatrix} \equiv m,$$

де умова на ранг матриці Якобі випливає з означення занурення. Ріманова метрика $h = h_{ij} du^i du^j$ на многовиді M^m, що *індукована* зануренням F з ріманової метрики $g = g_{kl} dv^k dv^l$ на многовиді N^n (або *перша фундаментальна форма* цього занурення), визначається наступним співвідношенням:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^n}{\partial u^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v^1}{\partial u^m} & \dots & \frac{\partial v^n}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v^n}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^n}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

Якщо (N^n, g) є псевдорімановим многовидом, то білінійна диференціальна форма h на многовиді M^m, що визначена за цією формулою, є симетричною, але може не мати властивостей додатної визначеності або невиродженості.

Задача-приклад. Розглянемо відображення F області $\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \big| -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$ в тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r \cos u^1 \sin u^2 \\ v^3 = r \sin u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^3$. Обчислити ріманову метрику h на області Ω, що індукована зануренням F з ріманової метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

Розв'язання. Для заданого відображення маємо ($m = 2$, $n = 3$):

$$Rank \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = Rank \begin{pmatrix} -r \sin u^1 \cos u^2 & -r \cos u^1 \sin u^2 \\ -r \sin u^1 \sin u^2 & r \cos u^1 \cos u^2 \\ r \cos u^1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2$$

в заданій області Ω. Тому відображення F є зануренням.

Образ $F(\Omega)$ представляє собою множину точок сфери $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ радіуса r, що задана рівнянням $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = r^2$, з видаленим меридіаном, який задається умовами $v^1 \geqslant 0$, $v^2 = 0$ (або $-\frac{\pi}{2} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $u^2 = 0$). Координати (u^1, u^2) інтерпретуються як географічні координати *“широта”* і *“довгота”* на сфері.

Обчислимо індуковану ріманову метрику h. Підставивши

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin u^1 \cos u^2 & -r\cos u^1 \sin u^2 \\ -r\sin u^1 \sin u^2 & r\cos u^1 \cos u^2 \\ r\cos u^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в загальну формулу

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial v^1}{\partial u^2} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2 u^1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ріманова метрика h, що індукована заданим зануренням F області Ω в евклідовий простір $\mathbb{E}^3$, має вигляд $h = r^2(du^1)^2 + r^2\cos^2 u^1 (du^2)^2$.

Задача-приклад. Тепер розглянемо відображення F з проколотої площини $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \\ v^3 = a\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}, \ a > 0 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Проаналізувати, чи є ця диференціальна форма h рімановою або псевдорімановою метрикою.

Розв'язання. Для заданого відображення маємо ($m = 2$, $n = 3$):

$$Rank \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = Rank \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a\frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} & a\frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Тому відображення F є зануренням.

Образ $F(\Omega)$ представляє собою верхню половину конуса $K^2 \subset \mathbb{E}^{2,1}$, що заданий рівнянням $(v^3)^2 = a^2((v^1)^2 + (v^2)^2)$, $v^3 > 0$.

Обчислимо індуковану ріманову метрику h. Підставивши

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a\frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} & a\frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в загальну формулу

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial v^1}{\partial u^2} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^3}{\partial u^1} & \frac{\partial v^3}{\partial u^2} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(1-a^2)(u^1)^2 + (u^2)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} & -\dfrac{a^2u^1u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} \\ -\dfrac{a^2u^1u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} & \dfrac{(1-a^2)(u^2)^2 + (u^1)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Отже, білінійна диференціальна форма h, що індукована заданим зануренням F проколотої площини $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ у псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{1,2}$, має вигляд

$$h = \frac{(1-a^2)(u^1)^2 + (u^2)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2}(du^1)^2 - \frac{a^2u^1u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2}du^1du^2 -$$

$$-\frac{a^2u^1u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2}du^2du^1 + \frac{(1-a^2)(u^2)^2 + (u^1)^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2}(du^2)^2.$$

Власні значення обчисленої матриці дорівнюють 1 і $1 - a^2$. Якщо $|a| < 1$, то h є додатно визначеною і представляє собою ріманову метрику; якщо $|a| > 1$, то h є невиродженою, але не є додатно визначеною, тобто h представляє собою псевдоріманову метрику, але не є рімановою метрикою; якщо ж $|a| = 1$, то h є виродженою і не представляє собою ані псевдоріманової метрики, ані, тим більше, ріманової метрики.

Задача 2.1. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = a^1u^1 + b^1u^2 + c^1 \\ v^2 = a^2u^1 + b^2u^2 + c^2 \\ v^3 = a^3u^1 + b^3u^2 + c^3 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

де a_i, b_i, c_i – константи такі, що

$$Rank \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^3$ і який сенс мають константи a_i, b_i, c_i.

Обчислити ріманову метрику h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з ріманової метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.2. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в чотиривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^4 = \big(\mathbb{R}^4, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3, v^4) на $\mathbb{E}^4$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2 + (dv^4)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = a\sin\dfrac{u^1}{a} \\ v^2 = a\cos\dfrac{u^1}{a} \\ v^3 = b\sin\dfrac{u^2}{b} \\ v^4 = b\cos\dfrac{u^2}{b} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^4$.

Обчислити ріманову метрику h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з ріманової метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^4$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.3. Розглянемо відображення F диска

$$D^2 = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < r^2\big\}$$

у тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = ru^1 \\ v^2 = ru^2 \\ v^3 = r\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in D^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(D^2) \subset \mathbb{E}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на D^2, що індукована зануренням F з рімановою метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.4. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{ru^1}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \\ v^2 = \dfrac{ru^2}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \\ v^3 = \dfrac{r}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з рімановою метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.5. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ у тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{2ru^1}{(u^1)^2+(u^2)^2+1} \\ v^2 = \dfrac{2ru^2}{(u^1)^2+(u^2)^2+1} \\ v^3 = r\dfrac{(u^1)^2+(u^2)^2-1}{(u^1)^2+(u^2)^2+1} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з рімановою метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.6. Розглянемо відображення F області

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

у тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3 = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^3$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r\sin u^1 \sin u^2 \\ v^2 = r\sin u^1 \cos u^2 \\ v^3 = r\cos u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на Ω, що індукована зануренням F з ріманової метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^3$.

Задача 2.7. Розглянемо відображення F області

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < \pi, 0 < u^3 < 2\pi\big\}$$

у чотиривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^4 = \big(\mathbb{R}^4, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3, v^4) на $\mathbb{E}^4$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2 + (dv^4)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r\sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 + c^1 \\ v^2 = r\sin u^1 \sin u^2 \cos u^3 + c^2 \\ v^3 = r\sin u^1 \cos u^2 + c^3 \\ v^4 = r\cos u^1 + c^4 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^4$.

Обчислити ріманову метрику h на Ω, що індукована зануренням F з ріманової метрики g евклідового простору $\mathbb{E}^4$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.8. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = ru^1 \\ v^2 = ru^2 \\ v^3 = r\sqrt{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Показати, що ця диференціальна форма h є ріманововою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.9. Розглянемо відображення F диска

$$D^2 = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\big\}$$

у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{ru^1}{\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}} \\ v^2 = \dfrac{ru^2}{\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}} \\ v^3 = \dfrac{r}{\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in D^2.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(D^2) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на D^2, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Показати, що ця диференціальна форма h є рімановою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.10. Розглянемо відображення F диска

$$D^2 = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\big\}$$

у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{2ru^1}{1-(u^1)^2-(u^2)^2} \\ v^2 = \dfrac{2ru^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2} \\ v^3 = r\dfrac{1+(u^1)^2+(u^2)^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in D^2.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(D^2) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на D^2, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Показати, що ця диференціальна форма h є рімановою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.11. Розглянемо відображення F області

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, для яких $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r \operatorname{sh} u^1 \sin u^2 \\ v^2 = r \operatorname{sh} u^1 \cos u^2 \\ v^3 = r \operatorname{ch} u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на Ω, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Показати, що ця диференціальна форма h є рімановою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.12. Розглянемо відображення F області

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, яке в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, коли $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r \operatorname{ch} u^1 \sin u^2 \\ v^2 = r \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 \\ v^3 = r \operatorname{sh} u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на Ω, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Показати, що ця диференціальна форма h є псевдорімановою метрикою, але не є рімановою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.13. Розглянемо відображення F області

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

у тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{1,2} = \big(\mathbb{R}^3, g\big)$, що в декартових координатах (v^1, v^2, v^3) на $\mathbb{E}^{2,1}$, для яких $g = -(dv^1)^2 - (dv^2)^2 + (dv^3)^2$, задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r \operatorname{ch} u^1 \sin u^2 \\ v^2 = r \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 \\ v^3 = r \operatorname{sh} u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, чи відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{E}^{1,2}$.

Обчислити білінійну диференціальну форму h на Ω, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{1,2}$. Показати, що ця диференціальна форма h є псевдорімановою метрикою, але не є рімановою метрикою.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.14. Розглянемо тривимірний простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$ в інтерпретації Пуанкаре у верхньому напівпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \left\{(v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 \mid v^3 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^1)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^2)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^3)^2$. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{c}{r}u^1 \\ v^2 = \dfrac{c}{r}u^2 \\ v^3 = c \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{H}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з рімановою метрики g простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.15. Розглянемо тривимірний простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$ в інтерпретації Пуанкаре у верхньому напівпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \left\{(v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 \mid v^3 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^1)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^2)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^3)^2$. Розглянемо відображення F області $\Omega = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \dfrac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\right\}$ в простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = a \sin u^1 \sin u^2 + c^1 \\ v^2 = a \sin u^1 \cos u^2 + c^2 \\ v^3 = a \cos u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{H}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на Ω, що індукована зануренням F з ріманової метрики g простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.16. Розглянемо тривимірний простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$ в інтерпретації Пуанкаре у верхньому напівпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \left\{(v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 \mid v^3 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^1)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^2)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^3)^2$. Розглянемо відображення F області $\Omega = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\right\}$ в простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = a \sin u^1 \sin u^2 + c^1 \\ v^2 = a \sin u^1 \cos u^2 + c^2 \\ v^3 = a \cos u^1 + a \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{H}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на Ω, що індукована зануренням F з рімановою метрики g простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

* Узагальнити задачу за вимірністю.

Задача 2.17. Розглянемо тривимірний простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$ в інтерпретації Пуанкаре у верхньому напівпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \left\{(v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 \mid v^3 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^1)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^2)^2 + \dfrac{r^2}{(v^3)^2}(dv^3)^2$. Розглянемо відображення F області $\Omega = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\right\}$ в простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = a \sin \dfrac{u^1}{a} + c^1 \\ v^2 = a \cos \dfrac{u^1}{a} + c^2 \\ v^3 = u^2 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\Omega) \subset \mathbb{H}^3$.

Обчислити ріманову метрику h на Ω, що індукована зануренням F з рімановою метрики g простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

Задача 2.18. Розглянемо тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{2,1}$ з псевдорімановою метрикою $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 - (dv^3)^2$. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в простір $\mathbb{E}^{2,1}$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 + c^1 \\ v^2 = r \operatorname{ch} u^1 \sin u^2 + c^2 \\ v^3 = r \operatorname{sh} u^1 + c^3 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

Обчислити симетричну білінійну диференціальну форму h на площині $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{2,1}$. Проаналізувати, чи представляє собою ця диференціальна форма ріманову або псевдоріманову метрику.

Задача 2.19. Розглянемо чотиривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{3,1}$ з псевдоріманововою метрикою $g = (dv^1)^2 + (dv^2)^2 + (dv^3)^2 - (dv^4)^2$. Розглянемо відображення F простору $\mathbb{R}^3$ в простір $\mathbb{E}^{2,1}$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \cos u^3 + c^1 \\ v^2 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \sin u^3 + c^2 \\ v^3 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 + c^3 \\ v^4 = r\,\mathrm{sh}\,u^1 + c^4 \end{cases}, \quad (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{E}^{3,1}$.

Обчислити симетричну білінійну диференціальну форму h на просторі $\mathbb{R}^3$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{3,1}$. Проаналізувати, чи представляє собою ця диференціальна форма ріманову або псевдоріманову метрику.

Задача 2.20. Розглянемо тривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{1,2}$ з псевдоріманововою метрикою $g = -(dv^1)^2 - (dv^2)^2 + (dv^3)^2$. Розглянемо відображення F площини $\mathbb{R}^2$ в простір $\mathbb{E}^{1,2}$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 + c^1 \\ v^2 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 + c^2 \\ v^3 = r\,\mathrm{sh}\,u^1 + c^3 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^{1,2}$.

Обчислити симетричну білінійну диференціальну форму h на площині $\mathbb{R}^2$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{1,2}$. Проаналізувати, чи представляє собою ця диференціальна форма ріманову або псевдоріманову метрику.

Задача 2.21. Розглянемо чотиривимірний псевдоевклідовий простір $\mathbb{E}^{1,3}$ з псевдоріманововою метрикою $g = -(dv^1)^2 - (dv^2)^2 - (dv^3)^2 + (dv^4)^2$. Розглянемо відображення F простору $\mathbb{R}^3$ в простір $\mathbb{E}^{1,3}$, що задане у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \cos u^3 + c^1 \\ v^2 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \sin u^3 + c^2 \\ v^3 = r\,\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 + c^3 \\ v^4 = r\,\mathrm{sh}\,u^1 + c^4 \end{cases}, \quad (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Перевірити, що відображення F є зануренням. Проаналізувати, як виглядає образ $F(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{E}^{1,3}$.

Обчислити симетричну білінійну диференціальну форму h на просторі $\mathbb{R}^3$, що індукована зануренням F з псевдоріманової метрики g псевдоевклідового простору $\mathbb{E}^{1,3}$. Проаналізувати, чи представляє собою ця диференціальна форма ріманову або псевдоріманову метрику.

3 Ріманова метрика і заміна координат

Якщо на рімановому многовиді зробити заміну локальних координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^m) \\ \vdots \\ u^m = u^m(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^m) \end{cases}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то коефіцієнти ріманової метрики

$$g = g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}_{kl} d\tilde{u}^k d\tilde{u}^l,$$

у старій і новій системах координат будуть пов'язані співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \dots & \tilde{g}_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^m} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^m} \end{pmatrix}$$

Задача-приклад. Розглянемо евклідову площину $\mathbb{E}^2$ – площину $\mathbb{R}^2$ з рімановою метрикою $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$. Розглянемо на $\mathbb{E}^2$ наступну лінійну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = A\tilde{u}^1 + B\tilde{u}^2 \\ u^2 = C\tilde{u}^1 + D\tilde{u}^2 \end{cases}, \qquad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2,$$

де A, B, C, D – константи такі, що $AD - BC \neq 0$.

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика евклідової площини в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Розв'язання. Застосуємо наведений вище загальний тензорний закон зміни координат ріманової метрики при заміні локальних координат на многовиді:

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо регулярність заміни координат:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 .$$

Підставляючи в загальний тензорний закон зміни координат ріманової метрики, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + C^2 & AB + CD \\ AB + CD & B^2 + D^2 \end{pmatrix}$$

Таким чином, в новій системі координат ріманова метрика евклідової площини $\mathbb{E}^2$ записується у вигляді

$$g = (A^2+C^2)(d\tilde{u}^1)^2+(AB+CD)du^1du^2+(AB+CD)du^2du^1+(B^2+D^2)(d\tilde{u}^2)^2 \ .$$

Задача-приклад. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в моделі Пуанкаре у вигляді верхньої напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \left\{(u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \dfrac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$. Розглянемо на $\mathbb{H}^2$ наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^2 \\ u^2 = e^{\tilde{u}^1} \end{cases}, \quad (\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)\in\mathbb{R}^2.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика площини Лобачевського в нових координатах $(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)$.

Розв'язання. Застосуємо загальний тензорний закон зміни координат ріманової метрики при заміні локальних координат на многовиді:

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e^{2\tilde{u}^1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e^{2\tilde{u}^1}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{\tilde{u}^1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Перевіряємо регулярність заміни координат:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ e^{\tilde{u}^1} & 0 \end{vmatrix} = -e^{\tilde{u}^1} \neq 0 \ .$$

Підставляючи в загальний тензорний закон зміни координат ріманової метрики, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\tilde{u}^1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e^{2\tilde{u}^1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e^{2\tilde{u}^1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{\tilde{u}^1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e^{2\tilde{u}^1}} \end{pmatrix}$$

Таким чином, в новій системі координат ріманова метрика площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ записується у вигляді

$$g = (d\tilde{u}^1)^2 + e^{-2\tilde{u}^1}(d\tilde{u}^2)^2, \qquad (\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)\in\mathbb{R}^2.$$

Задача 3.1. Розглянемо евклідову площину $\mathbb{E}^2$ – площину $\mathbb{R}^2$ з рімановою метрикою $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$. Зробимо в $\mathbb{E}^2$ наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin u^2 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1 > 0, 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика евклідової площини $\mathbb{E}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Задача 3.2. Розглянемо евклідовий простір $\mathbb{E}^3$ – простір $\mathbb{R}^3$ з рімановою метрикою $g = (du^1)^2 + (du^2)^2 + (du^3)^2$. Зробимо в $\mathbb{E}^3$ наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \sin \tilde{u}^3 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \cos \tilde{u}^3 \\ \quad u^3 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1 > 0,\ 0 < \tilde{u}^2 < \pi,\ 0 < \tilde{u}^3 < 2\pi.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика евклідового простору $\mathbb{E}^3$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)$.

Задача 3.3. Розглянемо евклідовий простір $\mathbb{E}^3$ – простір $\mathbb{R}^3$ з рімановою метрикою $g = (du^1)^2 + (du^2)^2 + (du^3)^2$. Зробимо в $\mathbb{E}^3$ наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \\ \quad u^3 = \tilde{u}^3 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1 > 0,\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика евклідового простору $\mathbb{E}^3$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^3)$.

Задача 3.4. Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ задано ріманову метрику

$$g = a(du^1)^2 + b du^1 du^2 + b du^2 du^1 + c(du^2)^2$$

зі сталими коефіцієнтами a, b, c. Доведіть, що існує заміна координат

$$\begin{cases} u^1 = A\tilde{u}^1 + B\tilde{u}^2 \\ u^2 = C\tilde{u}^1 + D\tilde{u}^2 \end{cases}, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2,$$

де A, B, C, D – константи, після виконання якої ріманова метрика g матиме вигляд $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (d\tilde{u}^2)^2$.

Задача 3.5. Розглянемо на сфері $\mathbb{S}^2$ *"стереографічні"* координати $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$, коли ріманова метрика має вигляд

$$g = \frac{4r^2}{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^2}(du^1)^2 + \frac{4r^2}{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^2}(du^2)^2.$$

Зробимо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \dfrac{\sin \tilde{u}^1}{1-\cos \tilde{u}^1} \sin \tilde{u}^2 \\ u^2 = \dfrac{\sin \tilde{u}^1}{1-\cos \tilde{u}^1} \cos \tilde{u}^2 \end{cases} \qquad 0 < \tilde{u}^1 < \pi,\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика сфери $\mathbb{S}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Задача 3.6. Розглянемо на сфері $\mathbb{S}^2$ "географічні" координати (u^1, u^2), коли ріманова метрика має вигляд $g = r^2(du^1)^2 + r^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2$. На верхній напівсфері $\mathbb{S}^2_+$, що відповідає області $\Omega = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \frac{\pi}{2},\ 0 < u^2 < 2\pi\right\}$, зробимо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \operatorname{tg} u^1 \cos u^2 \\ \tilde{u}^2 = \operatorname{tg} u^1 \sin u^2 \end{cases}.$$

Проаналізувати область значень координат $(\tilde{u}^1,\ \tilde{u}^2)$, що відповідає області Ω, де визначена ріманова метрика g.

