



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ**

**УКРАИНСКАЯ ИНЖЕНЕРНО –
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ**

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, О.О. Литвин, Ю.И. Першина, Ю.И. Созонов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

**Учебно-методическое пособие по самостоятельной работе
для иностранных студентов всех специальностей**

ХАРЬКОВ 2011

УДК 51(075.8)

ББК 22.11я 73

В 93

Высшая математика. Часть 1. Учебно-методическое пособие по самостоятельной работе для иностранных студентов всех специальностей / Составители: О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, О.О. Литвин, Ю.И. Першина, Ю.И. Созонов. – Харьков, УИПА, 2011. – 41с.

Предлагаемое учебно–методическое пособие “Высшая математика. Часть 1” подготовлено для иностранных студентов всех специальностей с целью помочь им успешно овладеть курсом высшей математики, с учётом уровня подготовки по элементарной математике и наличия языкового барьера. Часть 1 содержит теоретический материал по разделам “Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия“, который иллюстрируется большим количеством заданий с решениями, сопровождаемыми подробными объяснениями. Оригинальное изложение позволяет студентам глубже вникать в изучаемый материал, а преподавателю контролировать степень его усвоения.

Ответственный за выпуск к. ф.-м. н., приват - проф. Л.С. Лобанова

Рецензент: Кириченко И.К., д. ф.-м. н., проф.

© О.Н. Литвин, 2011

© Л.С.Лобанова, 2011

© О.О. Литвин, 2011

© Ю.И. Першина, 2011

© Ю.И. Созонов, 2011

© УИПА. 2011

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ**

**УКРАИНСКАЯ ИНЖЕНЕРНО – ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, О.О. Литвин, Ю.И. Першина, Ю.И. Созонов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

**Учебно-методическое пособие по самостоятельной работе
для иностранных студентов всех специальностей**

**Утверждено
Научно методическим Советом
Украинской инженерно-
педагогической академии как
учебно-методическое пособие
для иностранных студентов
всех специальностей
Протокол № 1 от 13.09.2011**

Харьков 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Элементы линейной алгебры	5
1.1. Матрицы	5
1.2. Определители	13
1.3. Системы линейных алгебраических уравнений.	29
Раздел II. Элементы векторной алгебры	41
2.1. Основные понятия	41
2.2. Произведения векторов	44
2.2.1. Скалярное произведение векторов	44
2.2.2. Векторное произведение векторов	45
2.2.3. Смешанное произведение векторов	47
Раздел III. Аналитическая геометрия.	52
3.1. Прямые и плоскости.	52
3.1.1. Плоскость в пространстве	52
3.1.2. Прямая в пространстве	54
3.1.3. Прямая на плоскости	56
3.2. Кривые второго порядка	66
3.2.1. Эллипс	67
3.2.2. Гипербола	68
3.2.3. Парабола	69
Задания для контрольных и индивидуальных расчетных работ.	73
Ответы на задания для контрольных и индивидуальных расчетных работ	94

Раздел I. Элементы линейной алгебры

Аппарат линейной и, в частности, матричной алгебры является необходимым инструментом компактного и эффективного описания и анализа процессов различной природы (физических, механических, социально-экономических и т.п.), то есть математического моделирования. Ниже в сжатом виде приведены сведения из линейной алгебры, необходимые для дальнейшего изучения курса высшей математики, а также других фундаментальных и прикладных дисциплин (физики, механики, теоретических основ электротехники и т.п.).

1.1. Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел (или других объектов, например, функций), что содержит m строк и n столбцов. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами ($A, B, C, \dots$), а их элементы соответствующими маленькими буквами.

$$\text{Например, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или, } A_{m \times n} \text{ где } a_{ij} \text{ (} i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \text{) -}$$

элементы матрицы; отметим, что первый индекс обозначает номер строки, а второй индекс — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Кроме круглых скобок, используются и другие обозначения: $[]$, $\| \|$.

$$\text{Например, } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 10 & 23 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 31 & -3 & -3 \\ 2 & 25 & -14 \end{bmatrix}, C = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \\ 5 & 8 \end{matrix} \right\|, D = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$, то есть матрица имеет одинаковое количество строк и столбцов, ее называют квадратной матрицей порядка n .

Отметим, что квадратная матрица первого порядка это число.

Матрица называется нулевой, если все ее элементы равняются нулю. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, которые не лежат на главной диагонали, равняются нулю.

Диагональная матрица, у которой все элементы, которые лежат на главной диагонали, равняются единице, называется единичной и обозначается, как правило, буквой E .

Классификация матриц

Если $m = 1$, $A_{1 \times n} = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \cdots \ a_{1n})$ - матрица - строка размера n.	то	Если $n = 1$, то $A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ - матрица-толбец размера m
Если $m = n$, то $A_{n \times n} = A_n$ - квадратная матрица n-го порядка:		

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $a_{ij} = 0$, при $i \neq j$, то $A_n = D$ - диагональная матрица:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \cdots \ a_{nn}).$$

Если $a_{ij} = 0, i \neq j$ и $a_{ij} = 1, i = j$, то $A_n = E_n$ (или E)- единичная матрица n -го

порядка: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

Если $a_{ij} = 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$, то $A_{m \times n} = O$ - нулевая матрица или нуль-матрица:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ равны $A = B$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$, то есть все их соответствующие элементы равны между собой.

► Запишите определение матрицы, квадратной матрицы, диагональной матрицы и единичной матрицы.

► Приведите примеры следующих матриц: а) квадратная матрица второго порядка; б) диагональная матрица четвертого порядка; с) единичная матрица третьего порядка; d) матрица размера 3×4 ; е) матрица размера 4×1 ; f) матрица размера 1×5 .

Операции над матрицами.

1. Произведением λA числа λ на матрицу $A_{m \times n} = (a_{ij})$ (или произведением матрицы $A_{m \times n}$ на число λ) называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$, у которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)

В частности $0 \cdot A = O$.

Примечание. Умножать на число можно любую матрицу.

2. Суммой $A + B$ матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

По определению $A - B = A + (-1)B$.

Примечание. Складывать (вычитать) матрицы можно только одинаковой структуры, то есть такие матрицы, у которых количество строк первой матрицы

совпадает с количеством строк второй матрицы и количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством столбцов второй матрицы .

3. Произведением AB матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k} = (c_{ij})$, элемент которой $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k}$), то есть элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A и соответствующих элементов j -го столбца матрицы B . Из этого определения следует, что матрицу A можно умножить на матрицу B лишь при условии, что матрица A согласована с матрицей, а именно: количество n столбцов матрицы A совпадает с количеством n строк матрицы B .

Примечание. Отметим, что в общем случае $AB \neq BA$, то есть умножение матриц не является коммутативным (матрицы A и B при вычислении произведения нельзя менять местами).

В частном случае, $AE = EA = A$, где E – единичная матрица.

По определению $A^2 = A \cdot A$; $A^3 = A \cdot A \cdot A$; $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ множителей}}$ (k – целое

положительное число); $A^0 = E$.

Действительным алгебраическим многочленом степени n от переменной x называется функция

$$P_n(x) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ действительные числа, n – целое неотрицательное число.

Например, многочлены первой, второй и третьей степени соответственно имеют вид

$$P_1(x) = a_0 x + a_1, \quad P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \quad P_3(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Отметим, что индекс в обозначении многочлена часто не указывают.

Многочленом от матрицы A называется выражение

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E,$$

где E – единичная матрица.

► Запишите правила сложения и умножения двух матриц, а также правило умножения матрицы на число.

► Запишите условия, при выполнении которых можно сложить или вычесть матрицы A и B , можно умножить матрицы A и B .

► Запишите многочлены четвертой и пятой степени.

► Приведите примеры многочленов степени n при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

► Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Можно ли}$$

вычислить: а) $A + D$; б) AD ; в) AB ; г) $AB + C$?

Пример 1.1. Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $G = (AB - 4C)D$.

Решение.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 35 & 19 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$4C = 4 \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 & 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 28 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AB - 4C = \begin{pmatrix} 35 & 19 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 28 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 - 12 & 19 - 28 \\ 7 - (-8) & 12 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -9 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 23 & -9 \\ 15 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \cdot 2 + (-9) \cdot 3 & 23 \cdot 0 + (-9) \cdot 1 & 23 \cdot (-1) + (-9) \cdot 2 \\ 15 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 & 15 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 & 15 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & -9 & -41 \\ 18 & -4 & -23 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $G = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -41 \\ 18 & -4 & -23 \end{pmatrix}.$

Пример 1.2. Найти матрицу $B = A^3$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. По определению $B = A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$. Вычислим сначала A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 & 5 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 27 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 27 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \cdot 5 + (-18) \cdot 3 & 19 \cdot (-2) + (-18) \cdot 4 \\ 27 \cdot 5 + 10 \cdot 3 & 27 \cdot (-2) + 10 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -110 \\ 165 & -14 \end{pmatrix}$$

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 41 & -110 \\ 165 & -14 \end{pmatrix}.$

Пример 1.3. Найти значение многочлена $P(x) = 3x^2 - x + 5$ при

$$x = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению, если $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, то $P(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$, где E - единичная матрица такого же размера, что и матрица A . Следовательно, в соответствии с условием задачи $P(A) = 3A^2 - A + 5E$. Запишем вычисления последовательно.

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 6 & -17 & 24 \\ -9 & -18 & 13 \end{pmatrix};$$

$$2) 3A^2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 & -8 \\ 6 & -17 & 24 \\ -9 & -18 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-5) & 3 \cdot (-4) & 3 \cdot (-8) \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot (-17) & 3 \cdot 24 \\ 3 \cdot (-9) & 3 \cdot (-18) & 3 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -12 & -24 \\ 18 & -51 & 72 \\ -27 & -54 & 39 \end{pmatrix};$$

$$3) 3A^2 - A = \begin{pmatrix} -15 & -12 & -24 \\ 18 & -51 & 72 \\ -27 & -54 & 39 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15-1 & -12-(-2) & -24-0 \\ 18-3 & -51-1 & 72-4 \\ -27-0 & -54-(-3) & 39-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -10 & -24 \\ 15 & -52 & 68 \\ -27 & -51 & 34 \end{pmatrix};$$

$$4) 5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$5) P(A) = 3A^2 - A + 5E = \begin{pmatrix} -16 & -10 & -24 \\ 15 & -52 & 68 \\ -27 & -51 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16+5 & -10+0 & -24+0 \\ 15+0 & -52+5 & 68+0 \\ -27+0 & -51+0 & 34+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -10 & -24 \\ 15 & -47 & 68 \\ -27 & -51 & 39 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } P(A) = \begin{pmatrix} -11 & -10 & -24 \\ 15 & -47 & 68 \\ -27 & -51 & 39 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ является корнем многочлена

$$P(x) = x^2 - 3x - 4.$$

Решение.

По определению, если $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, то $P(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$, где E - единичная матрица такого же размера, что и матрица A . Таким образом, $P(A) = A^2 - 3A - 4E$. Следует показать, что $P(A) = 0$, что и будет означать, что A является корнем заданного многочлена.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4E = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-9-4 & 12-12-0 \\ 3-3-0 & 4-0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и следовало получить.

► **Задание 1.1.** Найти матрицу $D = AB - C^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $D = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}.$

4. Матрица A' (или A^T), которая получена из матрицы A заменой ее строк соответствующими ее столбцами, называется транспонированной к матрице A .

► Запишите матрицу A' , транспонированную к матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Квадратная матрица A называется симметричной, если она совпадает с транспонированной к ней: $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$).

Матрица A называется ортогональной, если ее произведение на транспонированную к ней матрицу A^T равно единичной матрице:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E.$$

Имеют место свойства:

$$(A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T; (AB)^T = B^T A^T.$$

► Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 9 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ симметричной?

Пример 1.5. Проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ является

ортогональной.

Решение. По определению, матрица $A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$ Вычислим

произведение матрицы A и транспонированной к ней матрицы A^T .

$$\begin{aligned}
A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

То есть матрица A действительно является ортогональной.

► **Задание 1.2.** Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$ является

ортогональной.

1.2. Определители

Определителем второго порядка называется число Δ , записанное в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

$$\text{Например, } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 4 = 29$$

Определителем третьего порядка называется число Δ , которое записано в

$$\text{виде } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по правилу

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 7 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) \cdot 0 - 7 \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 5 = -119.$$

Определить n – го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

определяется сложнее.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) определителя n – го порядка Δ называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который получается из определителя Δ вычеркиванием i – ой строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n – го порядка называется его минор M_{ij} умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Например, для определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -11, M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 0 = 9.$$

$$\text{Соответственно, } A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-11) = 11, A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot 9 = -9.$$

Определитель n – го порядка можно вычислить, пользуясь **теоремой Лапласа**: определитель n – го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.1)$$

или

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Равенства (1.1) и (1.2) называются разложением определителя соответственно по элементам i – ой строки (равенство (1.1)) или j –го столбца (равенство (1.2)).

Так для определителя третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ эти разложения имеют

вид:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \quad \Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} -$$

разложение определителя третьего порядка по элементам соответственно первой, второй и третьей строки;

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \quad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \quad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} -$$

разложение определителя третьего порядка по элементам соответственно первого, второго и третьего столбцов.

► Запишите определитель четвертого порядка и его разложение по элементам строк и столбцов.

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки записать столбцами с теми же номерами.

2. Если в определителе поменять местами две строки (два столбца), то его знак изменится на противоположный.

3. Определитель равняется нулю, если:

- все элементы некоторой строки (столбца) равняются нулю;
- соответствующие элементы двух строк (столбцов) совпадают;
- соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны.

4. Общий множитель элементов некоторой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

5. Определитель не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.

6. Определитель равняется сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

7. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равняется нулю.

8. Определитель, у которого элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, равняется сумме двух определителей, у первого из которых в отмеченной строке (столбце) стоят первые слагаемые, а у второго - вторые слагаемые, а все другие строки (столбцы) у обоих определителей одинаковы.

Определителем квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ называется число } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равняется произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$ или $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

10. Если матрицу n -го порядка умножить на число λ , то ее определитель множится при этом на λ^n : $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

11. Определитель диагональной матрицы равняется произведению диагональных элементов:

$$|\text{diag}(a_{11} a_{22} \dots a_{nn})| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

12. Определитель единичной матрицы равняется единице: $|E| = 1$.

► Запишите условия, при которых определитель равен нулю, и соответствующие примеры.

► Проиллюстрируйте примерами свойства 1), 2), 4), 9), 10), 11) определителя.

Пример 1.6. Вычислить определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_1 = 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 = 0 + 4 = 4;$$

$$\Delta_2 = \sin 3\alpha \cdot (-\sin 3\alpha) - (-\cos 3\alpha) \cdot \cos 3\alpha = -\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha = \cos 6\alpha;$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot 3 = \\ &= -6 + 80 - 0 - 0 - 4 - 45 = 25 \end{aligned}$$

Вычислим определитель Δ_3 , используя свойства 5) и 6).

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1+4 \cdot 5 & 2+3 \cdot 5 & 5+(-1) \cdot 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 19 & 17 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 19 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= -(3 \cdot 17 - 19 \cdot 4) = 25;$$

$$\overline{\text{II стр.}} = \overline{\text{II стр.}} + \overline{\text{III стр.}} \cdot 5$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2+(-2) & 4+(-2) \cdot 2 \\ 3 & 2 & -4+3 & -8+3 \cdot 2 \\ 1 & 3 & 1+1 & 3+1 \cdot 2 \\ 0 & -1 & -2+0 & 5+0 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$1) \overline{\text{III столб.}} = \overline{\text{III столб.}} + \overline{\text{I столб.}}; \overline{\text{IV столб.}} = \overline{\text{IV столб.}} + \overline{\text{I столб.}} \cdot 2$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2+(-1) \cdot 2 & -1+(-2) \cdot 2 & -2+5 \cdot 2 \\ 3+(-1) \cdot 3 & 2+(-2) \cdot 3 & 5+5 \cdot 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 0 & -4 & 20 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-1) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 20 \end{vmatrix} = 2((-5) \cdot 20 - (-4) \cdot 8) = 2 \cdot (-68) = -136.$$

$$2) \overline{\text{I стр.}} = \overline{\text{I стр.}} + \overline{\text{III стр.}} \cdot 2; \overline{\text{II стр.}} = \overline{\text{II стр.}} + \overline{\text{III стр.}} \cdot 3.$$

Ответ: $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = \cos 6\alpha$, $\Delta_3 = -136$.

Основными методами вычисления определителей n-го порядка являются метод понижения порядка и метод приведения к треугольному виду.

Метод понижения порядка базируется на применении теоремы Лапласа (или шестого свойства определителей). При этом полезно, пользуясь седьмым свойством

определителей, предварительно обратить в нуль все элементы, кроме возможно одного, некоторой строки или столбца, а затем применить теорему Лапласа.

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все элементы, которые лежат по одну сторону от одной из его диагоналей, превращаются в нуль. После этого пользуемся тем положением, что определитель равняется произведению диагональных элементов, если все элементы, лежащие выше либо ниже главной диагонали, равны нулю, либо произведению диагональных элементов, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от порядка определителя, при условии, что все элементы, лежащие по одну сторону от побочной диагонали, равны нулю.

► **Задание 1.3.** Вычислить определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\Delta_1 = 4ab$, $\Delta_2 = 64$, $\Delta_3 = -172$.

► **Задание 1.4.** Решить уравнение.

$$1) \begin{vmatrix} x & -3 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0, 2) \begin{vmatrix} \cos 5x & \sin 3x \\ -\sin 5x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0, 3) \begin{vmatrix} x+2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & x & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -6$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Обратная матрица. Ранг матрицы.

Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденную в противоположном случае.

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A , если $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$, то есть матрица A была невырожденной. Обратная матрица может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где $\det A$ - определитель матрицы A , а A_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) - алгебраические дополнения ее элементов.

Обратные матрицы имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A; (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}; (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}; \\ (diag(a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}))^{-1} &= diag(a_{11}^{-1} a_{22}^{-1} \cdots a_{nn}^{-1}). \end{aligned}$$

Пример 1.7. Выяснить, имеет ли данная матрица обратную, и, в случае положительного ответа, найти обратную матрицу и проверить правильность ее нахождения.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{поскольку элементы второй и третьей строк}$$

пропорциональны. По определению матрица A вырождена, то есть не имеет обратной.

$$2) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13 \neq 0$$

$$\overline{III} \text{стр.} = \overline{III} \text{стр.} + \overline{I} \text{стр.} \cdot (-3).$$

Поскольку определитель матрицы A отличен от нуля, то она невырождена, а значит, имеет обратную. Для ее нахождения вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A .

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-15) = 15$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-12) = 12$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-6) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8+3 = 11$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

В соответствии с формулой (1.3), имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -20 & 15 & 11 \\ 12 & -9 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-20}{13} & \frac{15}{13} & \frac{11}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{-9}{13} & \frac{-4}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность полученного результата.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -20 & 15 & 11 \\ 12 & -9 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

следовательно, обратная матрица найдена верно.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-20}{13} & \frac{15}{13} & \frac{11}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{-9}{13} & \frac{-4}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}.$

Пример 1.8. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ двумя

способами:

1) применив правила действий с матрицами;

2) с помощью обратной матрицы.

Решение.

1) Решим данное матричное уравнение, применив правило действий с матрицами.

а) пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_{11} - 2x_{21} & 3x_{12} - 2x_{22} \\ 4x_{11} + x_{21} & 4x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все их соответствующие элементы, можем записать:

$$\begin{cases} 3x_{11} - 2x_{21} = 6 \\ 3x_{12} - 2x_{22} = -13 \\ 4x_{11} + x_{21} = 8 \\ 4x_{12} + x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_{11} - 2(8 - 4x_{11}) = 6 \\ 3x_{12} - 2(1 - 4x_{12}) = -13 \\ x_{21} = 8 - 4x_{11} \\ x_{22} = 1 - 4x_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_{11} + 8x_{11} = 22 \\ 3x_{12} + 8x_{12} = -11 \\ x_{21} = 8 - 4x_{11} \\ x_{22} = 1 - 4x_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = 2 \\ x_{12} = -1 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 5 \end{cases},$$

из чего следует $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Решим данное матричное уравнение с помощью обратной матрицы.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение можно

записать в виде: $A \cdot X = B$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 3 + 8 = 11 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A имеет обратную.

Умножим обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B;$$

$$EX = A^{-1}B; X = A^{-1}B.$$

Найдем A^{-1} .

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1; A_{12} = (-1)^3 \cdot 4 = -4; A_{21} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2; A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3.$$

$$\text{Таким образом, } A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } X &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot (-13) + 2 \cdot 1 \\ -4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 & -4 \cdot (-13) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \cdot 22 & \frac{1}{11} \cdot (-11) \\ \frac{1}{11} \cdot 0 & \frac{1}{11} \cdot 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Обозначается ранг матрицы A символами $\text{rang} A$ или $r(A)$.

Отметим следующие свойства ранга матрицы $A_{m \times n}$.

1. $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.
2. $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A - нулевая матрица.
3. Ранг квадратной матрицы A n -го порядка равняется n тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

► **Задание 1.5.** Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 1 & 4 & -5 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ найти обратные матрицы,}$$

если они существуют.

Ответы: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$, B^{-1} - не существует, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 8,5 & -2,5 & -0,5 \\ -18,5 & 5,5 & 1,5 \\ -5,5 & 1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Блочные матрицы. Произведение Кронекера.

В некоторых случаях матрицу A имеет смысл разделить горизонтальными и вертикальными линиями на матрицы меньшего размера, которые называются клетками или блоками. Например,

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{11} - \text{матрица размера } m_1 \times n_1, A_{12} - \text{матрица размера}$$

$m_1 \times n_2, A_{21} - \text{матрица размера } m_2 \times n_1 \text{ и } A_{22} - \text{матрица размера } m_2 \times n_2$

$(m_1 + m_2 = m; n_1 + n_2 = n)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n_1} & a_{1,n_1+1} & a_{1,n_1+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n_1} & a_{2,n_1+1} & a_{2,n_1+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_1,1} & a_{m_1,2} & \cdots & a_{m_1,n_1} & a_{m_1,n_1+1} & a_{m_1,n_1+2} & \cdots & a_{m_1,n} \\ a_{m_1+1,1} & a_{m_1+1,2} & \cdots & a_{m_1+1,n_1} & a_{m_1+1,n_1+1} & a_{m_1+1,n_1+2} & \cdots & a_{m_1+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n_1} & a_{m,n_1+1} & a_{m,n_1+2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

В этом случае матрица A называется клеточной или блочной.

Операции сложения и умножения блочных матриц, умножения блочной матрицы на число осуществляются по правилам для соответствующих операций над матрицами, если их элементы заменить блоками.

