Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

Б. В. Кондратьев, Н. И. Лесик

ПРАКТИКУМ

по решению задач математической физики

Методическое пособие

Харьков – 2012

УДК 530 (075.8)
ББК 22.311
К 64

Рецензенты:

Ермолаев А. М. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

Ходусов В. Д. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической ядерной физики физико-технического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 4 от 28.04.2011 г.)

Кондратьев Б. В.

К 64 Практикум по решению задач математической физики : методическое пособие / Б. В. Кондратьев, Н. И. Лесик. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 232 с.

В пособии приведено много подробных решений разных типов задач математической физики в частных производных второго порядка, заданных в декартовой системе координат, методом разделения переменных и с использованием функций Грина. Указаны основные литературные источники. Приведены задачи для самостоятельного решения. Практикум может служить хорошей основой для освоения студентами соответствующих учебных курсов.

УДК 530 (075.8)
ББК 22.311

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое методическое пособие по решению различных типов задач для дифференциальных уравнений математической физики в частных производных второго порядка составлено с целью оказания помощи студентам при изучении курса «Уравнения математической физики» (заключительная часть курса «Методы математической физики» для студентов III курса РФФ, ФФ, ФТФ и др.), главным образом при выполнении ими практических заданий по этому курсу. Настоящее методическое пособие может оказаться полезным и для начинающих преподавателей.

Практикум содержит подробное решение многих задач математической физики наиболее часто используемым методом разделения переменных (разложения по собственным функциям) в декартовой системе координат. Изучение этих тем занимает первые шесть практических занятий курса «Уравнений математической физики» из полного числа 18 практических занятий (по количеству недель в семестре). При этом на первом практическом занятии полезно также рассмотреть некоторые вопросы теории линейных функциональных пространств, которые используются в дальнейшем.

В пособии для каждого занятия указаны основные теоретические вопросы, даны ссылки на литературу и номера примеров для самостоятельной работы. Решения основных типичных задач приведены подробно и разбиты на три группы. Задачи группы А могут решаться на лекции (одна теоретического плана и другая практическая с подробным решением). Далее более кратко решаются задачи группы B (их можно использовать на практических занятиях) и группы C (задачи для домашних заданий). Решения задач последней группы приведены конспективно.

Решение всех задач разделено на небольшое количество действий (шагов), практически однотипных для разных видов задач математической физики. Это должно помочь студенту сориентироваться при выполнении большого количества различных вычислений, помочь запомнить последовательность и сущность действий, приводящих к решению задачи.

ТЕМА 1.

Элементы теории дифференциальных операторов

Элементы теории линейных функциональных бесконечномерных пространств. Решение самосопряженных краевых задач для дифференциальных операторов. Приведение граничных условий к однородным для одной из пространственных переменных.

Литература: [1] – гл. 2, §3 (1); гл. 3, §1 (3, 4). [2] – гл. 32, §1-3, 5. [5] – гл. 8, № 8, 9, 12. [6] – гл. 4, §1, 3, 4.

Задание: [8] – гл. 7, № 17.

№ 1.1 (С). Являются ли линейным пространством относительно обычных действий сложения и умножения на числа множества всех многочленов с числовыми коэффициентами, степени которых

а) не превышают числа n;

б) точно равны числу n.

а) Являются, так как после линейных действий над ними получаются снова многочлены степеней не выше n.

б) Не являются, так как в случае сложения многочленов вида $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ и $-c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ получается многочлен более низкой степени.

№ 1.2 (С). Показать, что множество многочленов вида $P_n(x) = (x-a)^n$ образует базис в некотором пространстве и найти в этом базисе координаты векторов

а) $f_1(x) = 2 + 3x - 5x^2 + 7x^4$;

б) $f_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \quad (\alpha_i = const)$.

Многочлены вида $P_n(x) = (x-a)^n$ при различных n = 0, 1, 2, 3… образуют базис, так как составленный из них якобиан отличен от нуля, – значит, они линейно независимы. Координатами векторов-функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в базисе, составленном из многочленов $P_n(x)$, являются коэффициенты тейлоровского разложения этих функций $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ в окрестности точки $x = a$.

№ 1.3 (С). Определить условия, накладываемые на функции гильбертова пространства $L_2(\alpha;\beta|\ r(x))$, при которых будет эрмитовым дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля

$$\widehat{D}=\frac{1}{r(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)-q(x)\right),$$

где $r(x)>0,\ p(x)>0,\ p'(x)<\infty,\ q(x)\geq 0$ при $\alpha\leq x\leq\beta$.

Линейный оператор $\hat{D}$ будет эрмитовым (самосопряженным) в гильбертовом пространстве L_2, если для любой пары вектор-функций $f(x)$ и $g(x)\in L_2$ выполняется равенство $(\hat{D}f,g)=(f,\hat{D}g)$, где скалярное произведение $(f,g)\equiv\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)\,\overline{g(x)}\cdot r(x)\,dx$. При вычислении скалярного произведения $(\hat{D}f,g)$, дважды использовав интегрирование по частям, получим

$$(\hat{D}f,g)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\hat{D}f(x)\overline{g(x)}\cdot r(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right)-q\,f\right]\cdot\bar{g}\,dx=$$

$$=p(f'\bar{g}-f\,\bar{g}')\Big|_{\alpha}^{\beta}+\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\,\bar{g}}{dx}\right)-q\,\bar{g}\right]dx=$$

$$=(f,\widehat{D}g)+p\cdot(f'\bar{g}-f\,\bar{g}')\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Таким образом, оператор дифференцирования $\hat{D}$ будет эрмитовым только на множестве функций пространства L_2, удовлетворяющих граничному условию вида

$$p(x)\cdot\left[f'(x)\cdot\bar{g}(x)-f(x)\cdot\bar{g}'(x)\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}=0. \qquad (*)$$

Такое граничное условие называется самосопряженным.

Наиболее часто используются следующие три частных случая самосопряженных граничных условий (или их комбинации):

1) Условия ограниченности (естественные граничные условия). Если $p(\alpha)=p(\beta)=0$, то граничным условиям (*) удовлетворяют все непрерывные функции, которые (со своими производными) ограничены на концах интервала $|f(\alpha)|<\infty$ и $|f(\beta)|<\infty$.

2) Граничные условия периодичности. Если $p(\alpha)=p(\beta)>0$, то условию (*) удовлетворяют функции, для которых на концах интервала $(\alpha;\beta)$ выполняются условия $f(\alpha)=f(\beta)$ и $f'(\alpha)=f'(\beta)$.

3) Граничные условия обычного вида. Если значения $p(\alpha)>0$ и $p(\beta)>0$ различны, то условию (*) удовлетворяют функции, для которых

$$f'(\alpha)+\chi_1\cdot f(\alpha)=0 \quad \text{и} \quad f'(\beta)-\chi_2\cdot f(\beta)=0.$$

Здесь заданы χ_1 и $\chi_2=const\geq 0$. Обращая эти постоянные в нуль или в бесконечность в различных комбинациях, получим четыре пары более простых граничных условий:

А $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0;$ Б $f(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0;$

В $f'(\alpha)=0,\ f(\beta)=0;$ Г $f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0.$

№ 1.4 (В). Приведение пары граничных условий к однородным в одномерных задачах математической физики параболического и гиперболического типа, заданных в декартовой системе координат, осуществляется преобразованием искомой функции $u=u(x,t)$ при $0\leq x\leq l$ и $0\leq t<\infty$ вида $u(x,t)=v(x,t)+\alpha(t)\cdot x^n+\beta(t)\cdot x^{n+1}$ (выбирают n=0 или n=1). Аналогично приводится к однородным одна из двух пар граничных условий в плоских задачах эллиптического типа (стационарные задачи).

Значение n=1 выбираем только для граничных условий типа «Г», когда на обоих концах заданы производные.

№ 1.5 (А). При решении в гильбертовом пространстве $L_2(0;l|1)$ краевой задачи для уравнения $\widehat{D}X=\lambda\cdot X(x)$, где $\widehat{D}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ – оператор второй производной, с различными самосопряженными граничными условиями, получаемые значения ортонормированных собственных функций (базисных) $X_k(x)\neq 0$ и соответствующих собственных значений $\lambda_k=-\mu_k^2\leq 0$ можно представить в виде таблицы 1 (далее табл. 1):

Таблица 1

Граничные условия	Собственные функции	Собственные значения	Значения индексов
$X(0)=0,$ $X(l)=0$	$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$	$\mu_k=\frac{\pi}{l}k$	k=1,2,3…
$X(0)=0,$ $X'(l)=0$	$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$	$\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)$	k=0,1,2…
$X'(0)=0,$ $X(l)=0$	$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x$	$\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)$	k=0,1,2…
$X'(0)=0,$ $X'(l)=0$	$\begin{cases} X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x \\ X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{l}} \end{cases}$	$\begin{cases} \mu_k=\frac{\pi}{l}k \\ \mu_0=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{k=1,2,3...} \\ \text{k=0} \end{cases}$

Например, при решении краевой задачи $\widehat{D}=\frac{d^2}{dx^2}$ и $X(0)=0, X'(l)=0$ получим линейное уравнение $X''-\lambda\cdot X(x)=0$, где $\lambda=-\mu^2\le 0$ – неположительные собственные числа. Общее решение уравнения $X(x)=C\cdot\sin\mu x+\tilde{C}\cdot\cos\mu x$ содержит три неизвестных параметра С, $\tilde{C}$, $\mu=const\ge 0$. Накладывая граничные условия, найдем $X(0)=\tilde{C}=0$ и $X'(l)=C\mu\cdot\cos\mu l=0$; здесь $C\mu\ne 0$ и $\cos\mu l=0$ – дисперсионное уравнение, решение которого будет $\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0$ при k=0,1,2,3…. Собственные функции $X_k(x)=C\cdot\sin\mu_k x$, соответствующие различным собственным значениям при $k\ne k'$, взаимно ортогональны

$$(X_k,X_{k'})=\int_0^l X_k(x)\cdot\overline{X}_{k'}(x)dx=\left\|X_k\right\|^2\delta_{kk'},\quad (\delta_{kk'}\text{ – символ Кронекера}).$$

Квадрат нормы собственной функции приравняем единице

$$\left\|X_k\right\|^2=(X_k,X_k)=\int_0^l\left|X_k(x)\right|^2dx=\left|C\right|^2\cdot\int_0^l\sin^2\mu_k x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left|C\right|^2\cdot\left(x-\frac{1}{2\mu_k}\cdot\sin 2\mu_k x\right)\Big|_0^l=\frac{1}{2}l\left|C\right|^2=1\Rightarrow C=\sqrt{\frac{2}{l}},$$

тогда получим ортонормированный базис $X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ и $(X_k,X_{k'})=\delta_{kk'}$.

При решении краевой задачи с производными на обоих концах $\widehat{D}=\frac{d^2}{dx^2}$ и $X'(0)=0, X'(l)=0$ снова получим $X(x)=C\cdot\sin\mu x+\tilde{C}\cdot\cos\mu x$. Накладывая граничные условия $X'(0)=C\mu=0$ и $X'(l)=-\tilde{C}\mu\cdot\sin\mu l=0$, приходим к дисперсионному уравнению $\sin\mu l=0$, откуда $\mu_k=\frac{k\pi}{l}\geq 0$ при k=0,1,2,3… . Собственные функции теперь равны $X_k(x)=C\cdot\cos\mu_k x$, а их нормы равны $\|X_k(x)\|=C\sqrt{\frac{l}{2}}=1\Rightarrow C=\sqrt{\frac{2}{l}}$ при k=1,2,3… и $\|X_0(x)\|=C\sqrt{l}=1\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{l}}$ при k=0.

№ 1.6 (С). В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций гильбертова пространства $L_2(0;l|1)$ решить краевую задачу для оператора $\widehat{D}=\frac{d^2}{dx^2}$ с самосопряженными граничными условиями вида

а) $f(0)=0,\ \ f'(l)+\chi\cdot f(l)=0;\qquad \chi=const>0$;

б) $f'(0)-\chi\cdot f(0)=0,\ \ f'(l)=0$;

в) $f(0)=f(l),\ \ f'(0)=f'(l)$.

а) Уравнение $\widehat{D}f=\lambda f(x)$ или $f''+\mu^2\cdot f(x)=0$ при $\lambda=-\mu^2\leq 0$ имеет общее решение $f(x)=C\cdot\sin\mu x+\tilde{C}\cdot\cos\mu x$. Накладывая граничные условия $f(0)=\tilde{C}=0$ и $f'(l)+\chi\cdot f(l)=C\mu\cdot\cos\mu l+C\chi\cdot\sin\mu l=0$, получим $C\neq 0$ и $tg\mu l=-\frac{\mu}{\chi}$ – дисперсионное (характеристическое) уравнение для определения собственных значений, для которого возможно только численное решение. Обозначим $\mu l=\xi$, тогда уравнение перепишется $tg\xi = -\dfrac{\xi}{\chi l}$ и его корни будут абсциссами точек пересечения графиков двух функций: $y_1(\xi) = tg\xi$ – семейство тангенсоид и $y_2(\xi) = -\dfrac{\xi}{\chi l}$ – прямая. Множество этих точек пересечения (корней уравнения) будет дискретным и неограниченным $\xi_0 = 0$ и $\xi_k = -\xi_{-k}$ при $k \in N$, причем приближенно $\xi_k \cong \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$ при $k >> 1$. Спектр задачи теперь запишем в виде $\lambda_k = -\mu_k^2 = -(\xi_k / l)^2 \le 0$ при $k \in Z_0$. Этим собственным значениям соответствует невырожденное множество собственных функций (взаимно ортогональных векторов) вида

$$f_k(x) = C \cdot \sin \mu_k x = C \cdot \sin(\xi_k x / l) \quad \text{при} \quad k \in N.$$

Величину $C \neq 0$ можно получить, нормируя собственные функции $f_k(x)$ на единицу

$$\|f_k\|^2 = (f_k, f_k) = \int_0^l |f_k(x)|^2 \, dx = |C|^2 \cdot \int_0^l \sin^2 \mu_k x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}|C|^2 \cdot \int_0^l (1 - \cos 2\mu_k x) dx = \frac{1}{2}|C|^2 \cdot (l - \frac{1}{2\mu_k} \cdot \sin 2\mu_k l) =$$

$$= \frac{1}{2}|C|^2 \cdot (l - \frac{1}{2\mu_k} \cdot \frac{2tg\mu_k l}{1 - tg^2 \mu_k l}) == \frac{1}{2}|C|^2 \cdot (l - \frac{\chi}{\mu_k^2 - \chi^2}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2 \Big/ \left(l - \frac{\chi}{\mu_k^2 - \chi^2} \right)} > 0.$$

Тогда ортонормированное множество базисных векторов будет

$$f_k(x) = \sin \mu_k x \cdot \sqrt{2 \Big/ \left(l - \frac{\chi}{\mu_k^2 - \chi^2} \right)} \quad \text{при } \mu_k = \xi_k / l > 0 \text{ и } k \in N.$$

В случае k=0 общее решение $f_0(x) = Cx + \tilde{C}$, где $(C, \tilde{C} = const)$, сводится к постоянной $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} = const > 0$.

б) Задача решается аналогично предыдущей.

в) Уравнение $\hat{D}f = \lambda f(x)$ при $\lambda = -\mu^2 \le 0$ снова имеет общее решение $f(x) = C\cdot\sin\mu x + \tilde{C}\cdot\cos\mu x \quad (C, \tilde{C} = const)$. Для определения постоянных C, $\tilde{C}$ и μ накладываем условия периодичности

$$\begin{matrix} f(0) = f(l) \Rightarrow \\ f'(0) = f'(l) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} C\cdot\sin\mu l - \tilde{C}(1-\cos\mu l) = 0, \\ C\mu\cdot(1-\cos\mu l) + \tilde{C}\mu\cdot\sin\mu l = 0. \end{cases}$$

Полученная однородная система уравнений может иметь нетривиальные решения, только когда ее определитель равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\mu l & -(1-\cos\mu l) \\ \mu(1-\cos\mu l) & \mu\cdot\sin\mu l \end{vmatrix} =$$

$$= \mu\cdot(\sin^2\mu l + (1-\cos\mu l)^2) = 2\mu\cdot(1-\cos\mu l) = 4\mu\cdot\sin^2\frac{\mu l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{2\pi k}{l} \quad \text{при} \quad k \in Z_0.$$

Из первого уравнения системы получим

$$\frac{\tilde{C}}{C} = \frac{\sin\mu l}{1-\cos\mu l} = ctg\frac{\mu l}{2} \text{ при } \mu \ne 0,$$

тогда общее решение исходного уравнения можно упростить

$$f(x) = C\cdot(\sin\mu x + \frac{\tilde{C}}{C}\cdot\cos\mu x) =$$

$$= \frac{C}{\sin\mu l/2}\cdot(\sin\mu x\cdot\sin\frac{\mu l}{2} + \cos\mu x\cdot\cos\frac{\mu l}{2}) = C_0\cdot\cos\mu(x - \frac{l}{2}) \ne 0.$$

Принимая $\mu_k = \dfrac{2\pi k}{l} \ne 0$, получим $f_k(x) = C_0\cdot\cos\mu_k(x - \dfrac{l}{2})$; тогда функции $f_k(x)$ взаимно ортогональны $(f_k, f_{k'}) = 0$ при $k \ne k'$ и постоянную C_0 можно определить, приравняв к единице норму

$$\|f_k(x)\|^2 = (f_k, f_k) = \int_0^l |C_0|^2 \cdot \cos^2 \mu_k (x - \frac{l}{2}) dx =$$

$$= \frac{1}{2}|C_0|^2 \cdot \int_0^l (1 + \cos \mu_k (2x - l)) dx = \frac{1}{2}|C_0|^2 \cdot (x + \frac{1}{2\mu_k} \cdot \sin \mu_k (2x - l)) \Big|_0^l =$$

$$= \frac{1}{2}|C_0|^2 \cdot (l + \frac{1}{\mu_k} \cdot \sin \mu_k l) = \frac{l}{2}|C_0|^2 = 1 \Rightarrow C_0 = \sqrt{\frac{2}{l}} > 0 .$$

При $к = 0$ получим $f_0(x) = const$ и, пронормировав, $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$.

В конце приведем важные для последующего основного изложения теорему Стеклова и другие сведения.

В гильбертовом пространстве $L_2(0;l\,|\,r(x))$ всякая функция $F(x)$, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая внутри интервала $0 < x < l$, раскладывается внутри этого интервала в абсолютно и равномерно (правильно) сходящийся обобщенный ряд Фурье вида $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot f_k(x)$, где коэффициенты разложения (координаты) равны $c_k = (F, f_k) = = \int\limits_0^l F(x) \cdot \overline{f_k(x)} \cdot r(x) dx$, а базисные векторы (орты) $f_k(x)$ – это собственные функции краевой задачи Штурма–Лиувилля $\widehat{D} f_k = \lambda_k \cdot f_k(x)$ с самосопряженными граничными условиями на концах интервала.

Полученный таким образом ряд сходится к функции $F(x)$, и его можно дважды дифференцировать.

Если раскладываемая функция $F(x)$ на концах интервала разложения $0 < x < l$ не удовлетворяет граничным условиям задачи Штурма–Луивилля, то ее разложение тоже может не удовлетворять этим условиям.

Пусть известно разложение в обобщенный ряд Фурье функции

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot f_k(x),$$

где коэффициенты $c_k = (F, f_k) = \int\limits_0^l F(x) \cdot \overline{f_k(x)} \cdot r(x) dx$. Тогда квадрат нормы функции равен $\|F\|^2 = (F, F) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = 0$.

Это разложение называется равенством Парсеваля или условием полноты системы ортов $f_k(x)$. Такое равенство обобщает теорему Пифагора $\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \equiv \sum_{k=1}^{3} a_k^2 > 0$ на случай бесконечно мерного пространства.

Задача наилучшего приближения функции $F(x) \in L_2$ ортогональными полиномами (в частности, тригонометрическими многочленами) вида $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot f_k(x)$ решается положительно, если принять коэффициенты $c_k = (F, f_k)$. При этом квадратичное уклонение $\rho(F, P_n) = \|F - P_n\|$ оказывается наименьшим.

№ 1.7 (С). Проверить, что при решении краевой задачи для уравнения $\hat{D}f = \lambda \cdot f(x)$, где $\hat{D} = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q\right)$ – оператор Штурма–Луивилля, получаются разные виды собственных функций:

а) Если $r = p = 1,\ q = 0,\ \lambda = -\mu^2 \le 0,\ 0 \le x \le l$, то будет уравнение $f'' + \mu^2 \cdot f(x) = 0$, и с однородными условиями на границах получим тригонометрические функции (см. табл. 1).