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика сфери $\mathbb{S}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.[2]

Задача 3.7. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре у верхній напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \dfrac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2$. Зробимо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = \dfrac{2\tilde{u}^1}{(\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2 - 1)^2} \\ u^2 = \dfrac{1 - (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2}{(\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2 - 1)^2} \end{cases},$$

що визначена в одиничному диску $D^2 = \left\{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$.

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$

Задача 3.8. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в *інтерпретації Пуанкаре у одиничному диску* $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{4r^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^1)^2 + \dfrac{4r^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^2)^2$.

[2] Підказка. Застосувати співвідношення

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Зробимо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 &= \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{u}^1}{1+\operatorname{ch}\tilde{u}^1}\cos\tilde{u}^2 \\ u^2 &= \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{u}^1}{1+\operatorname{ch}\tilde{u}^1}\sin\tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1>0, 0<\tilde{u}^2<2\pi.$$

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Задача 3.9. Розглянемо на площині Лобачевського $\mathbb{H}^2$ *"полярні"* координати $(u^1, u^2) \in \Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0, 0 < u^2 < 2\pi\}$, коли ріманова метрика має вигляд $g = r^2(du^1)^2 + r^2\operatorname{sh}^2 u^2(du^2)^2$. Зробимо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 &= \operatorname{th} u^1 \cos u^2 \\ \tilde{u}^2 &= \operatorname{th} u^1 \sin u^2 \end{cases}.$$

Проаналізувати область значень координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, що відповідає області Ω, де визначена ріманова метрика g.

Обчислити, як буде виглядати ріманова метрика площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в нових координатах $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Задача 3.10. Розглянемо на області

$$\Omega = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \frac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\right\}$$

ріманову метрику $g = \dfrac{r^2}{\cos^2 u^1}(du^1)^2 + r^2\operatorname{tg}^2 u^1(du^2)^2$.

Знайти заміну координат

$$\begin{cases} u^1 &= f(\tilde{u}^1) \\ u^2 &= \tilde{u}^2 \end{cases},$$

після виконання якої ріманова метрика g буде мати вигляд

$$g = r^2(d\tilde{u}^1)^2 + r^2\operatorname{sh}^2\tilde{u}^1(d\tilde{u}^2)^2,$$

тобто є метрикою площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в "полярних" координатах.

Задача 3.11. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\}$ ріманову метрику $g = r^2\dfrac{1}{(1+\cos u^1)^2}(du^1)^2 + r^2\dfrac{1-\cos u^1}{1+\cos u^1}(du^2)^2$.

Знайти заміну координат

$$\begin{cases} u^1 &= f(\tilde{u}^1) \\ u^2 &= \tilde{u}^2 \end{cases},$$

після виконання якої ріманова метрика g буде мати вигляд $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)(d\tilde{u}^2)^2$, тобто є метрикою евклідової площини $\mathbb{E}^2$ в полярних координатах.

4 Довжина кривої, кут між кривими, об'єм області

4.1 Довжина кривої

Довжина кусково C^1–гладкої кривої $\gamma\colon [a,b] \to M^m$ у рімановому многовиді (M^m, g) обчислюється за допомогою наступної формули:

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot\gamma| dt$$

при цьому довжина вектора швидкості $\dot\gamma$ кривої γ обчислюється з урахуванням рімановоï метрики:

$$|\dot\gamma| = \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}$$

Якщо крива γ задана в локальних координатах $(u^1, \ldots, u^m)$ на M^m у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = f^1(t) \\ \quad\vdots \\ u^m = f^m(t) \end{cases},$$

то

$$|\dot\gamma|^2 = g_{ij} \frac{df^i}{dt} \frac{df^j}{dt} = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^m}{dt} \right) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{df^m}{dt} \end{pmatrix},$$

при цьому коефіцієнти рімановоï метрики обчислюються в точках кривої γ, тобто $g_{ij} = g_{ij}\left(f^1(t), \ldots, f^m(t)\right)$.

Алгоритм обчислення довжини кривої:

1) обчислити вектор швидкості $\dot\gamma$ кривої γ;

2) обчислити довжину $|\dot\gamma|$ вектора швидкості $\dot\gamma$;

3) обчислити інтеграл $\int\limits_a^b |\dot\gamma| dt$.

Зокрема, якщо параметр на кривій є *натуральним*, тобто $|\dot\gamma| = 1$, то довжина дорівнюватиме $b - a$.

Задача-приклад. Розглянемо евклідову площину $\mathbb{E}^2$, що параметризована полярними координатами (u^1, u^2), коли матриця коефіцієнтів рімановоï метрики має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ = \left\{ (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0 \right\}.$$

Зобразити на координатній напівплощині $\mathbb{R}^2_+$ наступну криву та обчислити її довжину:

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = C \\ u^2 = t \end{cases}, \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Намалюємо задану криву γ, див. рис. 1.

Обчислюємо вектор швидкості кривої γ:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

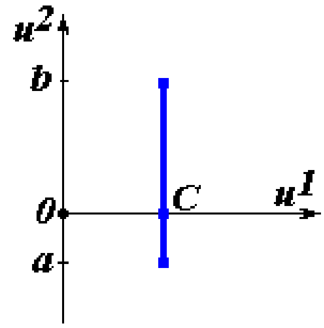

Рис. 1: Крива γ

Записуємо матрицю коефіцієнтів ріманової метрики в точках кривої γ:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо довжину вектора швидкості $\dot{\gamma}$ кривої γ:

$$|\dot{\gamma}|^2 = \left(\frac{df^1}{dt}, \frac{df^2}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^2,$$

$$|\dot{\gamma}| = C.$$

Обчислюємо довжину кривої γ:

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}| dt = \int\limits_a^b C dt = C(b - a).$$

У площині полярних координат задана крива γ зображається відрізком координатної осі $u^1 = C$. При переході до декартових координат ця крива буде зображатися дугою кола радіуса C.

Відповідь : $L(\gamma) = C(b - a)$.

Задача 4.1.1. Розглянемо напівсферу $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r, що параметризована *"проєктивними"* координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1+(u^2)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & -\dfrac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \\ -\dfrac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & \dfrac{1+(u^1)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві та обчислити їх довжину.

1)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = C \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

2)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \alpha t \\ u^2 = \beta t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

3)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t \\ u^2 = \rho\sin t \end{cases}, \quad t \in [0,2\pi].$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $\rho \to +\infty$.

Задача 4.1.2. Розглянемо сферу $\mathbb{S}^2$ радіуса r, що параметризована "стереографічними" координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві та обчислити їх довжину.

1)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \alpha t \\ u^2 = \beta t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

2)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \beta \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

3)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho \cos t \\ u^2 = \rho \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $\rho \to +\infty$.

Задача 4.1.3 Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в *інтерпретації Келі – Клейна в одиничному диску* $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-(u^2)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \\ \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{1-(u^1)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити наступні криві у координатній області $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ та обчислити їх довжину.

1)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \beta \end{cases}, \quad t \in [a, b] \subset (-\sqrt{1-\beta^2}, \sqrt{1-\beta^2}).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\sqrt{1-\beta^2}$, $b \to \sqrt{1-\beta^2}$.

2)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \alpha t \\ u^2 = \beta t \end{cases}, \quad t \in [a, b] \subset (-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $b \to \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

3)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho \cos t \\ u^2 = \rho \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $\rho \to 1$.

Задача 4.1.4. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити наступні криві у координатній області $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ та обчислити їх довжину.

1)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \beta \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (-\sqrt{1-\beta^2}, \sqrt{1-\beta^2}).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\sqrt{1-\beta^2}$, $b \to \sqrt{1-\beta^2}$.

2)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \alpha t \\ u^2 = \beta t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $b \to \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

3)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t \\ u^2 = \rho\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $\rho \to 1$.

4)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t + \sqrt{1+\rho^2} \\ u^2 = \rho\sin t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (\pi - \mathrm{arccot}\rho, \pi + \mathrm{arccot}\rho).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to \pi - \mathrm{arccot}\rho$, $b \to pi + \mathrm{arccot}\rho$.

5)

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t + 1 - \rho \\ u^2 = \rho\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $\rho \to 1$.

Задача 4.1.5. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\right\}$, коли матриця коефіцієнтів рімановой метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити наступні криві у координатній області $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$ та обчислити їх довжину.

1)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \alpha \\ u^2 = t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (0,+\infty).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to 0$.

2)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \beta \end{cases}, \quad t \in [a,b].$$

3)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \alpha t + \alpha_0 \\ u^2 = \beta t + \beta_0 \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (-\frac{\beta_0}{\beta}, +\infty).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\dfrac{\beta_0}{\beta}$.

4)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t + c \\ u^2 = \rho\sin t \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (0,\pi).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to 0$, $b \to \pi$.

5)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t + c \\ u^2 = \rho\sin t + \rho \end{cases}, \quad t \in [a,b] \subset (0,2\pi).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to 0$, $b \to 2\pi$.

6)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t \\ u^2 = \rho\sin t + h \end{cases}, \quad h > \rho, \; t \in [0,2\pi].$$

7)

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = \rho\cos t \\ u^2 = \rho\sin t + h \end{cases}, \quad 0 < h < \rho, \; t \in [a,b] \subset (-\arcsin\frac{h}{\rho}, \pi + \arcsin\frac{h}{\rho}).$$

Проаналізувати граничну поведінку довжини кривої γ при $a \to -\arcsin\dfrac{h}{\rho}$, $b \to \pi + \arcsin\dfrac{h}{\rho}$.

4.2 Кут між кривими

Якщо $\gamma\colon [a,b] \to M^m$ і $\tilde\gamma\colon [\tilde a,\tilde b] \to M^m$ – дві криві у рімановому многовиді (M^m, g), що перетинаються в деякій точці $P \in M^m$ і є у ній *регулярними*, тобто мають ненульові дотичні вектори (вектори швидкості) $\dot\gamma$ і $\dot{\tilde\gamma}$, то *кут* між кривими γ і $\tilde\gamma$ в точці перетину P визначається як кут між $\dot\gamma$ і $\dot{\tilde\gamma}$ у P і обчислюється за допомогою наступної формули:

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\gamma, \dot{\tilde\gamma}\rangle}{|\dot\gamma|\ |\dot{\tilde\gamma}|},$$

при цьому скалярний добуток $\langle\dot\gamma, \dot{\tilde\gamma}\rangle$ і довжини $|\dot\gamma|$, $|\dot{\tilde\gamma}|$ векторів швидкості кривих обчислюються в точці перетину P з урахуванням ріманової метрики g.

Якщо криві задані в локальних координатах $(u^1, \dots, u^m)$ на M^m у вигляді

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = f^1(t) \\ \quad\vdots \\ u^m = f^m(t) \end{cases}, \qquad \tilde\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \tilde f^1(\tilde t) \\ \quad\vdots \\ u^m = \tilde f^m(\tilde t) \end{cases},$$

то алгоритм обчислення кута між кривими є наступним:

1) знайти точку перетину P кривих γ і $\tilde\gamma$, розв'язавши рівняння

$$\begin{cases} f^1(t) = \tilde f^1(\tilde t) \\ \quad\vdots \\ f^m(t) = \tilde f^m(\tilde t) \end{cases},$$

і записати координату t_0 точки P на кривій γ, координату $\tilde t_0$ точки P на кривій $\tilde\gamma$, координати $u_0^1 = f^1(t_0) = \tilde f^1(\tilde t_0), \dots, u_0^m = f^m(t_0) = \tilde f^m(\tilde t_0)$ точки P у многовиді M^m;

2) обчислити вектори швидкості $\dot\gamma(t_0)$ і $\dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0)$ кривих γ і $\tilde\gamma$ в точці P:

$$\dot\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \dfrac{df^m}{dt}(t_0) \end{pmatrix}, \quad \dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{d\tilde f^1}{d\tilde t}(\tilde t_0) \\ \vdots \\ \dfrac{d\tilde f^m}{d\tilde t}(\tilde t_0) \end{pmatrix};$$

3) обчислити матрицю коефіцієнтів ріманової метрики g в точці P,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} g_{11}(u_0^1, \dots, u_0^m) & \dots & g_{1m}(u_0^1, \dots, u_0^m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(u_0^1, \dots, u_0^m) & \dots & g_{mm}(u_0^1, \dots, u_0^m) \end{pmatrix};$$

4) обчислити скалярні добутки з урахуванням матриці коефіцієнтів ріманової

метрики g в точці P:

$$\langle\dot\gamma(t_0),\dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0)\rangle = \left(\frac{df^1}{dt}(t_0),\dots,\frac{df^m}{dt}(t_0)\right)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{mm}\end{pmatrix}_P\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{d\tilde f^1}{d\tilde t}(\tilde t_0)\\ \vdots\\ \dfrac{d\tilde f^m}{d\tilde t}(\tilde t_0)\end{pmatrix},$$

$$|\dot\gamma(t_0)|^2 = \left(\frac{df^1}{dt}(t_0),\dots,\frac{df^m}{dt}(t_0)\right)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{mm}\end{pmatrix}_P\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{df^1}{dt}(t_0)\\ \vdots\\ \dfrac{df^m}{dt}(t_0)\end{pmatrix},$$

$$|\dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0)|^2 = \left(\frac{d\tilde f^1}{d\tilde t}(\tilde t_0),\dots,\frac{d\tilde f^m}{d\tilde t}(\tilde t_0)\right)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{mm}\end{pmatrix}_P\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{d\tilde f^1}{d\tilde t}(\tilde t_0)\\ \vdots\\ \dfrac{d\tilde f^m}{d\tilde t}(\tilde t_0)\end{pmatrix};$$

5) обчислити косинус шуканого кута

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\gamma(t_0),\dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0)\rangle}{|\dot\gamma(t_0)|\;|\dot{\tilde\gamma}(\tilde t_0)|}\quad .$$

Задача-приклад. Розглянемо евклідову площину $\mathbb{E}^2$, що параметризована полярними координатами (u^1,u^2), коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (u^1)^2\end{pmatrix},\quad (u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2_+ = \left\{(u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2 \mid u^1>0\right\}.$$

Розглянемо наступні криві в $\mathbb{E}^2$:

$$\gamma_1\colon\ \begin{cases} u^1 = cost\\ u^2 = \sin t\end{cases},\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});\qquad \gamma_2\colon\ \begin{cases} u^1 = \cos\sigma+\sqrt2\\ u^2 = \sin\sigma\end{cases},\ \sigma\in(0,\pi).$$

Знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими в цій точці.

Розв'язання. Зобразимо задані криві та їх точку перетину, див. рис. 2.

Знаходимо точку перетину P кривих γ_1 і γ_2:

$$\begin{cases}\cos t = \cos\sigma+\sqrt2\\ \sin t = \sin\sigma\end{cases}.$$

Розв'язком буде $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\sigma_0 = \dfrac{3\pi}{4}$. Як наслідок, на координатній площині $\mathbb{R}^2_+$ точка перетину P матиме координати $u^1_0 = \dfrac{1}{\sqrt2}$, $u^2_0 = \dfrac{1}{\sqrt2}$.

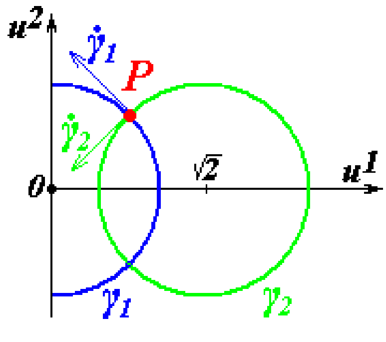

Рис. 2: Криві γ_1 і γ_2

Обчислюємо вектор швидкості кривої γ_1:

$$\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

В точці P маємо

$$\dot\gamma_1(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Обчислюємо вектор швидкості кривої γ_2:

$$\dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} -\sin\sigma \\ \cos\sigma \end{pmatrix}.$$

В точці P маємо

$$\dot\gamma_2(\sigma_0) = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{3\pi}{4} \\ \cos\dfrac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Обчислюємо матрицю коефіцієнтівріманової метрики g в точці P:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u_0^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо скалярні добутки:

$$\langle\dot\gamma_1(t_0), \dot\gamma_2(\sigma_0)\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4},$$

$$|\dot\gamma_1(t_0)|^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4},$$

$$|\dot\gamma_2(\sigma_0)|^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Обчислюємо косинус шуканого кута: $\cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$.

Задача 4.2.1. Розглянемо напівсферу $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r, що параметризована "проєктивними" координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1+(u^2)^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & -\dfrac{u^1u^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \\ -\dfrac{u^1u^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{1+(u^1)^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві, знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими.

1)

$$\gamma_1\colon \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = a \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} u^1 = b \\ u^2 = \sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\gamma_1\colon \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \frac{1}{2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} u^1 = \cos\sigma \\ u^2 = \sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.2.2. Розглянемо сферу $\mathbb{S}^2$ радіуса r, що параметризована "стереографічними" координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві, знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими.

1)

$$\gamma_1\colon \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = a \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} u^1 = b \\ u^2 = \sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\gamma_1\colon \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} u^1 = \cos\sigma \\ u^2 = \sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.2.3. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Келі – Клейна в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-(u^2)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \\ \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{1-(u^1)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві, знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими.

1)

$$\gamma_1\colon\ \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = a \end{cases},\ t \in (-\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-a^2});$$

$$\gamma_2\colon\ \begin{cases} u^1 = b \\ u^2 = \sigma \end{cases},\ \sigma \in (-\sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-b^2}).$$

2)

$$\gamma_1\colon\ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}t \\ u^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases},\ t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \qquad \gamma_2\colon\ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}\cos\sigma \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin\sigma \end{cases},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.2.4. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в одиничному диску $D^2 = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві, знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими.

1)

$$\gamma_1\colon\ \begin{cases} u^1 = 3t \\ u^2 = 3t \end{cases},\ t \in (-1, 1); \qquad \gamma_2\colon\ \begin{cases} u^1 = \rho\cos\sigma \\ u^2 = \rho\sin\sigma \end{cases},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\gamma_1\colon\ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}\cos 3t + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_2\colon\ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}\cos\sigma \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin\sigma \end{cases},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.2.5. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні криві, знайти їх точку перетину та обчислити кут між кривими.

1)

$$\gamma_1\colon \ \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t \end{cases}, \ t \in (0, +\infty); \qquad \gamma_2\colon \ \begin{cases} u^1 = \rho\cos\sigma \\ u^2 = \rho\sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in (0, \pi).$$

2)

$$\gamma_1\colon \ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}, \ t \in (0, \frac{\pi}{2}); \qquad \gamma_2\colon \ \begin{cases} u^1 = \dfrac{1}{2}\cos 5\sigma \\ u^2 = \dfrac{1}{2}\sin 5\sigma \end{cases}, \ \sigma \in (0, \frac{\pi}{5}).$$

4.3 Об'єм / площа області

Припустимо, що на рімановому многовиді (M^m, g) в карті, що відповідає локальним координатам $(u^1, ..., u^m)$, задано область Λ. *Об'єм* (у двовимірному випадку – *площа*) області Ω обчислюється за наступною формулою:

$$Vol(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} \sqrt{\det G}\, du^1 \ldots du^m \ ,$$

де G – матриця коефіцієнтів ріманової метрики g в локальних координатах $(u^1, ..., u^m)$ на многовиді M^m.