Рассмотрим две матрицы A и B одинаковой структуры (имеющие одинаковое количество строк и столбцов), представленные как блочные матрицы с соответствующими блоками одинакового размера (число строк и столбцов блока A_{ij} равняется числу строк и столбцов блока B_{ij} ($i = \overline{1, \ell}; j = \overline{1, k}$):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{lk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lk} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1k} + B_{1k} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2k} + B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{l1} + B_{l1} & A_{l2} + B_{l2} & \cdots & A_{lk} + B_{lk} \end{pmatrix}; \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1k} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{l1} & \lambda A_{l2} & \cdots & \lambda A_{lk} \end{pmatrix}.$$

Если имеем две прямоугольные матрицы такие, что число столбцов первой матрицы равняется числу строк второй матрицы, и они разбиты соответственно на согласованные матрицы-блоки, то:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mk} \end{pmatrix}, \text{ где } C_{ij} = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell} B_{\ell j} \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k} \right), n - \text{число}$$

столбцов блоков первой матрицы и число строк блоков второй матрицы.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали расположены квадратные матрицы-блоки, а другие элементы равняются нулю, называется блочно-диагональной. Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Операции с блочно-диагональными матрицами приводятся к операции над диагональными блоками.

Определитель блочно-диагональной матрицы равняется произведению определителей диагональных матриц-блоков.

Обратная матрица к невырожденной блочно-диагональной матрице выражается через обратные матрицы к блокам.

Например, для матрицы A , что выражается равенством (1.4),

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \text{ а ее определитель } \det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

Пример 1.9. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ и найти обратную к ней, рассматривая ее как блочно-}$$

диагональную.

Решение. Матрица A является блочно – диагональной. Введем матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ и представим матрицу } A \text{ следующим образом:}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O_1 \\ O_2 & A_2 \end{pmatrix} \text{ где } O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с теорией, $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1,$$

$$\begin{aligned} \det A_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - 2 \cdot 5 & -4 - (-3) \cdot 5 & 5 - 1 \cdot 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 + 2 & -5 + (-3) & -1 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 11 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = (-1)((-7) \cdot (-8) - 5 \cdot 11) = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\det A = 1 \cdot (-1) = -1$.

Рассматривая матрицу A как блочно-диагональную, можно записать:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O_1 \\ O_2 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Проведем необходимые вычисления.

Для матрицы A_1

$$\det A_1 = 1;$$

найдем алгебраические дополнения ее элементов:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 5 = -5; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3; \quad \text{в}$$

соответствии с формулой $A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ получаем

$$A_1^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Проведя аналогичные вычисления для матрицы}$$

A_2 (смотри Пример 1.6), получаем $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Пользуясь формулой (1.5),

получаем обратную матрицу для заданной матрицы A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенный пример свидетельствует, что использование аппарата блочных матриц значительно упрощает вычисления.

Произведением Кронекера двух матриц $A_{m \times n}$ и $B_{k \times l}$ называется блочная матрица $A \otimes B$ размера $km \times \ell n$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Отметим, что имеют место следующие свойства произведения Кронекера.

1. Если A и B - невырожденные матрицы, то $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

2. Если A и B - квадратные матрицы соответственно m -го и n -го порядков,

то

$$|A \otimes B| = |A|^n \cdot |B|^m.$$

3. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Пример 1.10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти произведение Кронекера этих матриц и проверить выполнение его трех указанных свойств.

Решение.

1) Найдем произведение Кронекера матриц A и B :

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & -2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Матрицы A и B невырожденные, поскольку

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Обозначим $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и будем рассматривать

матрицу C как блочно-диагональную: $C = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$; тогда

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы $A^{-1}, B^{-1}, A_1^{-1}, A_2^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-2) = -2; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 0 = 0; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 0 = 0; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Аналогично, } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}; \text{ тогда}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} \otimes B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $C^{-1} = (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, то есть первое свойство произведения Кронекера выполнено.

Проверим теперь, что выполняется и второе свойство произведения Кронекера.

$$|A \otimes B| = |C| = |A_1| \cdot |A_2| = (18 + 36) \cdot (8 + 16) = 54 \cdot 24 = 1296;$$

$$|A| = -6, |B| = 6, |A|^2 \cdot |B|^2 = (-6)^2 \cdot 6^2 = 6^4 = 1296, \quad \text{то есть} \quad |A \otimes B| = |A|^2 \cdot |B|^2$$

($m=2; n=2$), следовательно, и второе свойство выполняется.

Учитывая, что

$$(A \otimes B)^T = C^T = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A^T \otimes B^T = \begin{pmatrix} 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ делаем вывод, что и}$$

третье свойство произведения Кронекера также выполняется.

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

[illegible]

или в сжатом виде $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m}.$

Если ввести матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ то систему (1.4) можно записать в}$$

матричной форме $AX = B$.

Решением системы (1.6) называется упорядоченное множество чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, при подстановке которых в систему вместо переменных все уравнения системы превращаются в тождества.

Система линейных алгебраических уравнений (1.6) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; иначе система называется несовместной.

Система линейных алгебраических уравнений (1.6) называется определенной, если она имеет только одно решение.

Отметим, что система линейных алгебраических уравнений может иметь только одно решение (совместная определенная система), может иметь бесчисленное множество решений (совместная неопределенная система), может не иметь ни одного решения (несовместная система).

Две системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

В общем случае, то есть при любом соотношении между количеством уравнений m и количеством неизвестных n , решение системы (1.6), если оно

существует, можно найти методом Гаусса (или методом последовательного исключения неизвестных).

Если количество уравнений равняется количеству неизвестных ($m = n$) и квадратная матрица A невырожденная ($|A| \neq 0$), то система (1.6) определена, то есть имеет единственное решение. Его можно найти методом Гаусса или по формуле $X = A^{-1}B$ (так называемый, матричный метод). В этом случае решение можно найти также воспользовавшись правилом Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n},$$

где Δ - определитель системы (иначе, $\Delta = |A|$), Δ_i - определитель матрицы A_i , которая получается из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов B , то есть $\Delta_i = |A_i|, i = \overline{1, n}$; иначе, Δ_i - определитель, который получается из определителя системы Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

► Запишите систему двух и трех линейных алгебраических уравнений соответственно с двумя и тремя неизвестными.

► В каком случае можно применять правило Крамера? Запишите формулы Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными.

► Назовите известные вам методы решения систем линейных алгебраических уравнений и укажите, какой из них самый универсальный и почему.

► Запишите формулу для решения системы линейных алгебраических уравнений в матричном виде.

Пример 1.11. Решить систему $\begin{cases} 3,2x_1 - 4,5x_2 = 1,9 \\ 2,7x_1 + 5,2x_2 = 10,6 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Решение. Проверим, можно ли применить правило Крамера. Для этого вычислим определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3,2 & -4,5 \\ 2,7 & 5,2 \end{vmatrix} = 3,2 \cdot 5,2 - 2,7 \cdot (-4,5) = 28,79 \neq 0.$$

Поскольку определитель системы отличен от нуля, то можно найти решение по правилу Крамера, в соответствии с которым

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1,9 & -4,5 \\ 10,6 & 5,2 \end{vmatrix} = 1,9 \cdot 5,2 - 10,6 \cdot (-4,5) = 57,28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3,2 & 1,9 \\ 2,7 & 10,6 \end{vmatrix} = 3,2 \cdot 10,6 - 2,7 \cdot 1,9 = 28,79,$$

$$x_1 = \frac{57,28}{28,79} = 2, \quad x_2 = \frac{28,79}{28,79} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Система линейных алгебраических уравнений (1.6) называется однородной, если все ее свободные члены равняются нулю: $b_i = 0, i = \overline{1, n}$ и неоднородной, если хотя бы один из свободных членов отличный от нуля.

Существование решения системы линейных алгебраических уравнений определяется теоремой Кронекера-Капелли: для того, чтобы система (1.6) была совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы A совпадал с рангом расширенной матрицы $\bar{A}$: $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$ ($\bar{A}$ образуется из матрицы A присоединением к ней столбца свободных членов B). Из этой теоремы вытекает: если $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = n$ (n - количество неизвестных), то система имеет единственное решение; если $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = r < n$, то система имеет множество решений; если $\text{rang} A \neq \text{rang} \bar{A}$, то система несовместна, т. е. не имеет решения.

Предположим, что $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = r < n$, т.е. ранг меньше количества неизвестных. Не ограничивая общности, будем считать, что минор матрицы A порядка r , отличный от нуля, отвечает первым r строкам и столбцам матрицы A . Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (1.6), запишем укороченную систему уравнений, эквивалентную исходной:

[illegible]

► Чем отличается однородная система линейных алгебраических уравнений от неоднородной?

Пример 1.12. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$
 методом Гаусса

и сделать проверку правильности полученного результата.

Решение.

Из первого уравнения системы найдем x_1 , и подставим его во второе и третье уравнения системы.

$$\underline{x_1 = 8 - 2x_2 - x_3} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(8 - 2x_2 - x_3) - 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3(8 - 2x_2 - x_3) - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 24 - 6x_2 - 3x_3 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -7x_2 + x_3 = -11 \\ -10x_2 + 2x_3 = -14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_2 - x_3 = 11 \\ 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения последней системы находим x_3 .

$$\underline{x_3 = 7x_2 - 11} \quad (1.8)$$

и подставляем его во второе уравнение этой же системы.

$$5x_2 - (7x_2 - 11) = 7 \Leftrightarrow 5x_2 - 7x_2 + 11 = 7 \Leftrightarrow -2x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 2.$$

Теперь, последовательно пользуясь равенствами (1.6) и (1.5), находим:

$$x_3 = 7 \cdot 2 - 11 = 3, \quad x_1 = 8 - 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Таким образом, имеем решение $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$.

Приведенное решение заданной системы уравнений показывает, что метод Гаусса является действительно методом последовательного исключения неизвестных, который позволяет последовательно переходить от системы с большим количеством уравнений и неизвестных к системе с меньшим количеством уравнений и неизвестных, пока не придем к одному уравнению с одним неизвестным.

Чтобы сделать проверку правильности полученного решения системы, следует найденные значения неизвестных подставить во все уравнения системы;

если при этом все уравнения системы превратятся в тождества, то делается вывод, что решение найдено верно.

Проверка.

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 5 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ 5 = 5 \\ 10 = 10 \end{cases}.$$

Система решена верно.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Решим эту же систему методом Гаусса в матричной форме записи.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований матрицы, которые в данной ситуации применяются только к строкам.

Элементарными преобразованиями матриц называют следующие преобразования:

- 1) перестановка строк (столбцов);
- 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 2 & -3 & 3 & | & 5 \\ 3 & -4 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & -7 & 1 & | & -11 \\ 0 & -10 & 2 & | & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -7 & | & -11 \\ 0 & 2 & -10 & | & -14 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -7 & | & -11 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -7 & | & -11 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1) \quad \overline{\Pi стр.} = \overline{\Pi стр.} + \overline{I стр.} \cdot (-2),$$

$$\overline{\Pi\overline{\Pi стр.}} = \overline{\Pi\overline{\Pi стр.}} + \overline{I стр.} \cdot (-3).$$

Для упрощения вычислений второй и третий столбцы поменяем местами.

$$2) \quad \overline{\Pi\overline{\Pi стр.}} = \overline{\Pi\overline{\Pi стр.}} + \overline{\Pi стр.} \cdot (-2).$$

Все элементы третьей строки разделили на 4.

Поставим в соответствие преобразованной расширенной матрице систему уравнений, эквивалентную исходной (Напомним, что второй столбец соответствует неизвестной x_3 , а третий столбец соответствует неизвестной x_2).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_2 = 8 \\ x_3 - 7x_2 = -11 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 3 - 2 \cdot 2 = 1 \\ x_3 = -11 + 7 \cdot 2 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Отметим, что этот результат полностью совпал с решением, полученным ранее. Как и должно быть.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Пример 1.13. Выяснить, что система $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$ совместна и

найти ее общее решение.

Решение. Применим метод Гаусса в матричной форме записи.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1)

$$\overline{II} \text{стр.} = \overline{II} \text{стр.} + \overline{I} \text{стр.} \cdot (-2), \overline{III} \text{стр.} = \overline{III} \text{стр.} - \overline{I} \text{стр.}, \overline{IV} \text{стр.} = \overline{IV} \text{стр.} + \overline{I} \text{стр.} \cdot (-3).$$

2) Разделим вторую, третью и четвертую строки соответственно на $-5, -2, -1$.

3) Вычтем элементы второй строки из соответствующих элементов третьей и четвертой строк.

Поскольку $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, а все определители третьего и четвертого

порядков равны нулю, так как содержат строку, все элементы которой равны нулю, то, по определению, $\text{rang} A = \text{rang} \overline{A} = 2$. В соответствии с теоремой Кронекера –

Капелли система совместна и имеет множество решений, поскольку ранг меньше числа неизвестных.

Поставим в соответствие расширенной матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Примем в качестве базисных неизвестных x_1, x_2 , тогда свободными неизвестными будут x_3, x_4 . Переносим слагаемые со свободными неизвестными в

правые части уравнений, получаем $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -2 + x_4 \end{cases}$. Отсюда

$$x_2 = -2 + x_4; \quad x_1 = -1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 - (-2 + x_4) + x_3 + x_4 = -1 + 2 - x_4 + x_3 + x_4 = 1 + x_3.$$

Таким образом, общее решение заданной системы уравнений можно записать

в виде $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = -2 + x_4 \end{cases}$ или $X = \begin{pmatrix} 1 + x_3 \\ -2 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 + x_3 \\ -2 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Пример 1.14. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 8 \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$ тремя методами:

- 1) методом Гаусса;
- 2) по правилу Крамера;
- 3) матричным методом.

Решение.

- 1) Найдем решение данной системы уравнений методом Гаусса.

Из третьего уравнения найдем x_2 .

$$2x_2 = -1 - 4x_1 + 3x_3;$$

$$x_2 = \frac{-1 - 4x_1 + 3x_3}{2}.$$

Подставим это значение x_2 в первое и второе уравнения системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 7 \cdot \frac{-1 - 4x_1 + 3x_3}{2} + 5x_3 = 8 \\ 7x_1 - 5 \cdot \frac{-1 - 4x_1 + 3x_3}{2} + 3x_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 7 + 28x_1 - 21x_3 + 10x_3 = 16 \\ 14x_1 + 5 + 20x_1 - 15x_3 + 6x_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32x_1 - 11x_3 = 9 \\ 34x_1 - 9x_3 = 23 \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы найдем x_1 .

$$32x_1 = 9 + 11x_3;$$

$$x_1 = \frac{9 + 11x_3}{32}.$$

Подставим это значение x_1 во второе уравнение

$$34 \cdot \frac{9 + 11x_3}{32} - 9x_3 = 23$$

$$34 \cdot 9 + 34 \cdot 11x_3 - 32 \cdot 9x_3 = 23 \cdot 32;$$

$$374x_3 - 288x_3 = 736 - 306;$$

$$86x_3 = 430;$$

$$x_3 = \frac{430}{86} = 5.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{9 + 11 \cdot 5}{32} = \frac{64}{32} = 2; \quad x_2 = \frac{-1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

2) Выясним, можно ли применить правило Крамера. Для этого вычислим определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 7 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot (-3) + (-7) \cdot 3 \cdot 4 + 7 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-5) \cdot 5 -$$

$$-7 \cdot (-7) \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 30 - 84 + 70 + 100 - 147 - 12 = -43.$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то можно применить правило Крамера, в соответствии с которым

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -7 & 5 \\ 14 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-5) \cdot (-3) + (-7) \cdot 3 \cdot (-1) + 14 \cdot 2 \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot (-5) \cdot (-1) - 14 \cdot (-7) \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot 8 = 120 + 21 + 140 - 25 - 294 - 48 = -86$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 7 & 14 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot (-3) + 8 \cdot 3 \cdot 4 + 7 \cdot (-1) \cdot 5 -$$

$$-4 \cdot 14 \cdot 5 - 8 \cdot 7 \cdot (-3) - (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -86 + 96 - 35 - 280 + 168 + 6 = -129$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 8 \\ 7 & -5 & 14 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + (-7) \cdot 14 \cdot 4 + 7 \cdot 2 \cdot 8 - 4 \cdot (-5) \cdot 8 -$$

$$-7 \cdot (-7) \cdot (-1) - 2 \cdot 14 \cdot 2 = 10 - 292 + 112 + 160 - 49 - 56 = -215.$$

$$x_1 = \frac{-84}{-43} = 2, \quad x_2 = \frac{-129}{-43} = 3, \quad x_3 = \frac{-215}{-43} = 5.$$

3) Найдем теперь решение системы с помощью обратной матрицы.

$$\text{Обозначим } A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 7 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$AX = B.$$

Так как A невырожденная (ее определитель равен 43, т.е. отличный от нуля), то решение системы можно найти по формуле $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(21 - 10) = -11,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-21 - 12) = 33,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 20 = 34,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 28) = -32,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -21 + 25 = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 35) = 29,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 49 = 39.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-43} \begin{pmatrix} 9 & -11 & 4 \\ 33 & -26 & 29 \\ 34 & -32 & 39 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 9 & -11 & 4 \\ 33 & -26 & 29 \\ 34 & -32 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 \cdot 8 - 11 \cdot 14 + 4 \cdot (-1) \\ 33 \cdot 8 - 26 \cdot 14 + 29 \cdot (-1) \\ 34 \cdot 8 - 32 \cdot 14 + 39 \cdot (-1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -86 \\ -129 \\ -215 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

Упражнения.

1. Вычислить определители.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \text{ b) } \begin{vmatrix} \sin 5\alpha & \cos 5\alpha \\ \cos 5\alpha & \sin 5\alpha \end{vmatrix}; \text{ c) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \text{ d) } \begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \text{ e) } \begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответы: а) 13; б) $-\cos \alpha$; в) -70; д) 420; е) 420; ф) 0.

2. Решить уравнение.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & x-1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2x+3 & x \\ 4 & x-2 \end{vmatrix} = -9; \text{ в) } \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ -1 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Ответы: а) $x = -6,5$; б) $x_1 = 1; x_2 = 1,5$; в) $x_1 = -3; x_2 = 1$.

3. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $D = (AB)^T - C^2$ и обратную к ней, если она существует.

$$\text{Ответ: } D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 17 & 24 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} -12,75 & 14,75 & 4,5 \\ 28,5 & -32,5 & -10 \\ -21,25 & 24,25 & 7,5 \end{pmatrix}.$$

4. Найти ранг матрицы A .

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить систему уравнений методом Гаусса, по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы.

$$\text{a) } \begin{cases} 5,2x - 2,0y = 1,64 \\ 3,6x + 4,3y = 14,21 \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 9x - 15y = 0 \end{cases}, \text{ в) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

Ответы: а) $x = 1,2; y = 2,3$; б) система несовместима; в) $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 0$.

6. Решить матричное уравнение двумя способами: 1) записав предварительно матричное уравнение в виде системы линейных алгебраических уравнений; 2) используя обратную матрицу. Сравнить указанные два метода.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \text{ b) } X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответы: a) } X = \begin{pmatrix} 7 & -9,5 \\ -2,4 & 2,6 \end{pmatrix}; \text{ b) } X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение $AXB = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} -1,8 & 3,2 \\ -2,4 & 2,6 \end{pmatrix}.$$

8. Проверить, удовлетворяет ли матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ соотношению

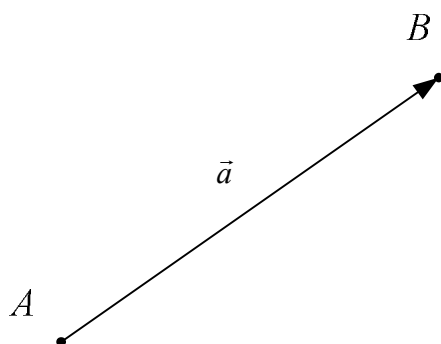
$$4A^2 - 5A - B = 0, \text{ если } B = \begin{pmatrix} 51 & 0 \\ 2 & 44 \end{pmatrix}.$$

Раздел II. Элементы векторной алгебры

2.1. Основные понятия

Вектором (геометрическим вектором) называется совокупность направленных отрезков, которые параллельны, имеют одинаковую длину и направление.

Обозначают векторы маленькой буквой или точкой начала и точкой конца вектора с чёрточкой или стрелочкой сверху: $\vec{a}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$. На рисунках направление вектора обозначается стрелкой от начала к концу.

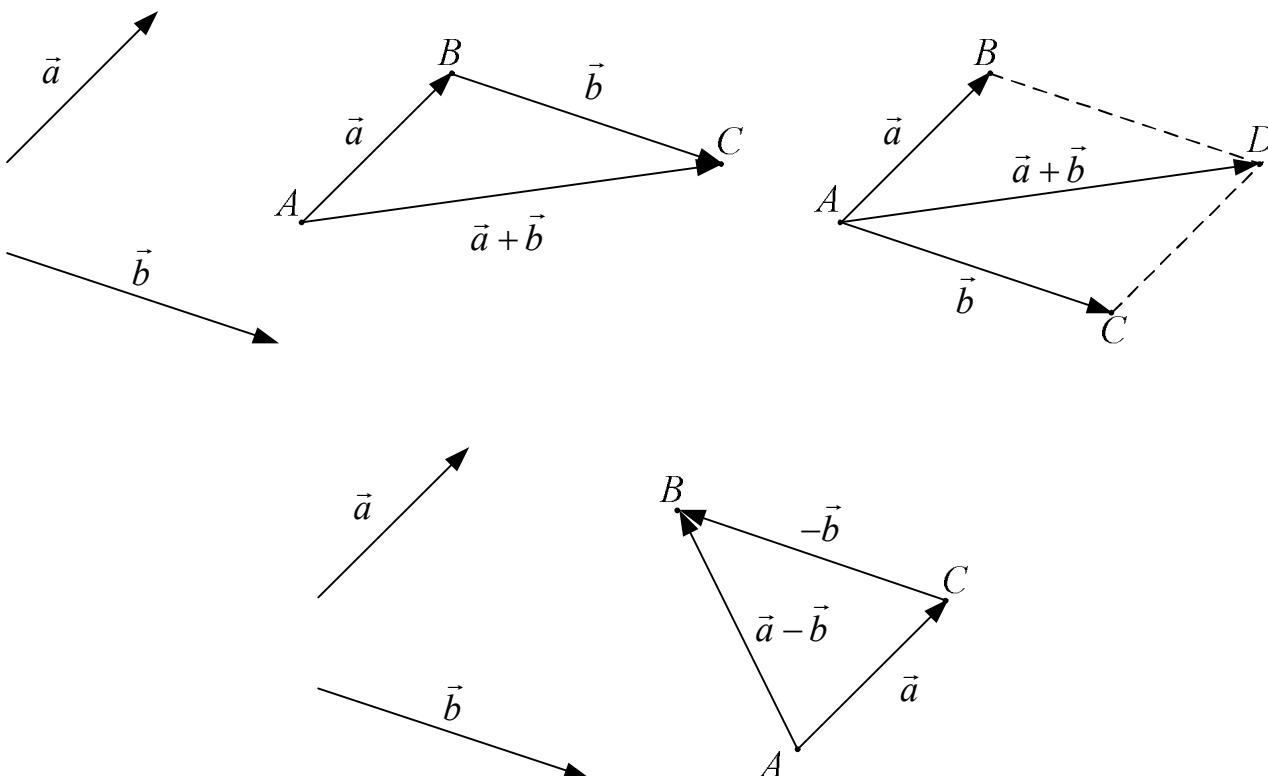


Из определения вытекает, что векторы могут перемещаться параллельно самим себе в пространстве, то есть рассматриваются так называемые свободные векторы.