б) Если $r = p = x,\ q = \frac{n^2}{x}$ и $n \in Z_0,\ \lambda = -\mu^2 < 0,\ 0 \le x \le l$, то будет $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot f(x) = 0$, и при условиях $\left|f(0)\right| < \infty$, $f(l) = 0$ получим функции Бесселя.

Здесь множество собственных функций (ортов) $f_k(x) = \frac{2}{\sqrt{l}} J_n(\mu_k x) / J_{n+1}(\mu_k l)$ при $k \in N$, где функции Бесселя (цилиндрические функции первого рода порядка n) представляются в виде степенного ряда

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m! \cdot (m+n)!} \quad \text{и} \quad R_{сход} = \infty .$$

Дискретный невырожденный спектр собственных значений $\lambda_k = -\mu_k^2 = -(\alpha_k^{(n)} / l)^2 < 0$, где $\alpha_k^{(n)} > 0$ – простой *k*-тый корень характеристического уравнения $J_n(\alpha_k^{(n)}) = 0$, причем $\alpha_k^{(n)} < \alpha_{k+1}^{(n)}$ при всех $k \in N$.

Функцию $F(x)\in L_2(0,l|x)$ можно разложить в ряд по функциям Бесселя $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot f_k(x)$, где коэффициенты разложения

$$c_k=(F,f_k)=\int_0^l F(x)\cdot \overline{f_k}(x)\cdot xdx=\frac{2}{\sqrt{l}}\cdot\int_0^l F(x)\cdot J_n(\mu_k x)\cdot xdx\,/\,J_{n+1}(\mu_k l)$$

в) Если $r=1$, $p=1-x^2$, $q=-\dfrac{k^2}{1-x^2}$, $\lambda=-n(n+1)\le 0$, то при $n,k=0,1,2,3,...$, $|x|\le 1$ будет

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{df}{dx}\right)+\left(n(n+1)-\frac{k^2}{1-x^2}\right)\cdot f(x)=0,$$

и при условиях $|f(\pm 1)|<\infty$ получим присоединенные функции Лежандра. В случае *k=0* получаются полиномы Лежандра.

Собственным значениям задачи $\lambda_n\le 0$ (точнее, числам $n\in Z_0$) соответствует ортонормированное множество собственных функций (базисных векторов) $f_{nk}(x)=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot P_{nk}(x)$ при $n\ge k$ и $n,k\in Z_0$, где присоединенные функции Лежандра задаются по формуле Родрига $P_{nk}(x)=(1-x^2)^{k/2}\cdot P_n^{(k)}(x)=\dfrac{(1-x^2)^{k/2}}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^{n+k}}{dx^{n+k}}(x^2-1)^n$. Эти функции ограничены $|P_{nk}(x)|\le\dfrac{(n+k)!}{k!}$. Причем $P_{nk}(x)=0$ при $n<k$, а при $k=0$ получаем полиномы Лежандра $P_{nk}(x)\big|_{k=0}=P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

Функцию $F(x)\in L_2(-1;+1|1)$ можно разложить в ряд по присоединенным функциям Лежандра $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_{nk}\cdot P_{nk}(x)\equiv\sum_{n,k} c_{nk}\cdot P_{nk}(x)$, где коэффициенты разложения

$$c_{nk}=(F,f_{nk})=\int_{-1}^{1} F(x)\cdot f_{nk}(x)dx=\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\cdot\int_{-1}^{1} F(x)\cdot P_{nk}(x)dx.$$

При $k=0$ получим более простое разложение по полиномам Лежандра $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot f_{n,0}(x)$, где

$$c_n=(F,f_{n,0})=\sqrt{n+\frac{1}{2}}\cdot\int_{-1}^{1}F(x)\cdot P_n(x)dx=\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{(2n)!!}\cdot\int_{-1}^{1}F^{(n)}(x)\cdot(1-x^2)^n\,dx.$$

г) Если $r=p=e^{-x^2}$, $q=0$, $\lambda=2n$, то при $n=0,1,2,3,\ldots,|x|<\infty$ будет $f''-2x\cdot f'+2n\cdot f(x)=0$, и при условиях $|f(\pm\infty)|<\infty$ получим многочлены Чебышева–Эрмита.

Эти функции задаются производящей формулой

$$f(x)=H_n(x)=(-1)^n\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\quad \text{при } n\in\mathbb{Z}_0 \quad \text{и} \quad |x|<\infty.$$

Выполнив дифференцирование, найдем

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=2(2x^2-1),\ H_3(x)=4x(2x-3).$$

Могут быть получены и рекуррентные формулы

$$H_{n+1}(x)+2x\cdot H_{n-1}(x)=2x\cdot H_n(x),\qquad H_n'(x)=2n\cdot H_{n-1}(x) \ \text{ и др.}$$

Функцию $F(x)\in L_2(-\infty;+\infty\,|\,e^{-x^2})$ можно разложить в ряд по полиномам Эрмита $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot H_n(x)$, где коэффициенты разложения

$$c_n=(F,H_n)=\frac{1}{2^n\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cdot H_n(x)\cdot e^{-x^2}dx.$$

ТЕМА 2.

Уравнения теплопроводности

Решение одномерных задач параболического типа (теплопередача, диффузия, ток в витом кабеле и др.) методом разложения по собственным функциям.

Основные вопросы. Постановка задач для трех основных типов уравнений математической физики в частных производных второго порядка. Граничные и начальные условия задачи. Решение этих задач методом разложения по собственным функциям (разделения переменных). Получение функции источника Грина. Физические задачи, приводящиеся к уравнению переноса.

Литература: [1] – гл. 3, §1 (3, 4), §2 (1, 2, 4, 5). [2] – гл. 28, § 1, 2. [5] – гл. 8, §3 (№ 43, 44). [6] – гл. 4, §1–5.

Задание: [7] – №131, 132, 138, 139, 145, 146. [8] – гл. 3. № 23, 33, 35, 45.

№ 2.1 (А). Задача общего вида для неоднородного уравнения переноса с однородными граничными условиями. Определение функции Грина (источника).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(x,t). \\ u(0,t) = u(l,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) Граничные условия задачи однородны (здесь граничные условия первого рода – типа условий Дирихле).

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Искомую функцию двух переменных представим в виде ряда $u(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)\cdot X_k(x)$ произведений двух функций, каждая из которых зависит от одного переменного. Здесь функция от координаты удовлетворяет краевой задаче вида $\begin{cases} X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$ $\lambda = -\mu^2 < 0$ – собственные числа (значения).

Решением этой задачи будет множество собственных функций $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$, которые составляют ортонормированный базис задачи в гильбертовой пространстве $L_2(0;l|1)$, т. е. скалярное произведение $(X_k, X_{k'}) = \int\limits_0^l X_k(x) \cdot \overline{X_{k'}(x)} \cdot dx = \delta_{kk'}$ (здесь $\delta_{kk'}$ – символ Кронекера, значения которого $\delta_{kk'} = 1$ при $k = k'$ и $\delta_{kk'} = 0$ при $k \neq k'$). Из дисперсионного уравнения $\sin \mu_k l = 0$ определим спектр задачи $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{l} k\right)^2 < 0$ при $k \in N$ – множество ее собственных чисел (см. табл. 1).

Для сходимости ряда функции $u(x,t)$ необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k \to \infty} T_k(t) = 0$.

3) Вывод уравнения для функции времени $T_k(t)$.

Подставим ряд функции $u(x,t)$ в уравнение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_k \left\{ T_k \cdot X_k'' - \frac{1}{b^2} \cdot T_k' \cdot X_k \right\} = \left[X_k'' = -\mu_k^2 \cdot X_k \right] =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_k \left\{ T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k \right\} \cdot X_k = F(x,t).$$

Теперь уравнение можно представить в виде

$$\sum_k \left\{ T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k \right\} \cdot X_k = -b^2 \cdot F(x,t) \equiv \sum_k \gamma_k(t) \cdot X_k(x),$$

где коэффициент разложения правой части

$$\gamma_k(t) = \left(-b^2 F, X_k \right) = -b^2 \cdot \int\limits_0^l F(\xi,t) \cdot \overline{X_k(\xi)} \cdot d\xi \, .$$

Приравняв в уравнении коэффициенты разложения, получим уравнение для функции от времени

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k(t) \, .$$

4) Решение уравнения для функции $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\overset{0}{T}_k' + (b\mu_k)^2 \cdot \overset{0}{T}_k(t) = 0$$

легко получить методом разделения переменных

$$\frac{d\overset{0}{T}_k}{\overset{0}{T}_k} = -(b\mu_k)^2 \cdot dt, \qquad \ln \overset{0}{T}_k = -\left(b\mu_k\right)^2 t + \ln C_k,$$

$$\overset{0}{T}_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}, \qquad C_k = const.$$

Для определения общего решения неоднородного уравнения, т. е. для учета влияния правой части рассматриваемого уравнения, воспользуемся методом вариации произвольной постоянной $T_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}$. Тогда

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k = C_k'(t) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + C_k(t) \cdot \left(-(b\mu_k)^2\right) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} +$$

$$+(b\mu_k)^2 \cdot C_k(t) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} = C_k'(t) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} = \gamma_k(t).$$

Из последнего равенства получим $C_k'(t) = \gamma_k(t) \cdot e^{(b\mu_k)^2 t}$, откуда значение $C_k(t) = \int\limits_0^t \gamma_k(\tau) \cdot e^{(b\mu_k)^2 \tau} \cdot d\tau + C_k$. Здесь $C_k = const$ – произвольная постоянная. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения будет

$$T_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + \int\limits_0^t \gamma_k(\tau) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau,$$

потому что решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

5) Определение произвольной постоянной C_k из начального условия.

Решение задачи теперь можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + \int\limits_0^l \gamma_k(\tau) \cdot e^{-(b\mu_k)^2 \cdot (t-\tau)} d\tau \right\} \cdot X_k(x).$$

Воспользовавшись начальными условиями задачи, получим

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\cdot X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot X_k(x)=f(x),$$

откуда искомое значение постоянной

$$C_k=T_k(0)=(f,X_k)=\int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k(\xi)}\cdot d\xi .$$

6) Окончательный вид решения задачи.

Функция Грина (источника) и ее основные свойства.

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k(0)\cdot e^{-(b\mu_k)^2}+\int_0^l \gamma_k(\tau)\cdot e^{-(b\mu_k)^2\cdot(t-\tau)}\cdot d\tau\right\}\cdot X_k(x),$$

$$T_k(0)=(f,X_k)=\int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k(\xi)}\cdot d\xi,$$

где

$$\gamma_k(\tau)=-b^2\cdot(F,X_k)=-b^2\cdot\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot\overline{X_k(\xi)}\cdot d\xi.$$

Подставим значения величин $T_k(0)$ и $\gamma_k(\tau)$ в общую формулу решения задачи и найдем

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k(\xi)}\cdot d\xi\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}-\right.$$

$$\left.-b^2\cdot\int_0^t\left(\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot\overline{X_k(\xi)}\cdot d\xi\right)\cdot e^{-(b\mu_k)^2\cdot(t-\tau)}\cdot d\tau\right\}\cdot X_k(x).$$

Полученный ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно), так как оба его слагаемых имеют порядок $\mathrm{O}(e^{-\alpha k^2})$ при $\alpha>0$ и $k\to\infty$. Поэтому можно поменять местами суммирование и интегрирование. Затем после простых преобразований получим окончательный вид решения

$$u(x,t)=\int_0^l f(\xi)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k(\xi)}\right)\cdot d\xi-$$

$$-b^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi,\tau) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot X_k(x) \cdot \overline{X_k(\xi)} \right) \cdot d\xi \equiv$$

$$\equiv \int_0^l f(\xi) \cdot G(x,\xi|\tau) \cdot d\xi - b^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau) \cdot G(x,\xi|t-\tau) d\xi. \qquad (*)$$

Здесь введена для упрощения записи функция Грина (источника)

$$G(x,\xi|t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot X_k(x) \cdot \overline{X_k(\xi)},$$

где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{l} k\right)^2 < 0$ – собственные значения задачи.

Многие свойства этой функции практически очевидны:
$G(x,\xi|t) = G(\xi,x|t)$ – симметрия по координатам;

$G(x,\xi|0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot \overline{X_k(\xi)} = \delta(x-\xi)$ – точка разрыва при $x = \xi$,

где $\delta(\alpha)$ – дельта-функция Дирака (см. Приложение 2).

Отметим разный физический смысл координат в функции Грина, здесь ξ – точка расположения источника энергии, а x – точка ее измерения (фиксации).

Полученные ряды с ядром вида $e^{-(b\mu_k)^2 t}$ можно выразить через специальные функции $\Theta\left(\dfrac{x \pm \xi}{2l}, \dfrac{b^2 t}{l^2}\right)$ – тета-функции Якоби, являющиеся составной частью эллиптических функций.

7) Проверка решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = 0 \because X_k(0) = 0; \quad u(l,t) = 0 \because X_k(l) = 0;$$

$$u(x,0) = \int_0^l f(\xi) \cdot G(x,\xi|0) d\xi - 0 = \int_0^l f(\xi) \cdot \delta(x-\xi) = f(x).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^l f(\xi)\cdot(G''_{xx} - \frac{1}{b^2}\cdot G'_t)d\xi -$$

$$-b^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau)\cdot(G''_{xx} - \frac{1}{b^2}\cdot G'_t)d\xi + \int_0^l F(\xi,t)\cdot G(x,\xi\,|\,0)d\xi =$$

$$= 0 - 0 + \int_0^l F(\xi,t)\cdot\delta(\xi - x)d\xi = F(x,t).$$

Здесь

$$G''_{xx}(x,\xi\,|\,t) - \frac{1}{b^2}\cdot G'_t(x,\xi\,|\,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\mu_k^2 + \frac{1}{b^2}\cdot b^2\mu_k^2\right)\cdot e^{-(b\mu_k)^{2t}}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k(\xi)} = 0,$$

и аналогичное равенство получим для $G(x,\xi\,|\,t-\tau)$.

В условиях задачи очевидны размерности

$$\left[u(x,t)\right] = Q, \qquad [x] = [\xi] = L,\ \ [t] = [\tau] = T\ ,\ [\mu_k] = 1/L,$$

$$[F] = [Q]/L^2,\ [f] = [Q],\ [X_k] = 1/\sqrt{L}.$$

Поэтому $[b^2] = L^2/T$, $[\mu_k x] = 1$, $[b^2\mu_k^2 t] = 1$, $[G] = 1/L$.

Тогда все размерности в ответе совпадают:

$$[u(x,t)] \equiv Q = \left[\int_0^l f\cdot G\cdot d\xi\right] + \left[b^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l F\cdot G\cdot d\xi\right] =$$

$$= \left[f\cdot G\cdot d\xi\right] + [b^2\cdot d\tau\cdot F\cdot G\cdot d\xi] =$$

$$= \left[Q\right]\cdot\frac{1}{L}\cdot L + \frac{L^2}{T}\cdot T\cdot\frac{[Q]}{L^2}\cdot\frac{1}{L}\cdot L \Rightarrow [Q].$$

№ 2.2 (А). Подробное решение задачи параболического типа (переноса тепла и др.) методом разделения переменных (разложения по собственным функциям) и с использованием функция Грина (источника).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = At. & u = u(x,t). \\ u'_x(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = B; & 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \\ u(x,0) = 0. & A, B, b, l = const > 0. \end{cases}$$

1) Приведение граничных условий смешанного типа к однородным достигается заменой искомой функции $u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t)\cdot x + \beta(t)$; подстановка в условия задачи дает

$$u'_x(0,t) = v'_x(0,t) + \alpha(t) = 0 \Rightarrow v'_x(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha(t) = 0;$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \beta(t) = B \Rightarrow v(l,t) = 0 \quad \text{при} \quad \beta(t) = B;$$

$$u(x,0) = v(x,0) + B = 0 \Rightarrow v(x,0) = -B.$$

Таким образом, получим $u(x,t) = v(x,t) + B$ и для новой искомой функции $v(x,t)$ поставим задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} = At. & v = v(x,t). \\ v'_x(0,t) = 0, v(l,t) = 0; & 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \\ v(x,0) = -B. & \end{cases}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Частное решение будем искать в виде ряда $v(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)\cdot X_k(x)$, где собственная функция $X_k(x)$ находится из краевой задачи:

$$X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0; \qquad X'(0) = 0, X(l) = 0; \qquad \lambda = -\mu^2 < 0.$$

Воспользовавшись данными табл. 1, найдем $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2 < 0$ при $k \in Z_0$ – собственные значения. Здесь множество функций $X_k(x)$ представляет ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(0,l|1)$.

Поэтому

$$(X_k, X_{k'}) = \int_0^l X_k(x) \cdot \overline{X_{k'}(x)} \cdot dx = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \cos \mu_k x \cdot \cos \mu_{k'} x \cdot dx = \delta_{kk'},$$

где $\delta_{kk'}$ – символ Кронекера. Для сходимости ряда по собственным функциям необходимо $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Подставив разложение функции $v(x,t)$ в уравнение задачи, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -T_k \cdot \mu_k^2 X_k - \frac{1}{b^2} T_k' \cdot X_k \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_k \left\{ T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k \right\} X_k = At$$

или $\sum\limits_k \left\{ T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) \right\} X_k(x) = -Ab^2 t \equiv \sum\limits_k \gamma_k(t) \cdot X_k(x)$,

где $\gamma_k(t) = (-Ab^2 t, X_k) = -Ab^2 t \cdot \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \int\limits_0^l \cos \mu_k x \cdot dx =$

$$= -Ab^2 t \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k}\Big|_0^l = \frac{Ab^2 t}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^{k+1}.$$

Приравняв коэффициенты (координаты) разложений, найдем

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k(t) = \frac{Ab^2 t}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^{k+1} \equiv \tilde{A}_k \cdot t.$$

4) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения $\dfrac{d}{dt}\overset{0}{T}_k + (b\mu_k)^2 \cdot \overset{0}{T}_k(t) = 0$ методом разделения переменных

$$\frac{d\overset{0}{T}_k}{\overset{0}{T}_k} = -(b\mu_k)^2 \cdot dt, \qquad \ln \overset{0}{T}_k = -(b\mu_k)^2 t + \ln C_k,$$

$$\overset{0}{T}_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}, C_k = const.$$

Частное решение нашего неоднородного линейного уравнения, соответствующее его заданной правой части, будем искать в виде двучлена первой степени $\widetilde{T_k}(t) = pt + q \quad (p, q = const)$, т. е. по виду правой части заданного уравнения для функции $T_k(t)$. Тогда

$$\widetilde{T_k'} + (b\mu_k)^2 \cdot \widetilde{T_k} = p + (b\mu_k)^2 \cdot (pt + q) = \tilde{A}_k t.$$

Приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, найдем эти коэффициенты

$$p = \tilde{A}_k / (b\mu_k)^2, \qquad p + (b\mu_k)^2 \cdot q = 0 \Rightarrow q = -p / (b\mu_k)^2 = -\tilde{A}_k / (b\mu_k)^4;$$

тогда $\widetilde{T_k}(t) = \dfrac{\tilde{A}_k}{(b\mu_k)^2}\left(t - \dfrac{1}{(b\mu_k)^2}\right).$

Теперь общее решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$T_k(t) = \overset{0}{T}_k + \widetilde{T_k} = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + \frac{\tilde{A}_k}{(b\mu_k)^2}\left(t - \frac{1}{(b\mu_k)^2}\right) =$$

$$= C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} - \frac{(-1)^k \cdot A}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(t - \frac{1}{(b\mu_k)^2}\right).$$

Здесь $C_k = const$ – постоянная интегрирования.

5) Определение постоянной C_k из начального условия.

Запишем общий вид решения задачи

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x) =$$

$$= \sum_k \left\{ C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} - \frac{A}{\mu_k^3}(-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(t - \frac{1}{(b\mu_k)^2}\right)\right\} \cdot X_k(x)$$

и наложим начальное условие

$$v(x,0) = \sum_k \left\{ C_k + \frac{A}{b^2 \mu_k^5}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k \right\} \cdot X_k(x) = -B = \sum_k \mathit{\Gamma}_k \cdot X_k(x),$$

где коэффициент разложения

$$\varGamma_k = (-B, X_k) = -B\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l \cos\mu_k x \cdot dx = -\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\mu_k x\Big|_0^l =$$

$$= \frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^{k+1}.$$

Теперь постоянная C_k оказывается равной

$$C_k = \varGamma_k - \frac{A}{b^2\mu_k^5}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k = \frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^{k+1} - \frac{A}{b^2\mu_k^5}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(B + A / b^2\mu_k^4\right).$$

Если учитывать полученное значение постоянной C_k, то оказывается очевидным выполнение предела $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$ при всех $t \geq 0$, который является необходимым условием сходимости ряда для функции $v(x,t)$.