Задача-приклад. Розглянемо сферу $\mathbb{S}^2$ радіуса r, що параметризована "географічними" координатами (u^1, u^2) так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u^1 \end{pmatrix}, \ (u^1, u^2) \in \Omega = \left\{ (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi \right\}.$$

Знайти площу області $\Lambda = \left\{ (u^1, u^2) \in \Omega \mid a < u^1 < b, c < u^2 < d \right\}$. Проаналізувати граничну поведінку площі області Λ при $a \to 0$, $b \to \pi$, $c \to 0$, $d \to 2\pi$.

Розв'язання. Намалюємо задану область, див. рис. 3.

Маємо

$$\det G = r^4 \sin^2 u^1.$$

Підставляючи в загальну формулу для площі (двовимірний випадок)

$$Vol(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} \sqrt{\det G}\, du^1\, du^2 \ ,$$

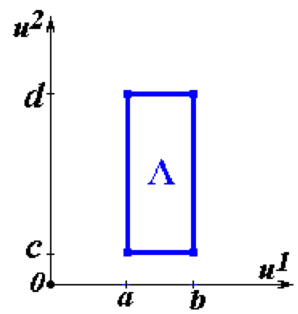

Рис. 3: Область Λ

отримуємо:

$$Vol(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} r^2 \sin u^1\, du^1 du^2 = \int\limits_c^d \int\limits_a^b r^2 \sin u^1\, du^1 du^2 = r^2 (d - c)(\cos a - \cos b)\, .$$

При $a \to 0$, $b \to \pi$, $c \to 0$, $d \to 2\pi$ площа області Λ прямує до $4\pi r^2$. Дійсно, область Λ перетворюється на область Ω, а область Ω як координатна карта покриває усю сферу $\mathbb{S}^2$ за винятком "гринвіцького" меридіана, що задається умовами $0 \leqslant u^1 \leqslant \pi$, $u^2 = 0$. Тому граничним значенням площі області Λ якраз і є площа усієї сфери $\mathbb{S}^2$, що дорівнює $4\pi r^2$.

Аналогічним чином, якщо лише $c \to 0$, $d \to 2\pi$, то область Λ як частина координатної карти Ω на сфері $\mathbb{S}^2$ буде покривати кільце у $\mathbb{S}^2$, що розташоване між двома паралелями $u^1 = a$ і $u^1 = b$ та з розрізом уздовж дуги "гринвіцького" меридіана. Площа такого кільця дорівнює $2\pi r^2(\cos a - \cos b)$.

Так само, якщо лише $a \to 0$, $b \to \pi$, то область Λ як частина координатної карти Ω на сфері $\mathbb{S}^2$ буде покривати сектор на сфері $\mathbb{S}^2$, що розташований між двома меридіанами $u^2 = c$ і $u^2 = d$. Площа такого сферичного сектора дорівнює $2r^2(d - c)$.

Відповідь: Площа області Λ дорівнює $r^2(d - c)(\cos a - \cos b)$.

Задача 4.3.1. Розглянемо напівсферу $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r, що параметризована "проєктивними" координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1+(u^2)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & -\dfrac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \\ -\dfrac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & \dfrac{1+(u^1)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні області та знайти їх площу.

1) $\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R} \mid (u^1)^2 + (u^2) \leqslant \rho^2\right\}$. Проаналізувати граничну поведінку площі області Λ при $\rho \to +\infty$.

2) $\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R} \mid |u^1| < a, |u^2| < b\right\}$. Проаналізувати граничну поведінку площі області Λ при $a \to +\infty$, $b \to +\infty$.

Задача 4.3.2. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Келі – Клейна в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-(u^2)^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} & \dfrac{u^1u^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} \\ \dfrac{u^1u^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} & \dfrac{1-(u^1)^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant \rho^2 < 1\right\}$$

та обчислити її площу.

Задача 4.3.3. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні області й обчислити їх площу.

1) $\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid \ (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant \rho^2 < 1\right\}$

2) $\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid \ (u^1 - 1 + \rho)^2 + (u^2)^2 \leqslant \rho^2 < 1\right\}$

3) $\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid \ (u^1 \pm \sqrt{2})^2 + (u^2)^2 \leqslant 1, (u^1)^2 + (u^2 \pm \sqrt{2})^2 \leqslant 1\right\}$

Задача 4.3.4. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ наступні області й обчислити їх площу.

1) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid a^1 \leqslant u^1 \leqslant b^1, a^2 \leqslant u^2 \leqslant b^2\}$

2) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid u^1 + u^2 \geqslant 0, u^1 - u^2 \leqslant 0, 0 < a \leqslant u^2 \leqslant b\}$

3) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid (u^1 \pm 1)^2 + (u^2)^2 \geqslant 1, (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 4\}$

4) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid a \leqslant u^1 \leq b, u^2 \geqslant c > 0\}$

5) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid u^2 \pm u^1 \geqslant 0, 0 < a^2 \leqslant (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant b^2\}$

6) $\Lambda = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid |u^1| \leqslant c < |a|, 0 < a^2 \leqslant (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant b^2\}$

Задача 4.3.5. Розглянемо сферу $\mathbb{S}^3$ радіуса r, що параметризована "географічними" координатами (u^1, u^2, u^3) на області

$$\Omega = \{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < \pi, 0 < u^3 < 2\pi\}$$

так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 u^1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 \end{pmatrix}.$$

Знайти об'єм області Ω.

4.4 Периметр, сума внутрішніх кутів і площа

Задача 4.4.1. Розглянемо напівсферу $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r, що параметризована “проєктивними” координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1+(u^2)^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & -\dfrac{u^1u^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \\ -\dfrac{u^1u^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{1+(u^1)^2}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R} \mid \ |u^1| \leqslant a, |u^2| \leqslant a\right\}$$

та обчислити її *периметр* (тобто довжину межі), суму внутрішніх кутів та площу.

Задача 4.4.2. Розглянемо сферу $\mathbb{S}^2$ радіуса r, що параметризована “стереографічними” координатами $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ так, що матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{\left(1+(u^1)^2+(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R} \mid \ u^1 \geqslant 0, u^2 \geqslant 0, (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant \rho^2\right\}$$

та обчислити її периметр, суму внутрішніх кутів та площу.

Задача 4.4.3. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Келі – Клейна в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-(u^2)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \\ \dfrac{u^1u^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & \dfrac{1-(u^1)^2}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid \ |u^1| \leqslant a, |u^2| \leqslant a\right\}$$

та обчислити її периметр, суму внутрішніх кутів та площу.

Задача 4.4.4. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в одиничному диску $D^2 = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{\left(1-(u^1)^2-(u^2)^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid u^1 + u^2 \geqslant 0, u^1 - u^2 \geqslant 0, (u^1 - c)^2 + (u^2)^2 \leqslant c^2 - 1\right\}$$

при довільному $c > \sqrt{2}$ та обчислити її суму внутрішніх кутів та площу.

Задача 4.4.5. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\right\}$, коли матриця коефіцієнтів ріманової метрики має вигляд

$$G = r^2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Зобразити у координатній площині $\mathbb{R}^2$ область

$$\Lambda = \left\{(u^1, u^2) \in D^2 \mid -1 \leqslant u^1 \leqslant 1,\ 2 \leqslant (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 4\right\}$$

та обчислити її периметр, суму внутрішніх кутів та площу.

5 Кривина та кручення афінного многовида

Тензори кручення (або *скруту*) T та *кривини* R многовида з *афінною зв'язністю* (M^m, ∇) (тобто з певним правилом ∇ диференціювання одних векторних полів у напрямку інших) визначаються наступними формулами:

$$T(X,Y) \,=\, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\,,$$

$$R(X,Y)Z \,=\, \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

для довільних векторних полів X, Y, Z на многовиді M^m.

Якщо на многовиді M^m задано локальні координати $(u^1,...,u^m)$ і афінна зв'язність ∇ задана набором символів Крістофеля $\left\{\Gamma^k_{ij}(u^1,...,u^m)\right\}_{1\leqslant i,j,k\leqslant m}$, тобто $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j} \,=\, \Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial}{\partial u^k}$ для будь-яких i та j від 1 до m, то для векторних полів $X = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial u^j}$, $Z = Z^k\frac{\partial}{\partial u^k}$ маємо

$$T(X,Y) \,=\, T^k\,X^i\,Y^j\,\frac{\partial}{\partial u^k}\,,$$

$$R(X,Y)Z \,=\, R^l_{ijk}\,X^i\,Y^j\,Z^k\,,$$

де координати T^k_{ij} тензора кручення T і координати R^l_{ijk} тензора кривини R обчислюються за формулами

$$T^k_{ij} \,=\, \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}, \qquad\qquad 1\leqslant i,j,k\leqslant m\,,$$

$$R^l_{ijk} \,=\, \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^n_{jk}\Gamma^l_{in} - \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{jn}\,, \qquad\qquad 1\leqslant i,j,k,l\leqslant m\,.$$

У багатьох джерелах розставляють індекси у компонентів тензора кривини в іншому порядку: $R(X,Y)Z \,=\, R^l_{ijk}\,X^j\,Y^k\,Z^i$, тому попередня формула там відповідним чином змінюється.

Зауважимо, що тензор кручення T завжди є кососиметричним: $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$, зокрема $T^k_{jj} = 0$, для будь-яких i,j,k від 1 до m. Тому при знаходженні цього тензора достатньо обчислити лише коефіцієнти T^k_{ij} з $i<j$, а інші коефіцієнти виписуються без обчислень, лише з урахуванням кососиметричності.

Аналогічно, тензор кривини R завжди є кососиметричним за першою парою індексів: $R^l_{ijk} = -R^l_{jik}$, зокрема $R^l_{jjk} = 0$, для будь-яких i,j,k,l від 1 до m. Тому при знаходженні цього тензора достатньо обчислити лише коефіцієнти R^l_{ijk} з $i<j$, а інші коефіцієнти виписуються без обчислень за допомогою кососиметричності.

Якщо тензор кручення дорівнює нулю, то афінна зв'язність є *симетричною* (або *зв'язністю без кручення*). Якщо тензор кривини дорівнює нулю, то афінна зв'язність є *пласкою*.

Задача-приклад. Розглянемо на двовимірній площині $\mathbb{R}^2$ з координатами (u^1, u^2) афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля

$$\Gamma^1_{11} = 0, \Gamma^1_{12} = u^1, \Gamma^1_{21} = 0, \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = 0, \Gamma^2_{12} = \sin u^1, \Gamma^2_{21} = 0, \Gamma^2_{22} = u^2.$$

1) Обчислити тензор кручення заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона симетричною.

2) Обчислити тензор кривини заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона пласкою.

Розв'язання.

1) Обчислимо коефіцієнти тензора кручення:

$$T^1_{12} = \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} = u^1, \quad T^2_{12} = \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21} = \sin u^1,$$
$$T^1_{21} = -T^1_{12} = -u^1, \quad T^2_{21} = -T^2_{12} = -\sin u^1,$$
$$T^1_{11} = 0, \quad T^2_{11} = 0, \quad T^1_{22} = 0, \quad T^2_{22} = 0.$$

Отже, тензор кручення T не є нульовим, отже задана афінна зв'язність ∇ не є симетричною.

2) Обчислимо коефіцієнти тензора кривини:

$$R^1_{121} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{21}\Gamma^1_{1n} - \Gamma^n_{11}\Gamma^1_{2n} = 0,$$
$$R^1_{122} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{22}\Gamma^1_{1n} - \Gamma^n_{12}\Gamma^1_{2n} = u^1 u^2,$$
$$R^2_{121} = \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{21}\Gamma^2_{1n} - \Gamma^n_{11}\Gamma^2_{2n} = 0,$$
$$R^2_{122} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{22}\Gamma^2_{1n} - \Gamma^n_{12}\Gamma^2_{2n} = 0,$$
$$R^1_{211} = -R^1_{121} = 0, \quad R^1_{212} = -R^1_{122} = -u^1 u^2,$$
$$R^2_{211} = -R^2_{121} = 0, \quad R^2_{212} = -R^2_{122} = 0,$$
$$R^1_{111} = 0, \quad R^1_{112} = 0, \quad R^2_{111} = 0, \quad R^2_{112} = 0,$$
$$R^1_{221} = 0, \quad R^1_{222} = 0, \quad R^2_{221} = 0, \quad R^2_{222} = 0.$$

Відповідь: 1) Коефіцієнти тензора кручення $T^1_{12} = u^1$, $T^1_{21} = -u^1$, $T^2_{12} = \sin u^1$, $T^2_{21} = -\sin u^1$, решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Афінна зв'язність не є симетричною.

2) Коефіцієнти тензора кривини $R^1_{122} = u^1 u^2$, $R^1_{212} = -u^1 u^2$, інші коефіцієнти дорівнюють нулю. Афінна зв'язність не є пласкою.

Задача 5.1. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Обчислити тензор кручення заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона симетричною.

2) Обчислити тензор кривини заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона пласкою.

Задача 5.2. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \operatorname{ctg} u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Обчислити тензор кручення заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона симетричною.

2) Обчислити тензор кривини заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона пласкою.

Задача 5.3. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{11} = \dfrac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{u^2}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Обчислити тензор кручення заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона симетричною.

2) Обчислити тензор кривини заданої афінної зв'язності ∇ і визначити, чи є вона пласкою.

6 Паралельне перенесення на афінному многовиді

Гладке (гладкості C^1) векторне поле X уздовж C^1-гладкої кривої $\gamma\colon (a,b) \to M^m$ у многовиді з афінною зв'язністю (M^m, ∇) є *паралельним* (або *переноситься паралельно*), якщо в кожній точці на кривій γ коваріантна похідна векторного поля X у напрямку вектора швидкості $\dot\gamma$ дорівнює нулю:

$$\nabla_{\dot\gamma} X \equiv 0.$$

Якщо на M^m задано локальні координати $(u^1, ..., u^m)$, афінна зв'язність ∇ представлена набором символів Крістофеля $\left\{\Gamma^k_{ij}(u^1, ..., u^m)\right\}_{1\leqslant i,j,k\leqslant m}$, крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = f^1(t) \\ \quad\vdots \\ u^m = f^m(t) \end{cases},$$

а векторне поле записується у вигляді

$$X \;=\; X^j(t)\,\frac{\partial}{\partial u^j}\,,$$

то умова паралельності векторного поля X уздовж кривої γ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} + \Gamma^1_{ij}\dfrac{df^i}{dt}X^j \equiv 0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dX^m}{dt} + \Gamma^1_{ij}\dfrac{df^i}{dt}X^m \equiv 0 \end{cases},$$

де символи Крістофеля $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(f^1(t), ..., f^m(t))$ обчислені у точках кривої γ.

Якщо на кривій γ в точці $P = \gamma(t_0)$ у дотичному просторі T_PM^m задано вектор $X_0 = X_0^j\frac{\partial}{\partial u^j} = \left(X_0^1, \ldots, X_0^m\right)$ і його потрібно *перенести паралельно* уздовж кривої γ з точки $P = \gamma(t_0)$ в точку $Q = \gamma(t_1)$, то для цього потрібно виписану вище систему диференціальних рівнянь для $X^1(t), \ldots, X^m(t)$ доповнити початковими умовами

$$\begin{cases} X^1(t_0) = X_0^1 \\ \qquad\vdots \\ X^m(t_0) = X_0^m \end{cases},$$

знайти розв'язок $X = X^j(t)\dfrac{\partial}{\partial u^j} = \left(X^1(t), \ldots, X^m(t)\right)$ відповідної задачі Коші, а потім обчислити значення $X_1 = X^j(t_1)\dfrac{\partial}{\partial u^j} = \left(X^1(t_1), \ldots, X^m(t_1)\right)$ – це й буде шуканий вектор у дотичному просторі T_QM^m.

Задача-приклад. Розглянемо на двовимірній площині $\mathbb{R}^2$ з координатами (u^1, u^2) афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля

$$\Gamma^1_{11} = 0, \Gamma^1_{12} = u^1, \Gamma^1_{21} = 0, \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = 0, \Gamma^2_{12} = u^1, \Gamma^2_{21} = 0, \Gamma^2_{22} = u^2.$$

1) Розглянемо криву γ в $\mathbb{R}^2$, що задана параметрично як $u^1 = \cos t$, $u^2 = \sin t$. Побудувати векторне поле X, що переноситься паралельно уздовж кривої γ і в точці $P(t = \dfrac{\pi}{2})$ на кривій γ приймає значення $X_0 = (2, 3)$.

2) Перенести вектор $X_0 = (1, 4) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(3, \sqrt{2})$ в точку $Q(3, -1)$ уздовж кривої γ: $u^1 = 3$.

Розв'язання.

1) Підставивши задану криву γ з $u^1 = \cos t$, $u^2 = \sin t$ в задані символи Крістофеля, отримуємо $\Gamma^1_{12} = \cos t$, $\Gamma^2_{12} = \cos t$, $\Gamma^2_{22} = \sin t$, решта символи Крістофеля дорівнює нулю уздовж кривої γ.

Далі підставимо координатні функції $f^1(t) = \cos t$, $f^2(t) = \sin t$ кривої γ і виписані вище символи Крістофеля в рівняння паралельного перенесення,

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} + \Gamma^1_{11}\dfrac{df^1}{dt}X^1 + \Gamma^1_{12}\dfrac{df^1}{dt}X^2 + \Gamma^1_{21}\dfrac{df^2}{dt}X^1 + \Gamma^1_{22}\dfrac{df^2}{dt}X^2 \equiv 0 \\ \dfrac{dX^2}{dt} + \Gamma^2_{11}\dfrac{df^1}{dt}X^1 + \Gamma^2_{12}\dfrac{df^1}{dt}X^2 + \Gamma^2_{21}\dfrac{df^2}{dt}X^1 + \Gamma^2_{22}\dfrac{df^2}{dt}X^2 \equiv 0 \end{cases}.$$

Отримаємо наступну систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} - \cos t \sin t X^2 \equiv 0 \\ \dfrac{dX^2}{dt} \equiv 0 \end{cases}$$

для двох невідомих функцій $X^1(t)$, $X^2(t)$.

Розв'язуючи систему методами теорії диференціальних рівнянь, отримуємо розв'язок: $X^1(t) = C_1 + \dfrac{C_2}{2}\sin^2 t$, $X^2(t) = C_2$, де C_1, C_2 – довільні константи інтегрування.

Отже, довільне векторне поле, що паралельно переноситься уздовж заданої кривої γ, має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} C_1 + \dfrac{C_2}{2}\sin^2 t \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\sin^2 t \\ 1 \end{pmatrix}$$

За умовою, при $t = \dfrac{\pi}{2}$ знайдене паралельне векторне поле X приймає значення $X_0 = (2, 3)$, тобто

$$\begin{pmatrix} C_1 + \dfrac{C_2}{2}\sin^2 \dfrac{\pi}{2} \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

звідки знаходимо значення констант інтегрування: $C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = 3$.

Таким чином, шукане векторне поле, що паралельно переноситься уздовж заданої кривої γ і приймає задане значення в заданій точці P на кривій γ, має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin^2 t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) Запишемо задану криву γ в параметричному вигляді: $u^1 = 3$, $u^2 = t$. Підставимо в задані символи Крістофеля, отримуємо $\Gamma^1_{12} = 3$, $\Gamma^2_{12} = 3$, $\Gamma^2_{22} = t$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю уздовж кривої γ.