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB . Она обозначается как $|\overrightarrow{AB}|$. Длина нулевого вектора равна нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Геометрически сложение векторов осуществляется по правилу треугольника или правилу параллелограмма.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.



Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

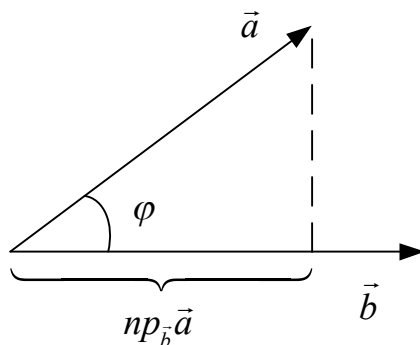
Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и длина которого равна $k \cdot |\vec{a}|$, направленный в одну сторону с ним при $k > 0$ и в противоположную при $k < 0$. Произведением любого числа на нулевой вектор является по определению нулевой вектор.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \text{ угол между векторами } \vec{a} \text{ и } \vec{b}.$$

Аналогично — $pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.



Отметим, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций; если вектор умножается на число, то его проекция умножается на это число.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка не компланарных векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$; базисом на плоскости – упорядоченная пара векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2$; базисом на прямой – любой ненулевой вектор $\vec{l}$, который принадлежит прямой.

Векторы, которые создают базис, называются базисными.

Любой вектор $\vec{a} \in R^3$, может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{l}_i, \text{ или } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

где $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ - базис; a_i - некоторые числа, которые называются координатами вектора в данном базисе.

Базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ называется ортонормированным, если составляющие его векторы ортогональны (взаимно перпендикулярны) и нормированы, т. е. имеют единичную длину. В ортонормированном базисе координаты вектора – это его проекции на базисные вектора.

В этом случае принято обозначение базисных векторов: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Эти базисные векторы называются ортами. (орт. $\vec{i}$, орт. $\vec{j}$, орт. $\vec{k}$). Их координаты такие:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Будем в дальнейшем рассматривать только базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Из свойств проекций вектора вытекают правила действия с векторами, заданными своими координатами: если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \lambda \in R.$$

- Запишите определение вектора.
- Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
- Дайте определение базиса, ортонормированного базиса.
- Что называется проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$?

2.2. Произведения векторов

2.2.1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \text{ где } \varphi = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Другие обозначения: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} np_{\vec{b}} \vec{a} &= \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} \\ np_{\vec{a}} \vec{b} &= \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|} \end{aligned}$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1⁰. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ - коммутативный закон.

2⁰. $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b}), \alpha \in R$ - ассоциативный закон.

3⁰. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ - дистрибутивный закон.

4⁰. Скалярное произведение ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \left(\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \right),$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \left(\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \right).$$

5⁰. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Перемножив по правилам умножения многочлена на многочлен и учитывая свойство 4⁰, получаем:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

6⁰. Выражение длины вектора через скалярное произведение.

Примем $\vec{b} = \vec{a}$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

7⁰. Условие неперпендикулярности векторов.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

или

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Механический смысл скалярного произведения:

Работа A постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку при её перемещении из точки A в точку B определяется формулой $A = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

- Что называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Перечислите свойства скалярного произведения векторов.
- Укажите задачи, при решении которых используется скалярное произведение векторов?

2.2.2. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор** $\vec{c}$, который удовлетворяет таким условиям:

- 1) Длина вектора $\vec{c}$ $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \wedge \vec{b})$, то есть площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 2) Вектор $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

3) Если смотреть с конца вектора $\vec{c}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ создают правую тройку.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{\text{пар.}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Свойства векторного произведения.

1⁰. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ - антикоммутативность.

2⁰. $\vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$, $\alpha \in R$ - ассоциативный закон.

3⁰. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ - дистрибутивный закон.

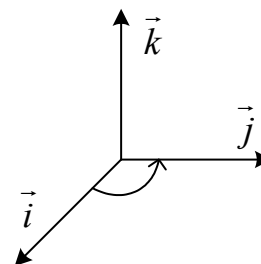
4⁰. Векторное произведение ортов:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Правило для запоминания:



$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\quad\quad} + \\ \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \quad \vec{i} \quad \vec{j} \\ \xleftarrow{\quad\quad\quad} - \end{array}$$

5⁰. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} - \text{основная формула для}$$

вычисления векторного произведения.

6⁰. Условие коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ или } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

- Что называется векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Перечислите свойства векторного произведения векторов.
- Укажите задачи, при решении которых используется векторное произведение векторов.

2.2.3. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется векторное произведение двух из них, помноженное скалярно на третий, то есть $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Другие обозначения: $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение векторов – это **число**.

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x, c_y, c_z) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения векторов

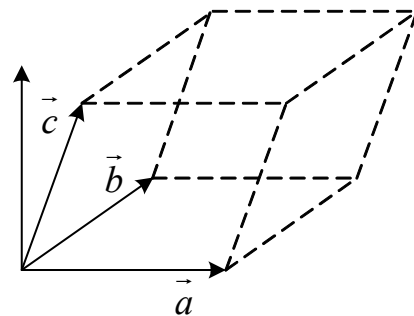
Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны. Сведём их к одному началу и построим на них параллелепипед.

Объём параллелепипеда вычисляется по формуле:

$$V_{\text{пар}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и

$$\vec{c} \text{ вычисляется по формуле: } V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



Отметим: если векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

- Что называется смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$?
- Укажите формулу, по которой вычисляется смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.
- Сформулируйте условие компланарности трёх векторов

Пример 2.1.

Заданы векторы $\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (-1, 2, -3), \vec{c} = (-2, -1, 2)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и вектор $\vec{d} = 5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Определить:

- 1) длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|$;
- 2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a}, \vec{b})$;
- 3) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$;
- 4) площадь параллелограмма $S_{\text{пар}}$ и площадь треугольника $S_{\text{тр}}$, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 5) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
- 6) объём параллелепипеда $V_{\text{пар}}$ и объём треугольной пирамиды $V_{\text{пир}}$, построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;
- 7) коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 8) компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;
- 9) координаты вектора $\vec{d}$;
- 10) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$: $\cos(\vec{a}, \vec{d})$;
- 11) проекцию вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$: $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{d}$.

Решение:

1) длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;

2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1 + 2 - 3 = -2;$$

3) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot (-3 - 2) - \vec{j} \cdot (-3 + 1) + \vec{k} \cdot (2 + 1) = -5 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = (-5, 2, 3); \end{aligned}$$

4) площадь параллелограмма $S_{\text{пар}}$ и площадь треугольника $S_{\text{тр}}$, построенных

на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38} \approx 6,16,$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \sqrt{38} = \sqrt{9,5} \approx 3,08, \quad S_{\text{пар}} = \sqrt{38} \approx 6,16.$$

5) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 - 3 - (-2 - 6) + 1 - (-4) = 14; \end{aligned}$$

6) объём параллелепипеда $V_{\text{пар.}}$ и объём треугольной пирамиды $V_{\text{пир.}}$,

построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $V_{\text{пар.}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |14| = 14$,

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |14| = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3} \approx 2,33.$$

7) коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является пропорциональность их одноимённых координат: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3}$, следовательно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны;

8) компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$; для заданных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 14 \neq 0$, следовательно векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны;

9) координаты вектора:

$$\vec{d} = 5(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + 2(-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) - 3(-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 9\vec{i} + 12\vec{j} - 7\vec{k} = (9, 12, -7)$$

10) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$: $\cos(\vec{a}, \vec{d}) = \frac{(\vec{a}, \vec{d})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{d}|}$,

$$(\vec{a}, \vec{d}) = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot (-7) = 9 + 12 - 7 = 14,$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{9^2 + 12^2 + (-7)^2} = \sqrt{81 + 144 + 49} = \sqrt{274} \approx 16,55,$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{d}) = \frac{14}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{274}} = \frac{14}{\sqrt{822}} \approx 0,49;$$

11) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$: $pr_{\vec{a}} \vec{d} = \frac{(\vec{d}, \vec{a})}{|\vec{a}|} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{196}{3}} \approx 8,08$.

Пример 2.2.

Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ создают базис. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по этому базису: $\vec{p} = (1, 2, -1), \vec{q} = (3, 6, 1), \vec{r} = (3, 9, 3), \vec{x} = (2, 5, 0)$.

Решение:

Векторы создают базис, если их смешанное произведение не равно 0.

$$\begin{aligned}
 (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) &= \begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \\
 &= 18 - 9 - 2 \cdot (9 - 3) - 1 \cdot (27 - 18) = 9 - 12 - 9 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы } \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \text{ создают} \\
 &\text{базис.}
 \end{aligned}$$

Положим: $\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$,

$$(2, 5, 0) = \alpha_1 (1, 2, -1) + \alpha_2 (3, 6, 1) + \alpha_3 (3, 9, 3) \Rightarrow$$

$$(2, 5, 0) = (\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (3\alpha_2, 6\alpha_2, \alpha_2) + (3\alpha_3, 9\alpha_3, 3\alpha_3) \Rightarrow$$

$$(2, 5, 0) = (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + 9\alpha_3)$$

Приравнявая соответствующие координаты, получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 - 9) - 3 \cdot (6 + 9) + 3 \cdot (2 + 6) = -12 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (18 - 9) - 5 \cdot (9 - 3) + 0 = -12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 - 2 \cdot (6 + 9) + 3 \cdot 5 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (2 + 6) = -4,$$

тогда $\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-12} = 0, \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}.$

Проверка правильности решения системы:

$$\begin{cases} 1+0+1=2 \\ 2+0+3=5 \\ -1+0+1=0, \text{ верно.} \end{cases}$$

Записываем разложение вектора $\vec{x}$ по базису: $\vec{x} = \vec{p} + \frac{1}{3}\vec{r}$.

Проверка правильности записи:

$$\begin{aligned} (2, 5, 0) &= (1, 2, -1) + \frac{1}{3}(3, 9, 3), \\ (2, 5, 0) &= (1+1, 2+3, -1+1) = (2, 5, 0), \text{ верно.} \end{aligned}$$

Раздел III. Аналитическая геометрия.

3.1. Прямые и плоскости.

3.1.1. Плоскость в пространстве

1. Уравнение плоскости, которая проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$Q: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. Общее уравнение плоскости:

$Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - заданные числа, $A, B, C \neq 0$ одновременно.

Подчеркнём, что A, B, C - координаты любого вектора, перпендикулярного плоскости, свободный член D - показывает, проходит или не проходит плоскость через начало координат.

3. Уравнение плоскости в отрезках:

$$Q: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

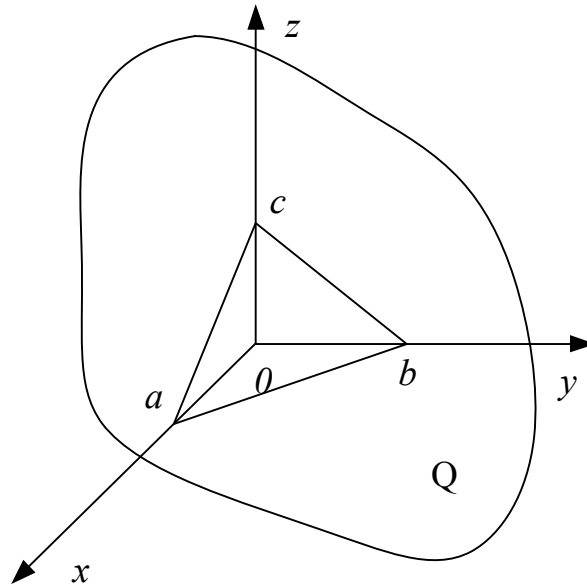
Преобразуем уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $(A, B, C, D) \neq 0$:

$$Ax + By + Cz = -D \quad / : -D \neq 0$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Обозначим: $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$.

Числа a , b , c с точностью до знака равняются длинам отрезков, которые отсекаются плоскостью на осях координат.

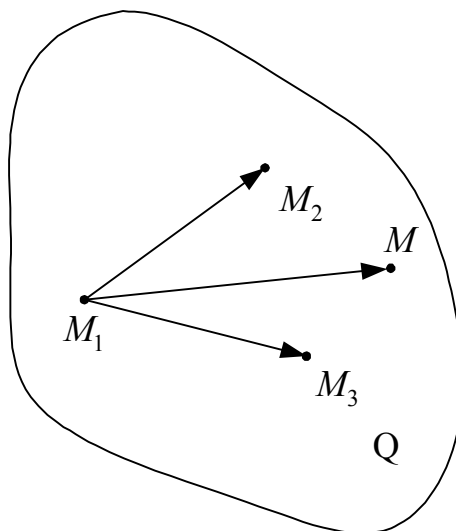


4. Уравнение плоскости, которая проходит через три заданные точки
 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$Q: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости.

Это уравнение вытекает из того, что все четыре точки находятся в одной плоскости, а следовательно три вектора $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны. Условие компланарности векторов: $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$.



Угол между двумя заданными плоскостями определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad \text{где} \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \quad -$$

нормальные векторы заданных плоскостей.

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей:

$$P_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ и } P_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \quad P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Расстояние $\rho(M_0, P)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.1.2. Прямая в пространстве

Обозначим прямую в пространстве L . Будем писать $L \in R^3$.

1. Общее уравнение прямой в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей Q_1 и Q_2 . $Q_1 \nparallel Q_2$. Поэтому уравнения можно задать в виде:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \text{ – это общее уравнение прямой в пространстве.}$$

В данной формуле первое уравнение – уравнение плоскости Q_1 ; второе – уравнение плоскости Q_2 .

2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве.

$$L: \begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \\ z = z_0 + \lambda p \end{cases}, \text{ где } A(x_0, y_0, z_0) \in L, \text{ вектор } \vec{S} - \text{ вектор направления прямой}$$

$L; \vec{S} \parallel L, \vec{S} = (m, n, p), \lambda$ - параметр (число).

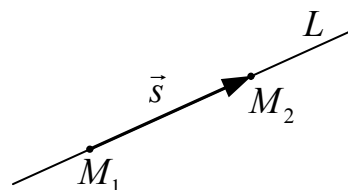
3. Каноническое уравнение прямой в пространстве.

$$\lambda = \frac{x - x_0}{m}, \lambda = \frac{y - y_0}{n}, \lambda = \frac{z - z_0}{p}.$$

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \text{ – каноническое уравнение прямой.}$$

4. Уравнение прямой, которая проходит через 2 точки.

$$L: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$



где $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), M_1(x, y, z) \in L$.

Угол между двумя прямыми:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2 :

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой $L: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$, точка

$A(x_1, y_1, z_1) \in L, \vec{S} = (m, n, p)$ определяется по формуле:

$$\rho(M_0, L) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Чтобы найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$, следует решить систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Угол между прямой $L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и плоскостью

$P: Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой L и плоскости P :

$$L \parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0; \quad L \perp P \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Условие принадлежности двух прямых

$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ одной плоскости:

$$\left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $A_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $A_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Условие того, что прямые L_1 и L_2 мимопроходящие $\left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) \neq 0$.

Расстояние между двумя мимопроходящими прямыми L_1 и L_2 :

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) \right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

3.1.3. Прямая на плоскости

Обозначим прямую на плоскости ℓ .

Считаем $\ell \subset R^2$. Соответствующие уравнения ℓ получим из приведённых выше уравнений исключением координаты z ($Q \subset R^3$):

$\ell: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$;

$\ell: Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой на плоскости; A, B – координаты любого вектора, перпендикулярного прямой;

$\ell: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках;

$\ell: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Разрешив общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ относительно y (при $B \neq 0$), получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между прямой и положительным направлением оси Ox .

$\ell: y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ в направлении, определяемом угловым коэффициентом k .

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n)$.

$\ell: \begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой на плоскости.

- Запишите известные Вам уравнения плоскости.
- Запишите известные Вам уравнения прямой на плоскости.
- Запишите известные Вам уравнения прямой в пространстве.

► Укажите, какие из уравнений являются уравнениями прямой на плоскости, какие – уравнением прямой в пространстве и определите его тип:

$$1) \frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{7}; \quad 2) 3x - 4y + 8 = 0; \quad 3) \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{0};$$

$$4) y = 2x - 3; \quad 5) \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - 7t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Пример 3.1. Заданы прямые $l_1: x + 2y - 3 = 0$ и $l_2: 3x - 4y + 11 = 0$ и точка $M(2, 9)$. Найти:

- 1) угловой коэффициент прямой l_2 и отрезок, который отсекает эта прямая на оси ординат;
- 2) уравнение прямой l_1 в отрезках;
- 3) точку N пересечения прямых l_1 и l_2 ;
- 4) уравнение прямой l_3 , которая проходит через точку M параллельно прямой l_2 ;
- 5) уравнение прямой l_4 , которая проходит через точку M перпендикулярно прямой l_2 ;
- 6) расстояние от точки M до прямой $l_2: \rho(M, l_2)$.

Все результаты проиллюстрировать графически.

Решение:

- 1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k - угловой коэффициент, b - отрезок, который отсекается прямой на оси ординат.

$$l_2: 3x - 4y + 11 = 0; -4y = -3x - 11; y = \frac{-3x - 11}{-4};$$

$$l_2: y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}; k = \frac{3}{4} = 0,75, b = \frac{11}{4} = 2,75.$$

- 2) Уравнение прямой l_1 в отрезках:

$$l_1: x + 2y - 3 = 0; x + 2y = 3; \frac{x+2y}{3} = 1; \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 1; \frac{x}{3} + \frac{y}{1,5} = 1.$$

3) Точка N пересечения прямых l_1 и l_2 определяется путём решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 3(3 - 2y) - 4y + 11 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9 - 6y - 4y + 11 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2 \cdot 2 \\ -10y = -20 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Точка $N(-1, 2)$ - точка пересечения прямых l_1 и l_2 .

4) Уравнение прямой l_3 , которая проходит через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно прямой l_2 находится следующим образом: $(y - y_0) = k(x - x_0)$, где $k = k_{l_2} = k_{l_3}$. Уравнение этой прямой l_3 : $(y - 9) = 0,75 \cdot (x - 2)$; $0,75x - y + 7,5 = 0$.

5) Будем искать уравнение прямой l_4 в виде: $y - y_0 = k_4(x - x_0)$; $x_0 = 2, y_0 = 9$. Пользуясь условием перпендикулярности прямых l_2 и l_4 , получим

$$k_2 \cdot k_4 = -1, \quad k_4 = -\frac{1}{k_2} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}, \quad y - 9 = -\frac{4}{3}(x - 2), \quad 3y - 27 = -4x + 8,$$

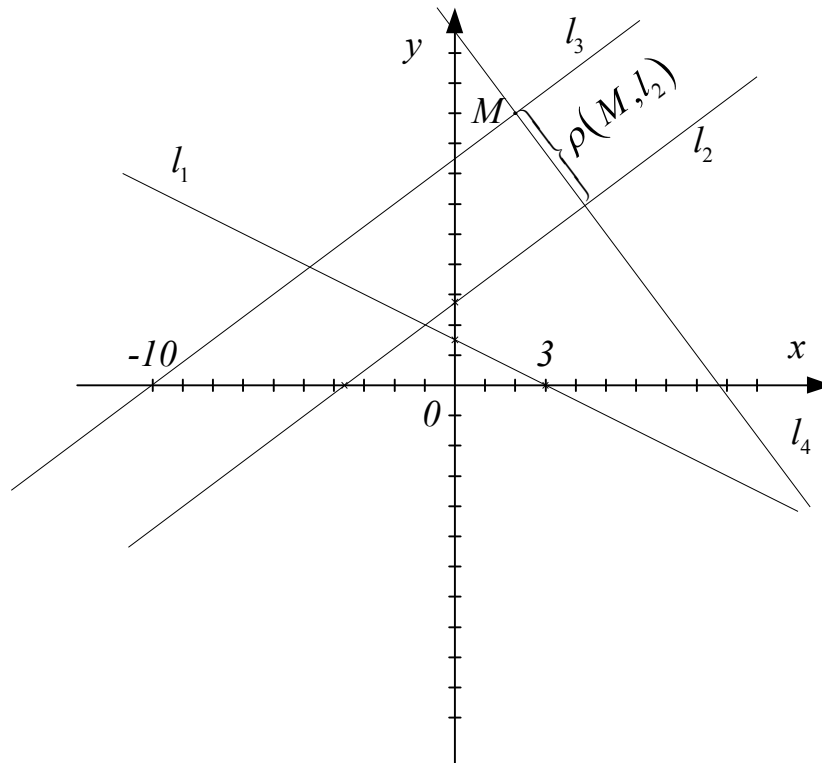
$$l_4: 4x + 3y - 35 = 0.$$

6) расстояние от точки M до прямой l_2 определяется по формуле:

$$\rho(M, l_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\rho(M, l_2) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 9 + 11|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{19}{\sqrt{25}} = \frac{19}{5} = 3,8.$$

Полученные результаты проиллюстрированы на следующем рисунке:



Задание 3.2. Задано уравнение плоскости $P_1: 4x + 3y - 9 = 0$, прямой

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-5} \text{ и точка } M(1, -2, 1). \text{ Найти:}$$

- 1) уравнение плоскости P_2 , которая проходит через точку M параллельно плоскости P_1 ;
- 2) уравнение плоскости P_3 , которая проходит через точку M перпендикулярно прямой L_1 ;
- 3) уравнение прямой L_2 , которая проходит через точку M перпендикулярно плоскости P_1 ;
- 4) уравнение прямой L_3 , которая проходит через точку M параллельно прямой L_1 ;
- 5) точку N пересечения прямой L_1 и плоскости P_1 ;
- 6) расстояние от точки M до плоскости P_1 : $\rho(M, P_1)$;
- 7) расстояние от точки M до прямой L_1 : $\rho(M, L_1)$;
- 8) проекцию точки M на плоскость P_1 , координаты точки $M_{\text{сим}}$, симметричной точке M относительно плоскости P_1 ;

9) проекцию точки M на прямую L_1 , координаты точки $M''_{\text{сим}}$, симметричной точке M относительно прямой L_1 .