6) Окончательный вид решения.

Подставим значение постоянной C_k в ряд для функции $v(x,t)$ и вернемся к функции $u(x,t)$. В итоге получим решение в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + B =$$

$$= B + \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k} \cdot \left(B + \frac{A}{b^2\mu_k^4}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} -\right.$$

$$\left. - \frac{A}{\mu_k^3} \cdot \left(t - \frac{1}{(b\mu_k)^2}\right) \cdot (-1)^k\sqrt{\frac{2}{l}}\right\} \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos\mu_k x =$$

$$= B - \frac{2}{l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left\{B \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} - \frac{A}{\mu_k^2}\left[\frac{1}{(b\mu_k)^2}\left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right) - t\right]\right\} \cdot \frac{(-1)^k}{\mu_k} \cdot \cos\mu_k x,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$. Полученный ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при всех $x \in [0;l]$ и $t \geq 0$; причем не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

7) Проверка решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u'_x(0,t)=0 \because (\cos\mu_k x)'_x\big|_{x=0}=-\mu_k\cdot\sin 0=0,$$

$$u(l,t)=B \because \cos\mu_k l=\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

$$u(x,0)=B-\frac{2B}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cdot\cos\mu_k x=$$

$$=B-\frac{4B}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2l}(2k+1)=B-\frac{4B}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=0$$

(см. формулу 8 в Приложении 1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{-B\mu_k^2\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}+A\cdot\left[\frac{1}{(b\mu_k)^2}\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-t\right]+\right.$$

$$+B\mu_k^2\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}+$$

$$\left.+\frac{A}{(b\mu_k)^2}\left[\frac{1}{(b\mu_k)^2}\cdot\left(0+(b\mu_k)^2\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-1\right]\right\}\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cdot\cos\mu_k x=$$

$$=-\frac{2A}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(b\mu_k)^2}\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-t-\right.$$

$$\left.-\frac{A}{(b\mu_k)^2}\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)\right\}\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cdot\cos\mu_k x=$$

$$=\frac{2A}{l}t\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cdot\cos\mu_k x=\frac{4A}{\pi}t\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2l}(2k+1)=$$

$$=\frac{4A}{\pi}t\cdot\frac{\pi}{4}=At.$$

В условиях задачи очевидны размерности

$$[u(x,t)]=Q,\quad [x]=L,\quad [t]=T,\quad [\mu_k]=1/L,\quad [b^2]=L^2/T,$$

$$[A]=Q/L^2T,\quad [B]=Q.$$

Поэтому $[\mu_k x]=1,\quad [b^2\mu_k^2 t]=1$.

Тогда все размерности в ответе совпадают:

$$[u]=Q=[B]+\frac{1}{L}\cdot\left\{[B]+[A]\cdot L^2\cdot(T+T)\right\}\cdot L=$$

$$=Q+\frac{1}{L}\cdot\left\{Q+\frac{Q}{L^2T}\cdot L^2T\right\}\cdot L\Rightarrow Q.$$

8) После приведения граничных условий к однородным можно составить функцию Грина и решить задачу по общей формуле; здесь получим

$$G\left(x,\xi\middle|t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k(\xi)}=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot\cos\mu_k x\cdot\cos\mu_k\xi;$$

$$F(x,t)=At,\qquad f(x)=-B.$$

Подставив эти данные в общую формулу, получим

$$v(x,t)=-B\cdot\int_0^l G\left(x,\xi\middle|t\right)\cdot d\xi-Ab^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l \tau\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi.$$

Интегралы в общей формуле вычислим отдельно

$$\int_0^l G\left(x,\xi\middle|t\right)\cdot d\xi=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot\cos\mu_k x\cdot\int_0^l\cos\mu_k\xi\cdot d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot\cos\mu_k x\cdot\frac{\sin\mu_k l}{\mu_k}=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cdot\cos\mu_k x.$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^l \tau\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot\int_0^t e^{(b\mu_k)^2\tau}\cdot\tau d\tau\cdot\cos\mu_k x\cdot\int_0^l\cos\mu_k\xi\cdot d\xi=$$

$$=\left[\int_0^t e^{\beta\tau}\tau d\tau=\frac{1}{\beta}\int_0^t\tau\, de^{\beta\tau}=\frac{1}{\beta}\left(\tau e^{\beta\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{\beta\tau}d\tau\right)=\frac{1}{\beta}\left(te^{\beta t}-\frac{1}{\beta}\left(e^{\beta t}-1\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b\mu_k)^2}\cdot\left(\frac{1}{(b\mu_k)^2}\cdot\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-t\right)\cdot\cos\mu_k x\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k}=$$

$$=\frac{-2}{lb^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(b\mu_k)^2}\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-t\right]\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\cdot\cos\mu_k x.$$

Воспользовавшись полученными значениями интегралов и возвращаясь к функции $u(x,t)=B+v(x,t)$, получим решение задачи, уже найденное выше

$$u(x,t)=B-\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{Be^{-(b\mu_k)^2 t}-\frac{A}{\mu_k^2}\cdot\left[\frac{1}{(b\mu_k)^2}\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)-t\right]\right\}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cos\mu_k x;$$

$$\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0.$$

Таким образом, при использовании метода функции Грина решение задачи находится особенно просто – все вычисления сводятся только к квадратурам (определенным интегралам). Проверка правильности полученного решения уже была проведена выше.

№ 2.3 (В). Уравнение параболического типа со стационарной неоднородностью и неоднородными нестационарными граничными условиями первого рода (типа Дирихле).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = Ax. \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = Bt; \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) Приведение граничных условий к однородным заменой искомой функции $u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t)\cdot x + \beta(t)$.

$u(0,t) = v(0,t) + \beta(t) = 0 \Rightarrow v(0,t) = 0$ при $\beta(t) = 0$,

$u(l,t) = v(l,t) + \alpha(t)\cdot l = Bt \Rightarrow v(l,t) = 0$ при $\alpha(t) = Bt / l$.

$u(x,0) = v(x,0) = 0$.

Таким образом, $u(x,t) = v(x,t) + B\dfrac{x}{l}t$ и задача для новой функции $v(x,t)$ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \left(A + \dfrac{B}{lb^2}\right)x. \\ v(0,t) = v(l,t) = v(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Решение будем искать в виде $v(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)\cdot X_k(x)$, где $X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0$ и $X(0) = X(l) = 0$ при $\lambda = -\mu^2 < 0$; получим $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot \sin\mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{l}k\right)^2 < 0$ при $k \in N$ – собственные значения (см. табл. 1). Множество функций $X_k(x)$ представляет ортонормированный базис в пространстве $L_2\left(0,l\middle|1\right)$, и необходимо выполнение предела $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k\right\}\cdot X_k=\left(A+\frac{B}{lb^2}\right)x,$$

откуда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T\right\}\cdot X_k=-\left(Ab^2+\frac{B}{l}\right)x=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cdot X(x)$,

где $\displaystyle\gamma_k=\left(-\left(Ab^2+\frac{B}{l}\right)x,X_k\right)=$

$$=-\left(Ab^2+\frac{B}{l}\right)\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l x\cdot\sin\mu_k x\cdot dx=\left(Ab^2 l+B\right)\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}=const.$$

Таким образом, для функции $T_k(t)$ можно поставить задачу Коши с нулевым начальным условием:

$$T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k(t)=\gamma_k,\qquad T_k(0)=0\ \text{ при }\ 0\le t<\infty.$$

4) Решение задачи для функции $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного уравнения $\overset{0}{T}{}_k'+(b\mu_k)^2\cdot\overset{0}{T}_k(t)=0$ будет $\overset{0}{T}_k(t)=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}$, где $C_k=const$. Частное решение неоднородного уравнения получим в виде постоянной $\widetilde{T}_k(t)=\gamma_k/(b\mu_k)^2=const$. Поэтому общее решение линейного неоднородного уравнения оказывается равным $\displaystyle T_k(t)=\overset{0}{T}_k+\widetilde{T}_k=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}+\frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2}$.

5) Определение постоянной C_k из начального условия.

$$v(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cdot X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k+\frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2}\right\}X_k(x)=0,$$

откуда $\displaystyle C_k=-\frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2}$ и

$$T_k(t)=\frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2}\cdot\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)=\left(Al+\frac{B}{b^2}\right)\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(1-e^{-(b\mu_k)^2 t}\right).$$

Здесь очевидно выполнение необходимого условия $\lim\limits_{k\to\infty}T_k(t)=0$.

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,t) = B\frac{x}{l}t + v(x,t) = B\frac{x}{l}t + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x) =$$

$$= B\frac{x}{l}t + 2\left(A + \frac{B}{lb^2}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)\cdot\sin\mu_k x;$$

здесь $\mu_k = \dfrac{k\pi}{l} > 0$. Полученный ряд сходится правильно при всех $x\in[0;l]$ и $t\in[0;\infty)$ и не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k\to\infty$.

Отметим, что такое же решение можно получить и по общей формуле (*), используя для определения функции $v(x,t)$ функцию Грина, которая для нашей задачи равна

$$G\left(x,\xi\middle|t\right) = \frac{2}{l}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 t}\cdot\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k\xi\,; \qquad \mu_k = \frac{k\pi}{l} > 0.$$

7) Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = 0;\quad u(l,t) = Bt \because \sin\mu_k l = 0;\quad u(x,0) = 0.$$

В условиях задачи очевидны размерности $[u(x,t)] = Q$, $[x] = L$, $[t] = T$, $[b^2] = L^2/T$, $[A] = Q/L^3$, $[B] = Q/T$. Поэтому $[\mu_k x] = [\mu_k\xi] = 1$, $[b^2\mu_k^2 t] = 1$. Все размерности в ответе совпадают:

$$[u] = Q = [B]\cdot\frac{L}{L}T + \left(\frac{Q}{L^3} + \frac{Q}{T\cdot L}\cdot\frac{T}{L^2}\right)\cdot L^3\cdot 1\cdot 1 \Rightarrow Q.$$

№ 2.4 (В). Уравнение параболического типа с граничными условиями второго рода (задача Неймана**).**

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = A. & u = u(x,t). \\ u'_x(0,t) = 0,\quad u'_x(l,t) = B; & 0\le x\le l,\quad 0\le t\le\infty. \\ u(x,0) = 0. & A,B,b,l = const > 0. \end{cases}$$

1) Приведение граничных условий к однородным заменой искомой функции $u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t) \cdot x^2 + \beta(t) \cdot x.$

$$u'_x(0,t) = v'_x(0,t) + 0 + \beta(t) = 0 \Rightarrow v'_x(0,t) = 0 \qquad \text{при } \beta(t) = 0,$$

$$u'_x(l,t) = v'_x(l,t) + \alpha(t) \cdot 2l + 0 = B \Rightarrow v'_x(l,t) = 0 \quad \text{при } \alpha(t) = B/2l.$$

Таким образом, $u(x,t) = v(x,t) + B\dfrac{x^2}{2l}$ и начальное условие

$$u(x,0) = v(x,0) + B\frac{x^2}{2l} = 0 \Rightarrow v(x,0) = -B\frac{x^2}{2l}.$$

Постановка задачи для функции $v(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} = A - B/l. \\ v'_x(0,t) = v'_x(l,t) = 0; \\ v(x,0) = -B\dfrac{x^2}{2l}. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &v = v(x,t). \\ &0 \le x \le l, 0 \le t \le \infty. \end{aligned}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Примем $v(x,t) = \sum\limits_k T_k(t) \cdot X_k(x)$, где для определения функции $X_k(x)$ следует поставить вторую краевую задачу (задачу Неймана)

$$X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0 \qquad \text{при } \lambda = -\mu^2 \le 0; \; X'(0) = X'(l) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{cases} X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \cos\mu_k x, & \lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2 < 0 & \forall k \in \mathbb{N}; \\ X_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} = const, & \lambda_0 = \mu_0 = 0, & \forall k = 0. \end{cases}$$

Здесь все собственные функции $X_0(x)$ и $X_k(x)$ совместно составляют ортонормированный базис гильбертова пространства $L_2\left(0;l\,\middle|\,1\right)$ и им соответствуют собственным значениям $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \le 0$ при $k = 0,1,2,3,\ldots$.

Разложение в ряд функции $v(x,t)$ имеет вид

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x)=T_0(t)\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x).$$

Здесь необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty}T_k(t)=0$.

3) Вывод дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t}=T_0X_0''-\frac{1}{b^2}T_0'X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\mu_k^2\cdot T_kX_k-\frac{1}{b^2}T_k'X_k\right\}=$$

$$=0-\frac{1}{b^2}\cdot\left[T_0'X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k\right\}X_k\right]=A-\frac{B}{l}$$

или $$T_0'X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k\right\}X_k=b^2\cdot\left(\frac{B}{l}-A\right)\cdot\sqrt{l}\cdot X_0.$$

Умножая скалярно последнее равенство сначала на вектор-функцию X_0 и затем на X_k, получим искомые уравнения

$$T_0'+0=b^2\sqrt{l}\cdot\left(\frac{B}{l}-A\right)\cdot\left(X_0,X_0\right)=b^2\sqrt{l}\cdot\left(\frac{B}{l}-A\right)\qquad \text{при } k=0;$$

$$0+T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k(t)=b^2\sqrt{l}\cdot\left(\frac{B}{l}-A\right)\cdot\left(X_0,X_k\right)=0\qquad \text{при } k\neq 0.$$

4) Решения дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$, очевидно, равны

$$T_0'(t)=(B-Al)\frac{b^2}{\sqrt{l}}\Rightarrow T_0(t)=(B-Al)\frac{b^2t}{\sqrt{l}}+C_0;$$

$$T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k(t)=0\Rightarrow T_k(t)=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}.$$

Здесь C_0 и C_k – неизвестные постоянные интегрирования. Подставив найденные решения в разложение в ряд функции $v(x,t)$, получим

$$v(x,t)=T_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}T_kX_k=\left[(B-Al)\frac{b^2t}{\sqrt{l}}+C_0\right]\cdot X_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot X_k(x).$$

5) Определение постоянных C_0 и C_k из начального условия.

Подставив значение $t=0$ в предыдущую формулу, найдем

$$v(x,0)=C_0\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot X_k(x)=-B\frac{x^2}{2l}.$$

Умножая скалярно это равенство сначала на вектор-функцию X_0 и затем на X_k, соответственно получим

$$C_0=\left(-B\frac{x^2}{2l},X_0\right)=-\frac{B}{2l\sqrt{l}}\cdot\int_0^l x^2dx=-\frac{1}{6}Bl\sqrt{l}<0 \quad \text{при } k=0;$$

$$C_k=\left(-B\frac{x^2}{2l},X_k\right)=-\frac{B}{2l}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l x^2\cdot\cos\mu_k x\cdot dx=$$

$$=\frac{-B}{2l\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left\{x^2\cdot\sin\mu_k x\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x\cdot 2x\cdot dx\right\}=$$

$$=\frac{B}{l\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l x\cdot\sin\mu_k x\cdot dx=\frac{-B}{l\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(x\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l-\int_0^l\cos\mu_k x\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{-B}{l\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(l\cdot(-1)^k-\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k}\Big|_0^l\right)=(-1)^{k+1}\frac{B}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \quad \text{при } k=1,2,3,\ldots .$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,t)=B\frac{x^2}{2l}+v(x,t)=B\frac{x^2}{2l}+\left[(B-Al)\frac{b^2t}{\sqrt{l}}-\frac{1}{6}Bl\sqrt{l}\right]\cdot X_0-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot X_k(x)=-A\cdot b^2t+\frac{2B}{l}\cdot\left\{\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}l^2+2b^2t\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot\cos\mu_k x\right\}; \qquad \mu_k=\frac{\pi k}{l}>0.$$

Такой же вид решения можно получить и по общей формуле (*), если для определения функции $v(x,t)$ использовать функцию Грина

$$G\left(x,\xi\,|\,t\right)=\frac{1}{l}\cdot\left(1+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot\cos\mu_k x\cdot\cos\mu_k\xi\right); \qquad \mu_k=\frac{\pi k}{l}>0.$$

Выполнение необходимого предела $\lim\limits_{k\to\infty}T_k(t)=0$ при $t\ge 0$ в этих рядах очевидно.

7) Проверка правильности полученного решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u'_x(0,t) = 0 + \frac{2B}{l}\left\{\frac{1}{4}(2x+0) + \sum_k \frac{(-1)^k}{\mu_k} e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \sin\mu_k x\right\}\Big|_{x=0} = 0;$$

$$u'_x(l,t) = 0 + \frac{2B}{l}\left\{\frac{1}{4}(2x+0) + \sum_k \frac{(-1)^k}{\mu_k} e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \sin\mu_k x\right\}\Big|_{x=l} =$$

$$= B \because \sin\mu_k l = 0;$$

$$u(x,0) = \frac{2l}{\pi^2} B \cdot \left\{\frac{\pi^2}{12l^2}(3x^2 - l^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos\frac{\pi k x}{l}\right\} = 0$$

(см. формулу 12 в Приложении 1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 + \frac{2B}{l}\left\{\frac{1}{2} + \sum_k (-1)^k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \cos\mu_k x\right\} -$$

$$-\frac{1}{b^2}\left[-Ab^2 + \frac{2B}{l}\left\{\frac{1}{2}b^2 + b^2 \cdot \sum_k (-1)^k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \cos\mu_k x\right\}\right] = A$$

при $x \in [0;l]$ и $t > 0$.

Проверка совпадений размерностей в формуле решения:

$$[u(x,t)] = Q,\ [\mu_k] = \frac{1}{L},\ [b^2] = \frac{L^2}{T},\ [A] = \frac{Q}{L^2},\ [B] = \frac{Q}{L},\ [\mu_k x] = 1,$$

$$[b^2\mu_k^2 t] = 1. \qquad [u(x,t)] = Q = \frac{Q}{L^2}\frac{L^2}{T}T + \frac{Q}{L}\frac{1}{L}\left\{\left(L^2 + \frac{L^2}{T}T\right) + L^2\right\} \Rightarrow Q.$$

№ 2.5 (В). Уравнение параболического типа с диссипативным членом при $\chi > 0$ (процессы с рассеянием).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \chi \cdot u. & u = u(x,t). \\ u(0,t) = A, \quad u(l,t) = B; & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \quad f(x) - \text{заданная функция.} \\ u(x,0) = f(x). & A, B, \chi, b = const > 0. \end{cases}$$

1) Приведем граничные условия к однородным с помощью замены

$$u(x,t) = v(x,t) + (B-A)\frac{x}{l} + A.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} - \chi \cdot v = \chi \cdot \left((B-A)\dfrac{x}{l} + A \right). \\ v(0,t) = v(l,t) = 0; \\ v(x,0) = f(x) - (B-A)\dfrac{x}{l} - A \equiv \widetilde{f}(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t) \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Представим $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$, где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 < 0$ – собственные значения.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \chi \cdot v =$$

$$= -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_k \left\{ T_k' + b^2 \left(\mu_k^2 + \chi \right) \cdot T_k \right\} \cdot X_k = \chi \cdot \left(\left(B - A \right) \frac{x}{l} + A \right)$$

или $\sum_k \left\{ T_k' + b^2 \left(\mu_k^2 + \chi \right) \cdot T_k \right\} \cdot X_k = -b^2 \chi \left(\left(B - A \right) \dfrac{x}{l} + A \right) = \sum_k \gamma_k X_k(x)$,

где $\gamma_k = \left(-b^2 \chi \cdot \left(\left(B - A \right) \dfrac{x}{l} + A \right), X_k \right) = \dfrac{b^2 \chi}{\mu_k} \left(B \cdot (-1)^k - A \right) \cdot \sqrt{\dfrac{2}{l}} = const.$

Тогда искомое уравнение будет

$$T_k' + p_k^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k, \text{ где } p_k^2 = b^2 \cdot \left(\mu_k^2 + \chi \right) > 0.$$

4) Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-p_k^2 t} + \frac{\gamma_k}{p_k^2}, \qquad C_k = const.$$

Теперь разложение для функции $v(x,t)$ примет вид

$$v(x,t) = \sum_k T_k(t) \cdot X_k(x) = \sum_k \left(C_k \cdot e^{-p_k^2 t} + \frac{\gamma_k}{p_k^2} \right) \cdot X_k(x).$$

5) Определение постоянной C_k из начального условия.

$$v(x,0)=\sum_k\left(C_k+\frac{\gamma_k}{p_k^2}\right)\cdot X_k(x)=\widetilde{f}(x)=\sum_k\tilde{f}_k\cdot X_k(\tau),$$

где $\widetilde{f_k}=\left(f(x)-(B-A)\dfrac{x}{l}-A,X_k\right)=$

$$=\left\{\int_0^l f(\xi)\cdot\sin\mu_k\xi\cdot d\xi+\frac{1}{\mu_k}\cdot\left[B\cdot(-1)^k-A\right]\right\}\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Тогда $C_k=\widetilde{f_k}-\dfrac{\gamma_k}{p_k^2}=const$.