Далі, підставимо координатні функції $f^1(t) = 3$, $f^2(t) = t$ кривої γ і виписані вище символи Крістофеля в рівняння паралельного перенесення,

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} + \Gamma^1_{11}\frac{df^1}{dt}X^1 + \Gamma^1_{12}\frac{df^1}{dt}X^2 + \Gamma^1_{21}\frac{df^2}{dt}X^1 + \Gamma^1_{22}\frac{df^2}{dt}X^2 \equiv 0 \\ \frac{dX^2}{dt} + \Gamma^2_{11}\frac{df^1}{dt}X^1 + \Gamma^2_{12}\frac{df^1}{dt}X^2 + \Gamma^2_{21}\frac{df^2}{dt}X^1 + \Gamma^2_{22}\frac{df^2}{dt}X^2 \equiv 0 \end{cases}.$$

Отримаємо наступну систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} \equiv 0 \\ \frac{dX^2}{dt} + tX^2 \equiv 0 \end{cases}$$

для двох невідомих функцій $X^1(t)$, $X^2(t)$.

Розв'язуючи систему методами теорії диференціальних рівнянь, отримуємо розв'язок: $X^1(t) = C_1$, $X^2(t) = C_2 e^{-\frac{t^2}{2}}$, де C_1, C_2 – константи інтегрування.

Отже, довільне векторне поле, що паралельно переноситься уздовж заданої кривої γ, має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Точці P на кривій γ відповідає $t = \sqrt{2}$, а точці Q відповідає $t = -1$. За умовою, в точці P, тобто при $t = \sqrt{2}$, знайдене паралельне векторне поле X приймає значення $X_0 = (1, 4)$:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 e^{-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

звідки знаходимо значення констант інтегрування: $C_1 = 1$, $C_2 = 4e$.

Підставляючи знайдені константи інтегрування, записуємо відповідне векторне поле, що паралельно переноситься уздовж заданої кривої γ і приймає задане значення X_0 в заданій точці P на кривій γ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4e \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4e^{1-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}.$$

В точці $Q(3,-1)$, тобто при $t=-1$, це векторне поле приймає значення

$$X_Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4e^{1-\frac{(-1)^2}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4e^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, якщо в заданій точці P взяти вектор $X_0 = (1,4)$ в $T_P\mathbb{R}^2$ і перенести його паралельно уздовж заданої кривої γ в задану точку Q, то отримаємо вектор $X_Q = (1, 4e^{\frac{1}{2}})$ в $T_Q\mathbb{R}^2$.

Відповідь: 1) $X = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\sin^2 t \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $X_Q = (1, 4e^{\frac{1}{2}})$.

Задача 6.1. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 = \alpha$, $u^2 = t$ і в точці $P(t = 0)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (1, 4)$, $Y_0 = (1, 0)$, $Z_0 = (0, 2)$.

2) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 = t$, $u^2 = \beta$ і в точці $P(t = 5)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2, 0)$, $Y_0 = (2, 2)$, $Z_0 = (0, 1)$.

3) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 - u^2 = 0$ і в точці $P(\pi, \pi)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2, 0)$, $Y_0 = (0, 4)$, $Z_0 = (-2, 8)$.

4) Перенести вектори $X_0 = (2, 3), Y_0 = (4, 6) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\alpha, 0)$ в точку $Q(\alpha, 2\pi)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^1 = \alpha$.

5) Перенести вектори $X_0 = (3, 1), Y_0 = (6, 2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(1, \beta)$ в точку $Q(4, \beta)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^2 = \beta$.

6) Перенести вектори $X_0 = (-2, 1), Y_0 = (-4, 2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$ в точку $Q(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ уздовж кривої $\gamma\colon u^1 - u^2 = 0$.

7*) Перенести довільний вектор $X_0 = (X_0^1, X_0^2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(1, 0)$ в ту саму точку P уздовж замкненої кривої (криволінійного чотирикутника), що утворена з відрізків ліній $\gamma_1\colon u^2 = 0$, $\gamma_2\colon u^1 = 4$, $\gamma_3\colon u^2 = \dfrac{\pi}{2}$, $\gamma_1\colon u^2 = 1$ (тобто послідовно зробити паралельні перенесення уздовж кожної з чотирьох кривих з однієї точки їх перетину в іншу).

Задача 6.2. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \operatorname{ctg} u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 = \alpha$, $u^2 = t$ і в точці $P(t = 0)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (1, 4)$, $Y_0 = (1, 0)$, $Z_0 = (0, 2)$.

2) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 = t$, $u^2 = \beta$ і в точці $P(t = \dfrac{\pi}{2})$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2, 0)$, $Y_0 = (2, 2)$, $Z_0 = (0, 1)$.

3) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої $\gamma\colon$ $u^1 = u^2$ і в точці $P(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2, 0)$, $Y_0 = (0, 4)$, $Z_0 = (-2, 8)$.

4) Перенести вектори $X_0 = (2, 3), Y_0 = (4, 6) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\alpha, 2)$ в точку $Q(\alpha, 3)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^1 = \alpha$.

5) Перенести вектори $X_0 = (3,1), Y_0 = (6,2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\frac{\pi}{2}, \beta)$ в точку $Q(\frac{\pi}{4}, \beta)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^2 = \beta$.

6) Перенести вектори $X_0 = (-2,1), Y_0 = (-4,2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ в точку $Q(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ уздовж кривої $\gamma\colon u^1 - u^2 = 0$.

7*) Перенести довільний вектор $X_0 = (X_0^1, X_0^2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\frac{\pi}{2}, 0)$ в ту саму точку P уздовж замкненої кривої (криволінійного чотирикутника), що утворена з відрізків ліній $\gamma_1\colon u^1 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_2\colon u^2 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_3\colon u^1 = \alpha$, $\gamma_4\colon u^2 = 0$.

Задача 6.3. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{u^2}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої γ: $u^1 = \alpha$, $u^2 = t$ і в точці $P(t = 1)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (1,4)$, $Y_0 = (1,0)$, $Z_0 = (0,2)$.

2) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої γ: $u^1 = t$, $u^2 = \beta$ і в точці $P(t = 0)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2,0)$, $Y_0 = (2,2)$, $Z_0 = (0,1)$.

3) Побудувати векторні поля X, Y, Z, що переносяться паралельно уздовж кривої γ: $u^1 = au^2 + b$ і в точці $P(a + b, 1)$ на кривій γ приймають значення $X_0 = (2,0)$, $Y_0 = (0,4)$, $Z_0 = (-2,8)$.

4) Перенести вектори $X_0 = (2,3), Y_0 = (4,6) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(\alpha, 2)$ в точку $Q(\alpha, 4)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^1 = \alpha$.

5) Перенести вектори $X_0 = (3,1), Y_0 = (6,2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(0, \beta)$ в точку $Q(3, \beta)$ уздовж кривої $\gamma\colon u^2 = \beta$.

6) Перенести вектори $X_0 = (-2,1), Y_0 = (-4,2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(a+b, 1)$ в точку $Q(2a + b, 2)$ уздовж кривої γ: $u^1 = au^2 + b$.

7*) Перенести довільний вектор $X_0 = (X_0^1, X_0^2) \in T_P\mathbb{R}^2$ з точки $P(0, h)$ в ту саму точку P уздовж замкненої кривої (криволінійного чотирикутника), що утворена з відрізків ліній $\gamma_1\colon u^1 = 0$, $\gamma_2\colon u^2 = H$, $\gamma_3\colon u^1 = b$, $\gamma_4\colon u^2 = h$.

7 Геодезичні лінії афінного многовида

Гладка (гладкості C^2) крива $\gamma\colon (a,b)\to M^m$ у многовиді з афінною зв'язністю (M^m,∇) є *геодезичною лінією*, якщо її вектор швидкості $\dot\gamma$ переноситься паралельно уздовж самої кривої γ, тобто

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\equiv 0.$$

Якщо на M^m задано локальні координати $(u^1,\dots,u^m)$, афінна зв'язність ∇ представлена набором символів Крістофеля $\left\{\Gamma^k_{ij}(u^1,\dots,u^m)\right\}_{1\leqslant i,j,k\leqslant m}$, а крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1=f^1(t)\\ \quad\vdots\\ u^m=f^m(t)\end{cases},$$

то умова геодезичності кривої γ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f^1}{dt^2}+\Gamma^1_{ij}\dfrac{df^i}{dt}\dfrac{df^j}{dt}\equiv 0\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{d^2f^m}{dt^2}+\Gamma^m_{ij}\dfrac{df^i}{dt}\dfrac{df^j}{dt}\equiv 0\end{cases},$$

де символи Крістофеля $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}(f^1(t),\dots,f^m(t))$ обчислені в точках кривої γ.

Якщо на многовиді M^m задано точку P з координатами $\left(u^1_0,\dots,u^m_0\right)$ і вектор $A=A^j\frac{\partial}{\partial u^j}=\left(A^1,\dots,A^m\right)$ в дотичному просторі T_PM^m, то, щоб знайти геодезичну криву у многовиді M^m, що виходить з заданої точки P в напрямку заданого вектора A, потрібно виписану вище систему диференціальних рівнянь для $f^1(t),\dots,f^m(t)$ доповнити початковими умовами

$$\begin{cases} f^1(0)=u^1_0, & \dfrac{df^1}{dt}(0)=A^1\\ & \vdots\\ f^m(0)=u^m_0, & \dfrac{df^m}{dt}(0)=A^m\end{cases}$$

і розв'язати відповідну задачу Коші.

Задача-приклад. Розглянемо на двовимірній площині $\mathbb{R}^2$ з координатами (u^1,u^2) афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля

$$\Gamma^1_{11}=0,\Gamma^1_{12}=u^2,\Gamma^1_{21}=0,\Gamma^1_{22}=0,\quad \Gamma^2_{11}=0,\Gamma^2_{12}=u^1,\Gamma^2_{21}=0,\Gamma^2_{22}=1.$$

1) Знайти геодезичну лінію, що виходить з точки $P(2,1)$ у напрямку вектора $X_0=(0,3)$.

2) Перевірити, чи є геодезичною крива $\gamma\colon u^2-u^1=C$.

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння геодезичних ліній (двовимірний випадок $m = 2$)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f^1}{dt^2} + \Gamma^1_{11}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^1_{12}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \Gamma^1_{21}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^1_{22}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \\ \dfrac{d^2f^2}{dt^2} + \Gamma^2_{11}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^2_{12}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \Gamma^2_{21}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^2_{22}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \end{cases},$$

підставивши задані символи Крістофеля, записані уздовж шуканої кривої

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = f^1(t) \\ u^2 = f^2(t) \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f^1}{dt^2} + f^2\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \\ \dfrac{d^2f^2}{dt^2} + f^1\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \end{cases}.$$

Також маємо початкові умови:

$$\begin{cases} f^1(0) = 2, \quad \dfrac{df^1}{dt}(0) = 0 \\ f^2(0) = 1, \quad \dfrac{df^2}{dt}(0) = 3 \end{cases}.$$

Ця система диференціальних рівнянь разом з початковими даними утворюють задачу Коші, яку розв'язують методами теорії диференціальних рівнянь.

Зокрема, в даному випадку можна проінтегрувати один раз перше рівняння системи $\dfrac{d^2f^1}{dt^2} + f^2\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0$ і отримати $\dfrac{df^1}{dt} = C_1 e^{-\frac{(f^2)^2}{2}}$, де C_1 – довільна константа інтегрування. Застосувавши початкову умову $\dfrac{df^1}{dt}(0) = 0$, знаходимо константу інтегрування $C_1 = 0$. Отже, $\dfrac{df^1}{dt} \equiv 0$. Тому $f^1(t) \equiv C_2 = const$. З початкової умови $f^1(0) = 2$ знаходимо константу інтегрування $C_2 = 2$. Отже, $f^1(t) \equiv 2$.

Далі розглянемо друге рівняння системи, підставивши в нього $f^1(t) \equiv 2$. Отримаємо $\dfrac{d^2f^2}{dt^2} + \dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0$. Розв'язок $f^2(t) = \ln|C_3 t + C_4|$, де C_3, C_4 – довільні константи інтегрування. Застосувавши початкові умови $f^2(0) = 1$, $\dfrac{df^2}{dt}(0) = 3$, знаходимо значення констант інтегрування $C_3 = 3e$, $C_4 = e$ і записуємо розв'язок $f^2(t) = 1 + \ln(3t + 1)$.

Як результат, записуємо параметричне задання шуканої геодезичної кривої

$$\gamma: \quad \begin{cases} u^1 = 2 \\ u^2 = 1 + \ln(3t + 1) \end{cases}, \qquad t \in (-\frac{1}{3}, +\infty).$$

2) Запишемо задану криву $\gamma\colon u^2 - u^1 = C$ в параметричному вигляді:

$$\gamma\colon \quad \begin{cases} u^1 = \varphi(t) \\ u^2 = C + \varphi(t) \end{cases}$$

та підставимо в рівняння геодезичних ліній (при заданих символах Крістофеля, див. пункт 1)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f^1}{dt^2} + f^2 \dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \\ \dfrac{d^2 f^2}{dt^2} + f^1 \dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} \equiv 0 \end{cases}.$$

Отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + (\varphi + C)\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv 0 \\ \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + (\varphi + 1)\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv 0 \end{cases}.$$

Якщо $C \neq 1$, то з виписаних рівнянь отримуємо $\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv 0$, це суперечить регулярності параметризації кривої γ. Тому при $C \neq 1$ задана лінія $\gamma\colon u^2 - u^1 = C$ не є геодезичною.

Якщо ж $C = 1$, то система з двох рівнянь зводиться до одного рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\varphi + 1)\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0.$$

Один раз проінтегрувавши, отримаємо $\dfrac{d\varphi}{dt} = C_1 e^{-\frac{\varphi^2}{2} - \varphi} \neq 0$, де C_1 – довільна ненульова (для забезпечення регулярності кривої γ) константа інтегрування. Проінтегрувавши ще раз, знайдемо розв'язок $\varphi(t)$, який і визначатиме параметричне задання кривої γ як геодезичної лінії.

Відповідь: 1) $\gamma\colon u^1 = 2, u^2 = 1 + \ln(3t + 1)$; 2) лінія $\gamma\colon u^2 - u^1 = C$ є геодезичною тоді й тільки тоді, коли $C = 1$.

Задача 7.1. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(2, \pi)$ в напрямку вектора $X_0 = (3, 0)$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^1 + Cu^2 = 0$.

3) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^1 \cos u^2 = C$, $C \neq 0$.

Задача 7.2. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \operatorname{ctg} u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ в напрямку вектора $X_0 = (-2, 0)$.

2) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, 4)$.

3) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^1 = C$.

4) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^2 = C$.

5) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^1 - u^2 = C$.

Задача 7.3. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$ афінну зв'язність ∇, що представлена символами Крістофеля $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{11} = \dfrac{1}{u^2}$, $\Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{u^2}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю.

1) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(4, 1)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, -1)$.

2) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(1, 4)$ в напрямку вектора $X_0 = (2, 0)$.

3) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^1 = C$.

4) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ u^2 = C$.

5) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ Au^1 + Bu^2 = C$, $A^2 + B^2 \neq 0$.

6) Перевірити, чи є геодезичною лінія $\gamma\colon\ (u^1 - A)^2 + (u^2 - B)^2 = C^2$, $C \neq 0$.

8 Зв'язність Леві-Чивіти, паралельне перенесення і геодезичні лінії ріманового многовида

Для будь-якого ріманового многовида (M^m, g) однозначно визначена *зв'язність Леві-Чивіти* (або *ріманова зв'язність*) ∇. Це афінна зв'язність, яка є симетричною і *узгодженою* з рімановою метрикою g. Узгодженість тут означає, що

$$Z(g(X,Y)) \;=\; g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

для довільних векторних полів X, Y, Z на многовиді M^m, де зліва стоїть похідна функції $g(X,Y)$ на M^m у напрямку поля Z.

Якщо на многовиді M^m задано локальні координати $(u^1, \dots, u^m)$, а ріманова метрика записується у вигляді $g = g_{ij} du^i du^j$, то для символів Крістофеля $\left\{\Gamma^k_{ij}(u^1, ..., u^m)\right\}_{1 \leqslant i,j,k \leqslant m}$ зв'язності Леві-Чивіти умова узгодженості з метрикою має вигляд

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma^l_{ki}\, g_{lj} + \Gamma^l_{kj}\, g_{il}$$

для будь-яких $1 \leqslant i,j,k \leqslant m$. Звідси та з симетричності можна вивести, що самі ці символи Крістофеля обчислюються за формулою

$$\Gamma^k_{ij} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) g^{lk}\;, \qquad\qquad 1 \leqslant i,j,k \leqslant m\;,$$

де g^{lk} – елементи матриці, що обернена до матриці коефіцієнтів ріманової метрики g, тобто $g_{il}\, g^{lk} = \delta^k_i$ для усіх $1 \leqslant i,k \leqslant m$ (тут δ^k_i – *символи Кронекера*, які дорівнюють 1 при $i = k$ та 0 при $i \neq k$).

За замовчуванням, рімановий многовид (M^m, g) завжди наділяється саме зв'язністю Леві-Чивіти, а паралельне перенесення і геодезичні лінії на ньому визначаються саме відносно цієї зв'язності. Завдяки узгодженості зв'язності Леві-Чивіти з рімановою метрикою, при паралельному перенесенні векторів зберігається їх скалярний добуток. Натуральний параметр на геодезичній є тоді *афінним*, тобто параметр t будь-якої геодезичної γ зв'язності Леві-Чивіти пов'язаний з будь-яким її натуральним параметром s перетворенням $t = as + b$, де $a \neq 0$. Зокрема, це означає, що довжина $|\dot\gamma|$ постійна (хоча й не обов'язково дорівнює 1). І навпаки, якщо параметризація γ має такий вигляд (зокрема натуральна), то ця крива у локальних координатах задовольняє рівняння геодезичних для символів Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти тоді й тільки тоді, коли це геодезична. У іншій параметризації ці рівняння можуть не виконуватися навіть для геодезичної.

Задача-приклад. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0$ ріманову метрику $g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти метрики g.

2) Побудувати векторне поле X, що переноситься паралельно уздовж кривої $\gamma\colon\ u^1 = \alpha,\ u^2 = t$ на рімановому многовиді (Ω, g).

3) Перевірити, що лінія $\gamma\colon\ u^2 = \beta$ є геодезичною лінією ріманового многовида (Ω, g).

4) Описати усі векторні поля X, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої $\gamma\colon\ u^1 = t,\ u^2 = \beta$ на рімановому многовиді (Ω, g).

Розв'язання.

1) Запишемо матрицю коефіцієнтів ріманової метрики та обернену до неї матрицю:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^1)^2} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи вказані коефіцієнти, обчислюємо символи Крістофеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1}\right) g^{1k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2}\right) g^{2k},$$

при будь-яких можливих значеннях індексів $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$. Отримуємо:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -u^1, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Знайдені символи Крістофеля й визначають зв'язність Леві-Чивіти заданого ріманового многовида.