Решение:

1) Из параллельности плоскостей P_1 и P_2 следует, что нормальный вектор $\vec{n} = (4, 3, 0)$ плоскости P_1 является так же нормальным вектором для плоскости P_2 . В общем виде уравнение плоскости P_2 , которой принадлежит точка $M(1, -2, 1)$ и которая параллельна плоскости $P_1: 4x + 3y - 9 = 0$ выглядит так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где $A = 4, B = 3, C = 0; x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 1$. Таким образом, имеем: $P_2: 4(x - 1) + 3(y + 2) + 0(z - 1) = 0$, $P_2: 4x + 3y + 2 = 0$.

2) Из перпендикулярности плоскости P_3 и прямой L_1 следует, что направляющий вектор прямой $\vec{s} = (1, 2, -5)$ является нормальным вектором плоскости P_3 , то есть $A = 1, B = 2, C = -5$. Следовательно, уравнение плоскости P_3 принимает вид: $P_3: 1(x - 1) + 2(y + 2) - 5(z - 1) = 0$, $P_3: x + 2y - 5z + 8 = 0$.

3) Из перпендикулярности плоскости P_1 и прямой L_2 следует, что нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (4, 3, 0)$ является направляющим вектором прямой $\vec{s} = (4, 3, 0)$. Учитывая, что прямая L_2 , проходит через точку $M(1, -2, 1)$ можно записать: $L_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{0}$,

4) Из параллельности прямых L_1 и L_3 следует, что направляющий вектор прямой L_1 , $\vec{s} = (1, 2, -5)$ является так же направляющим вектором прямой L_3 . Учитывая, что прямая L_3 проходит через точку $M(1, -2, 1)$ и пользуясь каноническими уравнениями прямой, можно записать искомые уравнения в виде:

$$L_3: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-5}.$$

5) Уравнения прямой L_1 и плоскости P_1 создают систему, решив которую

получим точку N пересечения прямой и плоскости
$$\begin{cases} 4x + 3y - 9 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 9 = 0, \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-5} = t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 9 = 0, \\ x = 3 + t, \\ y = 2t, \\ z = -5t - 3, \end{cases}$$

$$4(3+t) + 3 \cdot 2t - 9 = 0,$$

$$10t = -3,$$

$$t = -\frac{3}{10},$$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{3}{10}, \\ y = 2\left(-\frac{3}{10}\right), \\ z = -5\left(-\frac{3}{10}\right) - 3, \end{cases} \begin{cases} x = 2\frac{7}{10} = 2,7, \\ y = -\frac{3}{5} = -0,6, \\ z = -1\frac{1}{2} = -1,5, \end{cases} \quad N(2,7; -0,6; -1,5).$$

6) расстояние от точки M до плоскости P_1 : $\rho(M, P_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$

$$\rho(M, P_1) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|4 - 6 - 9|}{\sqrt{25}} = \frac{|-11|}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} = 2,2.$$

7) расстояние от точки M до прямой L_1 : $\rho(M, L_1) = \frac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1}|}{|\vec{s}_{L_1}|},$ где

$A(x_0, y_0, z_0) \in L_1, \vec{s}_{L_1} = (m, n, p).$ Из уравнения прямой L_1 найдём координаты точки

A : $A(3, 0, -3)$ и координаты вектора $\vec{s}_{L_1}$: $\vec{s}_{L_1} = (1, 2, -5),$

$$\overrightarrow{AM} = (1 - 3, -2 + 0, 1 - (-3)) = (-2, -2, 4),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= 2\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} = (2, -6, -2), \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1}| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}, \quad |\vec{s}_{L_1}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30},$$

$$\rho(M, L_1) = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{44}{30}} \approx 1,211.$$

8) Проекцией точки M на плоскость P_1 является точка пересечения прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{0}$, которая проходит через точку M перпендикулярно плоскости P_1 , уравнение которой $4x + 3y - 9 = 0$. Решим систему двух уравнений для нахождения проекции точки M на плоскость P_1 :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{0} = t, \\ 4x + 3y - 9 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = 1, \\ 4x + 3y - 9 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(4t+1) + 3(3t-2) - 9 = 0 \\ 25t = 11, \end{cases} \quad t = \frac{11}{25}.$$

$$x = 4 \cdot \frac{11}{25} + 1 = \frac{69}{25} = 2,76, \quad y = 3 \cdot \frac{11}{25} - 2 = -\frac{17}{25} = -0,68, \quad z = 1.$$

Точка $M'(2,76; -0,68; 1)$ - проекция точки M на плоскость P_1 .

Учтём, что точка M' является серединой отрезка $MM_{\text{сим}}$. Тогда:

$$x_{M_{\text{сим}}} = 2x_{M'} - x_M, \quad y_{M_{\text{сим}}} = 2y_{M'} - y_M, \quad z_{M_{\text{сим}}} = 2z_{M'} - z_M,$$

$$x_{M_{\text{сим}}} = 2 \cdot 2,76 - 1 = 5,52 - 1 = 4,52,$$

$$y_{M_{\text{сим}}} = 2(-0,68) - (-2) = -1,36 + 2 = 0,64,$$

$$z_{M_{\text{сим}}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1,$$

Точка $M_{\text{сим}}(4,52; 0,64; 1)$, симметрична точке M относительно плоскости P_1 .

9) Проекцией точки M на прямую $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-5}$ является точка пересечения плоскости $x + 2y - 5z + 8 = 0$, которой принадлежит точка M и прямой L_1 . Решим систему двух уравнений для нахождения проекции точки M на прямую L_1 :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-5} = t, \\ x+2y-5z+8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+3, \\ y=2t, \\ z=-5t-3, \\ x+2y-5z+8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+3+2 \cdot 2t-5(-5t-3)+8=0 \\ 30t=-26, \quad t=-\frac{26}{30}. \end{cases}$$

$$x = -\frac{26}{30} + 3 = \frac{64}{30} \approx 2,13, \quad y = 2 \cdot \left(-\frac{26}{30}\right) = -\frac{52}{30} \approx -1,73,$$

$$z = -5 \cdot \left(-\frac{26}{30}\right) - 3 = \frac{130}{30} - 3 = \frac{40}{30} = 1,33.$$

Точка $M''(2,13;-1,73;1,33)$ - проекция точки M на прямую L_1 .

Для нахождения точки $M''_{\text{сим}}$, симметричной точке M относительно прямой L_1 , воспользуемся формулами:

$$x_{M''} = \frac{x_M + x_{M''_{\text{сим}}}}{2}, \quad y_{M''} = \frac{y_M + y_{M''_{\text{сим}}}}{2}, \quad z_{M''} = \frac{z_M + z_{M''_{\text{сим}}}}{2},$$

$$x_{M''_{\text{сим}}} = 2x_{M''} - x_M, \quad y_{M''_{\text{сим}}} = 2y_{M''} - y_M, \quad z_{M''_{\text{сим}}} = 2z_{M''} - z_M,$$

$$x_{M''_{\text{сим}}} = 2 \cdot \frac{64}{30} - 1 = \frac{98}{30} \approx 3,27,$$

$$y_{M''_{\text{сим}}} = 2 \cdot \left(-\frac{52}{30}\right) - (-2) = -\frac{104}{30} + 2 = -\frac{44}{30} \approx -1,47,$$

$$z_{M''_{\text{сим}}} = 2 \cdot \frac{40}{30} - 1 = \frac{50}{30} \approx 1,67,$$

Точка $M''_{\text{сим}}(3,27;-1,47;1,67)$, симметрична точке M относительно прямой L_1 .

Задание 3.3. Заданы координаты вершин пирамиды $ABCD$, $A(1,-1,2)$, $B(2,1,2)$, $C(1,1,4)$, $D(6,-3,8)$. Найти:

- 1) уравнение прямой L , которая проходит через точки A , B , и длину ребра AB ;
- 2) уравнение плоскости P , которая проходит через точки A , B , C , и площадь S грани ABC ;
- 3) уравнение высоты H , опущенной с вершины D на грань ABC и ее длину h ;
- 4) объем пирамиды $ABCD$;
- 5) угол α между ребрами AB и AD ;

Решение:

1) Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \text{ Направляющий вектор прямой, которая проходит через точки}$$

$$A \text{ и } B, \vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 1-(-1), 2-2) = (1, 2, 0).$$

$$\text{Имеем: } m=1, n=2, p=0, x_0=1, y_0=-1, z_0=2 \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0},$$

$$\text{длина ребра } AB: |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

2) Уравнение плоскости P , которая проходит через точки A, B, C ,

$$P: \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0, \quad P: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или}$$

$$4(x-1) - 2(y+1) + 2(z-2) = 0,$$

$$2(x-1) - (y+1) + (z-2) = 0,$$

$$2x - y + z - 5 = 0;$$

$$\text{площадь } S \text{ грани } ABC: S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \overrightarrow{AB} = (1, 2, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 2),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (4, 2, 2) = 2(2, 1, 1),$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 2\sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \approx 2,45.$$

3) Уравнение высоты H , опущенной с вершины D на грань ABC , это уравнение прямой, проходящей через точку $D(6, -3, 8)$ перпендикулярно плоскости ABC , нормаль которой $\vec{n} = (2, -1, 1)$ является направляющим вектором прямой $\vec{s} = (2, -1, 1)$:

$$H: \frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-8}{1},$$

$$\text{длина } h: h = \rho(D, ABC) = \frac{|2 \cdot 6 - (-3) + 8 - 5|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{18}{\sqrt{6}} \approx 7,35.$$

4) Объем пирамиды $ABCD$:

$$V_{\text{пир. } ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|,$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 + 4) - 2 \cdot (-10) = 16 + 20 = 36,$$

$$V_{\text{пир. } ABCD} = \frac{1}{6} 36 = 6.$$

5) угол α между ребрами AB и AD :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5},$$

$$\overrightarrow{AD} = (5, -2, 6), \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{65},$$

$$\cos \alpha = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 6}{\sqrt{5} \sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{325}} = \frac{1}{5\sqrt{13}} \approx 0,06.$$

3.2. Кривые второго порядка

К кривым второго порядка относится известная из школьного курса кривая

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

которая является окружностью с центром в т. $O(0,0)$ радиуса R .

Будем рассматривать другие кривые второго порядка, а именно: эллипс, гиперболу, параболу.

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$\text{где } |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

При определённых значениях коэффициентов A, B, C это уравнение определяют эллипс, гиперболу, параболу:

$A \cdot C > 0$ - эллипс;

$A \cdot C < 0$ - гипербола;

$A \cdot C = 0$, если A и C не равны нулю одновременно – парабола.

3.2.1. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек $M(x, y)$, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1, F_2 , которые называются фокусами, величина постоянная (эта постоянная величина больше расстояния между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b \leq a.$$

Параметры a и b полуоси эллипса; $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ - его вершины; оси Ox, Oy - главные оси эллипса, ось Ox - фокальная ось; точка O - центр эллипса. Точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы эллипса, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$; $2c$ - расстояние между фокусами, r_1, r_2 - фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$, которая принадлежит эллипсу. При $a=b$ получаем уравнение окружности: $x^2 + y^2 = a^2$.

Важной характеристикой эллипса является эксцентриситет.

Эксцентриситетом эллипса называется величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a - величина большой полуоси.

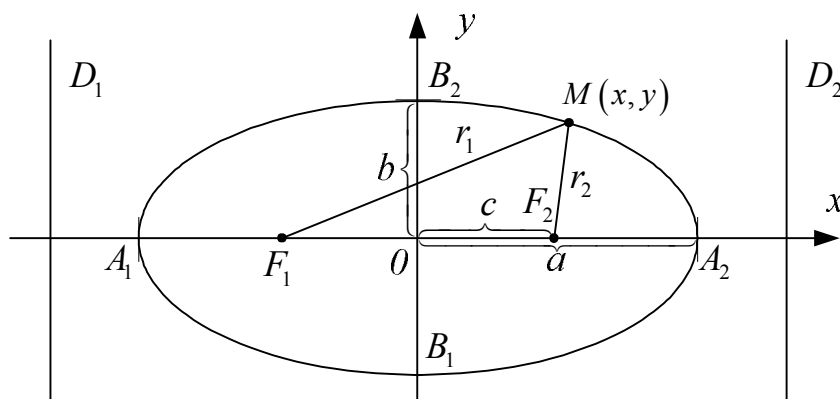
Учитывая, что $a > c$, имеем, что $0 \leq \varepsilon < 1$, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow c = 0$, то есть $b = a$, получаем окружность.

Эксцентриситет указывает на степень отклонения эллипса от окружности: чем больше эксцентриситет, тем больше эллипс вытягивается вдоль оси Ox .

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$, которые перпендикулярны фокальной оси называются директрисами эллипса.

Существует механический способ построения эллипса.

Берём нитку длиной $2a$, концы её закрепляем в точках F_1, F_2 . Натягиваем нитку карандашом и проводим эллипс. Тут использовано то, что $r_1 + r_2 = 2a$, где бы ни была точка $M(x, y)$, которая принадлежит эллипсу.



3.2.2. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$, разность расстояний которых до двух данных точек F_1, F_2 , которые называются фокусами, величина постоянная. (Эта постоянная величина положительная и меньше расстояния между фокусами).

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$$

Параметры a и b полуоси гиперболы; $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ - её вершины; оси симметрии - ось Ox - действительная ось, ось Oy - мнимая ось; точка O - центр гиперболы. Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы. Точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы гиперболы, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$; $2c$ - расстояние между фокусами; r_1, r_2 - фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$, которая принадлежит гиперболе.

Уравнение вида $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ определяет гиперболу, сопряжённую гиперболе

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. На рисунке эта гипербола нарисована пунктиром. У неё действительная ось - ось Oy .

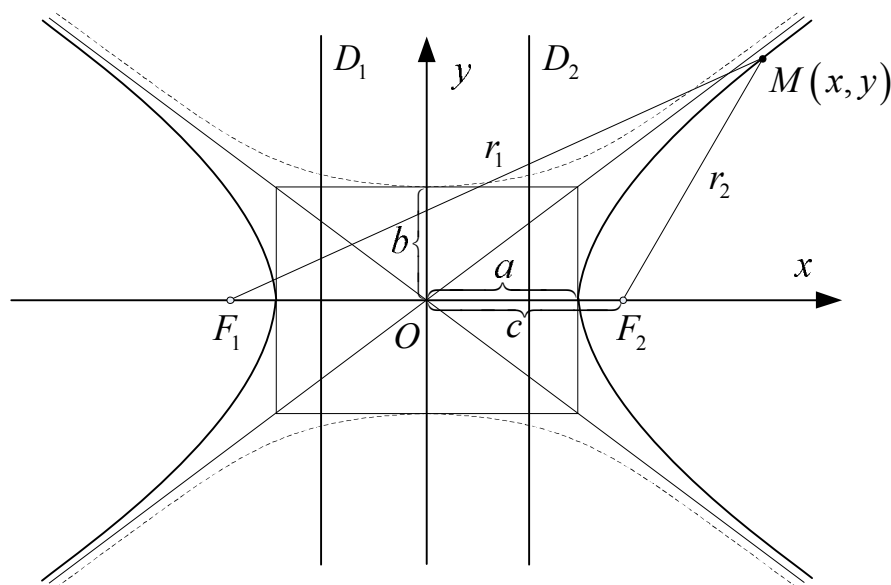
При $b = a$ имеем: $x^2 - y^2 = a^2$ - уравнение равносторонней гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a - величина

большой полуоси.

Учитывая, что $c > a$, имеем, что $\varepsilon > 1$.

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$, которые перпендикулярны действительной оси называются директрисами гиперболы.



3.2.3. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$, одинаково удалённых от точки F , которая называется фокусом и прямой D , которая называется директрисой.

Каноническое уравнение параболы

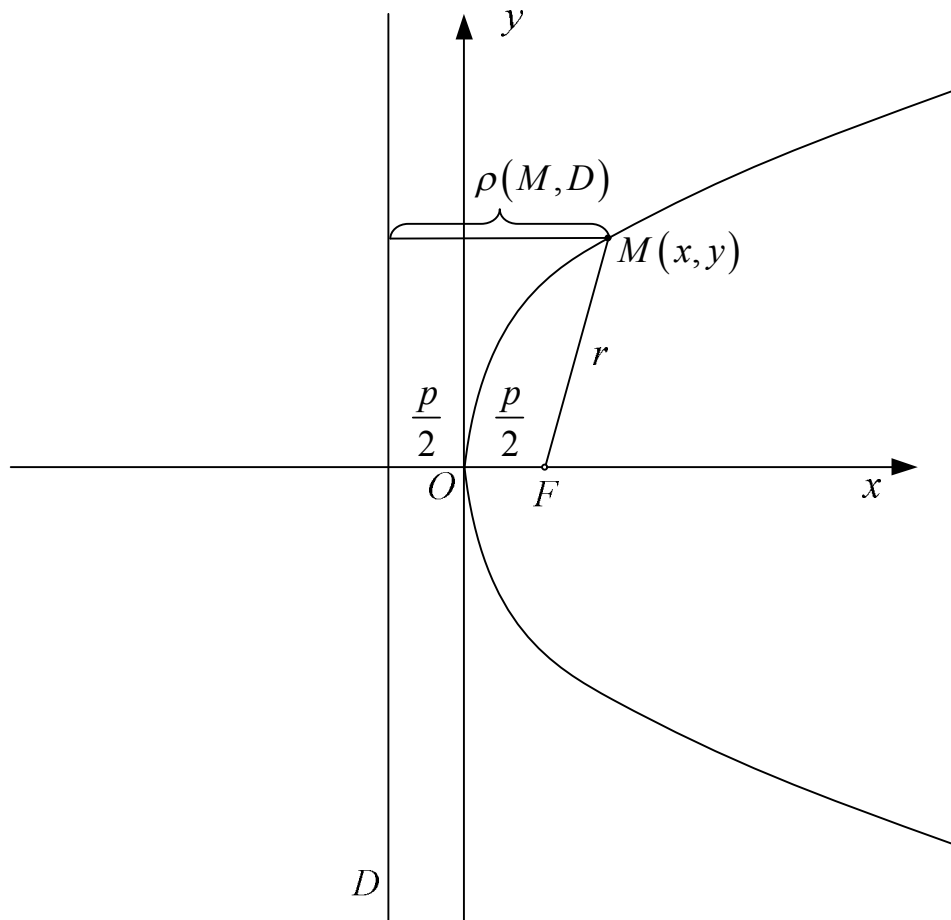
$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Число p - параметр параболы, точка O - её вершина, ось Ox - ось симметрии параболы.

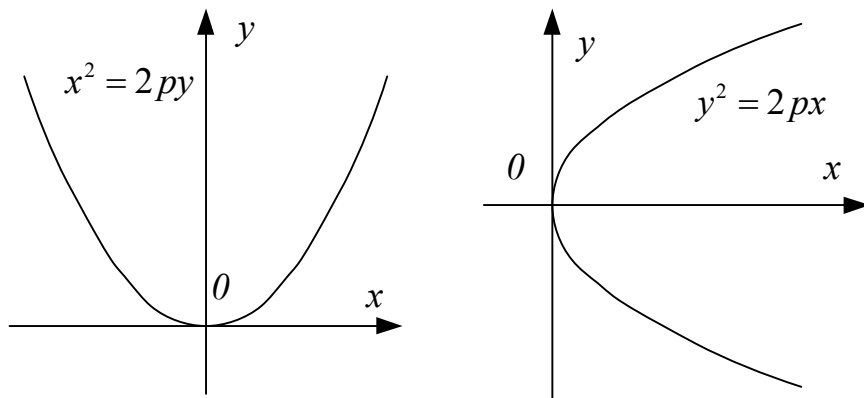
Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ - фокус параболы, r - фокальный радиус произвольной точки

$M(x, y)$ параболы, точки с изменяющимися координатами.

Прямая $D: x = -\frac{p}{2}$, которая перпендикулярна оси симметрии параболы, - директриса параболы.



Эксцентриситет параболы $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$, где $d = \rho(M, D)$ - расстояние от точки M до директрисы D .



Для рассмотренных кривых значения эксцентриситета такое:

$0 \leq \varepsilon < 1$ - эллипс,

$\varepsilon > 1$ - гипербола,

$\varepsilon = 1$ - парабола.

По этой характеристике, если она задана, можно распознавать, какая кривая рассматривается.

Пример 3.4.

Установить тип кривой второго порядка $L: 9x^2 + 4y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$, привести ее уравнение к каноническому виду и найти все ее характеристики:

Построить график кривой.

Решение: Сравним заданное уравнение с общим уравнением кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$9x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy + 4y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$$

$A \cdot C = 9 \cdot 4 = 36 > 0$ - следовательно, наша кривая – эллипсоид.

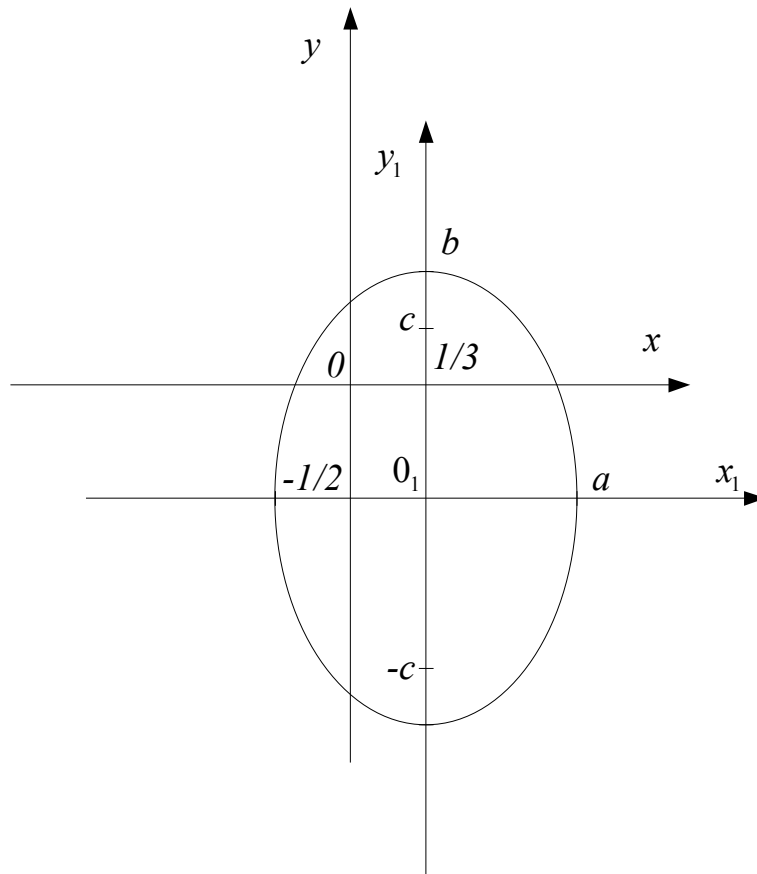
Преобразуем заданное уравнение следующим образом, выделяя полные квадраты:

$$(9x^2 - 6x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) - 4 = 0,$$

$$(3x - 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4,$$

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4,$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{1} = 1.$$



Сделаем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Воспользуемся формулами преобразования координат:

$x_1 = \left(x - \frac{1}{3}\right)$, $y_1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)$. Относительно новых осей координат уравнение кривой имеет вид: $\frac{x_1^2}{4/9} + \frac{y_1^2}{1} = 1$. Это уравнение эллипса, в котором $a = \frac{2}{3}$, $b = 1 \Rightarrow b > a$ -

эллипс вытянут вдоль оси Oy (b – большая полуось, a – малая полуось эллипса)

$c = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,745$ - величина фокуса эллипса. Эксцентриситет эллипса

$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{0,745}{1} = 0,745$, где b - величина большой полуоси.