6) Окончательный вид решения.

$$u(x,t)=(B-A)\frac{x}{l}+A+\sum_k\left\{\left(\widetilde{f_k}-\frac{\gamma_k}{p_k^2}\right)e^{-p_k^2t}+\frac{\gamma_k}{p_k^2}\right\}\cdot X_k(x)=(B-A)\frac{x}{l}+$$

$$+A+\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^l f(\xi)\cdot\sin\mu_k\xi d\xi+\frac{\mu_k}{\mu_k^2+\chi}\left(B\cdot(-1)^k-A\right)\right]\cdot e^{-b^2(\mu_k^2+\chi)t}+\right.$$

$$\left.+\frac{\chi}{\mu_k(\mu_k^2+\chi)}\cdot\left(B\cdot(-1)^k-A\right)\right\}\cdot\sin\mu_k x;\qquad \mu_k=\frac{k\pi}{l}>0.$$

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t)=A,\qquad u(l,t)=B;$$

$$u(x,0)=(B-A)\frac{x}{l}+A+\frac{2}{l}\cdot\sum_k\left\{\int_0^l f(\xi)\cdot\sin\mu_k\xi d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu_k}\cdot\left(B(-1)^k-A\right)\right\}\cdot\sin\mu_k x=(B-A)\frac{x}{l}+A+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_k\int_0^l f(\xi)\cdot\sin\mu_k\xi d\xi\cdot\sin\mu_k x-\left((B-A)\frac{x}{l}+A\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_k\tilde{f}_k\cdot\sin\mu_k x=f(x).$$

Проверка размерностей в ответе:

$$[\chi]=\frac{1}{L^2},\quad [b^2]=\frac{L^2}{T},\quad [A]=[B]=[f]=Q.$$

$$[u(x,t)]=Q=[A]+[B]+\frac{1}{L}\cdot\left\{Q\cdot L+\frac{1/L}{1/L^2}\cdot Q+\frac{1/L^2}{1/L^3}\cdot Q\right\}\Rightarrow Q.$$

№ 2.6 (В). Уравнение параболического типа со сложными граничными условиями (процессы с излучением на границе).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. \\ u(0,t)=A\cdot\left(1-e^{-\alpha t}\right),\quad u'_x(l,t)+\chi\cdot u(l,t)=0; \\ u(x,0)=0. \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(x,t). \\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty. \\ \alpha,b,\chi,A=const>0. \end{array}$$

1) Приведем граничные условия к однородным заменой обычного вида

$$u(x,t)=v(x,t)+\alpha(t)\cdot x+\beta(t)=v(x,t)+A\cdot\frac{1+\chi(l-x)}{1+\chi l}\left(1-e^{-\alpha t}\right).$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\alpha A}{b^2}\cdot\dfrac{1+\chi(l-x)}{1+\chi l}\cdot e^{-\alpha t}. \\ v(0,t)=0,\quad v'_x(l,t)+\chi\cdot v(l,t)=0; \\ v(x,0)=0. \end{cases}\qquad \begin{array}{l} v=v(x,t) \\ 0\le x\le l, 0\le t<\infty. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Представим $v(x,t)=\sum\limits_k T_k(t)\cdot X_k(x)$, где краевая задача $X''+\mu^2\cdot X(x)=0$ при $\lambda=-\mu^2\le 0$; $X(0)=0$, $X'(l)+\chi\cdot X(l)=0$ имеет решение $X(x)=C\cdot\sin\mu x+\tilde{C}\cdot\cos\mu x$. Здесь $X(0)=\tilde{C}=0$, поэтому $X(x)=C\cdot\sin\mu x$ при $C\ne 0$. При $x=l$ получим $X'(l)+\chi\cdot X(l)=$ $=C\cdot(\mu\cdot\cos\mu l+\chi\cdot\sin\mu l)=0$ или $tg\,\mu l=-\dfrac{\mu l}{\chi l}$. Обозначив $\mu l=z>0$, получим дисперсионное уравнение $tg\, z = -\frac{z}{\chi l}$, множество решений которого (точки пересечения прямой $y_1(z) = -\frac{z}{\mu l}$ с тангенсоидами $y_2(z) = tg\, z$) даст спектр собственных значений $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\frac{z_k}{\chi l}\right)^2 < 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Соответствующие собственные функции будут $X_k(x) = C \cdot \sin\frac{z_k x}{l}$ при $C \neq 0$, $z_k \neq 0$ и $k \in N$.

Постоянный множитель $C \neq 0$ находится из условия нормировки на единицу

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \left| C \cdot \sin\frac{z_k x}{l} \right|^2 \cdot dx = \frac{l}{2} C^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin 2z_k}{2z_k}\right) = \frac{l}{2} C^2 \cdot \left(1 - \frac{tg\, z_k / z_k}{1 + tg^2 z_k}\right) =$$

$$= C^2 \cdot \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right) = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Теперь ортонормированное множество собственных функций задачи в гильбертовом пространстве $L_2\left(0;l\middle|1\right)$ имеет вид

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{z_k x}{l} \equiv N_k \cdot \sin \mu_k x.$$

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{b^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k\right\} \cdot X_k = \frac{\alpha A}{b^2} \cdot \frac{1 + \chi(l-x)}{1 + \chi l} e^{-\alpha t};$$

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \frac{-\alpha A}{1 + \chi l} \cdot \left(1 + \chi(l-x), X_k\right) \cdot e^{-\alpha t} \equiv \gamma_k \cdot e^{-\alpha t},$$

$$\left(1 + \chi(l-x), X_k\right) = N_k \cdot \int_0^l \left(1 + \chi(l-x)\right) \cdot \sin\frac{z_k x}{l} \cdot dx =$$

$$= \frac{l}{z_k} \cdot \left[1 + \chi l - \cos z_k \cdot \left(1 + \chi l \cdot \frac{tg\, z_k}{z_k}\right)\right] \cdot N_k = \frac{l}{z_k}\left(1 + \chi l\right) \cdot N_k > 0.$$

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k \cdot e^{-\alpha t} = -\frac{\alpha A l}{z_k} \cdot N_k \cdot e^{-\alpha t}.$$

4) Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для $T_k(t)$.

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + \frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2 - \alpha} e^{-\alpha t} \qquad \text{при} \quad (b\mu_k)^2 \neq \alpha, \quad \mu_k = \frac{z_k}{l} > 0.$$

5) Определение постоянной C_k из начального условия.

$$T_k(0) = 0 \Rightarrow C_k = -\frac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2 - \alpha} = \frac{\alpha A l}{z_k} \frac{N_k}{(b\mu_k)^2 - \alpha}.$$

6) Окончательный вид решения.

$$u(x,t) = v(x,t) + A \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \cdot \frac{1 + \chi(l - x)}{1 + \chi l} = A \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \cdot \frac{1 + \chi(l - x)}{1 + \chi l} -$$

$$-\alpha A l \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\alpha t} - e^{-(b z_k)^2 t}\right) \cdot \frac{N_k / z_k}{(b\mu_k)^2 - \alpha} \cdot \sin\frac{z_k x}{l} = A \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \cdot \frac{1 + \chi(l - x)}{1 + \chi l} -$$

$$-2\alpha A l^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\left(\frac{b z_k}{l}\right)^2 t} \right) \cdot \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{z_k \cdot \left(b^2 z_k^2 - \alpha l^2\right)} \cdot \sin\frac{z_k x}{l},$$

где приближенно $z_k \cong \dfrac{\pi}{2}(2k - 1) = \mathrm{O}(k)$ при $k \to \infty$.

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = A \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right); \qquad u(x,0) = 0;$$

$$u'_x(l,t) + \chi \cdot u(l,t) = A \cdot \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \cdot \left(\frac{-\chi}{1 + \chi l} + \chi \cdot \frac{1}{1 + \chi l} \right) -$$

$$-2\alpha A \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\left(\frac{b z_k}{l}\right)^2 t} \right) \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-1} \times$$

$$\times \frac{l^2}{b^2 z_k^2 - \alpha l^2} \cdot \left(\frac{1}{z_k} \cdot \frac{z_k}{l} \cos z_k + \frac{\chi}{z_k} \cdot \sin z_k \right) = 0 \because$$

$$\because \frac{1}{l} \cos z_k + \frac{\chi}{z_k} \cdot \sin z_k = \frac{1}{l} \cos z_k \cdot \left(1 + \frac{\chi l}{z_k} \cdot tg\, z_k \right) = 0$$

при $tg\, z_k = -z_k / \chi l < 0$.

Проверка размерностей: $[A]=Q$, $[\chi]=\dfrac{1}{L}$, $[\alpha]=\dfrac{1}{T}$, $[b^2]=\dfrac{L^2}{T}$,

$$[z_k]=1, \quad \left[\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2\cdot t\right]=1.$$

$$[u(x,t)]=Q\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{T}\cdot Q\cdot L^2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{T}{1\cdot\left(L^2+L^2\right)}\cdot 1\Rightarrow Q.$$

№ 2.7 (В). Уравнение параболического типа со сложными граничными условиями.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. & & u=u(x,t).\\ u'_x(0,t)-\chi\cdot u(0,t)=0, & u(l,t)=A. & 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\\ u(x,0)=0. & & A,b,\chi=const>0.\end{cases}$$

1) Приведем граничные условия к однородным заменой обычного типа $u(x,t)=v(x,t)+A\dfrac{1+\chi x}{1+\chi l}$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t}=0.\\ v'_x(0,t)-\chi\cdot v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0. \qquad v=v(x,t).\\ v(x,0)=-A\dfrac{1+\chi x}{1+\chi l}.\end{cases}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x), \qquad \text{где}$$

$$X_k(x)=\left[\frac{l}{2}\left(1+\frac{\chi l}{z_k+\chi^2 l^2}\right)\right]^{-1/2}\cdot\sin z_k\left(1-\frac{x}{l}\right)\equiv$$

$$\equiv N_k\cdot\sin z_k\left(1-\frac{x}{l}\right) \text{ – собственные функции.}$$

Здесь собственные значения $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\frac{z_k}{l}\right)^2 < 0$ и величины z_k – множество положительных корней трансцендентного уравнения $tgz_k = -{z_k}/{\chi l} < 0$ при $k \in N$.

3–4) Вывод уравнения для функции $T_k(t)$ и его решение.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_k' + \left(b\frac{z_k}{l}\right)^2 \cdot T_k(t) = 0.$$

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t}, \qquad C_k = const.$$

5) Определение постоянной C_k из начального условия.

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t} \cdot N_k \cdot \sin z_k \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k N_k \cdot \sin z_k \left(1 - \frac{x}{l}\right) = -A\frac{1+\chi x}{1+\chi l} = \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot X_k(x),$$

где $$\gamma_k = \left(-A\frac{1+\chi x}{1+\chi l}, X_k\right) = \frac{-A \cdot N_k}{1+\chi l} \cdot \int_0^l (1+\chi x) \cdot \sin z_k \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{-A \cdot N_k}{1+\chi l} \cdot \left\{ \frac{l}{z_k} \cdot (1 - \cos z_k) + \chi \left(\frac{1}{z_k} - \frac{\sin z_k}{z_k^2} \right) \cdot l^2 \right\} =$$

$$= \frac{-A \cdot N_k}{1+\chi l} \left\{ \frac{1+\chi l}{z_k} - \frac{\cos z_k}{z_k} \cdot \left(1 + \frac{\chi l}{z_k} \cdot tgz_k \right) \right\} \cdot l = -\frac{Al}{z_k} N_k < 0.$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,t) = A\frac{1+\chi x}{1+\chi l} - 2A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-1} \cdot e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t} \cdot \sin z_k \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

7) Проверка решения задачи по условиям и по размерностям.

$$u(l,t) = A; \qquad u_x'(0,t) - \chi \cdot u(0,t) =$$

$$= \frac{A\chi}{1+\chi l} + \frac{2A}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\chi l}{z_k^2 + \chi^2 l^2}\right)^{-1} \cdot e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t} \cdot \cos z_k -$$

$$-\frac{\chi A}{1+\chi l}+2A\chi\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}\left(1+\frac{\chi l}{z_k^2+\chi^2 l^2}\right)^{-1}\cdot e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t}\cdot\sin z_k=$$

$$=2A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\chi l}{z_k^2+\chi^2 l^2}\right)^{-1}\cdot e^{-\left(\frac{b}{l}z_k\right)^2 t}\cdot\cos z_k\cdot\left(1+\frac{\chi l}{z_k}\cdot tgz_k\right)=0.$$

$$u(x,0)=A\frac{1+\chi x}{1+\chi l}-2A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}\cdot\left(1+\frac{\chi l}{z_k^2+\chi^2 l^2}\right)^{-1}\sin z_k\left(1-\frac{x}{l}\right)=0\,.$$

Равенство проверяется разложением в ряд.

Совпадение размерностей в ответе очевидно, так как

$$[A]=Q,\quad [z_k]=1,\quad [\chi x]=[\chi l]=1,\quad \left[\frac{b^2}{l^2}z_k^2\cdot t\right]=1.$$

№ 2.8 (В). Уравнение параболического типа с разрывными начальными условиями и граничными условиями второго рода (типа Неймана).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0. \\ u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=0. \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}A & \\ & \text{при} \\ 0 & \end{cases}\begin{matrix}0\le x<h \\ h<x\le l.\end{matrix}\end{cases}\qquad \begin{matrix}u=u(x,t); \\ 0\le x\le l, \\ 0\le t<\infty. \\ A,b,l,h=const>0.\end{matrix}$$

1) Граничные условия заданы уже однородными.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x)=T_0(t)\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x),$$

где $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}},\quad X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x,\quad \mu_k=\dfrac{k\pi}{l};\quad k=1,2,3,\dots\,.$

3–4) Вывод дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$ и их решение.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0-\frac{1}{b^2}T_0'\cdot X_0-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k\right\}\cdot X_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T_0'(t)=0\quad\text{и}\quad T_0(t)=C_0=const.$$

$$T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = 0 \quad \text{и} \quad T_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t}, \quad C_k = const.$$

$$u(x,t) = C_0 \cdot X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot X_k(x).$$

5) Определение постоянных C_0 и C_k из начального условия.

$$u(x,0) = C_0 \cdot X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot X_k(x) = f(x).$$

$$C_0 = \left(f, X_0\right) = \int_0^h A\frac{dx}{\sqrt{l}} = \frac{Ah}{\sqrt{l}} > 0 \quad \text{при } k = 0,$$

$$C_k = \left(f, X_k\right) = \int_0^h A \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos\mu_k x \cdot dx = \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\mu_k h \quad \text{при } k = 1,2,3,... .$$

6) Окончательный вид решения.

$$u(x,t) = A\frac{h}{l} + \frac{2A}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \frac{\sin\mu_k h}{\mu_k} \cdot \cos\mu_k x =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot \left\{\frac{\pi h}{2l} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi b}{l}k\right)^2 t} \frac{1}{k} \cdot \sin\frac{\pi kh}{l} \cdot \cos\frac{\pi kx}{l}\right\}.$$

7) Проверка правильности решения задачи по условиям и размерностям.

$$u_x'(0,t) = u'(l,t) = 0 \because \sin 0 = \sin k\pi = 0; \qquad u(x,\infty) = A\frac{h}{l} > 0.$$

$$u(x,0) = A \cdot \left\{\frac{h}{l} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[\sin\frac{\pi k}{l}(x+h) - \sin\frac{\pi k}{l}(x-h)\right]\right\} =$$

$$= A\left\{\frac{h}{l} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{l}(x+h)\right) - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{l}(x-h)\right)\right]\right\} =$$

$$= A \cdot \left(\frac{h}{l} - \frac{h}{l}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x > h;$$

$$u(x,0) = A \cdot \left\{\frac{h}{l} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left[\sin\frac{\pi k}{l}(x+h) + \sin\frac{\pi k}{l}(x-h)\right]\right\} =$$

$$= A\left\{\frac{h}{l} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{l}(x+h)\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{l}(x-h)\right)\right]\right\} = A \quad \text{\textit{при} } x < h.$$

(смотри формулу 1 в Приложении 1).

Совпадения размерностей в ответе очевидны при $[u] = [A] = Q$.

№ 2.9 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}u'_t = 0. \\ u(0,t) = At, \quad u'_x(l,t) = 0. \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t) \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) $$\begin{cases} v''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}v'_t = \dfrac{A}{b^2}. \\ v(0,t) = 0, \quad v'_x(l,t) = 0. \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u(x,t) = v(x,t) + At. \\ v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) $v(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x),$

где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$ и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2 < 0.$

3)

$$v''_{xx} - \frac{1}{b^2}v'_t = -\frac{1}{b^2}\sum_k \left\{T'_k + (b\mu_k)^2 \cdot T_k\right\}X_k = \frac{A}{b^2} \Rightarrow T'_k + (b\mu_k)^2 T_k(t) = \gamma_k,$$

где $\gamma_k = \left(-A, X_k\right) = -A\sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \int\limits_0^l \sin \mu_k x \cdot dx = -\dfrac{A}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}} < 0.$

4) $T_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + {\gamma_k}/{(b\mu_k)^2}; \qquad C_k = const.$

5) $T_k(0) = 0 \Rightarrow C_k = \dfrac{A}{b^2\mu_k^3}\sqrt{\dfrac{2}{l}} > 0.$

6) $u(x,t) = At - \dfrac{2A}{lb^2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right) \cdot \dfrac{\sin \mu_k x}{\mu_k^3}; \qquad \mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$

7) $u(0,t) = At, \quad u(x,0) = 0, \quad u'_x(l,t) = 0 \because \cos \mu_k l = 0.$

$[u(x,t)] = Q = \dfrac{Q}{T} \cdot T + \dfrac{Q}{T}\dfrac{1}{L}\dfrac{T}{L^2}L^3 \Rightarrow Q.$

№ 2.10 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}u'_t = A. \\ u'_x(0,t) = Bt, \quad u(l,t) = 0. \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

$$1) \begin{cases} v''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}v'_t = A - \dfrac{B}{b^2}(l-x). \\ v'_x(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0. \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u(x,t) = v(x,t) - Bt\cdot(l-x). \\ v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) $v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x)$, где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x$

и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2 < 0.$

3) $T'_k + (b\mu_k)^2\cdot T_k(t) = \gamma_k \equiv \Big(B\big(l-x\big) - Ab^2, X_k\Big) =$

$$= \frac{1}{\mu_k}\cdot\left(\frac{B}{\mu_k} - (-1)^k\cdot Ab^2\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

4–5) $T_k(t) = \dfrac{\gamma_k}{(b\mu_k)^2}\cdot\left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right).$

6) $u(x,t) = \dfrac{2}{lb^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\dfrac{B}{\mu_k} - (-1)^k Ab^2\right]\cdot\left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right)\dfrac{\cos\mu_k x}{\mu_k^3} - Bt(l-x);$

$$\mu_k = \frac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$$

7) $u'_x(0,t) = Bt$, $\quad u(l,t) = 0 \because \cos\mu_k l = 0$, $\quad u(x,0) = 0.$

$$[u(x,t)] = Q = \frac{1}{L}\frac{T}{L^2}\cdot\left(L\cdot\frac{Q}{LT} + \frac{Q}{L^2}\frac{L^2}{T}\right)\cdot 1\cdot L^3 + \frac{Q}{LT}\cdot LT \Rightarrow Q.$$

№ 2.11 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}u'_t = Axt. \\ u(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = 0. \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t) \\ 0 \le x \le l, \ \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1–2) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$, где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$

и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2 < 0.$

3) $T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \left(-Ab^2xt, X_k\right) = \dfrac{Ab^2t}{\mu_k^2}(-1)^{k+1} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{l}}.$

4–5) $T_k(0) = 0 \Rightarrow T_k(t) = A\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^4}\left\{\dfrac{1}{\left(b\mu_k\right)^2} \cdot \left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right) - t\right\} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{l}}.$

6) $u(x,t) = \dfrac{2A}{l} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{\left(b\mu_k\right)^2} \cdot \left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right) - t\right\} \cdot \dfrac{(-1)^k}{\mu_k^4}\sin \mu_k x;$