2) Підставимо обчислені вище символи Крістофеля в загальні рівняння для знаходження паралельного векторного поля $X = (X^1, X^2)$ уздовж довільної кривої $u^1 = f^1(t)$, $u^2 = f^2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} + \Gamma_{11}^1 \dfrac{df^1}{dt} X^1 + \Gamma_{12}^1 \dfrac{df^1}{dt} X^2 + \Gamma_{21}^1 \dfrac{df^2}{dt} X^1 + \Gamma_{22}^1 \dfrac{df^2}{dt} X^2 = 0 \\ \dfrac{dX^2}{dt} + \Gamma_{11}^2 \dfrac{df^1}{dt} X^1 + \Gamma_{12}^2 \dfrac{df^1}{dt} X^2 + \Gamma_{21}^2 \dfrac{df^2}{dt} X^1 + \Gamma_{22}^2 \dfrac{df^2}{dt} X^2 = 0 \end{cases},$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} - f^1 \dfrac{df^2}{dt} X^2 \equiv 0 \\ \dfrac{dX^2}{dt} + \dfrac{1}{f^1} \dfrac{df^1}{dt} X^2 + \dfrac{1}{f^1} \dfrac{df^2}{dt} X^1 \equiv 0 \end{cases}.$$

Для заданої кривої $\gamma\colon\ u^1 = \alpha,\ u^2 = t$ рівняння приймають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dX^1}{dt} - \alpha X^2 = 0 \\ \dfrac{dX^2}{dt} + \dfrac{1}{\alpha} X^1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язок цієї лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку $X^1 = -\alpha C_1 \cos t + \alpha C_2 \sin t$, $X^2 = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ визначає шукане паралельне векторне поле:

$$X = \begin{pmatrix} -C_1\alpha\cos t + C_2\alpha\sin t \\ C_1\sin t + C_2\cos t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\alpha\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

3) Підставимо обчислені вище символи Крістофеля в загальні рівняння для знаходження геодезичної кривої $u^1 = f^1(t)$, $u^2 = f^2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f^1}{dt^2} + \Gamma^1_{11}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^1_{12}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \Gamma^1_{21}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^1_{22}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2f^2}{dt^2} + \Gamma^2_{11}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^2_{12}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} + \Gamma^2_{21}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^1}{dt} + \Gamma^2_{22}\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} = 0 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f^1}{dt^2} - f^1\dfrac{df^2}{dt}\dfrac{df^2}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2f^2}{dt^2} + 2\dfrac{1}{f^1}\dfrac{df^1}{dt}\dfrac{df^2}{dt} = 0 \end{cases}.$$

Для перевірки геодезичності лінії $u^2 = \beta$ запишемо її в параметричному вигляді $u^1 = \varphi(t)$, $u^2 = \beta$ і підставимо у виписану систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Система має розв'язок $\varphi(t) = C_1 t + C_2$. Отже, при $C_1 \neq 0$ ми отримуємо регулярну параметризацію $u^1 = C_1 t + C_2$, $u^2 = \beta$ заданої кривої γ, що задовольняє рівнянням геодезичних ліній. Таким чином, крива γ є геодезичною лінією ріманового многовида (Ω, g).

Зауважимо, що для розглянутої кривої γ: $u^1 = C_1 t + C_2$, $u^2 = \beta$ маємо:

$$|\dot\gamma|^2 = \left(\frac{df^1}{dt}, \frac{df^2}{dt}\right)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= (C_1, 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (C_1t + C_2)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1^2.$$

Отже, афінний параметр t на геодезичній γ пов'язаний з натуральним параметром s співвідношенням

$$\frac{ds}{dt} = |\dot\gamma| = |C_1|,$$

тобто $s = |C_1|t + s_0$, як і повинно бути: натуральний параметр s на геодезичній γ є афінним.

При розв'язанні задачі можна було не шукати розв'язок згаданої системи диференціальних рівнянь (або доводити його існування), а спочатку параметризувати криву натуральним параметром, а потім просто перевірити, чи виконується при такій параметризації система рівнянь геодезичних ліній.

4) Крива $\gamma:\ u^2 = \beta$ є геодезичною. Запишемо її в параметричному вигляді $u^1 = t$, $u^2 = \beta$. За означенням, одиничне дотичне векторне поле уздовж кривої γ є паралельним уздовж самої кривої. Записуємо дотичне векторне поле:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо довжину $\dot{\gamma}$:

$$|\dot{\gamma}|^2 \;=\; \left(\frac{df^1}{dt}, \frac{df^2}{dt}\right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{df^2}{dt} \end{pmatrix} \;=\; (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Знаходимо одиничне дотичне векторне поле уздовж γ, позначимо його X_1:

$$X_1 = \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далі знайдемо ортогональне до X_1 одиничне векторне поле уздовж кривої γ, позначимо його $X_2 = (X_2^1, X_2^2)$. Записуємо умову ортогональності X_1 та X_2:

$$0 = \langle X_1, X_2 \rangle \;=\; \left(X_1^1, X_1^2\right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2^1 \\ X_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \;(1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_2^1 \\ X_2^2 \end{pmatrix} = X_2^1,$$

тобто $X_2^1 = 0$. Записуємо умову того, що довжина X_2 дорівнює 1:

$$1 = |X_2|^2 \;=\; \left(X_2^1, X_2^2\right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2^1 \\ X_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \;\left(0, X_2^2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ X_2^2 \end{pmatrix} = t^2 (X_2^2)^2,$$

тобто $X_2^2 = \pm\frac{1}{t}$. Отже, в якості X_2 можемо взяти

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

З теореми існування і єдиності паралельних векторних полів випливає, що знайдене векторне поле X_2 уздовж кривої γ є паралельним. Разом з виписаним раніше векторним полем X_1, що теж є паралельним уздовж кривої γ, вони утворюють в кожній точці P на кривій γ ортонормований базис в дотичній площині заданого ріманового многовида.

Будь-яке інше паралельне векторне поле уздовж кривої γ є лінійною комбінацією зі сталими коефіцієнтами отриманих вище векторних полів X_1 і X_2:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dfrac{C_2}{t} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що даний метод побудови паралельних векторних полів уздовж кривої на рімановому многовиді може бути застосований лише у випадку, коли многовид є двовимірним, а крива – геодезичною. В загальному ж випадку слід використовувати метод побудови паралельних векторних полів шляхом розв'язання відповідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, в якій використовуються символи Крістофеля, що відповідають зв'язності Леві-Чивіти заданого ріманового многовида, як робилося у попередньому розділі.

Відповідь: 1) $\Gamma^1_{22} = -u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю; 2) $X = (-C_1\alpha\cos t + C_2\alpha\sin t, C_1\sin t + C_2\cos t)$; 3) крива γ є геодезичною лінією, 4) $X = \left(C_1, \dfrac{C_2}{t}\right)$.

Задача 8.1. Розглянемо двовимірну сферу $\mathbb{S}^2$ радіуса r з рімановою метрикою $g = r^2(du^1)^2 + r^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2$, що визначена в області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\}$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти сфери $\mathbb{S}^2$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = \alpha$ на сфері $\mathbb{S}^2$.

3) Побудувати геодезичну лінію на сфері $\mathbb{S}^2$, що виходить з точки $P(\frac{\pi}{2}, \pi)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, 1)$.

4) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж кривої γ: $u^1 = \alpha$, $u^2 = t$, $0 < t < 2\pi$. Проаналізувати граничні значення побудованих полів при $t \to 0$ і при $t \to 2\pi$.

Задача 8.2. Розглянемо площину Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в інтерпретації Пуанкаре в напівплощині $\mathbb{R}^2_+ = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$ з рімановою метрикою $g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 \cos\alpha + u^2 \sin\alpha = C$.

3) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $(u^1 - a)^2 + (u^2 - b)^2 = c^2$.

4) Побудувати геодезичну лінію в $\mathbb{H}^2$, що виходить з точки $P(0, 1)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, 1)$.

5) Побудувати геодезичну лінію в $\mathbb{H}^2$, що виходить з точки $P(0, 1)$ в напрямку вектора $X_0 = (1, 0)$.

6) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = C$, $u^2 = e^t$.

7) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = c \operatorname{th} t + a$, $u^2 = \frac{c}{\operatorname{ch} t}$.

8*) Розлянемо замкнену ламану γ, що утворена відрізками геодезичних ліній γ_1: $u^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, γ_2: $(u^1)^2 + (u^2)^2 = 3$, γ_3: $u^1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, γ_4: $(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1$. Зафіксуємо вершину ламаної – точку $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2})$. Проаналізувати, яке лінійне відображення $T_P\mathbb{H}^2 \to T_P\mathbb{H}^2$ породжується процесом паралельного перенесення уздовж замкненої ламаної γ з точки P в точку P.

9*) Для фіксованої точки $P(0, h)$ розглянемо сімейство геодезичних ліній $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in [0, 2\pi]}$, кожна з яких виходить з точки $P(0, h)$ у напрямку відповідного вектора $X_\alpha = (\frac{1}{h}\cos\alpha, \frac{1}{h}\sin\alpha)$ в $T_P\mathbb{H}^2$. На кожній з геодезичних γ_α відкладемо дугу PP_α фіксованої довжини ρ. Сімейство точок $\{P_\alpha\}_{\alpha \in [0, 2\pi]}$ утворює спеціальну криву $\tilde{\gamma}$ – геодезичне коло радіуса ρ з центром в точці P. Записати параметричне задання кривої $\tilde{\gamma}$, обчислити її довжину.

10*) Для фіксованої геодезичної γ в площині Лобачевського $\mathbb{H}^2$ через кожну точку P кривої γ проведемо геодезичну лінію ортогонально до γ і відкладемо на ній відрізки PQ_1 і PQ_2 фіксованої довжини ρ. Множини таким чином побудованих точок Q_1 і Q_2 утворюють пару кривих γ_1 і γ_2, що називаються *еквідистантами* геодезичної γ на відстані ρ в площині Лобачевського. Записати задання кривих γ_1 і γ_2.

Задача 8.3. Розглянемо тривимірну сферу $\mathbb{S}^3$ радіуса r з рімановою метрикою $g = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1(du^2)^2 + r^2\sin^2 u^1 \sin^2 u^2(du^3)^2$, що визначена в області $\Omega = \left\{(u^1,u^2,u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < \pi, 0 < u^3 < 2\pi\right\}$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти сфери $\mathbb{S}^3$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = C_1$, $u^2 = C_2$.

3) Перевірити, що крива γ: $u^2 = C_2$, $u^3 = C_3$ є геодезичною лінією.

4) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}, 0)$ в напрямку вектора $X_0 = (1,0,0)$.

5) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^2 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^3 = t$.

6) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^2 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^3 = 0$.

Задача 8.4. Розглянемо тривимірний простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$ в інтерпретації Пуанкаре у півпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \left\{(u^1,u^2,u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^3 > 0\right\}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{r^2}{(u^3)^2}(du^1)^2 + \dfrac{r^2}{(u^3)^2}(du^2)^2 + \dfrac{r^2}{(u^3)^2}(du^3)^2$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

2) Перевірити, що крива γ: $u^1 = C_1$, $u^2 = C_2$ є геодезичною.

3) Перевірити, що крива γ: $\cos\alpha u^1 + \sin\alpha u^2 = 0$, $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = r^2$ є геодезичною.

4) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $\dfrac{u^1 - C_1}{a_1} = \dfrac{u^2 - C_2}{a_2} = \dfrac{u^3}{a_3}$.

5) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(-1,-2,2)$ в напрямку вектора $X_0 = (0,0,-4)$.

6) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = 0$, $u^2 = 0$, $u^3 = e^t$.

7) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = a + r\,\mathrm{th}\,t$, $u^2 = 0$, $u^3 = \dfrac{r}{\mathrm{ch}\,t}$.

8*) Знайти усі геодезичні криві простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$.

Задача 8.5. Розглянемо рімановий многовид – добуток $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1$ з рімановою метрикою $g = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1(du^2)^2 + (du^3)^2$, що визначена в області $\Omega =$

$\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\}$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти ріманового многовида $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = C_1$, $u^3 = C_3$.

3) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$ в напрямку вектора $X_0 = (1, 0, 1)$.

4) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = \frac{\pi}{2}$, $u^2 = t$, $u^3 = 0$.

5) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = \frac{\pi}{2}$, $u^2 = t$, $u^3 = t$.

6*) Знайти усі геодезичні криві ріманового многовида $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1$, використовуючи геодезичні криві сфери $\mathbb{S}^2$ і структуру ріманового добутку многовида $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^1$.

Задача 8.6. Розглянемо рімановий многовид – добуток $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$ з рімановою метрикою $g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2$, що визначена в області $\mathbb{R}^3_+ = \{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\}$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти ріманового многовида $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = C_1$, $u^3 = C_3$.

3) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = a + \operatorname{th} u^3$, $u^2 = \frac{1}{\operatorname{ch} u^3}$.

4) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $u^1 = a$, $u^2 = e^{2u^3}$.

5) Побудувати геодезичну лінію, що виходить з точки $P(3, 2, 4)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, 1, 2)$.

6) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = a$, $u^2 = e^t$, $u^3 = t$.

7*) Знайти усі геодезичні криві ріманового многовида $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$, використовуючи геодезичні криві площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ і структуру ріманового добутку многовида $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$.

Задача 8.7. Розглянемо рімановий многовид Nil з рімановою метрикою $g = (du^1)^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2 - 2u^1 du^2 du^3 + (du^3)^2$, що визначена в $\mathbb{R}^3$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти ріманового многовида Nil.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $\frac{u^1 - C_1}{a_1} = \frac{u^2 - C_2}{a_2} = \frac{u^3 - C_3}{a_3}$.

3) Знайти геодезичну лінію, що виходить з точки $P(0, 0, 0)$ в напрямку вектора $X_0 = (1, 0, 1)$.

4) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = at + b$.

5*) Знайти усі геодезичні криві ріманового многовида Nil. Підказка: довести, що уздовж довільної геодезичної функція $\left(\dfrac{du^1}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{du^2}{dt}\right)^2$ постійна.

Задача 8.8. Розглянемо рімановий многовид Sol з рімановою метрикою $g = e^{2u^3}(du^1)^2 + e^{-2u^3}(du^2)^2 + (du^3)^2$, що визначена в $\mathbb{R}^3$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти ріманового многовида Sol.

2) Перевірити, чи є геодезичною лінією крива γ: $\dfrac{u^1 - C_1}{a_1} = \dfrac{u^2 - C_2}{a_2} = \dfrac{u^3 - C_3}{a_3}$.

3) Знайти геодезичну лінію, що виходить з точки $P(1, -1, 3)$ в напрямку вектора $X_0 = (0, 0, 2)$.

4) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = at + b$.

5*) Знайти усі геодезичні криві ріманового многовида Sol.

Задача 8.9. Розглянемо рімановий многовид $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ з рімановою метрикою $g = \dfrac{2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \dfrac{2}{(u^2)}du^1du^3 + \dfrac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2$, що визначена в напівпросторі $\mathbb{R}^3_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\big\}$.

1) Обчислити символи Крістофеля зв'язності Леві-Чивіти ріманового многовида $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$.

2) Перевірити, що крива γ: $u^1 = C_1$, $u^3 = C_2$ є геодезичною лінією.

3) Перевірити, що крива γ: $u^1 = C_1 + r \operatorname{th} t$, $u^2 = \dfrac{r}{\operatorname{ch} t}$, $u^3 = -2 \operatorname{arctg} e^t + C_2$ є геодезичною лінією.

4) Перевірити, що крива γ: $u^1 = C_1$, $u^2 = C_2$ є геодезичною лінією.

5) Описати усі векторні поля, що переносяться паралельно уздовж геодезичної кривої γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = at + b$.

9 Кривини ріманового многовида

Тензор Рімана (або *тензор ріманової кривини*) ріманового многовида (M^m, g) є 4-лінійною диференціальною формою на M^m, що визначається формулою

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W),$$

де $R(X, Y)Z$ – тензор кривини зв'язності Леві-Чивіти, а X, Y, Z, W – довільні вектори в дотичному просторі $T_P M^m$ у довільній точці $P \in M^m$.

Якщо на многовиді M^m задано локальні координати $(u^1, \ldots, u^m)$, а ріманова метрика записується у вигляді $g = g_{ij} du^i du^j$, то значення тензора Рімана для векторів $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial u^j}$, $Z = Z^k \dfrac{\partial}{\partial u^k}$, $W = W^l \dfrac{\partial}{\partial u^l}$ обчислюються за формулою

$$R(X, Y, Z, W) = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l,$$

де координати тензора Рімана R_{ijkl} обчислюються за формулами

$$R_{ijkl} = R^s_{ijk} g_{sl} = \left(\frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^n_{jk} \Gamma^s_{in} - \Gamma^n_{ik} \Gamma^s_{jn} \right) g_{sl} \ , \qquad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m \ .$$

Знову ж, у літературі часто розставляють індекси у компонентів цього тензора в іншому порядку: $R(X, Y, Z, W) = R_{ijkl} X^k Y^l Z^j W^i$, тому формули змінюються відповідним чином.

Компоненти тензора Рімана мають наступні властивості симетрії та антисиметрії:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m \ .$$

Секційна кривина K ріманового многовида M^m у точці P в напрямку двовимірної площини $\Pi \subset T_P M^m$ визначається формулою

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X) g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \ ,$$

де X, Y – довільна пара векторів, що утворює базис площини Π в $T_P M^m$, тобто така, що ці вектори лінійно незалежні ($K(\Pi)$ не залежить від їх вибору).

В локальних координатах $(u^1, \ldots, u^m)$ на многовиді M^m ця секційна кривина обчислюється за формулою

$$K(\Pi) = \frac{R_{ijkl} X^i Y^j Y^k X^l}{(g_{il} g_{jk} - g_{ij} g_{kl}) X^i Y^j Y^k X^l} \ ,$$

Тензор Річчі Ric ріманового многовида (M^m, g) є симетричною білінійною диференціальною формою – *згорткою* тензора Рімана (M^m, g). Це означає, що у локальних координатах $(u^1, \ldots, u^m)$ на многовиді M^m значення тензора Річчі на парі векторів $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial u^j}$ з дотичного простору $T_P M^m$ у точці $P \in M^m$ записується у вигляді

$$Ric(X,Y) \,=\, Ric_{ij} X^i Y^j \ ,$$

де компоненти Ric_{ij} тензора Річчі обчислюються за формулою

$$Ric_{jk} = R_{ijkl} g^{il} \,=\, R^i_{ijk} \ , \qquad 1 \leqslant j,k \leqslant m \ ,$$

а його симетричність означає, що $Ric_{jk} = Ric_{kj}$ для будь-яких j,k.

Кривина Річчі ρ ріманового многовида M^m в точці P в напрямку вектора $X \neq 0$ з дотичного простору $T_P M^m$ визначається формулою

$$\rho(X) \,=\, \frac{Ric(X,X)}{g(X,X)} \ .$$

Вона дійсно залежить лише від напрямку X, тобто буде такою ж у напрямку вектора λX для будь-якого $\lambda \neq 0$. У локальних координатах $(u^1, \ldots, u^m)$ на многовиді M^m кривина Річчі обчислюється за формулою

$$\rho(X) \,=\, \frac{Ric_{jk} X^j X^k}{g_{jk} X^j X^k} \ .$$

Скалярна кривина s ріманового многовида M^m є функцією, що отримана згорткою тензора Річчі. Це означає, що у локальних координатах $(u^1, \ldots, u^m)$ на многовиді M^m скалярна кривина обчислюється за формулою

$$s \,=\, Ric_{jk} g^{jk} \ .$$

Задача-приклад. Розглянемо на області $\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1\big\} > 0$ ріманову метрику $g = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2$.

1) Обчислити координати тензора Рімана R_{ijkl}.
2) Обчислити координати тензора Річчі Ric_{ij}.
3) Обчислити секційну кривину K уздовж координатних площин.
4) Обчислити кривину Річчі ρ уздовж координатних напрямків.
5) Обчислити скалярну кривину s.

Розв'язання.

Запишемо матрицю коефіцієнтів заданої ріманової метрики і обернену до неї матрицю:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^1)^2} \end{pmatrix}$$

Обчислюємо символи Крістофеля:

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -u^1, \quad \Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{u^1}, \quad \Gamma^2_{22} = 0.$$

Знайдені символи Крістофеля визначають зв'язність Леві-Чивіти заданого ріманового многовида.