Задания для контрольных и индивидуальных расчетных работ.

I. Вычислить определитель.

	a	b	c
1	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

	a	b	c
8	$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 10 & 12 \\ 4 & 13 & 13 & 13 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
12	$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 25 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
14	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} 11 & -12 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 3 & -9 & 1 \\ 6 & 1 & 10 & 3 \end{vmatrix}$

	a	b	c
16	$\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 35 & 4 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$
18	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 27 & 18 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$
20	$\begin{vmatrix} 112 & 12 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$
21	$\begin{vmatrix} 91 & 4 \\ 70 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & -8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 34 & -15 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
23	$\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

	a	b	c
24	$\begin{vmatrix} 24 & 6 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 120 & 15 \\ -30 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
26	$\begin{vmatrix} 32 & 5 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
27	$\begin{vmatrix} 3 & 40 \\ 5 & 55 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & -10 & 2 & -11 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 3 & -13 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$
29	$\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 15 & 20 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
30	$\begin{vmatrix} 41 & -7 \\ 30 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & -12 \\ 3 & -7 & -5 & -15 \end{vmatrix}$

II. Решить уравнение

1.	$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 2-x & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$	2.	$\begin{vmatrix} 3 & 2x-1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3x & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$	3.	$\begin{vmatrix} 2x+3 & 1 & 0 \\ 4 & x-1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$
----	--	----	--	----	--

4. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ x+1 & 0 & 2x-1 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$	5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2x+1 & 3x \\ x & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$	6. $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10$
7. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4+x & x & 3 \\ 2 & x-1 & 2 \end{vmatrix} = 8$	8. $\begin{vmatrix} 1 & 3x^2 & -2 \\ -1 & x+3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 14$	9. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 0 & 2 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
10. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4x+1 \\ 1 & 2x & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$	11. $\begin{vmatrix} 3x-1 & 2 & 5 \\ 1 & x+4 & x \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3$	12. $\begin{vmatrix} 4 & x-3 & 1 \\ 2x-1 & 3 & -2 \\ 3x & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$
13. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x+1 & 4 \\ 3 & x & -1 \\ 5 & x+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$	14. $\begin{vmatrix} 3x^2 & 4 & x+1 \\ 5 & -1 & 0 \\ x & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$	15. $\begin{vmatrix} 4x+3 & 0 & -2 \\ 3 & x-2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -13$
16. $\begin{vmatrix} 3x-4 & 2 & x \\ -1 & x+2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$	17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ x^2 & x-1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$	18. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4x-1 \\ 2 & x+2 & -1 \\ 3 & 2x+3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
19. $\begin{vmatrix} 5x & 4 & -3 \\ x & 2 & 5 \\ 3 & x+2 & 4 \end{vmatrix} = 0$	20. $\begin{vmatrix} 3x-1 & 2 & -1 \\ 4 & x+4 & 3 \\ 0 & 2x+1 & 5 \end{vmatrix} = 0$	21. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2x-3 \\ 1 & x+5 & 4 \\ 2 & x & 2x \end{vmatrix} = 59$
22. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 & 1 \\ 0 & 5-x & 2 \\ 4 & 3x-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$	23. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -1 & 2x+1 & 5 \\ 3 & 2 & 3x-5 \end{vmatrix} = 0$	24. $\begin{vmatrix} 6x+1 & -1 & x \\ 1 & 2 & -2 \\ x-3 & 4 & x-4 \end{vmatrix} = 0$
25. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2x \\ 4 & x-3 & -3 \\ 5 & 2x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$	26. $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3 & 4 \\ -2 & 4x-1 & 1 \\ x & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$	27. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2x-3 \\ x & 5 & 4 \\ 3x+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -92$
28. $\begin{vmatrix} 3x & 7 & 5 \\ -2 & 2x+1 & 1 \\ -4x & 3 & 4 \end{vmatrix} = 85$	29. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 2 & 3 \\ 5 & 3x+5 & -1 \\ 4x & x & 2 \end{vmatrix} = -18$	30. $\begin{vmatrix} 7x-3 & 2 & 4 \\ 5 & x & x-1 \\ 3x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

III. Найти значение многочлена $P(x)$ при $x = A$, где A - заданная матрица.

1. $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	2. $P(x) = x^2 + 3x - 1$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	3. $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
---	--	--

4. $P(x) = 3 + 4x - x^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	5. $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	6. $P(x) = 2 - 3x - 4x^2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
7. $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	8. $P(x) = 3 - x - 2x^2$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	9. $P(x) = 3x^2 + x - 2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
10. $P(x) = x^2 - 4x + 5$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	11. $P(x) = 2 + 3x - 4x^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	12. $P(x) = 5 + 2x - 3x^2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
13. $P(x) = 3x^2 - 5x - 1$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	14. $P(x) = 2 - x - 3x^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	15. $P(x) = 2x^2 - 3x - 7$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
16. $P(x) = 5x^2 + 3x - 7$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	17. $P(x) = 3 - 2x + 4x^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	18. $P(x) = x^2 + 7x - 13$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
19. $P(x) = 3x^2 + 5x - 13$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	20. $P(x) = 7x^2 - 8x + 9$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	21. $P(x) = 10 - 3x + 4x^2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
22. $P(x) = 5x^2 - 7x - 3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	23. $P(x) = 4 - 3x - 2x^2$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	24. $P(x) = 8x^2 - 6x + 1$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
25. $P(x) = x^2 + 6x - 10$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	26. $P(x) = 4x^2 + 3x - 5$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	27. $P(x) = 3 - 2x - x^2$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P(x) = 10x^2 + x - 3$ 28. $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$P(x) = 7 - 6x - 5x^2$ 29. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$P(x) = x^2 + 4x - 7$ 30. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
---	---	--

IV. Найти матрицу $D = (AB)^T + 3C^2$, если

№	A	B	C	№	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 & -11 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

V. Проверить, является ли матрица A корнем многочлена $P(x)$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P(x) = x^2 - 4x + 3$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = 3x^2 - 6$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P(x) = 3x^2 - 6x + 15$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P(x) = x^2 - 3x - 2$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P(x) = -x^2 + 6x - 8$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = 3x^2 - 3x - 6$

9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = x^2 - 4x - 3$

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $P(x) = -2x^2 + 6x - 4$

11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $P(x) = x^2 - 4x - 5$

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(x) = -x^2 + 3x - 2$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = 5x^2 - 10x + 60$

14. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P(x) = 4x^2 + 8x - 20$

$$\begin{array}{ll}
15. A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, P(x) = 3x^2 + 3x - 6 & 16. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - 8x + 15 \\
17. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = -3x^2 + 3x - 18 & 18. A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - 5x + 12 \\
19. A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, P(x) = -x^2 + 3x + 18 & 20. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, P(x) = 2x^2 - 2x - 24 \\
21. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 + 3x - 2 & 22. A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P(x) = -2x^2 - 2x + 12 \\
23. A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 + 2x - 3 & 24. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P(x) = 4x^2 + 4x - 24 \\
25. A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - 5x + 6 & 26. A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, P(x) = 3x^2 - 6x - 36 \\
27. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - x - 2 & 28. A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - 12x + 20 \\
29. A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = x^2 - 7x + 6 & 30. A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P(x) = -x^2 - 2x + 8
\end{array}$$

VI. Решить матричное уравнение двумя способами:

- 1) применив правила действий с матрицами;
- 2) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 17 & -16 \end{pmatrix} \\
3. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -11 & 62 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
5. \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 35 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 17 \end{pmatrix} \\
7. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 22 & -12 \end{pmatrix} & 8. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & 23 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \\
9. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 29 \end{pmatrix} & 10. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} \\
11. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -18 \\ 9 & -16 \end{pmatrix} & 12. \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\
13. \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} & 14. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
15. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} -1 & 18 \\ 13 & -2 \end{pmatrix} \\
17. \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} -11 & 28 \\ -11 & 8 \end{pmatrix} \\
19. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \\
21. \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 23 & -16 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \\
23. \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -14 & 18 \end{pmatrix} \\
25. \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
27. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ -11 & -4 \end{pmatrix} \\
29. \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 24 & 34 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \\
18. \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} \\
20. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} \\
22. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 16 & -23 \end{pmatrix} \\
24. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 21 & 4 \\ -22 & -11 \end{pmatrix} \\
26. \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \\
28. \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 36 & 9 \\ -18 & -15 \end{pmatrix} \\
30. \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

VII. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя методами:

- 1) методом Гаусса;
- 2) по правилу Крамера;
- 3) матричным методом.

$$1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 17 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 12 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -18 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 8 \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 19 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 7x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 17 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

VIII. Заданы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3),$

$$\vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}.$$

Определить:

1) длину вектора $\vec{a}: |\vec{a}|;$

2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a}, \vec{b})$;
 3) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$;
 4) площадь параллелограмма S_1 и площадь треугольника S_2 , построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

5) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
 6) объём параллелепипеда V_1 и объём треугольной пирамиды V_2 , построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

- 7) коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
 8) компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
 9) координаты вектора $\vec{d}$, если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
 10) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$;
 11) проекцию вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$: $np_{\vec{a}} \vec{d}$.

- | | | | |
|-----|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1. | $\vec{a} = (3, 3, 1),$ | $\vec{b} = (-1, 0, -2),$ | $\vec{c} = (2, 1, 2).$ |
| 2. | $\vec{a} = (2, 2, 1),$ | $\vec{b} = (2, 3, 1),$ | $\vec{c} = (3, 0, -1).$ |
| 3. | $\vec{a} = (1, 4, 2),$ | $\vec{b} = (0, 1, -1),$ | $\vec{c} = (1, 1, 3).$ |
| 4. | $\vec{a} = (1, -1, 2),$ | $\vec{b} = (3, 3, 1),$ | $\vec{c} = (2, 3, -4).$ |
| 5. | $\vec{a} = (0, 3, 1),$ | $\vec{b} = (1, -1, 1),$ | $\vec{c} = (1, 2, 1).$ |
| 6. | $\vec{a} = (3, 1, -3),$ | $\vec{b} = (-2, -1, 1),$ | $\vec{c} = (4, 2, -1).$ |
| 7. | $\vec{a} = (2, 3, 1),$ | $\vec{b} = (3, -2, 1),$ | $\vec{c} = (1, 2, 2).$ |
| 8. | $\vec{a} = (4, 5, 1),$ | $\vec{b} = (6, 3, 4),$ | $\vec{c} = (2, 0, -1).$ |
| 9. | $\vec{a} = (-5, 2, 1),$ | $\vec{b} = (1, -3, -4),$ | $\vec{c} = (-3, 2, 3).$ |
| 10. | $\vec{a} = (3, -3, 2),$ | $\vec{b} = (2, 0, -1),$ | $\vec{c} = (-5, 2, 1).$ |
| 11. | $\vec{a} = (1, -2, 0),$ | $\vec{b} = (1, -3, 1),$ | $\vec{c} = (2, 0, 7).$ |
| 12. | $\vec{a} = (2, 3, 4),$ | $\vec{b} = (0, -2, -1),$ | $\vec{c} = (2, -1, 1).$ |

13. $\vec{a} = (5, 3, 4), \quad \vec{b} = (-1, 4, -1), \quad \vec{c} = (-1, 2, 3).$
14. $\vec{a} = (-2, 5, 1), \quad \vec{b} = (4, -1, 5), \quad \vec{c} = (0, -1, 1).$
15. $\vec{a} = (2, -3, 4), \quad \vec{b} = (-1, -10, -1), \quad \vec{c} = (-4, 2, 5).$
16. $\vec{a} = (3, -3, 5), \quad \vec{b} = (-2, 0, -3), \quad \vec{c} = (2, 4, -1).$
17. $\vec{a} = (2, -3, -3), \quad \vec{b} = (2, 3, 1), \quad \vec{c} = (6, -7, 4).$
18. $\vec{a} = (-2, 1, -1), \quad \vec{b} = (3, 0, -1), \quad \vec{c} = (1, 3, -2).$
19. $\vec{a} = (-1, 2, 3), \quad \vec{b} = (2, 3, -8), \quad \vec{c} = (2, 1, -1).$
20. $\vec{a} = (1, -2, 3), \quad \vec{b} = (-3, 2, 1), \quad \vec{c} = (1, 1, 0).$
21. $\vec{a} = (-1, 3, 2), \quad \vec{b} = (4, 1, 4), \quad \vec{c} = (1, -1, 0).$
22. $\vec{a} = (4, -2, 3), \quad \vec{b} = (1, -2, 4), \quad \vec{c} = (2, 2, 2).$
23. $\vec{a} = (1, -3, 3), \quad \vec{b} = (-4, 4, 5), \quad \vec{c} = (0, 1, 2).$
24. $\vec{a} = (3, 4, 1), \quad \vec{b} = (1, -2, 0), \quad \vec{c} = (-1, -3, 2).$
25. $\vec{a} = (-1, -1, 2), \quad \vec{b} = (2, 5, -3), \quad \vec{c} = (1, 0, -2).$
26. $\vec{a} = (-4, 0, -1), \quad \vec{b} = (2, 7, 6), \quad \vec{c} = (2, 2, 2).$
27. $\vec{a} = (0, 2, 6), \quad \vec{b} = (-2, 2, 4), \quad \vec{c} = (-5, 1, 3).$
28. $\vec{a} = (-2, -1, 2), \quad \vec{b} = (1, 0, -3), \quad \vec{c} = (-2, 3, 3).$
29. $\vec{a} = (1, 7, -3), \quad \vec{b} = (-1, 5, -1), \quad \vec{c} = (2, 2, 0).$
30. $\vec{a} = (1, -4, 5), \quad \vec{b} = (3, -2, -3), \quad \vec{c} = (-5, 8, 4).$

IX. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ создают базис. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{x} = (6, 5, -14), \quad \vec{p} = (1, 1, 4), \quad \vec{q} = (0, -3, 2), \quad \vec{r} = (2, 1, -1).$
2. $\vec{x} = (8, 9, 4), \quad \vec{p} = (1, 0, 1), \quad \vec{q} = (0, -2, 1), \quad \vec{r} = (1, 3, 0).$
3. $\vec{x} = (-9, 5, 5), \quad \vec{p} = (4, 1, 1), \quad \vec{q} = (-2, 0, 3), \quad \vec{r} = (-1, 2, 1).$
4. $\vec{x} = (2, -1, 11), \quad \vec{p} = (1, 1, 0), \quad \vec{q} = (0, 1, -2), \quad \vec{r} = (1, 0, 3).$

5. $\vec{x} = (-1, 7, 0)$, $\vec{p} = (0, 3, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, -1, 0)$.
6. $\vec{x} = (-2, 4, 7)$, $\vec{p} = (0, 1, 2)$, $\vec{q} = (1, 0, 1)$, $\vec{r} = (-1, 2, 4)$.
7. $\vec{x} = (15, -20, -1)$, $\vec{p} = (0, 2, 1)$, $\vec{q} = (0, 1, -1)$, $\vec{r} = (5, -3, 2)$.
8. $\vec{x} = (6, -1, 7)$, $\vec{p} = (1, -2, 0)$, $\vec{q} = (-1, 1, 3)$, $\vec{r} = (1, 0, 4)$.
9. $\vec{x} = (6, 12, -1)$, $\vec{p} = (1, 3, 0)$, $\vec{q} = (2, -1, 1)$, $\vec{r} = (0, -1, 2)$.
10. $\vec{x} = (-5, -5, 5)$, $\vec{p} = (-2, 0, 1)$, $\vec{q} = (1, 3, -1)$, $\vec{r} = (0, 4, 1)$.
11. $\vec{x} = (3, 3, -1)$, $\vec{p} = (3, 1, 0)$, $\vec{q} = (-1, 2, 1)$, $\vec{r} = (-1, 0, 2)$.
12. $\vec{x} = (8, -7, -13)$, $\vec{p} = (0, 1, 5)$, $\vec{q} = (3, -1, 2)$, $\vec{r} = (-1, 0, 1)$.
13. $\vec{x} = (11, -1, 4)$, $\vec{p} = (1, -1, 2)$, $\vec{q} = (3, 2, 0)$, $\vec{r} = (-1, 1, 1)$.
14. $\vec{x} = (11, 5, -3)$, $\vec{p} = (1, 0, 2)$, $\vec{q} = (-1, 0, 1)$, $\vec{r} = (2, 5, -3)$.
15. $\vec{x} = (8, 1, 12)$, $\vec{p} = (1, 2, -1)$, $\vec{q} = (3, 0, 2)$, $\vec{r} = (-1, 1, 1)$.
16. $\vec{x} = (1, -4, 4)$, $\vec{p} = (2, 1, -1)$, $\vec{q} = (0, 3, 2)$, $\vec{r} = (1, -1, 1)$.
17. $\vec{x} = (8, 0, 5)$, $\vec{p} = (2, 0, 1)$, $\vec{q} = (1, 1, 0)$, $\vec{r} = (4, 1, 2)$.
18. $\vec{x} = (-19, 1, 7)$, $\vec{p} = (0, 1, 1)$, $\vec{q} = (-2, 0, 1)$, $\vec{r} = (3, 1, 0)$.
19. $\vec{x} = (-5, 9, -13)$, $\vec{p} = (0, 1, -2)$, $\vec{q} = (3, -1, 1)$, $\vec{r} = (4, 1, 0)$.
20. $\vec{x} = (3, 1, 8)$, $\vec{p} = (0, 1, 3)$, $\vec{q} = (1, 2, -1)$, $\vec{r} = (2, 0, -1)$.
21. $\vec{x} = (13, 2, 7)$, $\vec{p} = (5, 1, 0)$, $\vec{q} = (2, -1, 3)$, $\vec{r} = (1, 0, -1)$.
22. $\vec{x} = (3, -3, 4)$, $\vec{p} = (1, 0, 2)$, $\vec{q} = (0, 1, 1)$, $\vec{r} = (2, -1, 4)$.
23. $\vec{x} = (2, 7, 5)$, $\vec{p} = (1, 0, 1)$, $\vec{q} = (1, -2, 0)$, $\vec{r} = (0, 3, 1)$.
24. $\vec{x} = (-1, 7, -4)$, $\vec{p} = (-1, 2, 1)$, $\vec{q} = (2, 0, 3)$, $\vec{r} = (1, 1, -1)$.
25. $\vec{x} = (0, -8, 9)$, $\vec{p} = (0, -2, 1)$, $\vec{q} = (3, 1, -1)$, $\vec{r} = (4, 0, 1)$.
26. $\vec{x} = (-15, 5, 6)$, $\vec{p} = (0, 5, 1)$, $\vec{q} = (3, 2, -1)$, $\vec{r} = (-1, 1, 0)$.
27. $\vec{x} = (-2, 6, 3)$, $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (1, -1, 0)$, $\vec{r} = (-3, 2, 6)$.
28. $\vec{x} = (3, 1, 3)$, $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (1, 0, 1)$, $\vec{r} = (4, 2, 1)$.
29. $\vec{x} = (5, 15, 0)$, $\vec{p} = (1, 0, 5)$, $\vec{q} = (-1, 3, 2)$, $\vec{r} = (0, -1, 1)$.
30. $\vec{x} = (-2, -4, 2)$, $\vec{p} = (1, 4, 1)$, $\vec{q} = (3, 2, 1)$, $\vec{r} = (1, 1, 2)$.

Х. Заданы прямые l_1 и l_2 и точка M . Найти:

- 1) угловой коэффициент прямой l_2 и отрезок, который отсекает эта прямая на оси ординат;
- 2) уравнение прямой l_1 в отрезках;
- 3) точку N пересечения прямых l_1 и l_2 ;
- 4) уравнение прямой l_3 , которая проходит через точку M параллельно прямой l_2 ;
- 5) уравнение прямой l_4 , которая проходит через точку M перпендикулярно прямой l_2 ;
- 6) расстояние от точки M до прямой l_2 : $\rho(M, l_2)$.

Все результаты проиллюстрировать графически.