$\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$

7) $u(0,t) = 0$, $u'_x(l,t) = 0 \because \cos \mu_k l = 0$; $u(x,0) = 0.$

$[u(x,t)] \equiv Q = \dfrac{1}{L}\dfrac{Q}{L^3T} \cdot \left\{\dfrac{T}{L^2}L^2 \cdot 1 + T\right\} \cdot L^4 \Rightarrow Q.$

№ 2.12 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx} - \dfrac{1}{b^2}u'_t = At. \\ u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0. \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \ \ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1-2) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x) = T_0(t) \cdot X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x).$

где $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}}=const,\quad X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x.\quad \lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2\le 0.$

3) $T_0'(t)=\left(-Ab^2t,X_0\right)=-Ab^2\sqrt{l}\cdot t.$

$$T_k'+\left(b\mu_k\right)^2\cdot T_k(t)=\left(-Ab^2t\sqrt{l}\cdot X_0,X_k\right)=0.$$

4) $T_0(t)=-\dfrac{1}{2}Ab^2\sqrt{l}\cdot t^2+C_0,\qquad C_0=const.$

$$T_k(t)=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t},\qquad C_k=const.$$

5) $T_0(0)=C_0=0,\quad T_k(0)=C_k=0.$

6) $u(x,t)=T_0\cdot X_0+0=-\dfrac{1}{2}Ab^2t^2\sqrt{l}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{l}}+0=-\dfrac{1}{2}Ab^2t^2<0.$

7) $[u(x,t)]=Q=[A]\cdot\dfrac{L^2}{T}\cdot T^2=\dfrac{Q}{L^2T}\cdot L^2T\Rightarrow Q.$

№ 2.13 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx}-\dfrac{1}{b^2}u'_t=0. \\ u(0,t)=0,\quad u'_x(l,t)=0. \\ u(x,0)=Ax. \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(x,t). \\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty. \end{array}$$

1–2) $u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x),$

где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ и $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2<0.$

3–4) $T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k(t)=0;\quad T_k(t)=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t},\quad C_k=const.$

5) $T_k(0)=\left(Ax,X_k\right)=A\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\Rightarrow T_k(t)=A\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}.$

6) $u(x,t)=\dfrac{2A}{l}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot\sin\mu_k x.$

7) $u(0,t)=0,\quad u'_x(l,t)=0\because\cos\mu_k l=0.$

$$u(x,0)=\frac{2A}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot\sin\mu_k x=$$

$$=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1)=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2 x}{8l}=Ax$$

(см. формулу 15 в Приложении 1).

$$[u(x,t)]=Q=[A]\cdot\frac{1}{L}\cdot L^2=\frac{Q}{L}\cdot L\Rightarrow Q.$$

№ 2.14 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx}-\dfrac{1}{b^2}u'_t=0. \\ u(0,t)=u(l,t)=0. \\ u(x,0)=f(x)\equiv Ax\left(l-x\right). \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(x,t) \\ 0\le x\le l,\ \ 0\le t<\infty. \end{array}$$

1–2) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x)$, где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ и $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2<0.$

3–4) $T_k'+(b\mu_k)^2\cdot T_k(t)=0;\quad T_k(t)=C_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2 t},\quad C_k=const.$

5) $T_k(0)=\left(f,X_k\right)\equiv\gamma_k=A\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\int\limits_0^l x\left(l-x\right)\cdot\sin\mu_k x\cdot dx=$

$$=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int\limits_0^l\left(lx-x^2\right)\cdot d\cos\mu_k x=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left\{\left(lx-x^2\right)\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^l\cos\mu_k x\cdot\left(l-2x\right)\cdot dx\right\}=\frac{A}{\mu_k^{\,2}}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int\limits_0^l\left(l-2x\right)\cdot d\sin\mu_k x=$$

$$=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left\{0-\int\limits_0^l\sin\mu_k x\cdot(-2dx)\right\}=-\frac{2A}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l=$$

$$=\frac{2A}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(1-(-1)^k\right)=const.$$

6) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot X_k(x)=\dfrac{4A}{l}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{\mu_k^3}\cdot e^{-(b\mu_k)^2t}\cdot\sin\mu_k x=$

$=\left[k=2n+1\right]=\dfrac{8A}{l}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-(b\mu_n)^2t}\cdot\dfrac{\sin\mu_n x}{\mu_n^3},\quad$ где $\mu_n=\dfrac{\pi}{l}(2n+1)>0.$

Здесь количество членов ряда уменьшается вдвое, что удобно при численных расчетах.

7) $u(0,t)=u(l,t)=0\because\sin 0=\sin\pi(2n+1)=0.$

$$u(x,0)=\frac{8A}{l}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n x}{\mu_n^3}=\frac{8Al^2}{\pi^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^3}\sin\frac{\pi x}{l}(2n+1)=$$

$$=\frac{8Al^2}{\pi^3}\cdot\frac{\pi^3x}{8l}\left(1-\frac{x}{l}\right)=Ax(l-x)\equiv f(x).$$

$$[u(x,t)]=Q=[A]\cdot\frac{1}{L}\cdot L^3=\frac{Q}{L^2}\cdot L^2\Rightarrow Q.$$

№ 2.15 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u''_{xx}-\dfrac{1}{b^2}u'_t=0. \\ u(0,t)=At,\qquad u(l,t)=0. \\ u(x,0)=0. \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(x,t). \\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty. \end{array}$$

1) $$\begin{cases} v''_{xx}-\dfrac{1}{b^2}v'_t=\dfrac{A}{b^2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right). \\ v(0,t)=v(l,t)=0. \\ v(x,0)=0. \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u(x,t)=v(x,t)+At\cdot\left(1-\dfrac{x}{l}\right). \\ v=v(x,t). \\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty. \end{array}$$

2) $v(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x),$

где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ и $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2<0.$

3) $v''_{xx}-\dfrac{1}{b^2}v'_t=-\dfrac{1}{b^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{T'_k+(b\mu_k)^2\cdot T_k\right\}X_k=\dfrac{A}{b^2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow T_k' + (b\mu_k)^2 \cdot T_k(t) = \gamma_k, \qquad \text{где } \gamma_k = \left(-A \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right), X_k\right) =$$

$$= -A \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \sin \mu_k x \cdot dx = \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} > 0.$$

4) $T_k(t) = C_k \cdot e^{-(b\mu_k)^2 t} + \dfrac{\gamma_k}{\mu_k}; \qquad C_k = const.$

5) $T_k(0) = 0 \Rightarrow C_k = -\dfrac{\gamma_k}{\mu_k} = \dfrac{-A}{b^2\mu_k^3}\sqrt{\dfrac{2}{l}} < 0.$

$$T_k(t) = \frac{\gamma_k}{\mu_k} \cdot \left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right).$$

6) $u(x,t) = At \cdot \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) - \dfrac{2A}{lb^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-(b\mu_k)^2 t}\right) \cdot \dfrac{\sin \mu_k x}{\mu_k^3} =$

$$= At \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{A}{b^2 l} \cdot \left\{\frac{1}{6}x(l-x)(2l-x) - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\mu_k)^2 t} \cdot \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k^3}\right\}$$

при $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l} > 0$

(см. формулу 17 в Приложении 1).

7) $u(0,t) = At, \quad u(l,t) = 0 \because \sin \mu_k l = 0; \quad u(x,0) = 0.$

$$[u(x,t)] = Q = \frac{Q}{T} \cdot T \cdot 1 + \frac{Q}{T}\frac{T}{L^2 L}\left\{L^3 + L^3\right\} \Rightarrow Q.$$

№ 2.16 (С). Решение общего вида задачи для одномерного уравнения переноса (теплопроводности) без приведения граничных условий к однородному виду (к нулям).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(x,t). \\ u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x'(l,t) = \psi(t), \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t) \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) Разделение переменных и решение подобной краевой задачи с однородными граничными условиями.

$$u(x,t) = \sum_k T_k(t) \cdot X_k(x),$$

где $X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0$ при $X(0) = 0$ и $X'(l) = 0.$

Решение этой краевой задачи известно: $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}\left(2k+1\right)\right)^2 < 0$ – дискретный бесконечный спектр собственных значений; $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$ – базис (полное ортонормированное множество собственных векторов-ортов). Здесь скалярное произведение $\left(X_k, X_{k'}\right) = \int\limits_0^l X_k(\xi) \cdot \overline{X_{k'}}(\xi) d\xi = \delta_{kk'}$ – символ Кронекера ($\delta_{kk'} = 1$ при $k = k'$ и $\delta_{kk'} = 0$ при $k \neq k'$).

2) Вывод уравнения для функции $T_k(t)$, зависящей только от времени.

$$u''_{xx} - \frac{1}{b^2} \cdot u'_t = F(x,t) \Rightarrow (u''_{xx}, X_k) - \frac{1}{b^2}(u'_t, X_k) = (F, X_k).$$

Пусть $(u, X_k) \equiv \int\limits_0^l u(\xi,t) \cdot \overline{X_k}(\xi) d\xi = T_k(t),$ тогда

$$(u'_t, X_k) \equiv \int\limits_0^l u'_t(\xi,t) \cdot \overline{X_k}(\xi) d\xi = T'_k(t).$$

$$(F, X_k) \equiv \int\limits_0^l F(\xi,t) \cdot \overline{X_k}(\xi) d\xi = F_k(t).$$

$$(f, X_k) \equiv \int\limits_0^l f(\xi) \cdot \overline{X_k}(\xi) d\xi = f_k = const.$$

Воспользуемся одномерным представлением формулы Грина

$$(u''_{xx}, X_k) - (u, X''_k) \equiv \int\limits_0^l \left(u''_{\xi\xi} \cdot \overline{X_k} - u \cdot \overline{X''_k}\right) d\xi = (u'_\xi \overline{X_k} - u \overline{X'_k})\Big|_0^l =$$

$$= u'_x(l,t) \cdot \overline{X_k}(l) - u(l,t) \cdot \overline{X'_k}(l) - u'_x(0,t) \cdot \overline{X_k}(0) + u(0,t) \cdot X'_k(0) =$$

$$= \psi(t) \cdot \overline{X_k}(l) - 0 - 0 + \varphi(t) \cdot \overline{X'_k}(0) \neq 0,$$

где $\overline{X_k}(l) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot (-1)^k, \ \ \overline{X'_k}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \mu_k$ – отличны от нуля.

Если заменить $X''_k = -\mu_k^2 \cdot X_k(x)$, получим

$$(u''_{xx}, X_k) = -\mu_k^2 \cdot (u, X_k) + ... = -\mu_k^2 \cdot T_k(t) + \psi(t) \cdot \overline{X_k}(l) + \varphi(t) \cdot \overline{X'_k}(0).$$

Подставив полученные выражения в уравнение задачи, приведем его к виду

$$-\mu_k^2 \cdot T_k(t) + \psi(t) \cdot \overline{X_k}(l) + \varphi(t) \cdot \overline{X'_k}(0) - \frac{1}{b^2} T'_k(t) = F_k(t).$$

Очевидно, это выражение и является искомым дифференциальным уравнением для функции $T_k(t)$

$$T_k' + (\mu_k b)^2 \cdot T_k(t) = -b^2 \left[F_k(t) - \left(\psi(t) \cdot \overline{X_k}(l) + \varphi(t) \cdot \overline{X_k'}(0) \right) \right] \equiv -b^2 \cdot \tilde{F}_k(t).$$

Функция $\tilde{F}_k(t)$ иногда вводится для сокращения записей.

3) Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Сначала найдем решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\overset{0}{T_k'} + (\mu_k b)^2 \cdot \overset{0}{T_k}(t) = 0 \Rightarrow \overset{0}{T_k}(t) = \overset{0}{C_k} \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}, \qquad \overset{0}{C_k} = const.$$

Решение исходного неоднородного дифференциального уравнения будем искать методом вариации произвольной постоянной $T_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}$, при этом получим

$$T_k' + (\mu_k b)^2 \cdot T_k(t) = C_k'(t) \cdot e^{\cdots} - (\mu_k b)^2 \cdot C_k(t) \cdot e^{\cdots} + (\mu_k b)^2 \cdot C_k(t) \cdot e^{\cdots} =$$
$$= C_k'(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = -b^2 \cdot \tilde{F}_k(t).$$

Из последнего равенства определим значение функции $C_k(t)$

$$C_k(t) = \widetilde{C_k} - b^2 \cdot \int_0^t \tilde{F}_k(t) \cdot e^{(\mu_k b)^2 \tau} d\tau, \qquad \widetilde{C_k} = const.$$

Теперь общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения будет

$$T_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = \widetilde{C_k} \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \tilde{F}_k(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} \cdot d\tau =$$

$$= \widetilde{C_k} \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \left[F_k(\tau) - \left(\varphi(\tau) \cdot \overline{X_k'}(0) + \psi(\tau) \cdot \overline{X_k}(l) \right) \right] \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} \cdot d\tau.$$

4) Постоянную интегрирования C_k определяем из начального условия $T_k(0) = f_k = \widetilde{C_k}$, тогда искомое частное решение неоднородного уравнения для функции $T_k(t)$ примет окончательный вид

$$T_k(t) = f_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - b^2 \cdot \int_0^t \tilde{F}_k(t) \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} \cdot d\tau = f_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} -$$

$$-b^2 \cdot \int_0^t \left[F_k(\tau) - \left(\varphi(\tau) \cdot \overline{X_k{}'}(0) + \psi(\tau) \cdot \overline{X_k}(l) \right) \right] \cdot e^{-(\mu_k b)^2 (t-\tau)} \cdot d\tau.$$

5) Окончательный вид решения задачи получаем в форме ряда по собственным функциям $X_k(x)$, которые были найдены для подобной задачи с однородными граничными условиями

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f_k\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}-b^2\cdot\int\limits_0^t\left[F_k(\tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\varphi(\tau)\cdot\overline{X_k{}'}(0)+\psi(\tau)\cdot\overline{X_k}(l)\right)\right]\cdot e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\right\}\cdot X_k(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^l f(\xi)\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot X_k(x)-$$

$$-b^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^l F(\xi,\tau)\cdot\overline{X_k}(\xi)d\xi\right)\cdot e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\cdot X_k(x)+$$

$$+b^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\varphi(\tau)\cdot\overline{X_k'}(0)+\psi(\tau)\cdot\overline{X_k}(l)\right)\cdot e^{-(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\cdot X_k(x).$$

Если ввести для нашей задачи функцию Грина (источника) в виде равномерно сходящегося ряда

$$G\left(x,\xi\,\middle|\,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)$$

(здесь временной множитель $e^{-(\mu_k b)^2 t}$ называется ядром функции источника), то запись окончательного решения нашей задачи значительно упростится

$$u(x,t)=\int\limits_0^l f(\xi)\cdot G\left(x,\xi\,\middle|\,t\right)d\xi-b^2\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l F(\xi,\tau)\cdot G\left(x,\xi\,\middle|\,t-\tau\right)d\xi+$$

$$+b^2\cdot\int\limits_0^t\left(\varphi(\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}G\left(x,0\,\middle|\,t-\tau\right)+\psi(\tau)\cdot G\left(x,l\,\middle|\,t-\tau\right)\right)d\tau.$$

Здесь частные значения функции Грина равны $(\theta=t-\tau>0)$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G\left(x,0\,\middle|\,\theta\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2\theta}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k'}(0)\qquad\text{при } X_k'(0)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\mu_k>0;$$

$$G\left(x,l\,\middle|\,\theta\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2\theta}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(l)\qquad\text{при } X_k(l)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^k\neq 0.$$

Очевидно, подобные общие формулы можно получить и при решении задач в других ортогональных системах координат для уравнения переноса на плоскости или в пространстве. При этом в решении получатся кратные интегралы по координатам и кратные ряды по собственным функциям вида $\Phi_{kn}(x,y)=X_k(x)\cdot Y_n(y)$ (см. ниже темы 5, 6 и 7).

6) Проверка полученной формулы решения по всем условиям задачи и по размерностям.

На концах рассматриваемой области $0\le x\le l$ входящий в функцию Грина множитель $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ при $\mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)>0$, определенный для однородных граничных условий $X_k(0)=0$ и $X'_k(l)=0$, дает нулевой результат $G\left(0,\xi\middle|t\right)=0$ и $G'_x\left(l,\xi\middle|t\right)=0$ (аналогично для $G\left(x,0\middle|\theta\right)$ и $G'_\xi\left(x,l\middle|\theta\right)$). Поэтому полученная формула решения не может удовлетворять заданным неоднородным граничным условиям. Однако эта формула является решением нашей задачи везде внутри рассматриваемого интервала $0<x<l$, а граничные значения принимаются из заданных условий.

При начальном значении $t=0$ в разрешающей формуле остается только первое слагаемое

$u(x,0)=\int\limits_0^l f(\xi)\cdot G\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi=\int\limits_0^l f(\xi)\cdot\delta(\xi-x)\,d\xi==f(x)$ – значит наше начальное условие выполняется. Здесь использована известная формула $G\left(x,\xi\middle|0\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)=\delta(\xi-x)$, где $\delta(\alpha)$ – функция Дирака, для которой $\delta(0)=\infty$, $\delta(\alpha)=0$ при $\alpha\neq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cdot\delta(\alpha-a)d\alpha=\varphi(a)$ (см. Приложеие 2).

Проверим, что полученный ответ $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_0^l f(\xi)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)G\left(x,\xi\middle|t\right)d\xi-b^2\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l F(\xi,\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi+\int\limits_0^l F(\xi,t)\cdot G\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi+$$

$$+b^2\cdot\int\limits_0^t\left[\varphi(\tau)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)G'_\xi\left(x,0\middle|t-\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\psi(t)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)G\left(x,l\middle|t-\tau\right)\right]\cdot d\tau-$$

$$-\left(\varphi(t)\cdot G'_\xi\left(x,0\middle|0\right)+\psi(t)\cdot G\left(x,l\middle|0\right)\right).$$

Здесь использована известная формула Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(\tau,t)d\tau=\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(\tau,t)d\tau+f\left(\beta(t),t\right)\cdot\beta'(t)-f\left(\alpha(t),t\right)\cdot\alpha'(t).$$

Затем для упрощения полученного выше выражения воспользуемся известными соотношениями из теории функции Грина и δ-функции Дирака

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)G\left(x,\xi\middle|t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mu_k^2\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot X_k(x)\overline{X_k}(\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b^2}\left(-\mu_k^2 b^2\right)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot X_k(x)\overline{X_k}(\xi)\right)=0.$$

Аналогичные результаты получаются и для функций $G'_\xi\left(x,0\middle|\theta\right)$ и $G\left(x,l\middle|\theta\right)$ при $\theta\equiv t-\tau>0$.

При значениях $t=0$ или $\theta=t-\tau=0$ полученные для функции Грина ряды сводятся к δ-функциям Дирака:

$$G\left(x,\xi\middle|0\right)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)=\delta(\xi-x);$$

т. е. полученный расходящийся ряд обращается в бесконечность только для одинаковых значений аргументов $x=\xi$ (там члены ряда равны модулям $\left\|X_k(x)\right\|^2>0$), но этот ряд равен нулю при всех различных значениях $x\neq\xi$. Аналогично можно получить значения $G\left(x,l\middle|0\right)=\delta(x-l)$ и $G'_\xi\left(x,0\middle|0\right)=\delta'(x)$ (здесь известна производная $\delta'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\delta(x)$).

Таким образом, правая часть уравнения приводится к требуемому выражению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^l F(\xi,t)\cdot G\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi=\int_0^l F(\xi,t)\cdot\delta(\xi-x)d\xi=F(x,t).$$

Значит, полученная нами общая формула решения задачи $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению задачи и всем поставленным условиям в декартовой системе координат Oxt только внутри полуполосы вида $D=\left\{0<x<l,0\leq t<\infty\right\}$, что и требовалось доказать.

Примем размерности величин

$$\left[u(x,t)\right]=Q,\ [F]=Q/L^2,\ [\varphi]=[f]=Q,\ [\psi]=Q/L,$$

$$[b^2]=L^2/T,\ [\mu_k]=1/L,\ [b^2\mu_k^2 t]=\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}=1,\ [X_k]=1/\sqrt{L},\ [G]=1/L.$$

Тогда

$$\left[u(x,t)\right]\equiv Q=Q\cdot\frac{1}{L}\cdot L+\frac{L^2}{T}\cdot T\cdot\frac{Q}{L^2}\cdot\frac{1}{L}\cdot L+\frac{L^2}{T}\left(Q\cdot\frac{1}{L^2}+\frac{Q}{L}\cdot\frac{1}{L}\right)\cdot T\Rightarrow Q.$$

Значит все размерности совпадают.