1) Обчислимо координати тензора Рімана R_{ijkl}, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant 2$. Враховуючи властивості симетрії та антисиметрії тензора Рімана, в двовимірному випадку потрібно обчислити лише компоненту R_{1212}, оскільки $R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{1212}$, а решта компонент дорівнює нулю. Маємо:

$$R_{1212} \;=\; \left(\frac{\partial \Gamma^s_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^s_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{21}\Gamma^s_{1n} - \Gamma^n_{11}\Gamma^s_{2n}\right) g_{s2} \;=$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^n_{21}\Gamma^2_{1n} - \Gamma^n_{11}\Gamma^2_{2n}\right) g_{22} \;=$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}\right) g_{22} \;=$$

$$= \left(-\frac{1}{(u^1)^2} - 0 + 0 + \frac{1}{(u^1)^2} - 0 - 0\right)(u^1)^2 \;=\; 0.$$

Таким чином, усі координати тензора Рімана дорівнюють 0.

2) Обчислюємо координати Ric_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ тензора Річчі:

$$Ric_{11} = R_{i11l}g^{il} \;=\; R_{1111}g^{11} + R_{1112}g^{12} + R_{2111}g^{21} + R_{2112}g^{22} \;=$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{(u^1)^2} \;= 0,$$

$$Ric_{12} = R_{i12l}g^{il} \;=\; R_{1121}g^{11} + R_{1122}g^{12} + R_{2121}g^{21} + R_{2122}g^{22} \;=$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{(u^1)^2} \;= 0,$$

$$Ric_{21} \;=\; Ric_{12} \;=\; 0,$$

$$Ric_{22} = R_{i22l}g^{il} \;=\; R_{1221}g^{11} + R_{1222}g^{12} + R_{2221}g^{21} + R_{2222}g^{22} \;=$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{(u^1)^2} \;= 0,$$

Отож, усі координати тензора Річчі дорівнюють нулю.

3) У двовимірному випадку маємо одну координатну площину Π_{12}, що натягнута на вектори $e_1 = (1, 0)$ і $e_2 = (0, 1)$. Секційна кривина в напрямку площини Π_{12} дорівнює таким чином

$$K(\Pi_{12}) \;=\; \frac{R_{ijkl}e^i_1 e^j_2 e^k_2 e^l_1}{(g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl})e^i_1 e^j_2 e^k_2 e^l_1} \;=\; \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \;=\; \frac{0}{(u^1)^2} \;= 0.$$

4) Обчислимо кривину Річчі в напрямку координатного вектора $e_1 = (1, 0)$:

$$\rho(e_1) \;=\; \frac{Ric_{jk}e_1^j e_1^k}{g_{jk}e_1^j e_1^k} \;=\; \frac{Ric_{11}}{g_{11}} \;=\; \frac{0}{1} = 0\ .$$

Обчислимо кривину Річчі в напрямку координатного вектора $e_2 = (0, 1)$:

$$\rho(e_2) \;=\; \frac{Ric_{jk}e_2^j e_2^k}{g_{jk}e_2^j e_2^k} \;=\; \frac{Ric_{22}}{g_{22}} \;=\; \frac{0}{(u^1)^2} = 0\ .$$

5) Обчислимо скалярну кривину:

$$s \;=\; Ric_{jk}g^{jk} \;=\; Ric_{11}g^{11} + Ric_{12}g^{12} + Ric_{21}g^{21} + Ric_{22}g^{22} =$$

$$=\; 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot \frac{1}{(u^1)^2} \;=\; 0\,.$$

Відповідь: 1) Координати тензора кривини$R_{ijkl} = 0$, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant 2$, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = 0$, 4) кривина Річчі $\rho(e_1) = 0$, $\rho(e_2) = 0$, 5) скалярна кривина $s = 0$.

Задача 9. Розглянемо наступні ріманові многовиди.
1) Евклідовий простір $\mathbb{E}^m$, декартові координати:

$$g = (du^1)^2 + \ldots + (du^m)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^m$$

2.1) Двовимірна сфера $\mathbb{S}^2$, "географічні" координати:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

2.2) Тривимірна сфера $\mathbb{S}^3$, "географічні" координати:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2 + r^2 \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 (du^3)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1, u^2 < \pi, 0 < u^3 < 2\pi\big\}$$

3.1) Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, модель Пуанкаре у напівплощині:

$$g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2_+ = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\big\}$$

3.2) Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, оріциклічні кординати:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 e^{-2u^1}(du^2)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

3.3) Простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, модель Пуанкаре у напівпросторі:

$$g = \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^2)^2 + \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^3)^2,$$

$$\Omega = \mathbb{R}^m_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^3 > 0\big\}$$

4.1) Добуток двовимірної сфери і евклідової прямої $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2 \sin^2 u^1 (du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$\Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\big\}$$

4.2) Добуток площини Лобачевського і евклідової прямої $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$:

$$g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\big\}$$

5.1) Спеціальна "терстонівська" геометрія Nil:

$$g = (du^1)^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2 - 2u^1 du^2 du^3 + (du^3)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

5.2) Спеціальна "терстонівська" геометрія Sol:

$$e^{2u^3}(du^1)^2 + e^{-2u^3}(du^2)^2 + (du^3)^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$$

5.3) Спеціальна "терстонівська" геометрія $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$:

$$g = \frac{2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{2}{(u^2)}du^1du^3 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \left\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\right\}$$

Для вказаних ріманових многовидів виконати наступне.

1) Обчислити координати тензора Рімана R_{ijkl}.

2) Обчислити координати тензора Річчі Ric_{ij}.

3) Обчислити секційну кривину K уздовж координатних площин.

4) Обчислити кривину Річчі ρ уздовж координатних напрямків.

5) Обчислити скалярну кривину s.

10 Поля Якобі уздовж геодезичних

Поле Якобі J уздовж заданої геодезичної γ, що параметризована натуральним параметром, на рімановому многовиді (M^m, g) є розв'язком *рівняння Якобі*

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}J + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma \;=\; 0,$$

де R – тензор Рімана многовида (M^m, g).

Поля Якобі уздовж γ утворюють $2n$-вимірний векторний простір. Кожне конкретне поле Якобі J однозначним чином визначається значеннями $J(t_0)$ і $\nabla_{\dot\gamma}(t_0)$ у довільній точці $P(t = t_0)$ на геодезичній γ.

Якщо побудувати уздовж γ ортонормовані паралельні векторні поля e_1, ..., e_m і записати шукане поле Якобі J у вигляді

$$J \;=\; J^i e_i\,,$$

то рівняння Якобі записується як система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{d^2J^1}{dt^2} + J^iR(e_i,\dot\gamma,\dot\gamma,e_1) = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{d^2J^m}{dt^2} + J^iR(e_i,\dot\gamma,\dot\gamma,e_m) = 0 \end{cases}$$

для знаходження коефіцієнтів $J^1(t)$, ..., $J^m(t)$, що визначають поле Якобі.

Зокрема, дотичне векторне поле Якобі уздовж геодезичної γ має вигляд

$$J = (at + b)\dot\gamma,$$

де a, b – довільні константи, тому зацікавлення викликає пошук не дотичних, а нормальних векторних полей Якобі уздовж кривої γ, тобто таких, що у кожній точці ортогональні до $\dot\gamma$.

Пара точок на геодезичній γ називаються *спряженими*, якщо існує ненульове поле Якобі J уздовж γ, що обертається в нуль у цій парі точок.

Задача-приклад. Розглянемо на області $\Omega = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 > 0\}$ ріманову метрику $g = (du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2$. Знайти усі поля Якобі уздовж геодезичної лінії γ: $u^1 = t$, $u^2 = \beta$. Проаналізувати наявність спряжених точок на геодезичній лінії γ.

Розв'язання.

Задана лінія γ: $u^1 = t$, $u^2 = \beta$ дійсно є геодезичною кривою, що параметризована натуральним параметром (див. задачу-приклад розділу 8).

Як було встановлено у задачі-прикладі розділу 8, довільне паралельне векторне поле уздовж геодезичної γ має вигляд:

$$X \;=\; \begin{pmatrix} C_1 \\ \dfrac{C_2}{t} \end{pmatrix} \;=\; C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Позначимо базисні паралельні векторні поля уздовж геодезичної γ:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо ортонормованість вказаних базисних векторних полів:

$$g(e_1, e_1) = (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$g(e_1, e_2) = (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} = 0,$$

$$g(e_2, e_2) = \left(0, \frac{1}{t}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що $\dot\gamma = e_1$.

Підставимо обрані вище базисні паралельні векторні поля

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \qquad e_2 = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u^2}$$

і $\dot\gamma = \dfrac{\partial}{\partial u^1}$ у загальні рівняння (при $m = 2$)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 J^1}{dt^2} + J^i R(e_i, \dot\gamma, \dot\gamma, e_1) = 0, \\ \dfrac{d^2 J^2}{dt^2} + J^i R(e_i, \dot\gamma, \dot\gamma, e_2) = 0 \end{cases}$$

для знаходження коефіцієнтів $J^1(t)$, $J^2(t)$ розкладання шуканого поля Якобі по обраному базису $J = J^1 e_1 + J^2 e_2$. Отримаємо, крок за кроком:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 J^1}{dt^2} + J^1 R(e_1, \dot\gamma, \dot\gamma, e_1) + J^2 R(e_2, \dot\gamma, \dot\gamma, e_1) = 0, \\ \dfrac{d^2 J^2}{dt^2} + J^1 R(e_1, \dot\gamma, \dot\gamma, e_2) + J^2 R(e_2, \dot\gamma, \dot\gamma, e_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 J^1}{dt^2} + J^1 R\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}\right) + J^2 R\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial u^2}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2 J^2}{dt^2} + J^1 R\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right) + J^2 R\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial u^2}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 J^1}{dt^2} + J^1 R_{1111} + J^2 \dfrac{1}{t} R_{2111} = 0, \\ \dfrac{d^2 J^2}{dt^2} + J^1 \dfrac{1}{t} R_{1112} + J^2 \dfrac{1}{t^2} R_{2112} = 0 \end{cases}$$

Згадаємо (див. задачу-приклад розділу 9), що для заданого ріманового многовида координати тензора Рімана

$$R_{ijkl} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant 2,$$

в усіх точках многовида, зокрема в точках заданої геодезичної лінії γ.

Підставивши координати тензора Рімана у виписану вище систему диференціальних рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{d^2J^1}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2J^2}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Розв'язком буде

$$\begin{cases} J^1 = C_1t + C_2, \\ J^2 = C_3t + C_4, \end{cases}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи.

Записуємо шукане поле Якобі:

$$J = J^1e_1 + J^2e_2 = (C_1t + C_2)e_1 + (C_3t + C_4)e_2 =$$
$$= (C_1t + C_2)\frac{\partial}{\partial u^1} + (C_3t + C_4)\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u^2} = (C_1t + C_2)\frac{\partial}{\partial u^1} + (C_3 + \frac{C_4}{t})\frac{\partial}{\partial u^2},$$

тобто

$$J = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 \\ C_3 + \dfrac{C_4}{t} \end{pmatrix}$$

Проаналізуємо наявність спряжених точок на заданій геодезичній лінії γ. Нехай якесь поле Якобі (при якихось значеннях констант C_1, C_2, C_3, C_4) уздовж геодезичної γ обертається в нуль в якійсь точці $P(t = t_1)$ кривої γ. Тоді в цьому випадку матимо $C_1t_1 + C_2 = 0$ і $C_3 + \dfrac{C_4}{t_1} = 0$, звідки отримуємо $C_2 = -C_1t_1$ та $C_3 = -\dfrac{C_4}{t_1}$, і тому

$$J = \begin{pmatrix} C_1(t - t_1) \\ C_4(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t_1}) \end{pmatrix}.$$

Якщо б вказане поле Якобі обернулось в нуль ще в якійсь точці $Q(t = t_2)$, що відмінна від $P(t = t_1)$, то тоді б ми мали $C_1 = 0$, $C_4 = 0$, тобто $J \equiv 0$.

Таким чином, уздовж заданої геодезичної лінії γ не існує ненульового поля Якобі, яке б обертались в нуль у двох різних точках на кривій γ. Це означає, що на геодезичній лінії γ не існує спряжених точок.

Відповідь: Загальне поле Якобі уздовж заданої геодезичної лінії γ має вигляд $J = \left(C_1t + C_2, C_3 + \dfrac{C_4}{t}\right)$. На геодезичній лінії γ немає спряжених точок.

Задача 10. Знайти поля Якобі уздовж заданої геодезичної лінії γ на заданому рімановому многовиді (M^m, g).

1.1) Двовимірна евклідова площина $\mathbb{E}^2$, декартові координати:

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

геодезична лінія γ: $u^1 = t\cos\alpha + b^1, u^2 = t\sin\alpha + b^2$

1.2) Тривимірний евклідовий простір $\mathbb{E}^3$, декартові координати:

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2 + (du^3)^2, \quad (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3,$$

геодезична лінія γ: $u^1 = a^1 t + b^1, u^2 = a^2 t + b^2, u^3 = a^3 t + b^3$

2.1) Двовимірна сфера $\mathbb{S}^2$, “географічні” координати:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1 (du^2)^2,$$

$$(u^1, u^2) \in \Omega = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^2 = \dfrac{t}{r}$.

2.2) Тривимірна сфера $\mathbb{S}^3$, “географічні” координати:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1 (du^2)^2 + r^2\sin^2 u^1 \sin^2 u^2 (du^3)^2,$$

$$(u^1, u^2, u^3) \in \Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1, u^2 < \pi, 0 < u^3 < 2\pi\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^2 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^3 = \dfrac{t}{r}$.

3.1) Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, модель Пуанкаре у напівплощині:

$$g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2_+ = \big\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 0\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = a$, $u^2 = e^{\frac{t}{r}}$.

3.2) Простір Лобачевського $\mathbb{H}^3$, модель Пуанкаре у напівпросторі:

$$g = \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^2)^2 + \frac{r^2}{(u^3)^2}(du^3)^2,$$

$$(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^3 > 0\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = a$, $u^2 = b$, $u^3 = e^{\frac{t}{r}}$.

4.1) Добуток двовимірної сфери і евклідової прямої $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$:

$$g = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1 (du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$(u^1, u^2, u^3) \in \Omega = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u^1 < \pi, 0 < u^2 < 2\pi\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = \dfrac{\pi}{2}$, $u^2 = \dfrac{t}{\sqrt{r^2+1}}$, $u^3 = \dfrac{t}{\sqrt{r^2+1}}$.

4.2) Добуток площини Лобачевського і евклідової прямої $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$:

$$g = \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = a$, $u^2 = e^{\frac{t}{\sqrt{r^2+1}}}$, $u^3 = \dfrac{t}{\sqrt{r^2+1}}$.

5.1) Спеціальна "терстонівська" геометрія Nil:

$$g = (du^1)^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2 - 2u^1du^2du^3 + (du^3)^2, \quad (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3,$$

геодезична лінія γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = t$.

5.2) Спеціальна "терстонівська" геометрія Sol:

$$e^{2u^3}(du^1)^2 + e^{-2u^3}(du^2)^2 + (du^3)^2, \quad (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3,$$

геодезична лінія γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = t$.

5.3) Спеціальна "терстонівська" геометрія $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$:

$$g = \frac{2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{2}{(u^2)}du^1du^3 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2 + (du^3)^2,$$

$$(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3_+ = \big\{(u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 > 0\big\},$$

геодезична лінія γ: $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = t$.

Відповіді

Відповідь 2.1: Афінна площина в $\mathbb{E}^3$. Індукована ріманова метрика

$$h = A(du^1)^2 + Bdu^1du^2 + Bdu^2du^1 + C(du^2)^2,$$

де $A = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$, $B = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$, $C = (b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2$.

Відповідь 2.2: Тор Кліфорда $S^1(a) \times S^1(b)$ в $\mathbb{E}^4$, тобто прямий добуток двох кіл радіусів a і b відповідно з центрами в 0 у площинах $\mathbb{R}^2$. Індукована ріманова метрика $h = (du^1)^2 + (du^2)^2$ є метрикою евклідової площини.

Відповідь 2.3: Явно задана напівсфера $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r в $\mathbb{E}^3$. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2\frac{1-(u^2)^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2}(du^1)^2 + r^2\frac{u^1u^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2}du^1du^2 +$$

$$+r^2\frac{u^1u^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2}du^2du^1 + r^2\frac{1-(u^1)^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2}(du^2)^2.$$

Відповідь 2.4: Напівсфера $\mathbb{S}^2_+$ радіуса r в $\mathbb{E}^3$, що параметризована *"проєктивними"* координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2\frac{1+(u^2)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}(du^1)^2 - r^2\frac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}du^1du^2 -$$

$$-r^2\frac{u^1u^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}du^2du^1 + r^2\frac{1+(u^1)^2}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}(du^2)^2.$$

Відповідь 2.5: Сфера $\mathbb{S}^2$ радіуса r в $\mathbb{E}^3$, що параметризована *конформно декартовими* (*"стереографічними"*) координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = \frac{4r^2}{((u^1)^2+(u^2)^2+1)^2}(du^1)^2 + \frac{4r^2}{((u^1)^2+(u^2)^2+1)^2}(du^2)^2.$$

Відповідь 2.6: Двовимірна сфера $\mathbb{S}^2$ радіуса r в $\mathbb{E}^3$, що параметризована *"географічними"* координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1(du^2)^2.$$

Відповідь 2.7: Тривимірна сфера $\mathbb{S}^3$ радіуса r в $\mathbb{E}^4$, що параметризована *"географічними"* координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2(du^1)^2 + r^2\sin^2 u^1(du^2)^2 + r^2\sin^2 u^1\sin^2 u^2(du^3)^2.$$

Відповідь 2.8: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що занурена в $\mathbb{E}^{2,1}$ у вигляді явно заданої верхньої половини (тобто зв'язної компоненти, що обмежує одну з порожнин) двохпорожнинного гіперболоїда. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2\frac{1+(u^2)^2}{1+(u^1)^2+(u^2)^2}(du^1)^2 - r^2\frac{u^1u^2}{1+(u^1)^2+(u^2)^2}du^1du^2 -$$

$$-r^2\frac{u^1u^2}{1+(u^1)^2+(u^2)^2}du^2du^1 + r^2\frac{1+(u^1)^2}{1+(u^1)^2+(u^2)^2}(du^2)^2.$$

Відповідь 2.9: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що занурена в $\mathbb{E}^{2,1}$ у вигляді верхньої половини двохпорожнинного гіперболоїда та параметризована *"проєктивними"* координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2\frac{1-(u^2)^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^1)^2 + r^2\frac{u^1u^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}du^1du^2 +$$

$$+r^2\frac{u^1u^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}du^2du^1 + r^2\frac{1-(u^1)^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^2)^2.$$

Диск $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ з виписаною рімановою метрикою h представляють модель (інтерпретацію) для площини Лобачевського, що називається *моделлю (інтерпретацією) Келі – Клейна.*

Відповідь 2.10: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що занурена в $\mathbb{E}^{2,1}$ у вигляді верхньої половини двохпорожнинного гіперболоїда та параметризована *конформно декартовими* (*"стереографічними"*) координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = \frac{4r^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^1)^2 + \frac{4r^2}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2}(du^2)^2.$$

Диск $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ з виписаною рімановою метрикою h представляють модель (інтерпретацію) для площини Лобачевського, що називається *моделлю (інтерпретацією) Пуанкаре в крузі (диску).*

Відповідь 2.11: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що занурена в $\mathbb{E}^{2,1}$ у вигляді верхньої половини двохпорожнинного гіперболоїда та параметризована *"географічними"* координатами. Індукована ріманова метрика

$$h = r^2(du^1)^2 + r^2\operatorname{sh}^2 u^1(du^2)^2.$$

Відповідь 2.12: Площина де Сіттера dS^2, що реалізована як однопорожнинний гіперболоїд в $\mathbb{E}^{2,1}$, який параметризований *"географічними"* координатами. Індукована псевдоріманова метрика $h = -r^2(du^1)^2 + r^2\operatorname{ch}^2 u^1(du^2)^2$.