- | | | | |
|-----|---------------------------|---------------------------|--------------|
| 1. | $l_1 : 5x + 3y + 8 = 0,$ | $l_2 : x - 4y + 20 = 0;$ | $M(7, -2).$ |
| 2. | $l_1 : 3x + 2y + 2 = 0,$ | $l_2 : 4x - 3y + 31 = 0;$ | $M(6, 0).$ |
| 3. | $l_1 : x - 5y + 9 = 0,$ | $l_2 : 3x + 2y + 10 = 0;$ | $M(7, 3).$ |
| 4. | $l_1 : 5x + 2y + 13 = 0,$ | $l_2 : 2x - 5y + 11 = 0;$ | $M(6, 4).$ |
| 5. | $l_1 : 4x + y + 10 = 0,$ | $l_2 : 3x + 7y - 5 = 0;$ | $M(5, -4).$ |
| 6. | $l_1 : 5x + 2y + 17 = 0,$ | $l_2 : 2x - 3y + 3 = 0;$ | $M(5, 2).$ |
| 7. | $l_1 : 9x - 5y + 17 = 0,$ | $l_2 : 4x + y + 14 = 0;$ | $M(8, 4).$ |
| 8. | $l_1 : 3x - 2y - 16 = 0,$ | $l_2 : x + 7y + 10 = 0;$ | $M(-10, 3).$ |
| 9. | $l_1 : 2x + 3y - 15 = 0,$ | $l_2 : 3x - 7y - 11 = 0;$ | $M(-5, -4).$ |
| 10. | $l_1 : x - 7y + 8 = 0,$ | $l_2 : 2x + 5y - 22 = 0;$ | $M(-4, -7).$ |
| 11. | $l_1 : 3x - 8y + 6 = 0,$ | $l_2 : x + 2y - 12 = 0;$ | $M(-8, -3).$ |
| 12. | $l_1 : 2x - 3y + 17 = 0,$ | $l_2 : 4x - y + 9 = 0;$ | $M(6, -2).$ |
| 13. | $l_1 : 3x - y + 10 = 0,$ | $l_2 : 5x + 2y + 2 = 0;$ | $M(3, 10).$ |
| 14. | $l_1 : 11x + 6y + 9 = 0,$ | $l_2 : 3x - y + 16 = 0;$ | $M(5, -4).$ |

15. $l_1 : 2x + 3y - 5 = 0$, $l_2 : 3x + y - 4 = 0$; $M(2, 3)$.
16. $l_1 : 3x - 2y + 7 = 0$, $l_2 : 5x + y + 3 = 0$; $M(1, 4)$.
17. $l_1 : 2x - 3y + 5 = 0$, $l_2 : 2x + 5y - 12 = 0$; $M(3, -4)$.
18. $l_1 : 4x - 3y + 5 = 0$, $l_2 : x + 4y - 13 = 0$; $M(-2, -3)$.
19. $l_1 : 3x + y - 7 = 0$, $l_2 : 2x - 3y - 1 = 0$; $M(-5, -8)$.
20. $l_1 : 2x + 5y - 14 = 0$, $l_2 : x - 3y + 4 = 0$; $M(-4, -4)$.
21. $l_1 : 5x - 2y + 12 = 0$, $l_2 : 4x + 3y + 5 = 0$; $M(-7, -8)$.
22. $l_1 : 4x + y - 13 = 0$, $l_2 : x - 5y - 8 = 0$; $M(-4, 7)$.
23. $l_1 : 3x - 2y - 13 = 0$, $l_2 : 2x + 7y + 8 = 0$; $M(-1, 9)$.
24. $l_1 : 2x - 3y + 3 = 0$, $l_2 : 3x + y - 12 = 0$; $M(-5, -6)$.
25. $l_1 : 4x + y + 5 = 0$, $l_2 : 5x - 2y + 16 = 0$; $M(4, -5)$.
26. $l_1 : 5x + y - 7 = 0$, $l_2 : 3x - 2y - 12 = 0$; $M(-6, 8)$.
27. $l_1 : 2x - 3y - 5 = 0$, $l_2 : 4x + y - 17 = 0$; $M(-5, -2)$.
28. $l_1 : 8x + 3y - 4 = 0$, $l_2 : 2x + 5y - 18 = 0$; $M(8, 3)$.
29. $l_1 : 2x - 3y + 13 = 0$, $l_2 : 2x + 7y - 8 = 0$; $M(7, 4)$.
30. $l_1 : 5x + y + 7 = 0$, $l_2 : 7x - 2y + 20 = 0$; $M(5, -6)$.

XI. Задано уравнение плоскости P_1 , прямой L_1 и точка M . Найти:

1. уравнение плоскости P_2 , которая проходит через точку M параллельно плоскости P_1 ;
2. уравнение плоскости P_3 , которая проходит через точку M перпендикулярно прямой L_1 ;
3. уравнение прямой L_2 , которая проходит через точку M перпендикулярно плоскости P_1 ;
4. уравнение прямой L_3 , которая проходит через точку M параллельно прямой L_1 ;

5. точку N пересечения прямой L_1 и плоскости P_1 ;
6. расстояние от точки M до плоскости P_1 : $\rho(M, P_1)$;
7. расстояние от точки M до прямой L_1 : $\rho(M, L_1)$;
8. проекцию точки M на плоскость P_1 , координаты точки $M'_{\text{сим}}$, симметричной точке M относительно плоскости P ;
9. проекцию точки M на прямую L_1 , координаты точки $M''_{\text{сим}}$, симметричной точке M относительно прямой L_1 .

- | | | | |
|-----|-----------------------------|--|----------------|
| 1. | $P_1: 5x - 3z + 2 = 0,$ | $L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1},$ | $M(0, 2, 3).$ |
| 2. | $P_1: x - 3y + 2z + 4 = 0,$ | $L_1: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3},$ | $M(1, 0, -3).$ |
| 3. | $P_1: 2x - 3y + 7z = 0,$ | $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4},$ | $M(-4, 5, 0).$ |
| 4. | $P_1: 3x + y - 2z = 0,$ | $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{1},$ | $M(2, -1, 0).$ |
| 5. | $P_1: 4x - 2y + z = 0,$ | $L_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3},$ | $M(3, 0, -2).$ |
| 6. | $P_1: 5x + 3y - 6 = 0,$ | $L_1: \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{5},$ | $M(-2, 1, 1).$ |
| 7. | $P_1: x + 3y - z = 0,$ | $L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2},$ | $M(0, 0, 4).$ |
| 8. | $P_1: 2x - 5z + 3 = 0,$ | $L_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3},$ | $M(1, -1, 0).$ |
| 9. | $P_1: 3x - 4y - 4z = 0,$ | $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1},$ | $M(0, 5, 5).$ |
| 10. | $P_1: x + 2y + 2z - 5 = 0,$ | $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2},$ | $M(0, 0, 4).$ |
| 11. | $P_1: 4x - 3y + 1 = 0,$ | $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1},$ | $M(1, -2, 1).$ |
| 12. | $P_1: x + 2y - 3z + 4 = 0,$ | $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1},$ | $M(-1, 0, 3).$ |

13. $P_1: 2x - y + 2z - 3 = 0,$ $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2},$ $M(0, 2, -1).$
14. $P_1: 4x - y + z + 1 = 0,$ $L_1: \frac{x+3}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1},$ $M(1, -1, 2).$
15. $P_1: 5x + 2z - 3 = 0,$ $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3},$ $M(2, 3, 0).$
16. $P_1: 6x - 5y + 2 = 0,$ $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{2},$ $M(2, 5, 1).$
17. $P_1: 3y + 5z - 4 = 0,$ $L_1: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1},$ $M(0, -2, 3).$
18. $P_1: 3x - 4y + 5 = 0,$ $L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-2},$ $M(1, 0, -4).$
19. $P_1: x - 3y + 2z - 1 = 0,$ $L_1: \frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4},$ $M(1, 2, 3).$
20. $P_1: 2x + y - 3z = 0,$ $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3},$ $M(0, 3, 4).$
21. $P_1: 3x + 2z - 5 = 0,$ $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4},$ $M(-1, 2, -1).$
22. $P_1: 3x + 2y - z = 0,$ $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2},$ $M(1, 0, 2).$
23. $P_1: x - 3y + 2z - 1 = 0,$ $L_1: \frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4},$ $M(1, 3, 2).$
24. $P_1: 4x - y - 2z + 3 = 0,$ $L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1},$ $M(1, 0, -1).$
25. $P_1: 5x + 3z - 7 = 0,$ $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3},$ $M(2, -3, 0).$
26. $P_1: 3x + 2y - 6 = 0,$ $L_1: \frac{x}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{5},$ $M(3, 0, -2).$
27. $P_1: 5x - y + 2z = 0,$ $L_1: \frac{x-5}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1},$ $M(1, 2, -1).$
28. $P_1: 2x - 3y + z + 1 = 0,$ $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1},$ $M(0, 1, -2).$
29. $P_1: x + 2y - 3z = 0,$ $L_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3},$ $M(2, 0, 1).$

$$30. \quad P_1: 3x - 4z + 11 = 0, \quad L_1: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}, \quad M(2, 9, 0).$$

ХII. Заданы координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти:

1. уравнение прямой L , которая проходит через точки A , B , и длину ребра AB ;
2. уравнение плоскости P , которая проходит через точки A , B , C , и плоскость S грани ABC ;
3. длину отрезка h , опущенного из вершины D на грань ABC ;
4. объем пирамиды $ABCD$;
5. угол α между ребрами AB и AD .

Сделать рисунок.

- | | | | |
|--------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 1. $A(1, 2, 6),$ | $B(1, 2, 1),$ | $C(-1, 1, 1),$ | $D(4, 5, -3).$ |
| 2. $A(-3, 2, 5),$ | $B(2, -3, 1),$ | $C(-4, 5, 8),$ | $D(-5, 2, -4).$ |
| 3. $A(7, 3, 4),$ | $B(7, 0, -2),$ | $C(3, 2, 1),$ | $D(-5, 2, 1).$ |
| 4. $A(2, 2, 4),$ | $B(-2, 5, -2),$ | $C(-7, -3, 3),$ | $D(-6, -4, 6).$ |
| 5. $A(-2, -5, 2),$ | $B(-6, 1, -3),$ | $C(3, 5, -3),$ | $D(-9, 6, 7).$ |
| 6. $A(1, -1, -1),$ | $B(-3, 3, 5),$ | $C(1, -5, -8),$ | $D(-1, -6, 0).$ |
| 7. $A(5, 3, 0),$ | $B(3, 5, 0),$ | $C(1, 3, 4),$ | $D(0, 1, 1).$ |
| 8. $A(1, 1, -2),$ | $B(1, 2, 1),$ | $C(5, -1, -6),$ | $D(-9, 9, -7).$ |
| 9. $A(-3, 0, -4),$ | $B(-1, 6, 1),$ | $C(4, -7, 4),$ | $D(1, -4, 5).$ |
| 10. $A(10, 4, 5),$ | $B(-5, -3, -2),$ | $C(-2, -2, 3),$ | $D(-2, 6, -1).$ |
| 11. $A(1, 1, 0),$ | $B(3, 1, -3),$ | $C(5, 3, 6),$ | $D(9, 4, -9).$ |
| 12. $A(2, 0, 2),$ | $B(1, 1, -1),$ | $C(3, 1, 1),$ | $D(-3, 2, 5).$ |
| 13. $A(1, 2, 2),$ | $B(0, 1, 3),$ | $C(3, -2, 4),$ | $D(0, 0, -2).$ |
| 14. $A(2, 4, 1),$ | $B(4, 2, -2),$ | $C(6, 3, 6),$ | $D(7, 5, -2).$ |
| 15. $A(1, 0, -1),$ | $B(2, 2, 1),$ | $C(3, 1, 1),$ | $D(4, 9, -8).$ |

- | | | | | |
|-----|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| 16. | $A(1, 6, -7),$ | $B(-3, 7, 3),$ | $C(-2, 8, 3),$ | $D(-4, 8, -9).$ |
| 17. | $A(-2, 4, -7),$ | $B(1, 6, -4),$ | $C(-4, -2, 0),$ | $D(3, 5, 4).$ |
| 18. | $A(-1, 1, -3),$ | $B(4, 0, 0),$ | $C(2, 0, -2),$ | $D(3, 3, 5).$ |
| 19. | $A(4, 0, 3),$ | $B(-2, 2, 0),$ | $C(0, -5, 2),$ | $D(4, 2, -6).$ |
| 20. | $A(1, 0, 1),$ | $B(-2, 1, 3),$ | $C(2, 1, -1),$ | $D(2, -1, -4).$ |
| 21. | $A(1, 2, 1),$ | $B(1, 0, 2),$ | $C(0, 2, -1),$ | $D(-2, 0, 1).$ |
| 22. | $A(1, 1, 2),$ | $B(1, 3, -1),$ | $C(2, -1, 1),$ | $D(2, 2, 0).$ |
| 23. | $A(1, 2, -2),$ | $B(1, 1, 1),$ | $C(-2, 0, 6),$ | $D(0, -4, -4).$ |
| 24. | $A(3, 9, -1),$ | $B(-2, 2, -5),$ | $C(-6, -1, -3),$ | $D(1, -2, 2).$ |
| 25. | $A(0, 2, 4),$ | $B(-1, -1, -4),$ | $C(3, 1, -1),$ | $D(7, -2, 1).$ |
| 26. | $A(-1, -3, 1),$ | $B(-5, 1, 2),$ | $C(1, -1, 5),$ | $D(2, 1, -4).$ |
| 27. | $A(1, 3, 1),$ | $B(4, 0, 2),$ | $C(3, 1, 1),$ | $D(-3, 3, 5).$ |
| 28. | $A(-2, 0, -1),$ | $B(0, 4, 2),$ | $C(3, 2, -4),$ | $D(-3, 7, 3).$ |
| 29. | $A(-3, -5, 7),$ | $B(2, 1, -3),$ | $C(0, -3, 0),$ | $D(-5, 2, -7).$ |
| 30. | $A(2, -5, -3),$ | $B(5, -6, -1),$ | $C(-2, 3, -3),$ | $D(-9, -8, 7).$ |

ХІІІ. Установить тип кривой второго порядка L , свести ее уравнение к каноническому виду и найти все ее характеристики.

Построить график кривой.

1. $L: y = 4x^2 - 8x + 6.$
2. $L: x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0.$
3. $L: 2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0.$
4. $L: 4x^2 + 4 + 2y - 1 = 0.$
5. $L: x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1,25 = 0.$
6. $L: 2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0.$

7. $L: -4x^2 + y^2 + 8x - 6y - 8 = 0.$
8. $L: 2x + y^2 - 3y + 4 = 0.$
9. $L: x^2 - 4y^2 + 8y - 5 = 0.$
10. $L: 4x^2 - 8x + y^2 = 0.$
11. $L: -16x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 144 = 0.$
12. $L: 12y^2 - 12x - 32y - 29 = 0.$
13. $L: 25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0.$
14. $L: -16x^2 + 9y^2 + 32x + 90y - 367 = 0.$
15. $L: x = -\frac{1}{4}y^2 + y.$
16. $L: 3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0.$
17. $L: -9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y + 199 = 0.$
18. $L: y = 2x^2 - 12x + 14.$
19. $L: x^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$
20. $L: 4x^2 - y^2 + 2y - 3 = 0.$
21. $L: 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$
22. $L: 9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0.$
23. $L: 12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0.$
24. $L: 16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$
25. $L: 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$
26. $L: 9x^2 - 7y - 16 = 0.$
27. $L: 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$
28. $L: 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$
29. $L: x = 2y^2 - 12y + 14 = 0.$
30. $L: 4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y - 2 = 0.$

Ответы на задания для контрольных и индивидуальных расчетных работ.

I.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	-41	-8	12	22	-25	-67	-8	-21	12	-2	-38	27	149	38	102
b	4	-18	-120	51	4	-30	-3	54	-9	0	-19	4	-12	-62	-62
c	0	-50	339	48	-30	-137	3	74	6	48	218	42	5	1	-96

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	-38	326	-75	-198	-632	-7	-110	165	0	1170	-146	-35	145	-115	5
b	-72	-40	47	19	70	-12	2	-233	4	-6	133	-61	55	68	41
c	7	21	-108	-7	-136	-10	0	-5	-18	10	-2	51	0	229	32

II.

1. $x_1 = 2,6; x_2 = -1$	11. $x_1 = -0,667; x_2 = -1$	21. $x_1 = 0,833; x_2 = -1$
2. $x_1 = 1,795; x_2 = -6,96$	12. $x_1 = 3,121; x_2 = -0,621$	22. $x_1 = 2,851; x_2 = 0,76$
3. $x_1 = 1,471; x_2 = -1,971$	13. $x_1 = 7; x_2 = 0$	23. $x_1 = 2,419; x_2 = -0,919$
4. $x_1 = 14; x_2 = 1$	14. $x_1 = 2,74; x_2 = 1,46$	24. $x_1 = 0,5; x_2 = -2$
5. $x_1 = 2,845; x_2 = -1,845$	15. $x_1 = -0,417; x_2 = -1$	25. $x_1 = 3,313; x_2 = -12,98$
6. $x_1 = 1,143; x_2 = -1$	16. $x_1 = 1,309; x_2 = -10,309$	26. $x_1 = -0,191; x_2 = -3,934$
7. $x_1 = 1,667; x_2 = -1$	17. $x_1 = -1; x_2 = -1,5$	27. $x_1 = 1,083; x_2 = -1$
8. $x_1 = -0,667; x_2 = -1$	18. $x_1 = 1,802; x_2 = -3,052$	28. $x_1 = 1; x_2 = -0,922$
9. $x_1 = 2,323; x_2 = -8,823$	19. $x_1 = 1,193; x_2 = -2,336$	29. $x_1 = -1; x_2 = -1,455$
10. $x_1 = 1,438; x_2 = -1,188$	20. $x_1 = 13,116; x_2 = 1,55$	30. $x_1 = 3,375; x_2 = -1$

III.

1. $P(x) = \begin{pmatrix} 15 & 26 & -9 \\ -15 & 45 & -80 \\ 7 & 6 & 22 \end{pmatrix}$	11. $P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 34 \\ -10 & -23 & -35 \\ -16 & -34 & -74 \end{pmatrix}$	21. $P(x) = \begin{pmatrix} 22 & 5 & 4 \\ 15 & 28 & 21 \\ -12 & -21 & 58 \end{pmatrix}$
2. $P(x) = \begin{pmatrix} 26 & -3 & -9 \\ 3 & 18 & 21 \\ 9 & 21 & 17 \end{pmatrix}$	12. $P(x) = \begin{pmatrix} -1 & 14 & -5 \\ 4 & -37 & -6 \\ -24 & -16 & -39 \end{pmatrix}$	22. $P(x) = \begin{pmatrix} 35 & -4 & 134 \\ -8 & 37 & 175 \\ 0 & 0 & 135 \end{pmatrix}$
3. $P(x) = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -16 \\ 10 & 17 & -24 \\ 10 & -26 & 35 \end{pmatrix}$	13. $P(x) = \begin{pmatrix} 2 & -17 & 20 \\ -27 & -16 & 34 \\ -22 & -11 & -19 \end{pmatrix}$	23. $P(x) = \begin{pmatrix} -27 & -15 & 0 \\ -30 & -27 & 0 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
4. $P(x) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -6 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	14. $P(x) = \begin{pmatrix} -2 & 26 & 24 \\ -24 & -40 & -28 \\ -2 & 5 & -12 \end{pmatrix}$	24. $P(x) = \begin{pmatrix} 45 & 26 & 8 \\ 46 & 45 & 26 \\ -104 & -32 & 21 \end{pmatrix}$
5. $P(x) = \begin{pmatrix} 56 & -8 & 20 \\ -20 & -24 & 88 \\ 3 & -49 & -2 \end{pmatrix}$	15. $P(x) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -12 & -9 & 15 \end{pmatrix}$	25. $P(x) = \begin{pmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 20 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

6. $P(x) = \begin{pmatrix} 54 & 11 & -2 \\ -89 & -2 & 60 \\ 33 & 29 & -1 \end{pmatrix}$	16. $P(x) = \begin{pmatrix} 1 & -18 & -15 \\ 0 & 19 & 99 \\ 0 & 0 & 85 \end{pmatrix}$	26. $P(x) = \begin{pmatrix} -10 & -39 & -14 \\ 69 & 59 & -24 \\ 24 & 38 & -5 \end{pmatrix}$
7. $P(x) = \begin{pmatrix} -39 & -43 & 3 \\ 0 & 57 & 0 \\ -5 & -22 & -36 \end{pmatrix}$	17. $P(x) = \begin{pmatrix} 23 & 30 & -6 \\ -8 & 5 & -2 \\ 12 & 24 & 11 \end{pmatrix}$	27. $P(x) = \begin{pmatrix} -54 & -43 & -29 \\ -44 & -30 & -22 \\ -18 & -13 & -5 \end{pmatrix}$
8. $P(x) = \begin{pmatrix} -23 & -45 & -20 \\ -3 & 13 & -18 \\ -51 & -30 & -33 \end{pmatrix}$	18. $P(x) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 12 & 17 & 0 \\ 43 & -12 & 5 \end{pmatrix}$	28. $P(x) = \begin{pmatrix} 944 & 766 & 585 \\ 645 & 521 & 403 \\ 343 & 282 & 218 \end{pmatrix}$
9. $P(x) = \begin{pmatrix} 31 & 13 & -19 \\ -9 & 1 & 26 \\ -14 & -4 & 40 \end{pmatrix}$	19. $P(x) = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 28 \\ 36 & -23 & 51 \\ 56 & -34 & 35 \end{pmatrix}$	29. $P(x) = \begin{pmatrix} -76 & -45 & -34 \\ -45 & -24 & -3 \\ 7 & 7 & -97 \end{pmatrix}$
10. $P(x) = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 21 \\ -9 & 8 & -6 \\ 0 & -23 & 7 \end{pmatrix}$	20. $P(x) = \begin{pmatrix} 76 & 108 & 65 \\ 27 & 49 & 35 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	30. $P(x) = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 9 \\ 0 & 17 & 33 \\ 0 & 44 & 50 \end{pmatrix}$

IV.

1. $\begin{pmatrix} -32 & -3 \\ 19 & -26 \end{pmatrix}$	9. $\begin{pmatrix} 27 & 19 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$	17. $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$	25. $\begin{pmatrix} 459 & -671 \\ 428 & -107 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 54 & 15 & 29 \\ 13 & 47 & 29 \\ 6 & 0 & 25 \end{pmatrix}$	10. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 21 \\ 24 & 23 & -14 \\ 14 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	18. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \\ 3 & -12 & 3 \end{pmatrix}$	26. $\begin{pmatrix} 0 & 21 & 21 \\ -3 & 17 & -5 \\ -3 & 19 & 20 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 42 & 118 \\ -38 & -28 \end{pmatrix}$	11. $\begin{pmatrix} 16 & 4 & 5 \\ 14 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	19. $\begin{pmatrix} 47 & 12 \\ 20 & 54 \end{pmatrix}$	27. $\begin{pmatrix} 24 & -58 \\ -18 & 80 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 13 & 47 \\ 22 & 73 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} 12 & 27 \\ -11 & 24 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 15 & 2 & 9 \\ 24 & 31 & -6 \\ 34 & 86 & 95 \end{pmatrix}$	28. $\begin{pmatrix} -10 & 18 & -20 \\ 26 & 23 & 0 \\ -6 & 17 & -13 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 17 & -6 & 30 \\ 11 & 52 & -4 \\ 40 & 14 & 55 \end{pmatrix}$	13. $\begin{pmatrix} 25 & 2 & 1 \\ 8 & 34 & 8 \\ -5 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	21. $\begin{pmatrix} -47 & -67 \\ 117 & -71 \end{pmatrix}$	29. $\begin{pmatrix} -35 & 6 \\ -17 & -36 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 17 & 16 & 9 \\ 22 & 17 & 28 \end{pmatrix}$	14. $\begin{pmatrix} 22 & 10 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$	22. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -11 \\ 6 & 4 & -4 \\ 9 & 1 & 51 \end{pmatrix}$	30. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 15 \\ -7 & 15 & -6 \\ 8 & -12 & 15 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 44 & -9 \\ -54 & 30 \end{pmatrix}$	15. $\begin{pmatrix} 36 & -30 & -10 \\ 14 & -17 & 0 \\ 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$	23. $\begin{pmatrix} 53 & -82 \\ 3 & 42 \end{pmatrix}$	
8. $\begin{pmatrix} 14 & 31 & 8 \\ 1 & 30 & 23 \\ -4 & 8 & 42 \end{pmatrix}$	16. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 12 & 49 & 20 \\ 6 & 23 & 31 \end{pmatrix}$	24. $\begin{pmatrix} 12 & 159 & 54 \\ -80 & 76 & 19 \\ 14 & 21 & 16 \end{pmatrix}$	

V. Все ответы “Да”.

VI.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	11. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	16. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	26. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	22. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	27. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	8. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$	13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	18. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$	28. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	24. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	30. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

VII.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_1	1	1	0	-1	3	3	-1	1	2	3	0	5	2	0	3
x_2	1	2	1	2	4	3	-2	0	4	4	-2	4	3	5	1
x_3	1	-3	1	-3	3	2	3	1	3	5	4	0	2	4	-1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_1	3	1	1	4	0	2	4	2	2	4	2	-1	1	1	0
x_2	2	1	-1	5	1	0	3	3	0	3	0	0	-1	-2	1
x_3	2	1	0	2	2	1	5	5	-2	2	2	-3	0	3	-1

VIII.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\sqrt{19}$	-5	(-6;5;3)	S(пар)=8,37 S(тр)=4,18	-1	V(пар)=1 V(пир)=0,17	некол.	неком.	(-1;-3;2)	-0,61	-2,29
2	3	11	(-1;0;2)	S(пар)=2,24 S(тр)=1,12	-5	V(пар)=5 V(пир)=0,83	некол.	неком.	(7;-1;-4)	0,33	2,67
3	$\sqrt{21}$	2	(-6;1;1)	S(пар)=6,16 S(тр)=3,08	-2	V(пар)=2 V(пир)=0,33	некол.	неком.	(1;-4;4)	-0,27	-1,53
4	$\sqrt{6}$	2	(-7;5;6)	S(пар)=10,49 S(тр)=5,24	-23	V(пар)=23 V(пир)=3,83	некол.	неком.	(7;14;-15)	-0,7	-15,11
5	$\sqrt{10}$	-2	(4;1;-3)	S(пар)=5,1 S(тр)=2,55	3	V(пар)=3 V(пир)=0,5	некол.	неком.	(4;-1;2)	-0,07	-0,32
6	$\sqrt{19}$	-10	(-2;3;-1)	S(пар)=3,74 S(тр)=1,87	-1	V(пар)=1 V(пир)=0,17	некол.	неком.	(4;3;4)	0,11	0,69
7	$\sqrt{14}$	1	(5;1;-13)	S(пар)=13,96 S(тр)=6,98	-19	V(пар)=19 V(пир)=3,17	некол.	неком.	(2;-2;5)	0,14	0,8
8	$\sqrt{42}$	43	(17;-10;-18)	S(пар)=26,7 S(тр)=13,35	52	V(пар)=52 V(пир)=8,67	некол.	неком.	(4;-7;-1)	-0,38	-3,09

9	$\sqrt{30}$	-15	(-5;-19;13)	S(пар)=23,56 S(тр)=11,78	16	V(пар)=16 V(пир)=2,67	некол.	неком.	(2;-1;3)	-0,44	-1,64
10	$\sqrt{22}$	4	(3;7;6)	S(пар)=9,7 S(тр)=4,85	5	V(пар)=5 V(пир)=0,83	некол.	неком.	(-19;12;-2)	-0,92	-20,68
11	$\sqrt{5}$	7	(-2;-1;-1)	S(пар)=2,45 S(тр)=1,23	-11	V(пар)=11 V(пир)=1,83	некол.	неком.	(5;1;22)	0,06	1,34
12	$\sqrt{29}$	-10	(5;2;-4)	S(пар)=6,71 S(тр)=3,354	4	V(пар)=4 V(пир)=0,67	некол.	неком.	(2;-11;-6)	-0,78	-9,84
13	$5\sqrt{2}$	3	(-19;1;23)	S(пар)=29,85 S(тр)=14,93	90	V(пар)=90 V(пир)=15	некол.	неком.	(-14;4;0)	-0,56	-8,2
14	$\sqrt{30}$	-8	(26;14;-18)	S(пар)=34,58 S(тр)=17,29	-32	V(пар)=32 V(пир)=5,33	некол.	неком.	(8;-14;6)	-0,85	-14,61
15	$\sqrt{29}$	24	(43;-2;-23)	S(пар)=48,81 S(тр)=24,4	-291	V(пар)=291 V(пир)=48,5	некол.	неком.	(-17;2;6)	-0,16	-2,97
16	$\sqrt{43}$	-21	(9;-1;-6)	S(пар)=10,86 S(тр)=5,43	20	V(пар)=20 V(пир)=3,33	некол.	неком.	(-2;18;-16)	-0,88	-21,35
17	$\sqrt{22}$	-8	(6;-8;12)	S(пар)=15,62 S(тр)=7,81	140	V(пар)=140 V(пир)=23,33	некол.	неком.	(16;-12;19)	0,09	2,35
18	$\sqrt{6}$	-5	(-1;-5;-3)	S(пар)=5,92 S(тр)=2,96	-10	V(пар)=10 V(пир)=1,667	некол.	неком.	(10;7;-5)	-0,25	-3,27
19	$\sqrt{14}$	-20	(-25;-2;-7)	S(пар)=26,04 S(тр)=13,02	-45	V(пар)=45 V(пир)=7,5	некол.	неком.	(10;2;-17)	-0,77	-15,23
20	$\sqrt{14}$	-4	(-8;-10;-4)	S(пар)=13,42 S(тр)=6,71	-18	V(пар)=18 V(пир)=3	некол.	неком.	(-2;9;-5)	-0,89	-9,35
21	$\sqrt{14}$	7	(10;12;-13)	S(пар)=20,32 S(тр)=10,16	-2	V(пар)=2 V(пир)=0,33	некол.	неком.	(9;-8;0)	-0,73	-8,82
22	$\sqrt{29}$	20	(-2;-13;-6)	S(пар)=14,46 S(тр)=7,23	-42	V(пар)=42 V(пир)=7	некол.	неком.	(-1;8;4)	-0,17	-1,49
23	$\sqrt{19}$	-1	(-27;-17;-8)	S(пар)=32,89 S(тр)=16,45	-33	V(пар)=33 V(пир)=5,5	некол.	неком.	(-6;13;5)	-0,45	-6,88
24	$\sqrt{26}$	-5	(2;1;-10)	S(пар)=10,25 S(тр)=5,12	-25	V(пар)=25 V(пир)=4,17	некол.	неком.	(-8;-19;4)	-0,9	-18,83
25	$\sqrt{6}$	-13	(-7;1;-3)	S(пар)=7,68 S(тр)=3,84	-1	V(пар)=1 V(пир)=0,17	некол.	неком.	(7;7;-13)	-0,99	-16,33
26	$\sqrt{17}$	-14	(7;22;-28)	S(пар)=36,29 S(тр)=18,15	2	V(пар)=2 V(пир)=0,33	некол.	неком.	(16;13;14)	-0,76	-18,92
27	$2\sqrt{10}$	28	(-4;-12;4)	S(пар)=13,27 S(тр)=6,63	20	V(пар)=20 V(пир)=3,33	некол.	неком.	(-17;1;1)	0,07	1,27
28	3	-8	(3;-4;1)	S(пар)=5,1 S(тр)=2,55	-15	V(пар)=15 V(пир)=2,5	некол.	неком.	(-1;11;2)	-0,15	-1,67
29	$\sqrt{59}$	37	(8;4;12)	S(пар)=14,97 S(тр)=7,48	24	V(пар)=24 V(пир)=4	некол.	неком.	(3;-3;5)	-0,67	-4,3
30	$\sqrt{42}$	-4	(22;18;10)	S(пар)=30,13 S(тр)=15,07	74	V(пар)=74 V(пир)=12,33	некол.	неком.	(-14;30;-1)	-0,65	-21,45

IX.

1. $x = -2\vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}$	9. $x = 4\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$	16. $x = -\vec{p} + 3\vec{r}$	24. $x = 2\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$
2. $x = 7\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$	10. $x = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$	17. $x = \vec{p} - 2\vec{q} + 2\vec{r}$	25. $x = 2\vec{p} - 4\vec{q} + 3\vec{r}$

3. $x = -\vec{p} + \vec{q} + 3\vec{r}$	11. $x = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$	18. $x = 8\vec{p} - \vec{q} - 7\vec{r}$	26. $x = 2\vec{p} - 4\vec{q} + 3\vec{r}$
4. $x = -3\vec{p} + 2\vec{q} + 5\vec{r}$	12. $x = -4\vec{p} + 3\vec{q} + \vec{r}$	19. $x = 5\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$	27. $x = 1,5\vec{p} - 3,5\vec{q} + 0,5\vec{r}$
5. $x = 2\vec{p} - \vec{q}$	13. $x = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 2\vec{r}$	20. $x = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$	28. $x = -3\vec{p} + \vec{q} + 2\vec{r}$
6. $x = 2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$	14. $x = 3\vec{p} - 6\vec{q} + \vec{r}$	21. $x = 3\vec{p} + \vec{q} - 4\vec{r}$	29. $x = 4\vec{p} - \vec{q} - 18\vec{r}$
7. $x = -6\vec{p} + \vec{q} + 3\vec{r}$	15. $x = -\vec{p} + 4\vec{q} + 3\vec{r}$	22. $x = \vec{p} - 2\vec{q} + \vec{r}$	30. $x = -\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$
8. $x = -\vec{p} - 3\vec{q} + 4\vec{r}$		23. $x = 4\vec{p} - 2\vec{q} + \vec{r}$	

X.

	1	2	3	4	5	6
1	$y = 0,25x + 5$	$\frac{x}{-1,6} + \frac{y}{-2,67} = 1$	$N(-4;4)$	$x - 4y - 15 = 0$	$4x + y - 26 = 0$	8,49
2	$y = 1,33x + 10,33$	$\frac{x}{-0,67} + \frac{y}{-1} = 1$	$N(-4;5)$	$4x - 3y - 24 = 0$	$3x + 4y - 18 = 0$	11
3	$y = -1,5x - 5$	$\frac{x}{-9} + \frac{y}{1,8} = 1$	$N(-4;1)$	$3x + 2y - 27 = 0$	$2x - 3y - 5 = 0$	10,26
4	$y = 0,4x + 2,2$	$\frac{x}{-2,6} + \frac{y}{-6,5} = 1$	$N(-3;1)$	$2x - 5y + 8 = 0$	$5x + 2y - 38 = 0$	0,56
5	$y = -0,43x + 0,71$	$\frac{x}{-2,5} + \frac{y}{-10} = 1$	$N(-3;2)$	$3x + 7y + 13 = 0$	$7x - 3y - 47 = 0$	2,36
6	$y = 0,67x + 1$	$\frac{x}{-3,4} + \frac{y}{-8,5} = 1$	$N(-3;-1)$	$2x - 3y - 4 = 0$	$3x + 2y - 19 = 0$	1,94
7	$y = -4x - 14$	$\frac{x}{-1,89} + \frac{y}{3,4} = 1$	$N(-3;-2)$	$4x + y - 36 = 0$	$x - 4y + 8 = 0$	12,13
8	$y = -0,14x - 1,43$	$\frac{x}{5,33} + \frac{y}{-8} = 1$	$N(4;-2)$	$x + 7y - 11 = 0$	$7x - y + 73 = 0$	2,97
9	$y = 0,43x - 1,57$	$\frac{x}{7,5} + \frac{y}{5} = 1$	$N(6;1)$	$3x - 7y - 13 = 0$	$7x + 3y + 47 = 0$	0,26
10	$y = -0,4x + 4,4$	$\frac{x}{-8} + \frac{y}{1,14} = 1$	$N(6;2)$	$2x + 5y + 43 = 0$	$5x - 2y + 6 = 0$	12,07
11	$y = -0,5x + 6$	$\frac{x}{-2} + \frac{y}{0,75} = 1$	$N(6;3)$	$x + 2y + 14 = 0$	$2x - y + 13 = 0$	11,63
12	$y = 4x + 9$	$\frac{x}{-8,5} + \frac{y}{5,67} = 1$	$N(-1;5)$	$4x - y - 26 = 0$	$x - 4y - 2 = 0$	8,49
13	$y = -2,5x - 1$	$\frac{x}{-3,33} + \frac{y}{10} = 1$	$N(-2;4)$	$5x + 2y - 35 = 0$	$2x - 5y + 44 = 0$	6,87
14	$y = 3x + 16$	$\frac{x}{-0,82} + \frac{y}{-1,5} = 1$	$N(-3,62;5,14)$	$3x - y - 19 = 0$	$x - 3y - 7 = 0$	11,07
15	$y = -3x + 4$	$\frac{x}{2,5} + \frac{y}{1,67} = 1$	$N(1;1)$	$3x + y - 9 = 0$	$x - 3y + 7 = 0$	1,58
16	$y = -5x - 3$	$\frac{x}{-2,33} + \frac{y}{3,5} = 1$	$N(-1;2)$	$5x + y - 9 = 0$	$x - 5y + 19 = 0$	2,35
17	$y = -0,4x + 2,4$	$\frac{x}{-2,5} + \frac{y}{1,67} = 1$	$N(0,69;2,13)$	$2x + 5y + 14 = 0$	$5x - 2y - 23 = 0$	4,83

18	$y = -0,5x + 3,25$	$\frac{x}{-5} + \frac{y}{1,67} = 1$	$N(1,9;2,3)$	$2x + 4y + 16 = 0$	$4x - 2y + 2 = 0$	6,49
19	$y = 0,67x - 0,33$	$\frac{x}{2,33} + \frac{y}{7} = 1$	$N(2;1)$	$2x - 3y - 14 = 0$	$3x + 2y + 31 = 0$	3,61
20	$y = 0,33x + 1,33$	$\frac{x}{7} + \frac{y}{2,8} = 1$	$N(2;2)$	$x - 3y - 8 = 0$	$3x - y - 16 = 0$	3,8
21	$y = -1,33x - 1,67$	$\frac{x}{-2,4} + \frac{y}{6} = 1$	$N(-2;1)$	$4x + 3y + 52 = 0$	$3x - 4y - 11 = 0$	9,4
22	$y = 0,2x - 1,6$	$\frac{x}{3,25} + \frac{y}{13} = 1$	$N(3,48;-0,91)$	$x - 5y + 39 = 0$	$5x + y + 13 = 0$	9,22
23	$y = -0,29x - 1,14$	$\frac{x}{4,33} + \frac{y}{-6,5} = 1$	$N(3;-2)$	$2x + 7y - 61 = 0$	$7x - 2y + 25 = 0$	9,48
24	$y = -3x + 12$	$\frac{x}{-1,5} + \frac{y}{1} = 1$	$N(3;3)$	$3x + y + 21 = 0$	$x - 3y - 13 = 0$	10,44
25	$y = 2,5x + 8$	$\frac{x}{-1,2} + \frac{y}{-5} = 1$	$N(-2;3)$	$5x - 2y - 30 = 0$	$2x + 5y + 17 = 0$	8,54
26	$y = 1,5x - 6$	$\frac{x}{1,4} + \frac{y}{7} = 1$	$N(2;-3)$	$3x - 2y + 34 = 0$	$2x + 3y - 12 = 0$	12,76
27	$y = -4x + 17$	$\frac{x}{2,5} + \frac{y}{-1,67} = 1$	$N(4;1)$	$4x + y + 22 = 0$	$x - 4y - 3 = 0$	9,46
28	$y = -0,4x + 3,6$	$\frac{x}{0,5} + \frac{y}{1,33} = 1$	$N(-1;4)$	$2x + 5y - 31 = 0$	$5x - 2y - 34 = 0$	2,41
29	$y = -0,29x + 1,14$	$\frac{x}{-6,5} + \frac{y}{4,33} = 1$	$N(-3,35;2,1)$	$2x + 7y - 42 = 0$	$7x - 2y - 41 = 0$	4,67
30	$y = 3,5x + 10$	$\frac{x}{-1,4} + \frac{y}{-7} = 1$	$N(-2;3)$	$7x - 2y - 47 = 0$	$2x + 7y + 32 = 0$	9,2

XI.

№		№		№	
1	1. $5x - 3y + 2z = 0$ 2. $3x - y + z - 1 = 0$ 3. $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$ 4. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ 5. $N(-0,5;-0,5;0,5)$ 6. 0 7. 3,54 8. $M_{np} = (0;2;3)$ $M_{cum} = (0;2;3)$ 9. $M_{np} = (-0,09;-0,64;0,64)$ $M_{cum} = (-0,18;-3,27;-1,73)$	11	1. $4x - 3y - 10 = 0$ 2. $2x - y + z - 5 = 0$ 3. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{0}$ 4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 5. $N(-0,73;0,64;0,64)$ 6. 2,2 7. 0,71 8. $M_{np} = (-0,76;-0,68;1)$ $M_{cum} = (-2,52;0,64;1)$ 9. $M_{np} = (1;-1,5;1,5)$ $M_{cum} = (1;-1;2)$	21	1. $3x + 2z + 5 = 0$ 2. $2x + 5y + 4z - 4 = 0$ 3. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}$ 4. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{4}$ 5. $N(3;0;-2)$ 6. 2,78 7. 4,49 8. $M_{np} = (1,31;2;0,54)$ $M_{cum} = (3,62;2;2,08)$ 9. $M_{np} = (3,27;0,67;-1,47)$ $M_{cum} = (7,53;-0,67;-1,93)$
2	1. $x - 3y + 2z + 5 = 0$ 2. $2y - 3z - 9 = 0$	12	1. $x + 2y - 3z + 10 = 0$ 2. $2x + 3y - z + 5 = 0$	22	1. $3x + 2y - z - 1 = 0$ 2. $3x + y + 2z - 7 = 0$

3.	$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$	3.	$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$	3.	$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$
4.	$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-3}$	4.	$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}$	4.	$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$
5.	$N(0; 0, 83; -0, 75)$	5.	$N(-2, 09; -4, 64; -2, 45)$	5.	$N(-0, 67; 1, 11; 0, 22)$
6.	0,27	6.	1,6	6.	0,27
7.	2,18	7.	6,66	7.	1,79
8.	$M_{np} = (1, 07; -0, 21; -2, 86)$	8.	$M_{np} = (-0, 57; 0, 86; 1, 71)$	8.	$M_{np} = (0, 79; -0, 14; 2, 07)$
	$M_{cum} = (1, 14; -0, 43; -2, 71)$		$M_{cum} = (-0, 14; 1, 71; 0, 43)$		$M_{cum} = (0, 57; -0, 29; 2, 14)$
9.	$M_{np} = (0; 1, 62; -1, 92)$	9.	$M_{np} = (-0, 57; -2, 36; -3, 21)$	9.	$M_{np} = (0, 93; 1, 64; 1, 29)$
	$M_{cum} = (-1; 3, 23; 0, 85)$		$M_{cum} = (-0, 14; -4, 71; -9, 43)$		$M_{cum} = (0, 86; 3, 29; 0, 57)$
3	1. $2x - 3y + 7z + 23 = 0$ 2. $3x - y + 4z + 17 = 0$ 3. $\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z}{7}$ 4. $\frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{4}$ 5. $N(-0, 49; -1, 84; -0, 65)$ 6. 2,92 7. 7,15 8. $M_{np} = (-3, 26; 3, 89; 2, 6)$ $M_{cum} = (-2, 52; 2, 77; 5, 19)$ 9. $M_{np} = (-2, 19; -1, 27; -2, 92)$ $M_{cum} = (-0, 38; -7, 54; -5, 85)$	13	1. $2x - y + 2z + 4 = 0$ 2. $x - y + 2z + 4 = 0$ 3. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 4. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 5. $N(-0, 14; -1, 86; 0, 71)$ 6. 2,33 7. 3,06 8. $M_{np} = (1, 56; 1, 22; 0, 56)$ $M_{cum} = (3, 11; 0, 44; 2, 11)$ 9. $M_{np} = (-1, 33; -0, 67; -1, 67)$ $M_{cum} = (-2, 67; -3, 33; -2, 33)$	23	1. $x - 3y + 2z + 4 = 0$ 2. $y - 4z + 5 = 0$ 3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{2}$ 4. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{4}$ 5. $N(2; -2, 09; -3, 64)$ 6. 1,34 7. 6,39 8. $M_{np} = (1, 36; 1, 93; 2, 71)$ $M_{cum} = (1, 71; 0, 86; 3, 43)$ 9. $M_{np} = (2; -3, 12; 0, 47)$ $M_{cum} = (3; -9, 24; -1, 06)$
4	1. $3x + y - 2z - 5 = 0$ 2. $2x + 2y + z - 2 = 0$ 3. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ 4. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ 5. $N(-2, 67; -3, 67; -5, 83)$ 6. 1,34 7. 4,03 8. $M_{np} = (0, 93; -1, 36; 0, 71)$ $M_{cum} = (-0, 14; -1, 71; 1, 43)$ 9. $M_{np} = (1, 89; 0, 89; -3, 56)$ $M_{cum} = (1, 78; 2, 78; -7, 11)$	14	1. $4x - y + z - 7 = 0$ 2. $4x - 2y + z - 8 = 0$ 3. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 4. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ 5. $N(-0, 68; -1, 16; 0, 58)$ 6. 1,89 7. 1,4 8. $M_{np} = (-0, 78; -0, 56; 1, 56)$ $M_{cum} = (-2, 56; -0, 11; 1, 11)$ 9. $M_{np} = (0, 81; -1, 9; 0, 95)$ $M_{cum} = (0, 62; -2, 81; -0, 1)$	24	1. $4x - y - 2z - 6 = 0$ 2. $3x - 4y - z - 4 = 0$ 3. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ 4. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{1}$ 5. $N(-1, 17; -1, 78; 0, 06)$ 6. 1,96 7. 2,99 8. $M_{np} = (-0, 71; -0, 43; -0, 14)$ $M_{cum} = (-2, 43; 0, 86; 0, 71)$ 9. $M_{np} = (-1, 12; -1, 85; 0, 04)$ $M_{cum} = (-3, 23; -3, 69; 1, 08)$
5	1. $4x - 2y + z - 10 = 0$ 2. $x + 2y - 3z - 9 = 0$ 3. $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{1}$	15	1. $5x + 2z - 10 = 0$ 2. $2x - y + 3z - 1 = 0$ 3. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{2}$	25	1. $5x + 3z - 10 = 0$ 2. $x + 2y + 3z + 4 = 0$ 3. $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{3}$