7) Найдем решение той же задачи обычным методом предварительного приведения граничных условий задачи к однородным.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(x,t). \\ u(0,t) = \varphi(t), \quad u'_x(l,t) = \psi(t), \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty. \end{array}$$

Если сделать замену искомой функции

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(t)\cdot x + \varphi(t),$$

то новая задача имеет однородные граничные условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \widetilde{F}(x,t) \equiv F(x,t) + \dfrac{1}{b^2}\big(\psi'(t)\cdot x + \varphi'(t)\big). \\ v(0,t) = 0, \quad v'_x(l,t) = 0, \\ v(x,0) = \widetilde{f}(x) \equiv f(x) - \big(\psi(0)\cdot x + \varphi(0)\big). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t) \\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

Будем искать решение новой задачи в виде разложения $v(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x)$ по собственным функциям $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot \sin \mu_k x$, и $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}\big(2k+1\big) > 0$; здесь требуется $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$.

Тогда для функции от времени $T_k(t)$ получим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$T'_k + \big(b\mu_k\big)^2 \cdot T_k(t) = -b^2 \cdot \widetilde{F}_k(t) \ne 0,$$

где $\quad \widetilde{F}_k(t) = \big(\widetilde{F}, X_k\big) = \int\limits_0^l \left[F(\xi,t) + \dfrac{1}{b^2}\big(\psi'(t)\cdot\xi + \varphi'(t)\big)\right]\cdot \overline{X_k}(\xi)d\xi$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\overset{0}{T'_k} + \big(b\mu_k\big)^2 \cdot \overset{0}{T_k}(t) = 0$ равно $\overset{0}{T_k}(t) = \overset{0}{C_k} \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}$ при $\overset{0}{C_k} = const$. Теперь общее решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольной постоянной $C_k(t) \ne const$; из уравнения получим $C'_k(t) = -b^2 \cdot \widetilde{F_k}(t)\cdot e^{(\mu_k b)^2 t}$ или $C_k(t) = C_k - b^2 \cdot \int\limits_0^t \widetilde{F_k}(\tau)\cdot e^{(\mu_k b)^2\tau}\cdot d\tau$ при $C_k = const$.

Поэтому общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$T_k(t) = C_k(t)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} = C_k \cdot e^{-(\mu_k b)^2 t} - b^2 \cdot \int\limits_0^t \widetilde{F_k}(\tau)\cdot e^{(\mu_k b)^2 (t-\tau)}\cdot d\tau .$$

Используя начальное условие $v(x,0)=\widetilde{f}(x)$, можно записать $T_k(0)=C_k-b^2\cdot 0=\widetilde{f}_k$, где $\widetilde{f}_k=\left(\widetilde{f},X_k\right)=\int\limits_0^l \widetilde{f}(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)d\xi=const$, и получить искомое частное решение уравнения

$$T_k(t)=\widetilde{f}_k\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}-b^2\cdot\int\limits_0^t \widetilde{F_k}(\tau)\cdot e^{(\mu_k b)^2(t-\tau)}\cdot d\tau.$$

Теперь можно получить решение новой задачи для функции $v(x,t)$ и ввести для упрощения записей функцию Грина (источника):

$$v(x,t)=\sum_k\left\{\left(\widetilde{f},X_k\right)\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}-b^2\cdot\int\limits_0^t\left(\widetilde{F_k},X_k\right)\cdot e^{(\mu_k b)^2(t-\tau)}\cdot d\tau\right\}\cdot X_k(x)=$$

$$=\sum_k\left\{\int\limits_0^l \widetilde{f}(\xi)\cdot\overline{X}_k(\xi)d\xi\cdot e^{-(\mu_k b)^2 t}\cdot X_k(x)-\right.$$

$$\left.-b^2\cdot\int\limits_0^t \widetilde{F}\left(\xi,\tau\right)\cdot\overline{X}_k(\xi)d\xi\cdot e^{(\mu_k b)^2(t-\tau)}d\tau\cdot X_k(x)\right\}=$$

$$=\int\limits_0^l \widetilde{f}(\xi)\cdot G\left(x,\xi\middle|t\right)d\xi-b^2\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \widetilde{F}(\xi,\tau)\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi,$$

где функция Грина (источника) равна

$$G\left(x,\xi\middle|\theta\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\mu_k b)^2\theta}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X}_k(\xi)\ \text{ при } \theta=t\vee(t-\tau).$$

Наконец, можно записать и окончательный вид искомой функции $u(x,t)$: получим

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(t)\cdot x+\varphi(t)=\psi(t)\cdot x+\varphi(t)+$$

$$+\int\limits_0^l\left[f(\xi)-\left(\psi(0)\cdot\xi+\varphi(0)\right)\right]\cdot G\left(x,\xi\middle|t\right)d\xi-$$

$$-b^2\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\left[F(\xi,\tau)-\frac{1}{b^2}\left(\psi'(\tau)\cdot\xi+\varphi'(\tau)\right)\right]\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi.$$

Учитывая свойства функции Грина $G\left(x,\xi\middle|0\right)=\delta(\xi-x)-$ дельта-функция Дирака и значения на границах $G\left(0,\xi\middle|\theta\right)=0$, $G'_x\left(l,\xi\middle|\theta\right)=0$ при $\theta=t\vee(t-\tau)$, можно проверить, что полученное выражение для функции $u(x,t)$ удовлетворяет всем заданным условиям и уравнению задачи. Размерности всех величин тоже совпадают.

ТЕМА 3.

Уравнения колебаний

Решение одномерных задач гиперболического типа (уравнения волновое, колебаний струны, линии электропередачи без потерь и др.) методом разложения по собственным функциям.

Основные вопросы. Постановка задачи для уравнения колебаний и ее решение методом разложения по собственным функциям (разделения переменных). Использование функции источника Грина. Физические задачи, приводящие к волновому уравнению.

Литература: [1] – гл. 2, § 3 (1, 2, 4–6, 9). [2] – гл. 10, § 1–5, гл. 11 § 1–3, гл. 12, § 2. [5] – гл. 8, § 3 № 38, 42, 64, 67. [6] – гл. 4, § 1–5.

Задания: [7] – № 87, 88, 90, 92, 93, 95, 96. [8] – гл. 3. № 23, 33, 35, 45.

№ 3.1 (А). Задача общего вида для неоднородного волнового уравнения с однородными граничными условиями. Определение функции Грина (источника).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t). \\ u(0,t) = u'_x(l,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = g(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) Граничные условия задачи однородны (здесь граничные условия смешанные – третьего рода).

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Искомую функцию двух переменных представим в виде ряда $u(x,t) = \sum\limits_k T_k(t) \cdot X_k(x)$ произведений двух функций одного переменного каждая. Это разложение в гильбертовом пространстве по собственным функциям краевой задачи вида

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \qquad \lambda = -\mu^2 < 0 - \text{собственные числа (значения).}$$

Решение ее уже получено выше в задаче № 1.5 (А) (табл. 1), где найдены векторы ортонормированного базиса $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x$ и собственные значения $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2<0$ при $k\in Z_0$. Здесь скалярное произведение $\left(X_k,X_{k'}\right)=\int\limits_0^l X_k(x)\cdot\overline{X}_{k'}(x)dx==\dfrac{2}{l}\cdot\int\limits_0^l\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_{k'}x\cdot dx=\delta_{kk'}$ и дисперсионное уравнение $\cos\mu_k l=0$.

Для сходимости ряда функции $u(x,t)$ необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty}T_k(t)=0$.

3) Вывод уравнения для функции времени $T_k(t)$.

Подставим ряд функции $u(x,t)$ в уравнение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_k\left\{T_k\cdot X_k''-\frac{1}{a^2}\cdot T_k''\cdot X_k\right\}=\left[X''=-\mu_k^2\cdot X_k\right]=$$

$$=\frac{-1}{a^2}\cdot\sum_k\left\{T_k''+(a\mu_k)^2\cdot T_k\right\}\cdot X_k=F(x,t).$$

Перепишем далее равенство в виде

$$\sum_k\left\{T_k''+(a\mu_k)^2\cdot T_k\right\}\cdot X_k=-a^2\cdot F(x,t)\equiv\sum_k\gamma_k(t)\cdot X_k(x),$$

где коэффициент разложения правой части

$$\gamma_k(t)=\left(-a^2F,X_k\right)=-a^2\cdot\int\limits_0^l F(\xi,t)\cdot\overline{X_k}(\xi)d\xi.$$

Приравняв коэффициенты разложений с обеих сторон равенства, получим уравнение для функции от времени

$$T_k''+(a\mu_k)^2\cdot T_k=\gamma_k(t).$$

4) Решение уравнения для функции $T_k(t)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\overset{0}{T}_k(t)=C_k\cdot\cos\mu_k at+\tilde{C}_k\cdot\sin\mu_k at,$$

где $C_k,\tilde{C}_k=const$ – постоянные интегрирования.

Частное решение нашего уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных

$$\tilde{T}_k(t)=C_k(t)\cdot\cos\mu_k at+\tilde{C}_k(t)\cdot\sin\mu_k at,$$

где $C_k(t)$ и $\tilde{C}_k(t)$ – искомые функции, для определения которых составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_k'(t)\cdot\cos\mu_k at + \tilde{C}_k'(t)\cdot\sin\mu_k at = 0 \\ C_k'(t)\cdot\sin\mu_k at - \tilde{C}_k'(t)\cdot\cos\mu_k at = -\gamma_k(t)/\mu_k a \equiv \tilde{\gamma}_k(t). \end{cases}$$

Определитель этой системы (здесь он является и вронскианом) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\mu_k at & \sin\mu_k at \\ \sin\mu_k at & -\cos\mu_k at \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Использовав метод Крамера, найдем решение системы уравнений

$$C_k'(t) = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} 0 & \sin\mu_k at \\ \tilde{\gamma}_k & -\cos\mu_k at \end{vmatrix} = +\tilde{\gamma}_k\cdot\sin\mu_k at = -\gamma_k(t)\cdot\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a},$$

$$\tilde{C}_k'(t) = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} \cos\mu_k at & 0 \\ \sin\mu_k at & \tilde{\gamma}_k \end{vmatrix} = -\tilde{\gamma}_k\cdot\cos\mu_k at = +\gamma_k(t)\cdot\frac{\cos\mu_k at}{\mu_k a}.$$

Интегралы от этих коэффициентов равны

$$C_k(t) = C_k - \int_0^t \gamma_k(\tau)\cdot\frac{\sin\mu_k a\tau}{\mu_k a}\cdot d\tau,$$

$$\tilde{C}_k(t) = \tilde{C}_k + \int_0^t \gamma_k(\tau)\cdot\frac{\cos\mu_k a\tau}{\mu_k a}\cdot d\tau;\quad C_k, \tilde{C}_k = const.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения для функции $T_k(t)$ можно представить

$$T_k(t) = \overset{0}{T}_k(t) + \tilde{T}_k(t) = C_k\cos\mu_k at + \tilde{C}_k\sin\mu_k at + \int_0^t \gamma_k(\tau)\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}d\tau,$$

тогда решение рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_k T_k(t)\cdot X_k(x) =$$

$$= \sum_k \left\{ C_k\cdot\cos\mu_k at + \tilde{C}_k\cdot\sin\mu_k at + \int_0^t \gamma_k(\tau)\cdot\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\cdot d\tau \right\}\cdot X_k(x).$$

5) Определение произвольных постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий задачи.

$$u(x,0) = \sum_k T_k(0)\cdot X_k(x) = \sum_k \{C_k + 0\}\cdot X_k(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k = T_k(0) = (f, X_k) = \int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)d\xi;$$

$$u'_t(x,0)=\sum_k T'_k(0)\cdot X_k(x)=\sum_k\left\{\tilde{C}_k\cdot\mu_k a+0\right\}\cdot X_k(x)=g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\tilde{C}_k\cdot\mu_k a=T'_k(0)=(g,X_k)=\int_0^l g(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)d\xi.$$

В последнем случае использовано очевидное равенство

$$\left.\frac{d}{dt}\int_0^t\gamma_k(\tau)\cdot\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\cdot d\tau\right|_{t=0}=$$

$$=\left.\left[\int_0^t\gamma_k(\tau)\cdot\cos\mu_k a(t-\tau)\cdot d\tau+\gamma_k(t)\cdot\frac{\sin\mu_k a(t-t)}{\mu_k a}-0\right]\right|_{t=0}=0.$$

6) Окончательный вид решения задачи и ее функция Грина (источника).

$$u(x,t)=\sum_k T_k(t)\cdot X_k(x)=\sum_k\left\{\int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\cdot\cos\mu_k at+\right.$$

$$\left.+\int_0^l g(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\cdot\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}+\int_0^t\gamma_k(\tau)\cdot\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\cdot d\tau\right\}\cdot X_k(x)=$$

$$=\sum_k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\right)\cdot\int_0^l f(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\cdot X_k(x)+$$

$$+\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot\int_0^l g(\xi)\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\cdot X_k(x)-$$

$$-a^2\cdot\sum_k\int_0^t\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\left(\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot d\xi\right)\cdot d\tau\cdot X_k(x)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\cdot\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot X_k(x)\right)\cdot d\xi+$$

$$+\int_0^l g(\xi)\cdot\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot X_k(x)\right)\cdot d\xi-$$

$$-a^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\cdot\overline{X_k}(\xi)\cdot X_k(x)\right)\cdot d\xi=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\cdot G\left(x,\xi\middle|t\right)\cdot d\xi+\int_0^l g(\xi)\cdot G\left(x,\xi\middle|t\right)\cdot d\xi-$$

$$-a^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)\cdot d\xi,$$

где функция Грина (источника) нашей задачи гиперболического типа равна

$$G\left(x,\xi\middle|t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi),\qquad \mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0\,.$$

Очевидно, функции Грина для уравнений параболического и гиперболического типа отличаются только ядром; однако свойства этих функций источника отличаются значительно: $G\left(x,\xi\middle|t\right)=G\left(\xi,x\middle|t\right)$, $G\left(x,\xi\middle|0\right)=0,\quad G_t'\left(x,\xi\middle|0\right)=\delta(x-\xi),\quad G_{tt}''\left(x,\xi\middle|0\right)=0$ и др.

7) Проверка по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t)=0\because X_k(0)=0;\qquad u_x'(l,t)=0\because X_k'(l)=0.$$

$$u(x,0)=\int_0^l f(\xi)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi+\int_0^l g(\xi)\cdot G\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi-$$

$$-a^2\cdot\int_0^0 d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G\left(x,\xi\middle|0-\tau\right)d\xi=\int_0^l f(\xi)\cdot\delta(\xi-x)d\xi+0-0=f(x).$$

$$u_t'(x,0)=\int_0^l f(\xi)\cdot G_{tt}''\left(x,\xi\middle|0\right)+\int_0^l g(\xi)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|0\right)d\xi-$$

$$-a^2\cdot\left.\left[\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi+\int_0^l F(\xi,t)\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-0\right]\right|_{t=0}=$$

$$=0+\int_0^l g(\xi)\cdot\delta(\xi-x)d\xi-0=g(x).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\cdot\left(G_{xx}''-\frac{1}{a^2}G_{tt}''\right)d\xi+\int_0^l g(\xi)\cdot\left(G_{xx}''-\frac{1}{a^2}G_{tt}''\right)d\xi-$$

$$-a^2\cdot\left[\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_{xx}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi\right]=$$

$$=0+0-a^2\cdot\left[\ldots-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^l F(\xi,\tau)G\left(x,\xi\middle|t-t\right)d\xi-0\right)\right]=-a^2\left[\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_{xx}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi+0\right)\Bigg]=$$

$$=-a^2\cdot\left[\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_{xx}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{1}{a^2}\left(\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_{tt}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi+\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot G_t'\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-0\right)\right]=$$

$$=-a^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\cdot\left(G_{xx}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)d\xi-\frac{1}{a^2}G_{tt}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)\right)d\xi+$$

$$+\int_0^l F(\xi,t)\cdot\delta(\xi-x)d\xi=-a^2\cdot 0+F(x,t)=F(x,t).$$

Здесь использованы некоторые свойства функции Грина и ее связи с δ-функцией Дирака

$$G\left(x,\xi\middle|0\right)=0,\qquad G_t'\left(x,\xi\middle|0\right)=\delta(x-\xi);$$

$$G_{xx}''\left(x,\xi\middle|t\right)-\frac{1}{a^2}G_{tt}''\left(x,\xi\middle|t-\tau\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)-$$

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)=\sum_k\frac{1}{\mu_k a}\Big[\sin\mu_k at\cdot X_k''(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)-$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\left(\sin\mu_k at\right)''\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)\right]=\sum_k\frac{1}{\mu_k a}\Big[-\mu_k^2\cdot\sin\mu_k at\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)-$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\left(-\mu_k^2a^2\cdot\sin\mu_k at\right)\cdot X_k(x)\cdot\overline{X_k}(\xi)\right]\equiv 0.$$

В условиях задачи очевидны размерности

$$\left[u\left(x,t\right)\right]=W,\quad [x]=[\xi]=L,\quad [t]=[\tau]=T,\quad [\mu_k]=\frac{1}{L},$$

$$[F]=W/L^2,\quad [f]=W,\quad [g]=W/T,\quad [X_k]=1/\sqrt{L}.$$

Поэтому $[a]=\frac{L}{T}$, $[\mu_k x]=[\mu_k\xi]=1$, $[\mu_k at]=1$, $\quad [G]=\left[\frac{1}{\mu_k a}\frac{1}{L}\right]=T/L.$

Тогда все размерности в ответе совпадают:

$$[u]=\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f\cdot Gd\xi\right]+\left[\int_0^l g\cdot Gd\xi\right]+\left[a^2\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l FGd\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot W\cdot\frac{T}{L}L+\frac{W}{T}\cdot\frac{T}{L}L+\frac{L^2}{T^2}T\cdot\frac{W}{L^2}\cdot\frac{T}{L}L\Rightarrow W.$$

8) Решение волнового уравнения с затуханием.

Распространение напряжения $u(x,t)$ или силы тока $i(x,t)$ вдоль длинной двухпроводной линии электропередачи описывается телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(CR+GL)\frac{\partial u}{\partial t}-RG\cdot u(x,t)=F(x,t),$$

где постоянные коэффициенты R, L, C и G – соответственно, погонные значения сопротивления, индуктивности, емкости и утечки (на единицу длины линии), а $F(x,t)$ – характеризует заданные источники. Наличие в уравнении колебаний первой производной по времени, когда величины R и $G\neq 0$, физически означает процесс с потерями и затухание волн. Замена в уравнении искомой функции $u(x,t)=v(x,t)\cdot e^{\alpha t}$ при $\alpha=const$ с последующим сокращением экспоненты дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-(RC+LG+2\alpha LC)\frac{\partial v}{\partial t}-\left(\alpha^2 LC+\alpha(RC+LG)+RG\right)\cdot v(x,t)=$$

$$=F(x,t)\cdot e^{-\alpha t}.$$

Приравняв здесь нулю коэффициенты при первой производной по времени, получим $\alpha=-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)<0$; при таком значении α уравнение значительно упрощается

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\chi^2\cdot v(x,t)=F(x,t)\cdot e^{-\alpha t},$$

где $\chi=|RC-LG|/2\sqrt{LC}>0$ – диссипативный коэффициент, а $LC{=}1/a^2>0$ (a – скорость распространения волн вдоль линии электропередачи).

При нашей замене $u(x,t)=v(x,t)\cdot e^{\alpha t}$ приходится менять и условия задачи. Очевидно, при этом не изменяются оба граничных условия любого рода и начальное положение $u(x,0)=v(x,0)=f(x)$, но второе начальное условие (начальная скорость) примет вид $u_t'(x,0)=v_t'(x,0)+\alpha\cdot v(x,0)=\;=g(x)$.