Відповідь 2.13: Площина анті де Сіттера AdS^2, що реалізована як однопорожнинний гіперболоїд в $\mathbb{E}^{1,2}$, який параметризований *"географічними"* координатами. Індукована псевдоріманова метрика $h = r^2(du^1)^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2$.

Відповідь 2.14: Евклідова площина $\mathbb{E}^2$, що реалізована в моделі Пуанкаре простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$ як горизонтальна координатна площина (*орісфера*). Індукована ріманова метрика $h = (du^1)^2 + (du^2)^2$.

Відповідь 2.15: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що реалізована в моделі Пуанкаре простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$ як напівсфера з центром на *абсолюті* – горизонтальній координатній площині $v^3 = 0$ (*гіперболічна площина*). Індукована ріманова метрика

$$g = \frac{r^2}{\cos^2 u^1}(du^1)^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 u^1 (du^2)^2.$$

Відповідь 2.16: Евклідова площина $\mathbb{E}^2$, що реалізована в моделі Пуанкаре простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$ як сфера (*орісфера*), що дотична до абсолюта (горизонтальної координатної площини $v^3 = 0$). Індукована ріманова метрика

$$g = r^2 \frac{1}{(1+\cos u^1)^2}(du^1)^2 + r^2 \frac{1-\cos u^1}{1+\cos u^1}(du^2)^2.$$

Відповідь 2.17: Площина Лобачевського $\mathbb{H}^2$, що реалізована в моделі Пуанкаре простору Лобачевського $\mathbb{H}^3$ як накриття вертикального кругового циліндра. Індукована ріманова метрика $g = \dfrac{r^2}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \dfrac{r^2}{(u^2)^2}(du^2)^2$.

Відповідь 2.18: Площина де Сіттера dS^2, що реалізована як "сфера" (точніше, однопорожнинний гіперболоїд) у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{E}^{2,1}$. Індукована псевдоріманова метрика

$$g = -r^2(du^1)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2.$$

Відповідь 2.19: Простір де Сіттера dS^3, що реалізований як "сфера" у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{E}^{3,1}$. Індукована псевдоріманова метрика

$$g = -r^2(du^1)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 \cos^2 u^2 (du^3)^2.$$

Відповідь 2.20: Площина анті де Сіттера AdS^2, що реалізована як "сфера" (однопорожнинний гіперболоїд) у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{E}^{1,2}$. Індукована псевдоріманова метрика

$$g = r^2(du^1)^2 - r^2 \operatorname{ch}^2 u^1 (du^2)^2.$$

Відповідь 2.21: Простір анті де Сіттера AdS^3, що реалізований як "сфера" у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{E}^{1,3}$. Індукована псевдоріманова метрика
$$g = r^2(du^1)^2 - r^2\operatorname{ch}^2 u^1(du^2)^2 - r^2\operatorname{ch}^2 u^1\cos^2 u^2(du^3)^2.$$

Відповідь 3.1: Мова йде про *полярні* координати на $\mathbb{E}^2$, ріманова метрика має вигляд $g = (d\tilde{u}^1)^2 + \tilde{u}^2(d\tilde{u}^2)^2$

Відповідь 3.2: Мова йде про *сферичні* координати на $\mathbb{E}^3$, ріманова метрика має вигляд $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2(d\tilde{u}^2)^2 + (\tilde{u}^1)^2\sin^2\tilde{u}^2(d\tilde{u}^3)^2$

Відповідь 3.3: Мова йде про *циліндричні* координати на $\mathbb{E}^3$, ріманова метрика має вигляд $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2(d\tilde{u}^2)^2 + (d\tilde{u}^3)^2$

Відповідь 3.5: Мова йде про перехід від "стереографічних" координат (u^1, u^2) до "географічних" координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ на сфері $\mathbb{S}^2$, ріманова метрика має вигляд $g = r^2(d\tilde{u}^1)^2 + r^2\sin^2\tilde{u}^1(d\tilde{u}^2)^2$.

Відповідь 3.6: Мова йде про перехід від "географічних" координат (u^1, u^2) до "проєктивних" координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ на напівсфері $\mathbb{S}^2_+$, ріманова метрика має вигляд
$$g = r^2\frac{1+(\tilde{u}^2)^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2}(d\tilde{u}^1)^2 - r^2\frac{\tilde{u}^1\tilde{u}^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2}d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 -$$
$$-r^2\frac{\tilde{u}^1\tilde{u}^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2}d\tilde{u}^2 d\tilde{u}^1 + r^2\frac{1+(\tilde{u}^1)^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2}(du^2)^2, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Відповідь 3.7: Мова йде про перехід від інтерпретації Пуанкаре у верхній напівплощині $\mathbb{R}^2_+$ до інтерпретації Пуанкаре в одиничному диску D^2 для площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$, ріманова метрика має вигляд
$$g = \frac{4r^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}(d\tilde{u}^1)^2 + \frac{4r^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}(d\tilde{u}^2)^2.$$

Відповідь 3.8: Мова йде про перехід від інтерпретації Пуанкаре в одиничному колі до "полярних" координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ на площині Лобачевського $\mathbb{H}^2$, ріманова метрика має вигляд
$$g = r^2(d\tilde{u}^1)^2 + r^2\operatorname{sh}^2\tilde{u}^2(d\tilde{u}^2)^2.$$

Відповідь 3.9: Мова йде про перехід від "полярних" координат в $\mathbb{H}^2$ до інтерпретації Келі – Клейна для площини Лобачевського $\mathbb{H}^2$ в одиничному диску $D^2 = \left\{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2 < 1\right\}$, коли ріманова метрика має вигляд
$$g = r^2\frac{1-(\tilde{u}^2)^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}(d\tilde{u}^1)^2 + r^2\frac{\tilde{u}^1\tilde{u}^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 +$$

$$+r^2\frac{\tilde{u}^1\tilde{u}^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}d\tilde{u}^2d\tilde{u}^1+r^2\frac{1-(\tilde{u}^1)^2}{(1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2)^2}(d\tilde{u}^2)^2.$$

Відповідь 3.10: Шукана заміна координат має вигляд

$$\begin{cases} u^1 &= 2\operatorname{arctg}\dfrac{e^{\tilde{u}^1}-1}{e^{\tilde{u}^1}+1} \\ u^2 &= \tilde{u}^2 \end{cases}.$$

Відповідь 3.11: Шукана заміна координат має вигляд

$$\begin{cases} u^1 &= 2\operatorname{arctg}\frac{\tilde{u}^1}{r} \\ u^2 &= \tilde{u}^2 \end{cases}.$$

Відповідь 4.1.1: 1) $L=r\left(\operatorname{arctg}\dfrac{b}{C}-\operatorname{arctg}\dfrac{a}{C}\right)$,
2) $L=r\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}b)-\operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}a)\right)$, 3) $L=2\pi r\dfrac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}$.

Відповідь 4.1.2: 1) $L=2r\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}b)-\operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}a)\right)$,
2) $L=\dfrac{2r}{\sqrt{\beta^2+1}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\beta^2+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\beta^2+1}\right)$, 3) $L=4\pi r\dfrac{\rho}{1+\rho^2}$.

Відповідь 4.1.3: 1) $L=r(\operatorname{arcth}\dfrac{b}{\sqrt{1-\beta^2}}-\operatorname{arcth}\dfrac{a}{\sqrt{1-\beta^2}})$,
2) $L=r\left(\operatorname{arcth}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}b)-\operatorname{arcth}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}a)\right)$, 3) $L=2\pi r\dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$.

Відповідь 4.1.4: 1) $L=\dfrac{2r}{\sqrt{1-\beta^2}}(\operatorname{arcth}\dfrac{b}{\sqrt{1-\beta^2}}-\operatorname{arcth}\dfrac{a}{\sqrt{1-\beta^2}})$,
2) $L=2r\left(\operatorname{arcth}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}b)-\operatorname{arcth}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}a)\right)$, 3) $L=4\pi r\dfrac{\rho}{1-\rho^2}$,
4) $L=2r(\operatorname{arcth}\dfrac{\sin a(\sqrt{1-\rho^2}-\rho)}{cos(a)+1}-\operatorname{arcth}\dfrac{\sin b(\sqrt{1-\rho^2}-\rho)}{cos(b)+1})$,
5) $L=\dfrac{4\pi r}{1-\rho}(\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2})$.

Відповідь 4.1.5: 1) $L=\dfrac{r}{\beta}(b-a)$, 2) $L=r(\ln b-\ln a)$,
3) $L=\dfrac{r\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}(\ln(\beta b+\beta_0)-\ln(\beta a+\beta_0))$, 4) $L=r(\ln\operatorname{tg}\dfrac{b}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{a}{2})$,
5) $L=2r\dfrac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{(1+\operatorname{tg}\frac{b}{2})(1+\operatorname{tg}\frac{a}{2})}$, 6) $L=\dfrac{2\pi r\rho}{\sqrt{h^2-\rho^2}}$,
7) $L=\dfrac{2r\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}}(\operatorname{arcth}\dfrac{\rho+h\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sqrt{\rho^2-h^2}}-\operatorname{arcth}\dfrac{\rho+h\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sqrt{\rho^2-h^2}})$.

Відповідь 4.2.1: 1) $\cos\varphi = -\dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$, 2) $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Відповідь 4.2.2: 1) $\cos\varphi = 0$, 2) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь 4.2.3: 1) $\cos\varphi = \dfrac{ab}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}$, 2) $\cos\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Відповідь 4.2.4: 1) $\cos\varphi = 0$, 2) $\cos\varphi = 0$.

Відповідь 4.2.5: 1) $\cos\varphi = 0$, 2) $\cos\varphi = 0$.

Відповідь 4.3.1: 1) $Vol(\Lambda) = 2\pi r^2 \dfrac{\sqrt{1+\rho^2}-1}{\sqrt{1+\rho^2}}$,

2) $Vol(\Lambda) = 4r^2 \operatorname{arctg} \dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$.

Відповідь 4.3.2: $Vol(\Lambda) = 2\pi r^2 \dfrac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$.

Відповідь 4.3.3: 1) $Vol(\Lambda) = 4\pi r^2 \dfrac{\rho^2}{1-\rho^2}$, 2) $Vol(\Lambda) = \infty$, 3) $Vol(\Lambda) = 2\pi r^2$.

Відповідь 4.3.4: 1) $Vol(\Lambda) = r^2(b^1-a^1)(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2})$, 2) $Vol(\Lambda) = 2r^2(\ln b - \ln a)$,

3) $Vol(\Lambda) = \pi r^2$, 4) $Vol(\Lambda) = r^2 \dfrac{b-a}{c}$, 5) $Vol(\Lambda) = 2r^2(\ln b - \ln a)$,

6) $Vol(\Lambda) = 2r^2(\operatorname{arctg} \dfrac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} - \operatorname{arctg} \dfrac{c}{\sqrt{b^2-c^2}})$.

Відповідь 4.3.5: $Vol(\Omega) = Vol(S^3) = 2\pi^2 r^3$.

Відповідь 4.4.1: Периметр $P = 8r \operatorname{arctg} \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$,

сума кутів $\Sigma = 4(\pi - \arccos \dfrac{a^2}{\sqrt{1+a^2}})$, площа $A = 4r^2 \operatorname{arctg} \dfrac{a^2}{\sqrt{1+2a^2}}$.

Відповідь 4.4.2: Периметр $P = r(\dfrac{\pi\rho}{1+\rho^2} + 4 \operatorname{arctg} \rho)$, сума кутів $\Sigma = \dfrac{3\pi}{2}$, площа $A = \pi r^2 \dfrac{\rho^2}{1+\rho^2}$.

Відповідь 4.4.3: Периметр $P = 8r \operatorname{arcth} \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,

сума кутів $\Sigma = 4 \arccos \dfrac{a^2}{1-a^2}$, площа $A = 2\pi r^2 - 4r^2 \arccos \dfrac{a^2}{1-a^2}$.

Відповідь 4.4.4: Сума кутів $\Sigma = 2t_0 - \pi$, площа $A = 2r^2(\pi - t_0)$, де $t_0 \in (\dfrac{3\pi}{4}, \pi)$ визначається з умови $\cos t_0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{c+\sqrt{c^2-2}}{\sqrt{c^2-1}}$.

Відповідь 4.4.5: Периметр $P = r\left(2\ln 3 + 2\ln(\sqrt(2)+1)\right)$, сума кутів $\Sigma = \dfrac{11\pi}{6}$, площа $A = \dfrac{\pi}{6}r^2$.

Відповідь 5.1: 1) Тензор кручення $T = 0$, зв'язність симетрична,   2) тензор кривини $R = 0$, зв'язність пласка

Відповідь 5.2: 1) Тензор кручення $T = 0$, зв'язність є симетричною,   2) коефіцієнти тензора кривини $R^1_{122} = -\sin^2 u^1$, $R^1_{212} = \sin^2 u^1$, $R^2_{121} = 1$, $R^2_{211} = -1$, усі інші коефіцієнти дорівнюють нулю, зв'язність не є пласкою.

Відповідь 5.3: 1) Тензор кручення $T = 0$, зв'язність є симетричною,   2) коефіцієнти тензора кривини $R^1_{122} = \dfrac{1}{u^2}$, $R^1_{212} = -\dfrac{1}{u^2}$, $R^2_{121} = -\dfrac{1}{u^2}$, $R^2_{211} = \dfrac{1}{u^2}$, усі інші коефіцієнти дорівнюють нулю, зв'язність не є пласкою.

Відповідь 6.1: 1) Паралельне векторне поле

$$\left(C_1\cos t + C_2\sin t, \frac{C_2}{\alpha}\cos t - \frac{C_1}{\alpha}\sin t\right),$$

2) паралельне векторне поле $\left(C_1, \dfrac{C_2}{t}\right)$,

3) паралельне векторне поле $\left(C_1\cos t + C_2\sin t, \dfrac{C_2}{t}\cos t - \dfrac{C_1}{t}\sin t\right)$.

Відповідь 6.2: 1,4) Паралельне векторне поле

$$\left(C_1\cos(t\cos\alpha) + C_2\sin(t\cos\alpha), \frac{C_2}{\sin\alpha}\cos(t\cos\alpha) - \frac{C_1}{\sin\alpha}\sin(t\cos\alpha)\right),$$

2,5) паралельне векторне поле $\left(C_1, \dfrac{C_1}{\sin t}\right)$,

3,6) паралельне векторне поле

$$\left(C_1\cos(\sin t) + C_2\sin(\sin t), \frac{C_2}{\sin t}\cos(\sin t) - \frac{C_1}{\sin t}\sin(\sin t)\right).$$

Відповідь 6.3: 1,4) Паралельне векторне поле $(C_1 t, C_2 t)$,   2,5) паралельне векторне поле $\left(C_1\cos\dfrac{t}{\beta} + C_2\sin\dfrac{t}{\beta}, C_2\cos\dfrac{t}{\beta} - C_1\sin\dfrac{t}{\beta}\right)$,   3,6) паралельне векторне поле $\left(C_1 t\cos(\dfrac{a}{b}\ln t) + C_2 t\sin(\dfrac{a}{b}\ln t), C_2 t\cos(\dfrac{a}{b}\ln t) - C_1 t\sin(\dfrac{a}{b}\ln t)\right)$.

Відповідь 7.1: 1) Геодезична лінія γ: $u^1 = 3t + 2$, $u^2 = \pi$,   2) лінія є геодезичною лише при $C = 0$,   3) при будь-якому C задана лінія є геодезичною, відповідна параметризація $u^1 = C\sqrt{(C_1 t + C_2)^2 + 1}$, $u^2 = \mathrm{arctg}(C_1 t + C_2)$.

Відповідь 7.2: 1) Геодезична лінія γ: $u^1 = -2t + \frac{\pi}{2}$, $u^2 = \pi$,   2) геодезична лінія γ: $u^1 = \frac{\pi}{2}$, $u^2 = 4t + \pi$,   3) лінія є геодезичною лише при $C = \frac{\pi}{2}$, відповідна параметризація $u^1 = \frac{\pi}{2}$, $u^2 = C_1 t + C_2$,   4) при будь-якому C задана лінія є геодезичною, відповідна параметризація $u^1 = C_1 t + C_2$, $u^2 = C$,   5) яке б не було C, задана лінія не є геодезичною.

Відповідь 7.3: 1) Геодезична лінія γ: $u^1 = 4$, $u^2 = e^{-t}$,   2) геодезична лінія γ: $u^1 = 1 + 4\dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}$, $u^2 = 8\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^t + 1}$,   3) при будь-якому C задана лінія є геодезичною, відповідна параметризація $u^1 = C$, $u^2 = e^{C_1 t + C_2}$, $C_1 \neq 0$,   4) яке б не було C, задана лінія не є геодезичною,   5) лінія є геодезичною лише при $B = 0$, відповідна параметризація $u^1 = \frac{C}{A}$, $u^2 = e^{C_1 t + C_2}$, $C_1 \neq 0$,   6) лінія є геодезичною лише при $B = 0$, відповідна параметризація $u^1 = A + C \cdot \dfrac{e^{tC_1 + C_2} - 1}{e^{tC_1 + C_2} + 1}$, $u^2 = 2C \cdot \dfrac{e^{\frac{1}{2}(tC_1 + C_2)}}{e^{tC_1 + C_2} + 1}$.