4. $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-3}$ 5. $N(-9, 33; -10, 67; 16)$ 6. 2, 18 7. 6, 4 8. $M_{np} = (1, 1; 0, 95; -2, 48)$ $M_{cum} = (-0, 81; 1, 9; -2, 95)$ 9. $M_{np} = (-3, 07; 1, 86; -2, 79)$ $M_{cum} = (-9, 14; 3, 71; -3, 57)$	4. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$ 5. $N(1, 25; -0, 13; -1, 63)$ 6. 1, 3 7. 3, 5 8. $M_{np} = (0, 79; 3; -0, 48)$ $M_{cum} = (-0, 41; 3; -0, 97)$ 9. $M_{np} = (1, 71; -0, 36; -0, 93)$ $M_{cum} = (1, 43; -3, 71; -1, 86)$	4. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3}$ 5. $N(0, 71; 2, 43; 1, 14)$ 6. 0, 51 7. 4, 51 8. $M_{np} = (1, 56; -3; -0, 26)$ $M_{cum} = (1, 12; -3; -0, 53)$ 9. $M_{np} = (-0, 21; 0, 57; -1, 64)$ $M_{cum} = (-2, 43; 4, 14; -3, 29)$
6 1. $5x + 3y + 7 = 0$ 2. $3x - 2y - 5z + 13 = 0$ 3. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{0}$ 4. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5}$ 5. $N(4; -4, 67; -6, 67)$ 6. 2, 23 7. 2, 53 8. $M_{np} = (-0, 09; 2, 15; 1)$ $M_{cum} = (1, 82; 3, 29; 1)$ 9. $M_{np} = (-1, 34; -1, 11; 2, 24)$ $M_{cum} = (-0, 68; -3, 21; 3, 47)$	16 1. $6x - 5y + 13 = 0$ 2. $3x + y + 2z - 13 = 0$ 3. $\frac{x-2}{6} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{0}$ 4. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{2}$ 5. $N(4, 15; 5, 38; 3, 77)$ 6. 1, 41 7. 1, 23 8. $M_{np} = (3, 08; 4, 1; 1)$ $M_{cum} = (4, 16; 3, 2; 1)$ 9. $M_{np} = (1, 5; 4, 5; 2)$ $M_{cum} = (1; 4; 3)$	26 1. $3x + 2y - 9 = 0$ 2. $4x - y + 5z - 2 = 0$ 3. $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{0}$ 4. $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{5}$ 5. $N(4, 8; -4, 2; 7)$ 6. 0, 83 7. 5, 11 8. $M_{np} = (2, 31; -0, 46; -2)$ $M_{cum} = (1, 62; -0, 92; -2)$ 9. $M_{np} = (-0, 57; -2, 86; 0, 29)$ $M_{cum} = (-4, 14; -5, 71; 2, 57)$
7 1. $x + 3y - z + 4 = 0$ 2. $3x - y + 2z - 8 = 0$ 3. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$ 4. $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ 5. $N(-6, 5; 1, 5; -2)$ 6. 1, 21 7. 1, 65 8. $M_{np} = (0, 36; 1, 09; 3, 64)$ $M_{cum} = (0, 73; 2, 18; 3, 27)$ 9. $M_{np} = (0, 57; 0, 86; 2, 71)$ $M_{cum} = (1, 14; -1, 71; 1, 43)$	17 1. $3y + 5z - 9 = 0$ 2. $2x - 3y - z - 3 = 0$ 3. $\frac{x}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{5}$ 4. $\frac{x}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ 5. $N(-7, 29; -0, 57; 1, 14)$ 6. 0, 86 7. 6, 16 8. $M_{np} = (0; -2, 44; 2, 26)$ $M_{cum} = (0; -2, 88; 1, 53)$ 9. $M_{np} = (-4, 86; -4, 21; -0, 07)$ $M_{cum} = (-9, 71; -6, 43; -3, 14)$	27 1. $5x - y + 2z - 1 = 0$ 2. $3y + z - 5 = 0$ 3. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 4. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$ 5. $N(5; 75; 25)$ 6. 0, 18 7. 4, 3 8. $M_{np} = (0, 83; 2, 03; -1, 07)$ $M_{cum} = (0, 67; 2, 07; -1, 13)$ 9. $M_{np} = (5; 1, 5; 0, 5)$ $M_{cum} = (9; 1; 2)$
8 1. $2x - 5y - 7 = 0$ 2. $4x + 2y + 3z - 2 = 0$ 3. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{0}$ 4. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ 5. $N(-9; -3; -6)$	18 1. $3x - 4y - 3 = 0$ 2. $3x + 4y - 2z - 11 = 0$ 3. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+4}{0}$ 4. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+4}{-2}$ 5. $N(-2, 43; -0, 57; 1, 29)$	28 1. $2x - 3y + z + 5 = 0$ 2. $3x + 2y - z - 4 = 0$ 3. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$ 4. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ 5. $N(2; 2; 1)$

	6. 1,86 7. 2,73 8. $M_{np} = (0,31;0,72;0)$ $M_{cum} = (-0,38;2,45;0)$ 9. $M_{np} = (-0,45;1,28;0,41)$ $M_{cum} = (-1,9;3,55;0,83)$		6. 1,6 7. 4,64 8. $M_{np} = (0,04;1,28;-4)$ $M_{cum} = (-0,92;2,56;-4)$ 9. $M_{np} = (-0,03;2,62;-0,31)$ $M_{cum} = (-1,07;5,24;3,38)$		6. 1,07 7. 3,5 8. $M_{np} = (0,57;0,14;-1,71)$ $M_{cum} = (1,14;-0,71;-1,43)$ 9. $M_{np} = (0,93;1,29;1,36)$ $M_{cum} = (1,86;1,57;4,71)$
9	1. $3x - 4y - 4z + 40 = 0$ 2. $2x + 3y + z - 20 = 0$ 3. $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-5}{-4}$ 4. $\frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-5}{1}$ 5. $N(-0,8;-1,2;0,6)$ 6. 6,25 7. 3,9 8. $M_{np} = (2,93;1,1;1,1)$ $M_{cum} = (5,85;-2,8;-2,8)$ 9. $M_{np} = (2,71;4,07;2,36)$ $M_{cum} = (5,43;3,14;-0,29)$	19	1. $x - 3y + 2z - 1 = 0$ 2. $y - 4z + 10 = 0$ 3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$ 4. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ 5. $N(2;-2,09;-3,64)$ 6. 0 7. 5,67 8. $M_{np} = (1;2;3)$ $M_{cum} = (1;2;3)$ 9. $M_{np} = (2;-3,41;1,65)$ $M_{cum} = (3;-8,82;0,29)$	29	1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ 2. $x + y + 3z - 5 = 0$ 3. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}$ 4. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$ 5. $N(5;2;3)$ 6. 0,27 7. 2,45 8. $M_{np} = (2,07;0,14;0,79)$ $M_{cum} = (2,14;0,29;0,57)$ 9. $M_{np} = (4;1;0)$ $M_{cum} = (6;2;-1)$
10	1. $x + 2y + 2z - 8 = 0$ 2. $3x + y + 2z - 8 = 0$ 3. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}$ 4. $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{2}$ 5. $N(3;-0,33;1,33)$ 6. 1 7. 3,93 8. $M_{np} = (-0,33;-0,67;3,33)$ $M_{cum} = (-0,67;-1,33;2,67)$ 9. $M_{np} = (2,29;-0,57;0,86)$ $M_{cum} = (4,57;-1,14;-2,29)$	20	1. $2x + y - 3z + 9 = 0$ 2. $x + 3y - 3z + 3 = 0$ 3. $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-3}$ 4. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-3}$ 5. $N(-0,36;0,93;0,07)$ 6. 2,4 7. 4,29 8. $M_{np} = (1,29;3,64;2,07)$ $M_{cum} = (2,57;4,29;0,14)$ 9. $M_{np} = (-0,63;0,11;0,89)$ $M_{cum} = (-1,26;-2,79;-2,21)$	30	1. $3x - 4z - 6 = 0$ 2. $5x + 2y + z - 28 = 0$ 3. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{0} = \frac{z}{-4}$ 4. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-9}{2} = \frac{z}{1}$ 5. $N(-3,18;-2,27;0,36)$ 6. 3,4 7. 8,77 8. $M_{np} = (-0,04;9,2,72)$ $M_{cum} = (-2,08;9,5,44)$ 9. $M_{np} = (4,83;0,93;1,97)$ $M_{cum} = (7,67;-7,13;3,93)$

XII.

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
1	1. 5 $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-6}{-5}$ 2. $5x - 10y + 15 = 0$ 3. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	11	1. $\sqrt{46}$ $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-6}$ 2. $6x + 18y - 10z - 24 = 0$ 3. $\frac{96\sqrt{115}}{115}$ 4. 32	2	1. $\sqrt{5}$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ 2. $4x - y - 2z = 0$ 3. $\frac{10\sqrt{21}}{21}$

	4. $\frac{5}{2}$ 5. $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{11}$		5. $\cos \alpha = \frac{37\sqrt{46} \cdot \sqrt{154}}{7084}$		4. $\frac{5}{3}$ 5. $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}{65}$
2	1. $\sqrt{66}$ $\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-5}{-4}$ 2. $3x+11y-10z+37=0$ 3. $\frac{42\sqrt{230}}{115}$ 4. 14 5. $\cos \alpha = \frac{13\sqrt{66} \cdot \sqrt{85}}{2805}$	12	1. $\sqrt{11}$ $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-3}$ 2. $2x-4y-2z=0$ 3. $2\sqrt{6}$ 4. 4 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{38}}{209}$	$\frac{2}{2}$	1. $\sqrt{13}$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ 2. $8x+3y+2z-15=0$ 3. $\frac{\sqrt{77}}{11}$ 4. $\frac{7}{6}$ 5. $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{6} \cdot \sqrt{13}}{39}$
3	1. $3\sqrt{5}$ $\frac{x-7}{0} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{-6}$ 2. $3x+24y-12z-45=0$ 3. $\frac{8}{9}$ 4. 4 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{154}}{110}$	13	1. $\sqrt{3}$ $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 2. $2x+4y+6z-22=0$ 3. $\frac{17\sqrt{14}}{14}$ 4. $\frac{17}{3}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}}{63}$	$\frac{2}{3}$	1. $\sqrt{10}$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$ 2. $2x+9y+3z-14=0$ 3. $\frac{31\sqrt{94}}{47}$ 4. $\frac{31}{3}$ 5. $\cos \alpha = 0$
4	1. $\sqrt{61}$ $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-6}$ 2. $33x-50y-47z+222=0$ 3. $\frac{29\sqrt{5798}}{2899}$ 4. $\frac{29}{3}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{61}}{1586}$	14	1. $\sqrt{17}$ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ 2. $13x+22y-6z-108=0$ 3. $\frac{105\sqrt{689}}{689}$ 4. $\frac{35}{2}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{35}}{35}$	$\frac{2}{4}$	1. $3\sqrt{10}$ $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-9}{-7} = \frac{z+1}{-4}$ 2. $26x-26y+13z+169=0$ 3. 7 4. $\frac{91}{2}$ 5. $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{10} \cdot \sqrt{134}}{268}$
5	1. $\sqrt{77}$ $\frac{x+2}{-4} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-2}{-5}$ 2. $20x-45y-70z-45=0$ 3. $\frac{197\sqrt{293}}{293}$ 4. $\frac{985}{6}$ 5. $\cos \alpha = \frac{23\sqrt{77} \cdot \sqrt{195}}{5005}$	15	1. 3 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ 2. $2x+2y-3z-5=0$ 3. $\frac{45\sqrt{17}}{17}$ 4. $\frac{15}{2}$ 5. $\cos \alpha = \frac{7\sqrt{139}}{417}$	$\frac{2}{5}$	1. $\sqrt{74}$ $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-8}$ 2. $7x-29y+10z+18=0$ 3. $\frac{9\sqrt{110}}{22}$ 4. $\frac{45}{2}$ 5. $\cos \alpha = \frac{29}{74}$
6	1. $2\sqrt{17}$	16	1. $3\sqrt{3}$	2	1. $\sqrt{33}$

	$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{6}$ $2. 4x+28y-16z+8=0$ $3. \frac{41\sqrt{66}}{66}$ $4. \frac{82}{3}$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{30}}{170}$		$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{10}$ $2. 10x-10y+5z+85=0$ $3. \frac{16}{3}$ $4. \frac{40}{3}$ $5. \cos \alpha = \frac{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{33}}{1287}$	6	$\frac{x+1}{-4} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{1}$ $2. 14x+18y-16z+84=0$ $3. \frac{\sqrt{194}}{2}$ $4. \frac{97}{3}$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{33}}{330}$
7	$1. 2\sqrt{2}$ $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{0}$ $2. 8x+8y+8z-64=0$ $3. 2\sqrt{3}$ $4. 8$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{30}}{20}$	17	$1. \sqrt{22}$ $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{3}$ $2. 32x-27y-14z+74=0$ $3. \frac{21\sqrt{1949}}{1949}$ $4. \frac{7}{2}$ $5. \cos \alpha = \frac{25\sqrt{3} \cdot \sqrt{22}}{231}$	$\frac{2}{7}$	$1. \sqrt{19}$ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$ $2. 2x+2y-8=0$ $3. 2\sqrt{2}$ $4. \frac{4}{3}$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{19}}{19}$
8	$1. \sqrt{10}$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ $2. 2x+12y-4z-22=0$ $3. \frac{48\sqrt{41}}{41}$ $4. 16$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{21}}{90}$	18	$1. \sqrt{35}$ $\frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ $2. 2x+4y-2z-8=0$ $3. 0$ $4. 0$ $5. \cos \alpha = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}}{35}$	$\frac{2}{8}$	$1. \sqrt{29}$ $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3}$ $2. 18x-21y+16z+52=0$ $3. \frac{101\sqrt{1021}}{1021}$ $4. \frac{101}{6}$ $5. \cos \alpha = \frac{19\sqrt{29} \cdot \sqrt{66}}{957}$
9	$1. \sqrt{65}$ $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z+4}{5}$ $2. 83x+19y-56z+25=0$ $3. \frac{124\sqrt{1154}}{1731}$ $4. \frac{124}{3}$ $5. \cos \alpha = \frac{29\sqrt{65} \cdot \sqrt{113}}{7345}$	19	$1. 7$ $\frac{x-4}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ $2. 17x-6y-38z+46=0$ $3. \frac{330\sqrt{1769}}{1769}$ $4. 55$ $5. \cos \alpha = \frac{31}{7\sqrt{85}}$	$\frac{2}{9}$	$1. \sqrt{161}$ $\frac{x+3}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-7}{-10}$ $2. 22x-5y+8z-15=0$ $3. \frac{\sqrt{573}}{3}$ $4. \frac{191}{6}$ $5. \cos \alpha = \frac{172}{\sqrt{40089}}$
$\frac{1}{0}$	$1. \sqrt{323}$ $\frac{x-10}{-15} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-5}{-7}$ $2. 28x-54y-6z-34=0$ $3. \frac{102\sqrt{934}}{467}$	20	$1. \sqrt{14}$ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ $2. 4x+4y+4z-8=0$ $3. \frac{5}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{0}$	$1. \sqrt{14}$ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+3}{2}$ $2. 16x+8y-20z-52=0$ $3. \frac{20\sqrt{5}}{3}$

4. 68 5. $\cos \alpha = \frac{52\sqrt{46} \cdot \sqrt{323}}{7429}$	4. $\frac{10}{3}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}}{9}$	4. $\frac{200}{3}$ 5. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{230}}{322}$
---	--	---

XIII.

- $x_1^2 = \frac{1}{4} y_1$ - парабола; $p = \frac{1}{8}$; $O_1(1, 2)$; $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$; $D: y_1 = -\frac{1}{8}$.
- $\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ - эллипс; $O_1(-1, 1)$; $a = \sqrt{6}$; $b = \sqrt{3}$; $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $D_{1,2}: x_1 = \pm 2\sqrt{3}$.
- $\frac{y_1^2}{12} - \frac{x_1^2}{8} = 1$ - гипербола; $O_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $F_1\left(0, -\sqrt{\frac{5}{24}}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{\frac{5}{24}}\right)$; $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{3}}$;
 $D_{1,2}: y_1 = \pm \sqrt{\frac{3}{40}}$; $y_1 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} x_1$.
- $x_1^2 = -\frac{1}{2} y_1$ - парабола; $p = \frac{1}{4}$; $O_1(-1, 1)$; $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$; $D: y_1 = \frac{1}{8}$.
- $x_1^2 + y_1^2 = \frac{29}{4}$ - окружность; $O_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.
- $x_1^2 = -\frac{3}{2} y_1$ - парабола; $p = \frac{3}{4}$; $O_1\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $F\left(0, -\frac{3}{8}\right)$; $D: y_1 = \frac{3}{8}$.
- $\frac{y_1^2}{13} - \frac{x_1^2}{4} = 1$ - гипербола; $O_1(1, 3)$; $a = \sqrt{13}$; $b = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $F_1\left(0, -\frac{\sqrt{65}}{2}\right)$, $F_2\left(0, \frac{\sqrt{65}}{2}\right)$; $\varepsilon = \sqrt{5}$;
 $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{5}}$; $y_1 = \pm \frac{1}{2} x_1$.
- $y_1^2 = -2x_1$ - парабола; $p = 1$; $O_1\left(-\frac{7}{8}, \frac{3}{2}\right)$; $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $D: x_1 = \frac{1}{2}$.
- $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{\frac{1}{4}} = 1$ - гипербола; $O_1(0, 1)$; $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$; $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
 $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$; $y_1 = \pm \frac{1}{2} x_1$.
- $\frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{4} = 1$ - эллипс; $O_1(1, 0)$; $a = 1$; $b = 2$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$.
- $\frac{y_1^2}{16} - \frac{x_1^2}{9} = 1$ - гипербола; $O_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$; $a = 3$; $b = 4$; $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{16}{5}$; $y_1 = \pm \frac{4}{3} x_1$.

12. $y_1^2 = x_1$ - парабола $p = \frac{1}{2}$; $O_1\left(-\frac{151}{36}, \frac{4}{3}\right)$; $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; $D: x_1 = -\frac{1}{4}$.
13. $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{25} = 1$ - эллипс; $O_1(2, -1)$; $a = 4$; $b = 5$; $\varepsilon = \frac{3}{5}$; $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{25}{3}$.
14. $\frac{y_1^2}{64} - \frac{x_1^2}{36} = 1$ - гипербола; $O_1(1, -5)$; $a = 6$; $b = 8$; $F_1(0, -10)$, $F_2(0, 10)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{32}{5}$; $y_1 = \pm \frac{4}{3}x_1$.
15. $y_1^2 = -4x_1$ - парабола; $p = 2$; $O_1(1, 2)$; $F(-1, 0)$; $D: x_1 = 1$.
16. $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{12} = 1$ - эллипс; $O_1(-2, 1)$; $a = 4$; $b = 2\sqrt{3}$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$; $D_{1,2}: x_1 = \pm 8$.
17. $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$ - гипербола; $O_1(-1, 2)$; $a = 4$; $b = 3$; $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{16}{5}$;
 $y_1 = \pm \frac{3}{4}x_1$.
18. $x_1^2 = \frac{1}{2}y_1$ - парабола; $p = \frac{1}{4}$; $O_1(3, -4)$; $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$; $D: y_1 = -\frac{1}{8}$.
19. $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = 1$ - эллипс; $O_1(1, 0)$; $a = 2$; $b = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$.
20. $\frac{x_1^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y_1^2}{2} = 1$ - гипербола; $O_1(0, 1)$; $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \sqrt{2}$; $F_1\left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{17}}{2}, 0\right)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{34}}{2}$;
 $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{68}}$; $y_1 = \pm 2x_1$.
21. $\frac{x_1^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y_1^2}{1} = 1$ - эллипс; $O_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $a = \frac{2}{3}$; $b = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$.
22. $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$ - гипербола; $O_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$; $a = 4$; $b = 3$; $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{16}{5}$; $y_1 = \pm \frac{3}{4}x_1$.
23. $x_1^2 = \frac{8}{3}y_1$ - парабола; $p = \frac{4}{3}$; $O_1\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; $F\left(0, \frac{2}{3}\right)$; $D: y_1 = -\frac{2}{3}$.
24. $\frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{16} = 1$ - эллипс; $O_1(-1, 2)$; $a = 5$; $b = 4$; $\varepsilon = \frac{3}{5}$; $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{25}{3}$.
25. $\frac{x_1^2}{64} - \frac{y_1^2}{36} = 1$ - гипербола; $O_1(-5, 1)$; $a = 8$; $b = 6$; $F_1(-10, 0)$, $F_2(10, 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 $D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{32}{5}$; $y_1 = \pm \frac{3}{4}x_1$.

$$26. y_1^2 = \frac{8}{9}x_1 - \text{парабола}; p = \frac{4}{9}; O_1\left(-\frac{625}{288}, \frac{7}{18}\right); F\left(\frac{2}{9}, 0\right); D: x_1 = -\frac{2}{9}.$$

$$27. \frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{16} = 1 - \text{эллипс}; O_1(1, -2); a = 2\sqrt{3}; b = 4; \varepsilon = \frac{1}{2}; D_{1,2}: y_1 = \pm 8.$$

$$28. \frac{y_1^2}{16} - \frac{x_1^2}{9} = 1 - \text{гипербола}; O_1(2, -1); a = 3; b = 4; F_1(0, -5), F_2(0, 5); \varepsilon = \frac{5}{4}; D_{1,2}: y_1 = \pm \frac{16}{5};$$

$$y_1 = \pm \frac{4}{3}x_1.$$

$$29. y_1^2 = \frac{1}{2}x_1 - \text{парабола}; p = \frac{1}{9}; O_1(-4, 3); F\left(\frac{1}{8}, 0\right); D: x_1 = -\frac{1}{8}.$$

$$30. \frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{\frac{4}{9}} = 1 - \text{эллипс}; O_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right); a = 1; b = \frac{2}{3}; \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}; D_{1,2}: x_1 = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебно-методическое пособие по самостоятельной работе
для иностранных студентов всех специальностей

Составители: Олег Николаевич Литвин,
Людмила Семеновна Лобанова,
Олег Олегович Литвин,
Юлия Игоревна Першина,
Юрий Иванович Созонов.

Формат 60×84. Умов. друк. аркушів 4,5 . Тираж 300 примірників

© Українська інженерно-педагогічна академія