№ 3.2 (А). Подробное решение задачи гиперболического типа (волновое уравнение, колебания и др.) методом разделения переменных (разложения по собственным функциям) и с использованием функции Грина (источника).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A. & u = u(x,t). \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = Bt; & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \\ u(x,0) = u_t'(x,0) = 0. & A, B, a, l = const > 0. \end{cases}$$

Граничные условия задачи первого рода (типа Дирихле). Эти условия можно привести к однородным заменой искомой функции $u(x,t) = \;= v(x,t) + \alpha(t)\cdot x + \beta(t)$; подстановка в граничные и начальные условия дает

$$u(0,t) = v(0,t) + \beta(t) = 0 \Rightarrow v(0,t) = 0 \qquad \text{при} \quad \beta(t) = 0;$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \alpha(t)l = Bt \Rightarrow v(l,t) = 0 \qquad \text{при} \quad \alpha(t) = Bt/l.$$

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \qquad u_t'(x,0) = v_t'(x,0) + B\frac{x}{l}t \Rightarrow v_t'(x,0) = -B\frac{x}{l}.$$

Таким образом, $u(x,t) = v(x,t) + B\dfrac{x}{l}t$, и для новой функции $v(x,t)$ получим задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A. & v = v(x,t) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0; & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \\ v(x,0) = 0, \quad v_t'(x,0) = -B\dfrac{x}{l}. & \end{cases}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Частное решение будем искать в виде ряда $v(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)\cdot X_k(x)$, где собственная функция $X_k(x)$ находится из краевой задачи

$$X'' + \mu^2 \cdot X(x) = 0; \quad X(0) = X(l) = 0; \quad \lambda = -\mu^2 < 0.$$

Воспользовавшись данными табл. 1, найдем $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot \sin \mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2 < 0$ при $k \in N$ – собственные значения. Множество функций $X_k(x)$ составляет ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2\left(0,l\middle|1\right)$ со скалярным произведением

$$\left(X_k, X_{k'}\right) = \int_0^l X_k(x)\cdot\overline{X_{k'}}(x)dx = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l \sin\mu_k x\cdot\sin\mu_{k'}x\cdot dx = \delta_{kk'},$$

где $\delta_{kk'}$ – символ Кронекера. Для сходимости ряда по собственным функциям необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0.$

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Ряд для функции $v(x,t)$ подставим в уравнение задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_k \left\{-T_k\cdot\mu_k^2 X_k - \frac{1}{a^2}T_k''\cdot X_k\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\sum_k\left\{T_k'' + (\mu_k a)^2\cdot T_k\right\}X_k = A$$

или $\sum\limits_k\left\{T_k'' + (\mu_k a)^2\cdot T_k\right\}X_k = -a^2 A = \sum\limits_k \gamma_k(t)\cdot X_k(x)$,

где $\gamma(t) = \left(-a^2 A, X_k\right) = -a^2 A\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int\limits_0^l \sin\mu_k x\cdot dx = -\frac{a^2 A}{\mu_k}\left(1-(-1)^k\right) = const.$

Приравняв коэффициенты разложений (координаты), найдем

$$T_k'' + (\mu_k a)^2\cdot T_k(t) = \gamma_k = -\frac{a^2 A}{\mu_k}\left(1-(-1)^k\right) = const.$$

4) Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами очевидно есть

$\overset{0}{T}_k(t) = C_k\cdot\cos\mu_k at + \tilde{C}_k\cdot\sin\mu_k at,$ где C_k и $\tilde{C}_k = const$. Легко находится и частное решение, соответствующее заданной постоянной неоднородности

$$\tilde{T}_k(t) = \frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2} = -\frac{A}{\mu_k^3}\left(1-(-1)^k\right) = const.$$

Поэтому общее решение линейного неоднородного уравнения равно

$$T_k(t) = \overset{0}{T}_k(t) + \tilde{T}_k(t) = C_k\cdot\cos\mu_k at + \tilde{C}_k\cdot\sin\mu_k at + \frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2};$$

здесь $\mu_k a = \omega_k$ имеет физический смысл частоты колебаний.

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий задачи. Запишем общий вид решения задачи

$$v(x,t)=\sum_k T_k(t)\cdot X_k(x)=\sum_k\left\{C_k\cdot\cos\mu_k at+\tilde{C}_k\sin\mu_k at+\frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2}\right\}X_k(x)$$

и наложим начальные условия, тогда

$$v(x,0)=\sum_k\left\{C_k+\frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2}\right\}\cdot X_k(x)=0\Rightarrow C_k=-\frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2};$$

$$v_t'(x,0)=\sum_k\tilde{C}_k\cdot\mu_k a\cdot X_k(x)=-B\frac{x}{l}\Rightarrow\tilde{C}_k\cdot\mu_k a=\left(-B\frac{x}{l},X_k(x)\right)=$$

$$=-\frac{B}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l x\cdot\sin\mu_k x\cdot dx=\frac{B}{\mu_k l}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left\{x\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l-\int_0^l\cos\mu_k x\cdot dx\right\}=$$

$$=\frac{B}{\mu_k l}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left\{l\cdot\cos\mu_k l-\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k}\Big|_0^l\right\}=\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^k,$$

откуда $\tilde{C}_k=\dfrac{B}{\mu_k{}^2 a}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot(-1)^k$.

Так как все величины C_k, $\tilde{C}_k$ и γ_k обращаются в нуль при $k\to\infty$, то, очевидно, выполняется необходимое условие сходимости разложения для функции $v(x,t)$.

6) Окончательный вид решения и его упрощение.

Подставим значения постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ в ряд для функции $v(x,t)$ и получим

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2}\cos\mu_k at+\frac{(-1)^k\cdot B}{\mu_k^2 a}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k at+\frac{\gamma_k}{(\mu_k a)^2}\right\}X_k(x)=$$

$$=\frac{2}{l}\left\{\frac{B}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k at\cdot\sin\mu_k x-A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k^3}\left(1-\cos\mu_k at\right)\cdot\sin\mu_k x\right\},$$

здесь использовано значение $\gamma_k=-\dfrac{a^2 A}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\left(1-(-1)^k\right)$.

Для получения окончательного вида решения вернемся к искомой функции $u(x,t)=v(x,t)+B\dfrac{x}{l}t$ и упростим последнюю сумму заменой индекса $k=2n+1$ (тогда $\mu_k=\dfrac{\pi}{l}k\Rightarrow\mu_n=\dfrac{\pi}{l}(2n+1)$)

$$u(x,t) = B\cdot\left\{\frac{x}{l}t + \frac{2}{al}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2 a}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k at\right\} -$$

$$-\frac{4A}{l}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3}\left(1-\cos\mu_n at\right)\cdot\sin\mu_n x.$$

Если еще воспользоваться известной формулой суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3}\sin\mu_n x = \frac{1}{8}xl^2\left(1-\frac{x}{l}\right) \qquad \text{при } 0<x<l \qquad (*)$$

(см. Приложение № 1, формула № 21), то последнее выражение для решения значительно упрощается

$$u(x,t) = B\cdot\left\{\frac{x}{l}t + \frac{2}{al}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k at\right\} -$$

$$-A\cdot\left\{\frac{1}{2}x\left(l-x\right) - \frac{4}{l}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3}\sin\mu_n x\cdot\cos\mu_n at\right\}.$$

Полученные ряды сходятся правильно (абсолютно и равномерно) не медленнее, чем $O(\frac{1}{k^2})$ при $k,n\to\infty$ и $0\le x\le l$, $0\le t<\infty$.

7) После приведения граничных условий к однородным для решения задачи можно использовать и общую формулу, выражающуюся через функцию Грина. Очевидно, в нашем случае эта функция равна

$$G(x,\xi\,|\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cdot X_k(x)\cdot\bar{X}_k(\xi),$$

где собственные функции $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x$ и $\mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0$. Тогда искомое решение

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)G(x,\xi\,|\,t)\,d\xi + \int_0^l g(\xi)G(x,\xi\,|\,t)\,d\xi -$$

$$-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)G(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi;$$

здесь по условиям нашей задачи $f(\xi) = v(\xi,0) = 0$,

$$g(\xi) = v_t'(\xi,0) = -\frac{B\xi}{l} \text{ и } F(\xi,\tau) = A.$$

Определение функции $v(x,t)$ теперь сводится к квадратурам

$$I_g(B)=\int_o^l g(\xi)\cdot G(x,\xi\,|\,t)d\xi=\sum_k \frac{\sin\mu_k at}{\mu_k}X_k(x)\int_0^l X_k(\xi)\cdot(-\frac{B\xi}{l})\cdot d\xi=$$

$$=-\frac{2B}{l}\sum_k \frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\sin\mu_k x\cdot\int_0^l \sin\mu_k\xi\cdot\xi d\xi=\frac{2B}{al}\sum_k\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cos\mu_k x\cdot\sin\mu_k at.$$

Здесь для вычисления интеграла проделано

$$\int_0^l \xi\sin\mu_k\xi\,d\xi=\int_0^l \xi\,d\frac{\cos\mu_k\xi}{-\mu_k}=\frac{-1}{\mu_k}\left(\xi\cos\mu_k\xi\Big|_0^l-\int_0^l\cos\mu_k\xi\,d\xi\right)=$$

$$=\frac{-1}{\mu_k}\left(l\cos k\pi-\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k\xi\Big|_0^l\right)=\frac{l}{\mu_k}(-1)^{k+1}.$$

$$I_F(A)=\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,t)G(x,\xi\,|\,t-\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_k X_k\;A\int_0^t \sin\mu_k a(t-\tau)\;\frac{d\tau}{\mu_k a}\cdot\int_0^l X_k(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2A}{l}\sum_k \sin\mu_k x\;\left.\frac{\cos\mu_k a(t-\tau)}{(\mu_k a)^2}\right|_0^t\cdot\left.\frac{\cos\mu_k\xi}{\mu_k}\right|_0^l=$$

$$=\frac{2A}{a^2 l}\sum_k\frac{1}{\mu_k^3}(1-(-1)^k)\,\sin\mu_k x\,(1-\cos\mu_k at).$$

Возвращаясь к исходной функции $u(x,t)$, сделав в интеграле $I_F(A)$ замену $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}\Rightarrow\mu_n=\dfrac{\pi}{l}(2n+1)>0$ и использовав значение ряда (*), снова получим решение задачи в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+B\frac{x}{l}t=B\frac{x}{l}t+I_g(A)-a^2\,I_F(B)=$$

$$=B\left\{\frac{x}{l}t+\frac{2}{al}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k x\sin\mu_k at\right\}-$$

$$-A\left\{\frac{1}{2}x\left(l-x\right)-\frac{4}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3}\sin\mu_n x\cos\mu_n at\right\},$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{l}(2n+1)>0$.

8) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$u(0,t)=0 \because sin 0=0;.$ $\qquad u(l,t)=B\,t \because sin\mu_k l = sin\mu_n l=0$.

$$u(x,0)=B\cdot 0 - A\cdot\left\{\frac{1}{2}l\,x(1-\frac{x}{l})-\frac{4}{l}\frac{l^3}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi x}{l}(2n+1)\right\}=0$$

(см. выше ряд (*)).

$$u_t'(x,0)=B\left\{\frac{x}{l}+\frac{2}{al}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\,a\mu_k\,\sin\mu_k x\right\}-A\cdot 0=$$

$$=\frac{B}{l}\left\{x+\frac{2l}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi kx}{l}\right\}=\frac{B}{l}\left\{x+\frac{2l}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi x}{2l}\right)\right\}=0\because$$

$\because \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{\pi kx}{l}=\frac{\pi x}{2l}$ при $0\le x<l$ (см. Приложение 1, формула 3).

Совпадение размерностей очевидно, так как

$$[u(x,t)]=W,\qquad [A]=\frac{W}{L^2},\quad [B]=\frac{W}{T},\quad [a]=\frac{L}{T}.$$

$$[u]=\frac{W}{T}\left\{T\cdot 1+\frac{T}{L}\frac{1}{L}L^2\right\}+\frac{W}{L^2}\left\{L^2+\frac{1}{L}L^3\right\}\Rightarrow W.$$

№ 3.3 (В). Подробное решение неоднородного волнового уравнения со всеми однородными условиями

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Axt.\\ u_x'(0,t)=u(l,t)=0.\\ u(x,0)=u_t'(x,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\\ A,a,l=const>0.\end{array}$$

1) Граничные условия задачи смешанного типа; они однородны по условию.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Решение ищем в виде ряда – разложения по собственным функциям $u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x)$, где собственные функции $X_k(x)$ находятся из краевой задачи

$$X_k''+\mu_k^2 X_k(x)=0;\quad X_k'(0)=X_k(l)=0.\quad \lambda=-\mu^2<0.$$

Из табл. 1 находим $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,cos\mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2<0$ при $k\in Z_0$ – собственные значения, которые являются корнями дисперсионного уравнения $\cos\mu_k l=0$ и составляют дискретный спектр задачи. Множество собственных функций задает ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(0,l\,|\,1)$ со скалярным произведением

$$(X_k,X_{k'})=\int_0^l X_k(x)\bar{X}_{k'}(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l \cos\mu_k x\cdot\cos\mu_{k'}x\cdot dx=\delta_{kk'}.$$

Для сходимости ряда для функции $u(x,t)$ необходимо выполнение условия $\lim\limits_{k\to\infty}T_k(t)=0.$

3) Вывод дифференциального уравнения для $T_k(t)$.

Разложение искомой функции $u(x,t)$ подставим в уравнение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_k\left\{-T_k\mu_k^2X_k-\frac{1}{a^2}T_k''X_k\right\}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T_k''+(\mu_k a)^2T_k\right\}X_k=Axt$$

или $\displaystyle\sum_k\left\{T_k''+(\mu_k a)^2T_k\right\}X_k=-Aa^2xt=\sum_k\gamma_k(t)X_k(x),$

где $\displaystyle\gamma_k(t)=(-Aa^2xt,X_k)=-Aa^2t\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\cos\mu_k x\,dx=$

$$=-\frac{Aa^2t}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{x\sin\mu_k x\,\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x dx\right\}=$$

$$=-\frac{Aa^2t}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{l\sin\mu_k l-\frac{1}{\mu_k}\cos\mu_k x\,\Big|_0^l\right\}=+\frac{Aa^2t}{\mu_k^{\ 2}}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{1-(-1)^k\mu_k l\right\}.$$

Приравняв коэффициенты разложений, получим

$$T_k''+(\mu_k a)^2T_k(t)=\gamma_k(t)=+\frac{Aa^2t}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{1-(-1)^k\mu_k l\right\}\equiv A_k t\,;\quad A_k=const.$$

4) Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Решение соответствующего однородного линейного уравнения очевидно $\overset{o}{T}_k(t) = C_k \cos \mu_k a t = \tilde{C}_k \sin \mu_k a t$, где $C_k, \tilde{C}_k = const$.

Частное решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с линейной правой частью будем искать в виде двучлена $\tilde{T}_k(t) = \alpha t + \beta$, где α и β – определяемые постоянные; тогда

$$\tilde{T}_k'' + (\mu_k a)^2 \tilde{T}_k(t) = 0 + (\mu_k a)^2 \cdot (\alpha t + \beta) = A_k t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 0, \qquad \alpha = \frac{A_k}{(\mu_k a)^2} = const.$$

Поэтому общее решение линейного неоднородного уравнения для функции $T_k(t)$ примет вид

$$T_k(t) = \overset{o}{T}_k(t) + \tilde{T}_k(t) = C_k \cos \mu_k a t + \tilde{C}_k \sin \mu_k a t + \frac{A_k t}{(\mu_k a)^2}.$$

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из однородных начальных условий задачи.

Накладывая на разложение в ряд функции $u(x,t)$ условия $u(x,0) = u_t'(x,0) = 0$, легко получим $T_k(0) = T_k'(0) = 0$. Поэтому $T_k(0) = C_k = 0$ и $T_k'(0) = \tilde{C}_k \mu_k a + \dfrac{A_k}{(\mu_k a)^2} = 0$ или $\tilde{C}_k = -\dfrac{A_k}{(\mu_k a)^3}$.

Теперь зависимость от времени примет вид

$$T_k(t) = \frac{A_k}{(\mu_k a)^3}(\mu_k a t - \sin \mu_k a t) = \frac{A}{a \mu_k^5}(1 - (-1)^k \mu_k l)\sqrt{\frac{2}{l}}(\mu_k a t - \sin \mu_k a t),$$

где выполняется условие $\lim\limits_{k \to \infty} T_k(t) = 0$.

6) Окончательный вид решения задачи

$$u(x,t) = \frac{2A}{a\,l} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (-1)^k \mu_k l) \cdot (\omega_k t - \sin \omega_k t) \frac{\cos \mu_k x}{\mu_k^5},$$

где $\omega_k = \mu_k a$ – собственные частоты колебаний (они составляют дискретный спектр) и $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$. Полученный ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при всех $0 \le x \le l$ и $0 \le t < \infty$; причем не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

Такой же ответ легко получить, если решать задачу по общей формуле для уравнений гиперболического типа, используя функцию Грина

$$G(x,\xi\,|\,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k a t}{\mu_k a}\cos\mu_k x\cos\mu_k\xi\,.$$

7) Проверка решения по всем условиям задачи и размерностям.

$$u'_x(0,t)=0\because(\cos\mu_k x)'_x\,|_{x=0}=\mu_k\sin 0=0;\quad u(l,t)=0\because\cos\mu_k l=0\,.$$

$$u(x,0)=0;\quad u'_t(x,0)=0\because(\omega_k t-\sin\omega_k t)'_t\,|_{t=0}=0\,.$$

$$u(x,t)=0-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l(A\xi\tau)\,G(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$$

$$=-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l A\xi\tau\cdot G''_{xx}(x,\xi\,|\,t-\tau)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t d\tau\int_0^l A\xi\tau\cdot G'_t(x,\xi\,|\,t-\tau)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^l A\xi t\cdot G(x,\xi\,|\,t-t)d\xi\right]=-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l A\xi\tau\cdot G''_{xx}(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l A\xi\tau\cdot G''_{tt}(x,\xi\,|\,t-\tau)d\xi+At\int_0^l\xi G'_t(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi=$$

$$=-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l A\xi\tau\cdot\left(G''_{xx}-\frac{1}{a^2}G''_{tt}\right)d\xi+At\int_0^l\left(\sum_k X_k(x)\bar{X}_k(\xi)\right)\xi\,d\xi=$$

$$=0+At\int_0^l\delta(\xi-x)\,\xi\,d\xi=Axt\,.$$

В условиях задачи приняты размерности $[u(x,t)]=W,\quad [A]=\dfrac{W}{L^3T}$,

$[\mu_k]=\dfrac{1}{L},\ [a]=\dfrac{L}{T},\ [\mu_k l]=[\mu_k x]=[\omega_k t]=1\,.$

Тогда $[u]=\dfrac{[A]}{L\dfrac{L}{T}}L^5=\dfrac{W}{L^3T}\dfrac{L^5}{\dfrac{L^2}{T}}\Rightarrow W\,.$

№ 3.4 (В). Решение однородного волнового уравнения с нестационарной неоднородностью в граничных условиях типа Неймана. Получение функции Грина (источника) задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \\ u'_x(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = At. \\ u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \\ A, a, l = const > 0. \end{array}$$

1) Приведение граничных условий к однородным выполним, если перейдем к новой искомой функции $u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t)\, x^2 + \beta(t)\, x$.

$$u'_x(0,t) = v'_x(0,t) + \alpha(t)\cdot 0 + \beta(t) = 0 \Rightarrow v'_x(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad \beta(t) = 0.$$

$$u'_x(l,t) = v'_x(l,t) + \alpha(t)\cdot 2l + 0 = 0 \Rightarrow v'_x(l,t) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha(t) = \frac{At}{2l}.$$

Таким образом получим $u(x,t) = v(x,t) + \dfrac{A}{2l} t\, x^2$, и новые начальные условия будут $u(x,0) = v(x,0) = 0$ и

$$u'_t(x,0) = v'_t(x,0) + \frac{A}{2l}x^2 = 0 \Rightarrow v'_t(x,0) = -\frac{A}{2l}x^2.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\dfrac{A}{l}t. \\ v'_x(0,t) = v'_x(l,t) = 0. \\ v(x,0) = 0, \quad v'_t(x,0) = -\dfrac{A}{2l}x^2. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Решение задачи ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = T_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

где $X_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} = const$ и $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\mu_k x$ – собственные функции и

$\lambda_0 = \mu_0 = 0$, $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2 < 0$ при $k \in N$ – собственные значения.

Очевидно, эти выражения при $k = 0$ и $k \ge 1$ $(k = 1,2,3...)$ оказываются различными (см. табл. 1). Однако ортогональность сохраняется при всех $k = 0,1,2,3,...$; сохраняется и требование $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(t) = 0$ для сходимости ряда.

3) Вывод дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0-\frac{1}{a^2}T_0''X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{-T_k\cdot\mu_k^2X_k-\frac{1}{a^2}T_k''X_k\}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\left\{T_0''X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(T_k''+(\mu_k a)^2T_k\Big)X_k\right\}=-A\frac{t}{l}$$

или $\quad T_0''X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(T_k''+(\mu_k a)^2T_k\Big)X_k=\dfrac{Aa^2}{l}t$.