Відповідь 8.1: 1) $\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \operatorname{ctg} u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) лінія γ: $u^1 = \alpha$ на сфері $\mathbb{S}^2$ буде геодезичною тоді й тільки тоді, коли $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, 3) геодезична лінія $u^1 = t + \dfrac{\pi}{2}$, $u^2 = \pi$, 4) паралельне векторне поле

$$X = \left(C_1 \cos(t\cos\alpha) + C_2 \sin(t\cos\alpha), \frac{C_2}{\sin\alpha}\cos(t\cos\alpha) - \frac{C_1}{\sin\alpha}\sin(t\cos\alpha) \right),$$

граничні значення $\left(C_1, \dfrac{C_2}{\sin\alpha} \right)$ при $t \to 0$ та

$$\left(C_1 \cos(2\pi\cos\alpha) + C_2 \sin(2\pi\cos\alpha), \frac{C_2}{\sin\alpha}\cos(2\pi\cos\alpha) - \frac{C_1}{\sin\alpha}\sin(2\pi\cos\alpha) \right)$$

при $t \to 2\pi$. Якщо ототожнити граничні точки кривої γ, отримавши замкнену криву – паралель сфери, то в точці склейки P процес паралельного перенесення уздовж замкненої кривої γ породжує лінійне ізометричне перетворення

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \frac{C_2}{\sin\alpha} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \cos(2\pi\cos\alpha) + C_2 \sin(2\pi\cos\alpha) \\ \frac{C_2}{\sin\alpha}\cos(2\pi\cos\alpha) - \frac{C_1}{\sin\alpha}\sin(2\pi\cos\alpha)) \end{pmatrix}$$

в дотичній площині $T_P\mathbb{S}^2$, що описується матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi\cos\alpha) & \sin\alpha\sin(2\pi\cos\alpha) \\ -\frac{1}{\sin\alpha}\sin(2\pi\cos\alpha) & \cos(2\pi\cos\alpha) \end{pmatrix}.$$

Відповідь 8.2: 1) $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{u^1}$, $\Gamma^2_{11} = \dfrac{1}{u^1}$, $\Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю,   2) лінія γ: $u^1\cos\alpha + u^2\sin\alpha = C$ в площині

Лобачевського $\mathbb{H}^2$ буде геодезичною тоді й тільки тоді, коли $\sin\alpha = 0$, 3) лінія γ: $(u^1-a)^2+(u^2-b)^2=c^2$ в площині Лобачевського $\mathbb{H}^2$ буде геодезичною тоді й тільки тоді, коли $b=0$, 4) геодезична лінія $u^1=0$, $u^2=e^t$, 5) геодезична лінія $u^1=\operatorname{th} t$, $u^2=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, 6) паралельне векторне поле $X=(C_1e^t, C_2e^t)$, 7) паралельне векторне поле $X=\left(\dfrac{C_1}{\operatorname{ch}^2 t}+\dfrac{C_2\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, -\dfrac{C_1\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}+\dfrac{C_2}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$, 8*) вектор (X^1,X^2) в $T_P\mathbb{H}^2$ після паралельного перенесення уздовж замкненої ламаної γ перейде у вектор $(X^1,X^2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ в $T_P\mathbb{H}^2$, 9*) $(u^1)^2+(u^2-h\operatorname{ch}\rho)^2 = h^2\operatorname{sh}^2 r$, 10*) якщо геодезична γ задається як $u^1=0$, то еквідистанти γ_1 і γ_2 задаються у вигляді $u^1\pm u^2\operatorname{sh} h=0$.

Відповідь 8.3: 1) $\Gamma^1_{22}=-\sin u^1\cos u^1$, $\Gamma^1_{33}=-\sin u^1\cos u^1\sin^2 u^2$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\operatorname{ctg} u^1$, $\Gamma^2_{33}=-\sin u^2\cos u^2$, $\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\operatorname{ctg} u^1$, $\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\operatorname{ctg} u^2$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) задана лінія буде геодезичною лише при $C_1=C_2=\dfrac{\pi}{2}$, 4) геодезична лінія $u^1=t+\dfrac{\pi}{3}$, $u^2=\dfrac{\pi}{4}$, $u^3=0$, 5) паралельне векторне поле $X=(C_1,C_2,C_3)$, 6) паралельне векторне поле $X=\left(C_1, \dfrac{C_2}{\sin t}, \dfrac{C_3}{\sin t}\right)$.

Відповідь 8.4: 1) $\Gamma^1_{13}=\Gamma^1_{31}=-\frac{1}{u^3}$, $\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=-\frac{1}{u^3}$, $\Gamma^3_{11}=\frac{1}{u^3}$, $\Gamma^3_{22}=\frac{1}{u^3}$, $\Gamma^3_{33}=-\frac{1}{u^3}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 4) задана крива є геодезичною лише при $a_1=a_2=0$, 5) геодезична лінія $u^1=-1$, $u^2=-2$, $u^3=2e^{-2t}$, 6) паралельне векторне поле $X=(C_1e^t, C_2e^t, C_3e^t)$, 7) паралельне векторне поле $X=\left(C_1\dfrac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}+C_3\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, C_2\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}, -C_3\dfrac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}+C_1\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$.

Відповідь 8.5: 1) $\Gamma^1_{22}=-\sin u^1\cos u^1$, $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\operatorname{ctg} u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) лінія γ: $u^1=C_1$, $u^3=C_3$ буде геодезичною тоді й тільки тоді, коли $C_1=\frac{\pi}{2}$, 3) геодезична лінія γ: $u^1=t+\frac{\pi}{2}$, $u^2=0$, $u^3=t+1$, 4, 5) паралельне векторне поле $X=(C_1,C_2,C_3)$, 6*) геодезична лінія представляється або у вигляді $u^1=C_1$, $u^2=C_2$, $u^3=C_3t+C_4$, або у вигляді $u^1=f^1(t)$, $u^2=f^2(t)$, $u^3=C_1t+C_2$, де $u^1=f^1(t)$, $u^2=f^2(t)$ задають геодезичну лінію, що параметризована афінним параметром t, на сфері $\mathbb{S}^2$.

Відповідь 8.6: 1) $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=-\dfrac{1}{u^1}$, $\Gamma^2_{11}=\dfrac{1}{u^1}$, $\Gamma^2_{22}=-\dfrac{1}{u^1}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) лінія $u^1=C_1$, $u^3=C_3$ є геодезичною при будь-яких значеннях констант C_1, C_3, 3) лінія γ: $u^1=a+\operatorname{th} u^3$, $u^2=\dfrac{1}{\operatorname{ch} u^3}$ є геодезичною при будь-якому значенні константи a, 4) лінія γ: $u^1=a$, $u^2=e^{2u^3}$ є геодезичною при будь-якому значенні константи a, 5) геодезична лінія $u^1=3$, $u^2=2e^{\frac{t}{2}}$, $u^3=2t+4$, 6) паралельне векторне поле $X=(C_1e^t, C_2e^t, C_3)$, 7*) геодезична лінія представляється або у вигляді $u^1=C_1$, $u^2=C_2$, $u^3=C_3t+C_4$, або у вигляді $u^1 = f^1(t)$, $u^2 = f^2(t)$, $u^3 = C_1 t + C_2$, де $u^1 = f^1(t)$, $u^2 = f^2(t)$ задають геодезичну лінію, що параметризована афінним параметром t, у площині Лобачевського $\mathbb{H}^2$.

Відповідь 8.7: 1) $\Gamma^1_{22} = -u^1$, $\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{u^1}{2}$, $\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\frac{1}{2}$, $\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \frac{u^1}{2}((u^1)^2 - 1)$, $\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = -\frac{1}{2}u^1$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) лінія γ: $\frac{u^1 - C_1}{a_1} = \frac{u^2 - C_2}{a_2} = \frac{u^3 - C_3}{a_3}$ є геодезичною тоді й тільки тоді, коли $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, 3) геодезична лінія γ: $u^1 = \sin t$, $u^2 = 1 - \cos t$, $u^3 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\cos t \sin t$, 4) паралельне векторне поле

$$X = \left(C_2 \sin\frac{at}{2} + C_3 \cos\frac{at}{2}, -C_2 \cos\frac{at}{2} + C_3 \sin\frac{at}{2}, -pC_2 \cos\frac{at}{2} + pC_3 \sin\frac{at}{2} + C_1\right),$$

5*) геодезична лінія представляється або у вигляді $u^1 = C_1 \sin t + C_2$, $u^2 = -C_1 \cos t + C_3$, $u^3 = -\frac{1}{2}C_1^2 \cos t \sin t + \frac{1}{2}C_1^2 t - C_1 C_2 \cos t + t + C_4$, або у вигляді $u^1 = C_1 t \cos C_2 + C_3$, $u^2 = C_1 t \sin C_2 + C_4$, $u^3 = C_1 \sin C_2 \left(\frac{1}{2}C_1 t^2 \cos C_2 + C_3 t\right)$, або у вигляді $u^1 = C_1$, $u^2 = C_2$, $u^3 = C_3 t + C_4$.

Відповідь 8.8: 1) $\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 1$, $\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = -1$, $\Gamma^3_{11} = -e^{2u^3}$, $\Gamma^3_{22} = e^{-2u^3}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 2) лінія γ є геодезичною тоді й тільки тоді, коли $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, 3) геодезична лінія γ: $u^1 = 1$, $u^2 = -1$, $u^3 = 2t + 3$, 4) паралельне векторне поле $X = (C_1 e^{-at}, C_2 e^{at}, C_3)$, 5*) геодезична лінія представляється у вигляді $u^1 = C_1 \int e^{-2\varphi} dt + C_2$, $u^2 = C_3 \int e^{2\varphi} dt + C_4$, $u^3 = \varphi$, де φ – розв'язок рівняння $\frac{d^2\varphi}{dt^2} - C_1^2 e^{-2\varphi} + C_3^2 e^{2\varphi} = 0$.

Відповідь 8.9: 1) $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{-3}{2u^2}$, $\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\frac{1}{2}$, $\Gamma^2_{11} = \frac{2}{u^2}$, $\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \frac{1}{2}$, $\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{u^2}$, $\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \frac{1}{(u^2)^2}$, $\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2u^2}$, інші символи Крістофеля дорівнюють нулю, 5) паралельне векторне поле

$$X = \left(-C_2 \cos\frac{at}{2} + C_3 \sin\frac{at}{2}, C_2 \sin\frac{at}{2} + C_3 \cos\frac{at}{2}, \frac{C_2}{q}\cos\frac{at}{2} - \frac{C_3}{q}\sin\frac{at}{2} + C_1\right).$$

Відповідь 9.1: 1) Координати тензора Рімана $R_{ijkl} = 0$, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = 0$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = 0$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = 0$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = 0$, 5) скалярна кривина $s = 0$.

Відповідь 9.2.1: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = r^2 \sin^2 u^1$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі

$Ric_{ij} = \frac{1}{r^2} g_{ij}$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = \frac{1}{r^2}$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = \frac{1}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = \frac{1}{r^2}$, 5) скалярна кривина $s = \frac{2}{r^2}$.

Відповідь 9.2.2: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = r^2 \sin^2 u^1$, $R_{1331} = R_{3113} = -R_{1313} = -R_{3131} = r^2 \sin^2 u^1 \sin^2 u^2$, $R_{2332} = R_{3223} = -R_{2323} = -R_{3232} = r^2 \sin^4 u^1 \sin^2 u^2$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = \frac{2}{r^2} g_{ij}$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = \frac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{13}) = \frac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{23}) = \frac{1}{r^2}$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = \frac{2}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = \frac{2}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^3}) = \frac{2}{r^2}$, 5) скалярна кривина $s = \frac{6}{r^2}$.

Відповідь 9.3.1: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\frac{r^2}{(u^2)^4}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = -\frac{1}{r^2} g_{ij}$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = -\frac{1}{r^2}$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = -\frac{1}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = -\frac{1}{r^2}$, 5) скалярна кривина $s = -\frac{2}{r^2}$.

Відповідь 9.3.2: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -r^2 e^{-2u^1}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = -\frac{1}{r^2} g_{ij}$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = -\frac{1}{r^2}$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = -\frac{1}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = -\frac{1}{r^2}$, 5) скалярна кривина $s = -\frac{2}{r^2}$.

Відповідь 9.3.3: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\frac{r^2}{(u^2)^4}$, $R_{1331} = R_{3113} = -R_{1313} = -R_{3131} = -\frac{r^2}{(u^2)^4}$, $R_{2332} = R_{3223} = -R_{2323} = -R_{3232} = -\frac{r^2}{(u^2)^4}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{ij} = -\frac{2}{r^2} g_{ij}$, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = -\frac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{13}) = -\frac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{23}) = -\frac{1}{r^2}$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = -\frac{2}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = -\frac{2}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^3}) = -\frac{2}{r^2}$, 5) скалярна кривина $s = -\frac{6}{r^2}$

Відповідь 9.4.1: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = r^2 \sin^2 u^1$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{11} = 1$, $Ric_{22} = \sin^2 u^1$, усі інші дорівнюють нулю, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = \frac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{13}) = 0$, $K(\Pi_{23}) = 0$, 4) кривина Річчі $\rho(\frac{\partial}{\partial u^1}) = \frac{1}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^2}) = \frac{1}{r^2}$, $\rho(\frac{\partial}{\partial u^3}) = 0$, 5) скалярна кривина $s = \frac{2}{r^2}$.

Відповідь 9.4.2: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\dfrac{r^2}{(u^2)^4}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{11} = -\dfrac{1}{(u^2)^2}$, $Ric_{22} = -\dfrac{1}{(u^2)^2}$, усі інші дорівнюють нулю, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = -\dfrac{1}{r^2}$, $K(\Pi_{13}) = 0$, $K(\Pi_{23}) = 0$, 4) кривина Річчі $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^1}) = -\dfrac{1}{r^2}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^2}) = -\dfrac{1}{r^2}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^3}) = 0$, 5) скалярна кривина $s = -\dfrac{2}{r^2}$.

Відповідь 9.5.1: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = \dfrac{1}{4}(u^1)^2 - \dfrac{3}{4}$, $R_{1331} = R_{3113} = -R_{1313} = -R_{3131} = \dfrac{1}{4}$, $R_{2332} = R_{3223} = -R_{2323} = -R_{3232} = \dfrac{1}{4}$, $R_{2113} = R_{1321} = R_{1231} = R_{3112} = -R_{1213} = -R_{2131} = -R_{3121} = -R_{1312} = -\dfrac{1}{4}u^1$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{11} = -\dfrac{1}{2}$, $Ric_{22} = \dfrac{1}{2}(u^1)^2 - \dfrac{1}{2}$, $Ric_{23} = -\dfrac{1}{2}u^1$, $Ric_{33} = \dfrac{1}{2}$, усі інші дорівнюють нулю, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = \dfrac{1}{4}\dfrac{(u^1)^2 - 3}{(u^1)^2 + 1}$, $K(\Pi_{13}) = \dfrac{1}{4}$, $K(\Pi_{23}) = \dfrac{1}{4}$, 4) кривина Річчі $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^1}) = -\dfrac{1}{2}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^2}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u^1)^2 - 1}{(u^1)^2 + 1}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^3}) = \dfrac{1}{2}$, 5) скалярна кривина $s = -\dfrac{1}{2}$.

Відповідь 9.5.2: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = 1$, $R_{1331} = R_{3113} = -R_{1313} = -R_{3131} = -e^{2u^3}$, $R_{2332} = R_{3223} = -R_{2323} = -R_{3232} = -e^{-2u^3}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{33} = -2$, усі інші дорівнюють нулю, 3) секційна кривина $K(\Pi_{12}) = 1$, $K(\Pi_{13}) = -1$, $K(\Pi_{23}) = -1$, 4) кривина Річчі $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^1}) = 0$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^2}) = 0$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^3}) = -2$, 5) скалярна кривина $s = -2$.

Відповідь 9.5.3: 1) Координати тензора Рімана $R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = -\dfrac{3}{2(u^2)^4}$, $R_{1331} = R_{3113} = -R_{1313} = -R_{3131} = \dfrac{1}{4(u^2)^2}$, $R_{2332} = R_{3223} = -R_{2323} = -R_{3232} = \dfrac{1}{4(u^2)^2}$, $R_{2123} = R_{1232} = R_{2321} = R_{3212} = -R_{1223} = -R_{2132} = -R_{2312} = -R_{3221} = -\dfrac{1}{4(u^2)^3}$, усі інші дорівнюють нулю, 2) координати тензора Річчі $Ric_{11} = -\dfrac{1}{(u^2)^2}$, $Ric_{22} = -\dfrac{3}{2(u^2)^2}$, $Ric_{13} = \dfrac{1}{2u^2}$, $Ric_{33} = \dfrac{1}{2}$, усі інші дорівнюють нулю, 3)секційна кривина $K(\Pi_{12}) = -\dfrac{3}{4}$, $K(\Pi_{13}) = \dfrac{1}{4}$, $K(\Pi_{23}) = \dfrac{1}{4}$, 4) кривина Річчі $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^1}) = -\dfrac{1}{2}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^2}) = -\dfrac{3}{2}$, $\rho(\dfrac{\partial}{\partial u^3}) = \dfrac{1}{2}$, 5) скалярна кривина

$s = -\dfrac{5}{2}$.

Відповідь 10.1.1: Загальне поле Якобі $J = (C_1 t + C_2, C_3 t + C_4)$, спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.1.2: Загальне поле Якобі $J = (C_1 t + C_2, C_3 t + C_4, C_5 t + C_6)$, спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.2.1: Загальне поле Якобі $J = \left(C_1 \cos \frac{t}{r} + C_2 \sin \frac{t}{r}, C_3 t + C_4\right)$. Для кожної точки P на геодезичній γ спряженими будуть точки Q такі, що довжина дуги PQ геодезичної γ є кратною πr.

Відповідь 10.2.2: Загальне поле Якобі

$$J = \left(C_1 \cos \frac{t}{r} + C_2 \sin \frac{t}{r}, C_3 \cos \frac{t}{r} + C_4 \sin \frac{t}{r}, C_5 t + C_6\right).$$

Для кожної точки P на геодезичній γ спряженими будуть точки Q такі, що довжина дуги PQ геодезичної γ є кратною до πr.

Відповідь 10.3.1: Загальне поле Якобі

$$J = e^{\frac{t}{r}} \cdot \left(C_1 e^{\frac{t}{r}} + C_2 e^{-\frac{t}{r}}, C_3 t + C4\right),$$

спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.3.2: Загальне поле Якобі

$$J = e^{\frac{t}{r}} \cdot \left(C_1 e^{\frac{t}{r}} + C_2 e^{-\frac{t}{r}}, C_3 e^{\frac{t}{r}} + C_4 e^{-\frac{t}{r}}, C_5 t + C_6\right),$$

спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.4.1: Загальне поле Якобі

$$J = \left(C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+1}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+1}}, C_3 t + C_4, C_5 t + C_6\right).$$

Для кожної точки P на геодезичній γ спряженими будуть точки Q такі, що довжина дуги PQ геодезичної γ є кратною до $\pi\sqrt{r^2+1}$.

Відповідь 10.4.2: Загальне поле Якобі

$$J = e^{\frac{t}{r}} \cdot \left(C_1 e^{\frac{t}{r}} + C_2 e^{-\frac{t}{r}}, C_3 t + C_4, C_5 t + C_6\right),$$

спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.5.1: Загальне поле Якобі

$$J = (C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3, -C_2 \cos t + C_1 \sin t + C_4,$$

$$C_1 p \sin t - C_2 p \cos t + C_5 t + C_6).$$

Для кожної точки P на геодезичній γ спряженими будуть точки Q такі, що довжина дуги PQ геодезичної γ є кратною до π.

Відповідь 10.5.2: Загальне поле Якобі

$$J = \left(C_1 + C_2 e^{-2t}, C_3 e^{2t} + C_4, C_5 t + C_6\right),$$

спряжені точки на геодезичній γ відсутні.

Відповідь 10.5.3: Загальне поле Якобі

$$J = \Bigg(C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3, -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_4,$$

$$-\frac{C_1}{q} \cos t - \frac{C_2}{q} \sin t + C_5 t + C_6\Bigg).$$

Для кожної точки P на геодезичній γ спряженими будуть точки Q такі, що довжина дуги PQ геодезичної γ є кратною до π.

Список рекомендованої літератури

[1] Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. – Харків: Основа, 1995. – 209 с.

[2] Berger M. A panoramic view of Riemannian geometry. – Springer, 2003. – 824 p.

[3] Lee J.M. Introduction to Riemannian manifolds. – Springer, 2018. – 437 p.

[4] Peterson P. Riemannian geometry. – Springer, 2006. – 405 p.

Навчальне видання

Горькавий Василь Олексійович
Петров Євген В'ячеславович

РІМАНОВА ГЕОМЕТРІЯ
Елементарні задачі та методи розв'язання

Навчально-методичний посібник

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання *В.О. Горькавий, Є.В. Петров*

Формат 64x80/16. Ум. друк. арк. 4,78. Наклад 50 пр. Зам. № 162/24

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна