ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIV 1956

О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО АНАЛИЗУ И АЛГЕБРЕ В ХАРЬКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Г. И. Дринфельд, В. А. Марченко, А. Я. Повзнер

Авторы настоящего очерка не ставят перед собой цели дать в какой-либо мере полный обзор работ по анализу и алгебре, выполненных в Харьковском университете за 150 лет его существования, так как ясно представляют себе трудность и объем подобной работы — ведь эти основные разделы математики всегда были представлены в Харьковском университете достаточно ярко.

Преподавание основных математических курсов в Харьковском университете, начиная с преподавания Т. Ф. Осиповского, велось на высоком уровне, что способствовало непрерывному подъему математической культуры в университете.

Несомненны и общепризнаны заслуги математиков Харьковского университета в области конструктивной теории функций.

Сюда относятся исследования по проблеме наилучшего приближения произвольной непрерывной функции при помощи функции наперед заданного вида, содержащей некоторое число параметров; исследования по проблеме моментов; исследования по теории ортогональных многочленов и проблеме разложения функции в ряд по таким многочленам. Сюда же примыкают исследования по теории почти периодических функций и гармоническому анализу.

По тематике и идейной направленности упомянутые исследования примыкают к исследованиям П. Л. Чебышева, братьев А. А. и В. А. Марковых и Е. И. Золотарева. Коротко говоря, в области конструктивной теории функций харьковская школа математиков может рассматриваться как продолжение петербургской математической школы.

Исследования в области конструктивной теории функций начались в Харькове со времени приезда туда С. Н. Бернштейна; но и после того, как С. Н. Бернштейн уехал из Харькова, работы в области конструктивной теории функций многие годы носили ярко выраженные следы влияния С. Н. Бернштейна. Отдельные работы харьковских математиков и в настоящее время тесно связаны с именем С. Н. Бернштейна.

После отъезда С. Н. Бернштейна работу в области конструктивной теории функций возглавил Н. И. Ахиезер, переехавший в Харьков из Киева.

Отметим, что в этой работе наибольшее участие принимали М. Г. Крейн (состоявший сотрудником Харьковского научно-исследовательского института математики и механики и проводивший в Харькове много времени) и Я. Л. Геронимус. Кроме них, исследования по конструктивной теории функций проводили В. Ф. Бржечка, А. М. Данилевский, Б. Я. Левин, Б. М. Левитан, В. А. Марченко и другие.

В данной статье нет возможности осветить те многочисленные результаты, которые были получены в Харькове в области конструктивной теории функций. Впрочем, в этом нет необходимости, так как эти результаты достаточно полно собраны в ряде обзорных статей и в трех монографиях. Мы имеем ввиду статьи Н. И. Ахиезера в УМН (1947 г., т. II, в. 3; 1951 г., т. VI, в. 1), статью Я. Л. Геронимуса в «Записках Научно-исследовательского института математики и механики при Харьковском государственном университете» (1948 г., т. XIX) и монографии: Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов, Хрк., 1938; Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, М., 1947; Я. Л. Геронимус. Теория ортогональных многочленов, М., 1950.

Упомянем хотя бы часть тех задач конструктивной теории функций, которые были решены в Харькове.

В теории аппроксимации функций на конечном интервале была установлена (С. Н. Бернштейн) связь между дифференциальными свойствами функции и убыванием (при $n\to\infty$) погрешности ее наилучшего приближения с помощью многочлена степени n; были найдены, при известных предположениях, асимптотические выражения, для погрешности наилучшего приближения.

Вопросы, возникшие в связи с классической задачей Е. И. Золотарева нахождения величины погрешности наилучшего приближения функции с помощью многочлена, коэффициенты которого подчинены некоторым связям, подверглись трактовке и были решены в работах С. Н. Бернштейна и Н. И. Ахиезера. В частности, полностью была решена задача нахождения величины

$$\inf_{n}\ \max_{|x|\leqslant 1}\left|x^n-n\sigma x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\rho x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\ldots+p_n\right|,$$

где σ, ρ заданы.

Ряд работ был посвящен вопросам аппроксимации на нескольких интервалах и много работ вопросам, связанным с рассмотрением целых трансцендентных функций конечной степени (целых трансцендентных функций экспоненциального типа) и аппроксимации произвольной функции на всей оси при помощи таких функций. В частности, мы имеем в виду обобщения (Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин) известного неравенства С. Н. Бернштейна

$$|f'(x)|\leqslant\sigma M,$$

если $f(x)$ целая трансцендентная функция конечной степени $\leqslant\sigma$, а

$$M=\sup_{|x|<\infty}|f(x)|;$$

работы Н. И. Ахиезера, Б. М. Левитана и В. А. Марченко по аппроксимации целой трансцендентной функции конечной степени с помощью тригонометрических сумм специального вида (полиномы Левитана и их обобщения); недавние работы Н. И. Ахиезера о целых трансцендентных функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля, и, наконец, совместную статью С. Н. Бернштейна и Н. И. Ахиезера (ДАН, 1953, т. 92, № 6).

Значительное место в тематике харьковских математиков (не только по количеству работ) занимала проблема моментов. Основными здесь являются результаты, полученные Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном и подитоженные в упомянутых выше монографиях этих авторов и в статье первого из них в УМН (1947 г.). Добавим только, что так называемая L — проблема моментов на конечном числе интервалов была полностью решена Н. И. Ахиезером в 1949 г. (Украинский математический журнал).

Относительно небольшое число работ харьковских математиков было посвящено вопросам интерполирования (С. Н. Бернштейн, В. Л. Гончаров, Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин). Эти работы несомненно являются ценным вкладом в науку. В частности, значительный интерес представляют недавние работы Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени, в которых авторы применяют интерполирование к изучению влияния роста функции вдоль некоторой бесконечной последовательности узлов на поведение функций на вещественной оси.

Много работ харьковских математиков посвящено теории ортогональных полиномов (работы Н. И. Ахиезера, С. Н. Бернштейна, В. Ф. Бржечка, Я. Л. Геронимуса, А. М. Данилевского, М. С. Шуна и других). В частности, Я. Л. Геронимусу принадлежит большой цикл работ, посвященных полиномам, ортогональным на окружности, и несколько работ, посвященных ортогональным полиномам В. А. Стеклова, вернее, проблеме Стеклова нахождения условия (налагаемого на вес) того, чтобы ортонормированная система полиномов была равномерно ограничена на всем интервале ортогональности.

Первые исследования по гармоническому анализу в Харьковском университете тесно переплетаются с работами по теории аппроксимации. К этим исследованиям относятся работы, связанные с суммированием тригонометрических рядов обобщенными ядрами Фейера, тригонометрической проблемой моментов, положительно определенными функциями и с суммированием рядов Фурье частных классов почти-периодических функций (Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, Б. М. Левитан).

Впоследствии интересы харьковских математиков концентрируются, в основном, вокруг двух вопросов гармонического анализа: теории почти-периодических функций и гармонического анализа произвольных ограниченных функций в духе идей Бохнера, Винера и Берлинга.

В 1938 г. Б. М. Левитан открыл новый класс обобщенных почти-периодических функций, которые естественно возникают при решении линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами. Для этого класса им были доказаны основные теоремы единственности, аппроксимации и развит аппарат рядов Фурье.

В послевоенные годы В. А. Марченко и Б. Я. Левиным был найден новый подход к теории почти-периодических функций Левитана, в известном смысле завершающий эту теорию.

Следует отметить также исследования Б. Я. Левина по теории целых почти-периодических функций и о среднем движении.

Исследование спектральных свойств ограниченных функций началось с работы Б. М. Левитана по теории преобразований Фурье—Бохнера целых функций экспоненциального типа. В этой работе предложен удобный аппарат — полиномы Левитана — для аппроксимации таких функций тригонометрическими многочленами. В работах Н. И. Ахиезера и В. А. Марченко, с новой точки зрения рассмотревших этот аппарат, были получены оценки точности приближения и указан метод для обобщения аппарата на неограниченные функции.

В связи с доказательством Берлинга тауберовых теорем Винера А. Я. Повзнер в 1946 году разработал основные положения общей спектральной теории ограниченных функций с точки зрения теории нормированных колец, а В. А. Марченко — исходя из обобщенных преобразований Фурье—Бохнера.

Теория почти-периодических функций, с одной стороны, и общие идеи функционального анализа — с другой, привели Б. М. Левитана к теории операторов обобщенного сдвига, которая оказала большое влияние на тематику работ харьковских математиков. Особое внимание привлекли операторы обобщенного сдвига, порождаемые дифференциальными уравнениями гиперболического типа, формальную теорию которых развил еще Дельзарт. Для таких операторов были построены теории почти-периодических функций (Б. М. Левитан, В. А. Марченко) и теория положительно определенных функций (А. Я. Повзнер).

Построенная А. Я. Повзнером теория нормированных колец, порождаемых этими операторами, позволила использовать этот аппарат в спектральном анализе дифференциальных операторов (А. Я. Повзнер, Б. М. Левитан). При этом, введенные А. Я. Повзнером операторы, преобразующие $\cos \lambda x$ в решения соответствующих дифференциальных уравнений, оказались весьма удобным вспомогательным аппаратом, полное исследование которого было проведено В. А. Марченко.

В частности, В. А. Марченко использовал этот аппарат для решения ряда новых задач спектрального анализа дифференциальных операторов, имеющих особое значение для квантовой механики. В этих задачах, впервые поставленных В. А. Амбарцумяном, требуется выяснить, какие спектральные свойства дифференциального оператора однозначно определяют его и указать методы для его восстановления. Задачи такого типа известны под именем обратных задач спектрального анализа. В. А. Марченко нашел естественную постановку таких задач и для ряда случаев указал методы восстановления дифференциального оператора. Окончательное решение обратная задача получила в недавних работах И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и М. Г. Крейна.

Существенные результаты об асимптотическом поведении спектральных функций дифференциальных операторов получены В. А. Марченко и Б. М. Левитаном. Методы, развитые этими авторами, позволили также всесторонне исследовать вопросы сходимости разложений по собственным функциям. В частности, классические исследования В. А. Стеклова о сходимости этих разложений получили окончательное решение для дифференциальных операторов вида $y'' - q(x)y$, заданных на конечном или бесконечном интервале (Б. М. Левитан и В. А. Марченко).

К этим работам примыкают исследования А. Я. Повзнера, в которых была построена спектральная теория операторов с частными производными, аналогичная теория Г. Вейля для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переходя к краткому обзору работ харьковских математиков в области теории аналитических функций, заметим, прежде всего, что здесь упоминаются только те работы Б. Я. Левина, которые выполнены им со времени переезда (1949 г.) в Харьков.

Б. Я. Левин, опираясь на разработанную им теорию целых функций вполне регулярного роста, получил ряд важных результатов в различных областях теории функций. Из этих результатов отметим некоторые. Целую серию работ Б. Я. Левин посвятил далеко идущим обобщениям неравенства С. Н. Бернштейна на целые функции класса P. Этот класс, введенный Б. Я. Левиным в 1943 году, состоит из целых функций конечной степени, не имеющих корней в нижней полуплоскости и для индикатора $h(\Theta)$ которых имеет место неравенство $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Для этого класса справедливо классическое неравенство С. Н. Бернштейна, причем не только для производных, но и для значительно более общего класса операторов. Результаты, полученные Б. Я. Левиным в этом направлении, можно считать окончательными.

Накладывая некоторые ограничения на индикаторную диаграмму целой функции, Б. Я. Левину удалось получить важные обобщения теоремы Картрайт. С помощью одной весьма нетривиальной теоремы о представимости гармонической в полуплоскости функции интегралом Пуассона, Б. Я. Левин нашел критерии полной регулярности роста функции, голоморфной в полуплоскости, и принадлежности ее к так называемому классу A (который характеризуется сходимостью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| I_m \frac{1}{\alpha_k} \right|$, где α_k — корни функции).

Большое количество работ по теории аналитических функций принадлежит Н. И. Ахиезеру. Часть из них связана с применением теории функций к вопросам приближения и гармонического анализа, а часть относится непосредственно к теории функций. Из последних особо отметим важные работы по теории конформного отображения и ее приложений к теории крыла. Попутно упомянем и относящиеся сюда работы В. К. Балтага.

Большой интерес представляет недавняя работа Н. И. Ахиезера, лежащая на грани теории функций и гармонического анализа, в которой дано своеобразное обобщение теоремы Винера—Палея на неограниченные функции экспоненциального типа. Необходимо также отметить получившие широкое признание учебники Н. И. Ахиезера по теории функций (на украинском языке) и теории эллиптических функций.

Вопросами разрешимости обобщенной задачи Дирихле, поставленной М. В. Келдышем, занимался Н. С. Ландкоф. Ему принадлежат некоторые теоремы, выясняющие топологическую структуру множества иррегулярных точек задачи Дирихле. Он показал также, как можно применить методы так называемой новой теории потенциала к доказательству некоторых аппроксимационных теорем в классе гармонических функций.

Из работ по алгебре укажем прежде всего на цикл работ по обобщенным группам А. К. Сушкевича. В наиболее важной из этих работ (Math. Ann., 1928, B. 99) А. К. Сушкевич отказывается от аксиомы однозначной обратимости и строит теорию обобщенных таким образом групп. Эта работа, написанная в период бурного развития абстрактной алгебры, вызвала большой интерес среди алгебраистов и была продолжена как в работах А. К. Сушкевича, так и в ряде исследований других ученых. Кроме указанного цикла работ А. К. Сушкевичу принадлежат исследования и по другим разделам алгебры, а также учебники и монографии по алгебре, теории чисел и обобщенным группам. Учебник А. К. Сушкевича «Основы высшей алгебры» несколько раз переиздавался и до сих пор является одним из лучших и наиболее распространенных в СССР учебников по алгебре.

Большое влияние на развитие алгебры в Харьковском университете оказал покойный член-корреспондент АН СССР Н. Г. Чеботарев, являвшийся в течение ряда лет (1935—1941) сотрудником Харьковского научно-исследовательского института математики и механики и опубликовавший ряд работ в «Ученых записках» института.

Н. Г. Чеботарев, усиленно занимавшийся в то время теорией непрерывных групп, сумел привить в Харькове интерес к этой области. Под его влиянием несколько работ по непрерывным группам было написано А. Я. Повзнером.

К работам Н. Г. Чеботарева (опубликованным в Харькове) о мере групп Ли примыкают работы Г. И. Дринфельда, который для получения основной формулы Чеботарева воспользовался некоторыми общими фактами теории интегральных инвариантов. Он же написал ряд работ, посвященных систематическому применению теории интегральных инвариантов непрерывных групп преобразований к вопросам интегральной геометрии.

Ряд работ по алгебре принадлежит безвременно погибшему во время немецкой оккупации Харькова талантливому математику А. М. Данилевскому. Особый интерес вызвала работа А. М. Данилевского о преобразовании векового уравнения. Преобразование А. М. Данилевского является в настоящее время одним из основных методов решения векового уравнения.

Отметим, что упомянутые выше работы Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна по проблеме моментов тоже стоят на грани алгебры и анализа.

В заключение укажем, что в Харькове были получены важные результаты по операционному исчислению, принадлежащие А. М. Данилевскому и А. М. Эфросу. Особенно следует отметить так называемое преобразование Эфроса — формулу, ставшую классической в операционном исчислении, а также известную (первую вышедшую на русском языке) монографию А. М. Данилевского и А. М. Эфроса по операционному исчислению.