Умножим скалярно это равенство сначала на орт $X_0(x)$, затем на $X_k(x)$ при $k\in N$ и получим два различных дифференциальных уравнения

$$T_0''=\left(\frac{Aa^2}{l}t,X_0\right)=\frac{Aa^2}{\sqrt{l}}\,t\int_0^l\frac{dx}{\sqrt{l}}=\frac{Aa^2}{\sqrt{l}}t;$$

$$T_k''+(\mu_k a)^2T_k(t)=\left(\frac{Aa^2}{l}t,X_k\right)=\frac{Aa^2}{l}\,t\,\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\cos\mu_k x\,dx=0.$$

Или в окончательном виде $T_0''(t)=\dfrac{Aa^2}{\sqrt{l}}t$ и $T_k''+(\mu_k a)^2T_k(t)=0$ при $k\in N$.

4) Решения дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$ очевидны

$$T_0(t)=\frac{Aa^2}{6\sqrt{l}}t^3+C_0t+\tilde{C}_0,\quad T_k(t)=C_k\sin\mu_k at+\tilde{C}_k\cos\mu_k at\quad(k\in\mathbb{N});$$

здесь $C_0,\tilde{C}_0,C_k$ и $\tilde{C}_k$ – определяемые постоянные интегрирования.

Тогда разложение функции $v(x,t)$ примет вид

$$v(x,t)=T_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=(\frac{Aa^2}{6\sqrt{l}}t^3+C_0t+\tilde{C}_0)X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k\sin\mu_k at+\tilde{C}_k\cos\mu_k at)X_k(x).$$

5) Определение постоянных интегрирования из начальных условий для функции $v(x,t)$.

$$v(x,0)=\tilde{C}_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_kX_k(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_0=\tilde{C}_k=0.$$

$$v_t'(x,0)=C_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mu_k a\cdot X_k(x)=-\frac{A}{2l}x^2.$$

Умножив скалярно последнее равенство сначала на орт $X_0(x)$, а потом на $X_k(x)$, при $k \in N$ получим, соответственно,

$$C_0 = \left(-\frac{A}{2l}x^2, X_0 \right) = -\frac{A}{2l}\int_0^l \frac{x^2}{\sqrt{l}}dx = -\frac{1}{6}Al\sqrt{l} < 0;$$

$$C_k \mu_k a = \left(-\frac{A}{2l}x^2, X_k \right) = -\frac{A}{2l}\int_0^l x^2 \cos\mu_k x\, dx =$$

$$= \frac{-A}{2l\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \left(x^2 \sin\mu_k x \,|_0^l + \frac{2}{\mu_k}\int_0^l x\, d\cos\mu_k x \right) =$$

$$= \frac{-A}{l\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \left(x\cos\mu_k x \,|_0^l - \int_0^l \cos\mu_k x\, dx \right) =$$

$$= \frac{-A}{l\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \left(l\,(-1)^k - 0 \right) = \frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k = \frac{A}{a\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^{k+1}.$$

6) Окончательный вид решения.

Вернемся к исходной функции $u\,(x,t)$ и подставим в разложение функции $v(x,t)$ найденное значение постоянных интегрирования. Тогда

$$u(x,t) = \frac{A}{2l}x^2 t + v(x,t) =$$

$$= \frac{At}{6l}(a^2t^2 + 3x^2 - l^2) - \frac{2A}{al}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\cos\mu_k x \sin\omega_k t.$$

Здесь $\omega_k = \mu_k a > 0$ – спектр собственных частот и $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l} > 0$ при $k \in N$. Ряд сходится правильно при всех значениях x и t; причем не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

Такой же ответ можно получить, если после приведения граничных условий к однородным решать задачу по общей формуле, составив функцию Грина (источника) в виде

$$G(x,\xi\,|\,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cos\mu_k x \cos\mu_k \xi\,.$$

7) Проверка решения по условиям задачи и размерностям.

$$u'_x(0,t)=0,\quad u'_x(l,t)=At+0 \because sin\mu_k l=0;\quad u(x,0)=0,$$

$$u'_t(x,0)=\frac{2Al}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{12l^2}(3x^2-l^2)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{\pi k x}{l}\right\}=0$$

(см. Приложение 1, формула 12).

В условиях задачи приняты размерности

$$[u(x,t)]=W,\qquad [A]=\frac{W}{LT},\qquad [a]=\frac{L}{T},\qquad [\omega_k t]=[\mu_k at]=[\mu_k x]=1.$$

Поэтому $[u]=\dfrac{[A]T}{L}\left(\dfrac{L^2}{T^2}T^2+L^2\right)+\dfrac{[A]}{\dfrac{L}{T}L}L^3=[A]\cdot LT\Rightarrow W.$

№ 3.5 (В). Свободные колебания струны, натянутой в начальный момент времени по параболе $f(x)$.

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma;$

$\alpha,\beta,\gamma=const.$

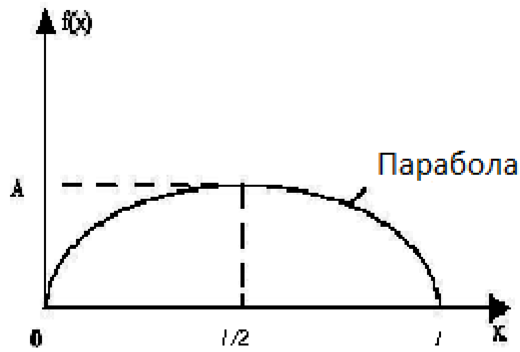
$f(0)=\gamma=0,$

$f(l)=l(\alpha l+\beta)=0\Rightarrow\beta=-\alpha l,$

$f\left(\dfrac{l}{2}\right)=\alpha\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{l}{2}-l\right)=A\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha=-\dfrac{4A}{l^2}<0.$

$f(x)=\dfrac{4A}{l^2}x(l-x)\geq 0$ при $0\leq x\leq l.$



Условия задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.\\ u(0,t)=u(l,t)=0.\\ u(x,0)=f(x),\quad u'_t(x,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(x,t).\\ 0\leq x\leq l,\qquad 0\leq t<\infty.\\ A,a,l=const>0.\end{array}$$

1) Граничные условия задачи однородны.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

В разложении решения по собственным функциям $u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x)$ значение орта $X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x$ находим из табл. 1; там $\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2<0$ при $k\in N$ – собственные значения.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$$

$$=\sum_k\left\{-\mu_k^2 T_k X_k-\frac{1}{a^2}T_k'' X_k\right\}=-\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T_k''+(\mu_k a)^2 T_k\right\}X_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k''+(\mu_k a)^2 T_k(t)=0.$$

4) Решение уравнения для функции $T_k(t)$ очевидно

$$T_k(t)=C_k\cos\mu_k a t+\tilde{C}_k\sin\mu_k a t,\qquad \text{здесь } C_k,\tilde{C}_k=const.$$

Поэтому разложение в ряд искомой функции примет вид

$$u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x)=\sum_k\left\{C_k\cos\mu_k a t+\tilde{C}_k\sin\mu_k a t\right\}X_k(x).$$

5) Постоянные C_k и $\tilde{C}_k$ определим из начальных условий

$$u(x,0)=\sum_k C_k X_k(x)=f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k=(f,X_k)=\frac{4A}{l^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x(l-x)\sin\mu_k x\,dx=$$

$$=-\frac{4A}{l^2\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l(l\,x-x^2)\,d\cos\mu_k x=-\frac{4A}{l^2\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{(lx-x^2)\cos\mu_k x\,\Big|_0^l-\right.$$

$$\left.-\int_0^l\cos\mu_k x(l-2x)dx\right\}=-\frac{4A}{l^2\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{0-\frac{1}{\mu_k}\int_0^l(l-2x)d\sin\mu_k x\right\}=$$

$$=\frac{4A}{l^2\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{(l-2x)\sin\mu_k x\,\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x(-2dx)\right\}=\frac{8A}{l^2\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(1-(-1)^k\right).$$

$$u_t'(x,0)=\sum_k\tilde{C}_k\mu_k a\cdot X_k(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_k=0.$$

6) Окончательный вид решения и его упрощение.

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\mu_k at\ X_k(x)=\frac{16A}{l^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k^3}\cos\mu_k at\sin\mu_k x=$$

$$=\frac{32A}{l^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n x}{\mu_n^3}\cos\omega_n t \qquad (\omega_n=\mu_n a>0).$$

Здесь для упрощения выражений переобозначено $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}$ при $k\in N\Rightarrow\mu_n=\dfrac{\pi}{l}(2n+1)$ при $n\in Z_0$. Полученный ряд сходится правильно при всех заданных значениях x и t; причем не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ при $n\to\infty$.

Функцию Грина для нашей задачи можно записать в виде

$$G(x,\xi\,|\,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k a t}{\mu_k a}\sin\mu_k x\sin\mu_k\xi; \qquad \mu_k=\frac{\pi k}{l}>0.$$

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\because\sin\mu_n l=\sin\pi(2n+1)=0; \qquad u_t'(x,0)=0.$$

$$u(x,0)=\frac{32A}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n x}{\mu_n^3}=\frac{32A}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi x}{l}(2n+1)=$$

$$=\frac{32A}{l^3}\cdot\frac{\pi^3 x}{8l}\left(1-\frac{x}{l}\right)=\frac{4Ax}{l^2}(l-x)\equiv f(x) \text{ (см. Приложение 1, формула 21).}$$

В условиях задачи приняты размерности $[A]=[u]=[f]=W$, $[a]=\dfrac{L}{T}$, $[\omega_n t]=[\mu_k a\, t]=[\mu_k x]=1$. Поэтому $[u]=\dfrac{[A]}{L^3}L^3=[A]\Rightarrow W$.

№ 3.6 (B). Неоднородное волновое уравнение с неоднородными граничными условиями типа Неймана.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=At.\\ u_x'(0,t)=0,\quad u_x'(l,t)=B.\\ u(x,0)=u_t'(x,0)=0.\end{cases} \qquad \begin{array}{l}u=u(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty\\ A,B,a,l=const>0.\end{array}$$

1). Приведение граничных условий к однородным.

Сделаем замену искомой функции $u(x,t)=v(x,t)+\alpha(t)x^2+\beta(t)x$, тогда

$$u_x'(0,t) = v_x'(0,t) + 0 + \beta(t) = 0 \Rightarrow v_x'(0,t) = 0 \text{ при } \beta(t) = 0;$$

$$u_x'(l,t) = v_x'(l,t) + \alpha(t)\, 2l + 0 = B \Rightarrow v_x'(l,t) = 0 \text{ при } \alpha(t) = \frac{B}{2l}.$$

Значит, замена имеет вид $u(x,t) = v(x,t) + B\dfrac{x^2}{2l}$, и новые начальные условия будут

$$u(x,0) = v(x,0) + B\frac{x^2}{2l} = 0 \Rightarrow v(x,0) = -B\frac{x^2}{2l};$$

$$u_t'(x,0) = v_t'(x,0) + 0 = 0 \Rightarrow v_t'(x,0) = 0.$$

Постановка задачи для новой искомой функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = At - \dfrac{B}{l}. \\ v_x'(0,t) = v_x'(l,t) = 0. \\ v(x,0) = -B\dfrac{x^2}{2l}, \quad v_t'(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи. Решение новой упрощенной задачи ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = T_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

где $X_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} = const$ и $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cos \mu_k x$ – собственные функции и $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, $\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2 < 0$ при $k \in N$ – собственные значения (см. табл. 1).

3) Вывод дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 - \frac{1}{a^2} T_0'' X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -T_k\, \mu_k^2 X_k - \frac{1}{a^2} T_k''\, X_k \right\} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left\{ T_0''\, X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k'' + (\mu_k a)^2 T_k \right) X_k \right\} = At - \frac{B}{l}$$

или

$$T_0''(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ T_k'' + (\mu_k a)^2 T_k(t) \right\} X_k(x) = a^2 \left(\frac{B}{l} - At \right).$$

В полученном равенстве, определяя раздельно с помощью скалярных произведений координаты при ортах $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}}$ и $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\mu_k x$ $(k\in N)$, получим два уравнения

$$T_0''(t)=a^2\sqrt{l}\left(\frac{B}{l}-At\right);\quad T_k''+\omega_k^2 T_k(t)=0 \quad \text{при} \quad \omega_k=\mu_k a>0.$$

4) Решения дифференциальных уравнений для функций $T_0(t)$ и $T_k(t)$ очевидны

$$T_0(t)=\frac{a^2t^2}{2\sqrt{l}}\left(B-\frac{1}{3}Alt\right)+C_0+\tilde{C}_0 t,$$

$$T_k(t)=C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t,$$

где $\omega_k=\mu_k a=a\dfrac{\pi k}{l}>0$ – собственные частоты, а $C_0,\tilde{C}_0,C_k$ и $\tilde{C}_k$ – произвольные постоянные интегрирования.

Теперь разложение в ряд функции $v(x,t)$ примет вид

$$v(x,t)=T_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=$$

$$=\left\{C_0+\tilde{C}_0 t+\frac{a^2t^2}{2\sqrt{l}}\left(B-\frac{1}{3}Alt\right)\right\}X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t\right\}X_k(x).$$

5) Определение постоянных интегрирования из начальных условий для функции $v(x,t)$.

$$v(x,0)=C_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}C_kX_k(x)=-\frac{B}{2l}x^2\Rightarrow$$

$$C_0=\left(-\frac{B}{2l}x^2,X_0\right)=-\frac{B}{2l\sqrt{l}}\int_0^l x^2dx=-\frac{1}{6}Bl\sqrt{l},$$

$$C_k=\left(-\frac{B}{2l}x^2,X_k\right)=-\frac{B}{2l}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x^2\cos\mu_k x\,dx=$$

$$=\frac{-B}{2l\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{2x\cos\mu_k x+(\mu_k^2x^2-2)\sin\mu_k x\right\}\Big|_0^l=B\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^2}.$$

$$v_t'(x,0)=\tilde{C}_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\omega_k\,X_k(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_0=\tilde{C}_k=0\,.$$

6) Окончательный вид решения.

Вернемся к исходной искомой функции $u(x,t)$, подставим найденные значения постоянных интегрирования в ее разложение, тогда

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{B}{2l}x^2=-\frac{1}{6}Aa^2t^3+\frac{B}{6l}\Big(3(x^2+a^2t^2)-l^2\Big)-$$

$$-\frac{2B}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cos\mu_k x\cos\omega_k t\,,\qquad \text{где } \omega_k=\mu_k a=a\frac{\pi k}{l}>0\,.$$

Полученный ряд сходится правильно при всех значениях x и t; причем его общий член имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ при $k\to\infty$.

7) Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u_x'(x,t)=B\frac{x}{l}+\frac{2B}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu^k}\sin\mu_k x\cos\omega_k t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x'(0,t)=0,\;\; u_x'(l,t)=B\because\sin\mu_k l=0\,.$$

$$u(x,0)=\frac{B}{6l}\Big(3x^2-l^2\Big)-\frac{2B}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cos\mu_k x=$$

$$=\frac{2Bl}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{12l^2}\Big(3x^2-l^2\Big)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{l}\right\}=0$$

(см. Приложение 1, формула 12).

$$u_t'(x,t)=\frac{a^2t}{2l}(2B-Alt)+\frac{2Ba}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cos\mu_k x\sin\omega_k t\Rightarrow u_t'(x,0)=0\,.$$

По условию задачи имеем размерности коэффициентов $[u(x,t)]=W,\;\;[A]=\dfrac{W}{L^2T}$ и $[B]=\dfrac{W}{L}$. Поэтому

$$[u]=[A]\frac{L^2}{T^2}T^3+[B]\frac{L^2}{L}+[B]\frac{1}{L}L^2=\frac{W}{TL^2}L^2T+\frac{W}{L}L+\frac{W}{L}L\Rightarrow W\,.$$

№ 3.7 (В). Волновое уравнение с неоднородными граничными условиями смешанного типа.

Постановка задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.\\ u(0,t)=0,\quad u'_x(l,t)=At.\\ u(x,0)=u'_t(x,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\\ A,a,l=const>0.\end{array}$$

1) Приведение граничных условий к однородным.

Примем $u(x,t)=v(x,t)+\alpha(t)x+\beta(t)$, тогда

$$u(0,t)=v(0,t)+0+\beta(t)=0\Rightarrow v(0,t)=0 \quad \text{при} \quad \beta(t)=0,$$

$$u'_x(l,t)=v'_x(l,t)+\alpha(t)=At\Rightarrow v'_x(l,t)=0 \quad \text{при} \quad \alpha(t)=At;$$

поэтому $u(x,t)=v(x,t)+Axt$ и начальные условия примут вид $u(x,0)=v(x,0)=0$ и $u'_t(x,0)=v'_t(x,0)+Ax=0\Rightarrow v'_t(x,0)=-Ax$.

Теперь можно поставить задачу для функции $v(x,t)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0.\\ v(0,t)=v'_x(l,t)=0.\\ v(x,0)=0,\quad v'_t(x,0)=-Ax.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}v=v(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Будем искать функцию $v(x,t)$ в виде разложения

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x),\ \text{где}\ X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x \qquad \text{и}$$

$$\lambda_k=-\mu_k^2=-\left(\frac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2<0 \quad \text{при} \quad k\in\mathbb{Z}_0.$$

Эти результаты находим в табл. 1.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{-\mu_k T_k X_k-\frac{1}{a^2}T_k''X_k\right\}=\frac{1}{a^2}\sum_k\left\{T_k''+(\mu_k a)^2T_k\right\}X_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k''+(\mu_k a)^2T_k(t)=0.$$

4) Решение этого уравнения очевидно

$$T_k(t) = C_k \cos\mu_k at + \tilde{C}_k \sin\mu_k at,$$

где C_k, $\tilde{C}_k = const$. Поэтому получим промежуточное решение

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t\right\} X_k(x),$$

где $\omega_k = \mu_k a = a\dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$ при $k \in Z_0$ – множество собственных частот.

5) Постоянные интегрирования C_k и $\tilde{C}_k$ определим из начальных условий.

$$v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$v_t'(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k \omega_k X_k(x) = -Ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_k \omega_k = (-Ax, X_k) = -A\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x \sin\mu_k x\, dx =$$

$$= +\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(x\cos\mu_k x\,|_0^l - \int_0^l \cos\mu_k x\, dx\right) =$$

$$= \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(0 - \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k x\,|_0^l\right) = \frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}(-1)^{k+1}; \qquad \tilde{C}_k = \frac{A}{\mu_k^3 a}\sqrt{\frac{2}{l}}(-1)^{k+1}.$$

6) Окончательный вид решения задачи для исходной функции получим

$$u(x,t) = v(x,t) + Axt = Axt - \frac{2A}{al}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sin\mu_k x \sin\omega_k t,$$

где $\omega_k = a\mu_k = a\dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$. Полученный ряд сходится правильно при всех значениях x и t; его общий член имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

7) Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = 0; \quad u_x'(l,t) = At \because \cos\mu_k l = 0.$$

$$u(x,0) = 0; \quad u_t'(x,0) = Ax - \frac{2a}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k x \cos\mu_k at\,|_{t=0} =$$

$$= Ax - \frac{2A}{l}\cdot\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1) =$$

$$= A\,x - \frac{8Al}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2 x}{8l} = 0$$ (см. Приложение 1, формула 15).

По условиям задачи имеем размерность $[u(x,t)] = W$, $[A] = \dfrac{W}{LT}$.

Поэтому $[u] = [A]\,LT + \dfrac{[A]}{L^2/T}L^3 = \dfrac{W}{LT}LT + \dfrac{W}{LT}LT \Rightarrow W$.

№ 3.8 (C).

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \\ u'_x(0,t) = u(l,t) = 0. \\ u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = Ax. \end{cases}$$

$u = u(x,t)$,
$0 \le x \le l$, $0 \le t < \infty$.
$A, a, l = const > 0$.

1–2) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$, где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\mu_k x$ и $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$.

3–4) $T_k'' + \omega_k^2 T_k(t) = 0$; $\omega_k = a\mu_k > 0$. $T_k(t) = C_k\cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t$.

5) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\{C_k\cos\omega_k t + \tilde{C}_k\sin\omega_k t\right\} X_k(x)$.

$$u(x,0) = \sum_k C_k X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$u'_t(x,0) = \sum_k \tilde{C}_k\omega_k X_k(x) = Ax \Rightarrow \tilde{C}_k\omega_k = (Ax, X_k) = A\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\cos\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{x\sin\mu_k x\,\Big|_0^l - \int_0^l \sin\mu_k x\,dx\right\} = \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{l(-1)^k + \frac{1}{\mu_k}\cos\mu_k x\,\Big|_0^l\right\} =$$

$$= \frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\Big((-1)^k\mu_k l - 1\Big), \qquad \tilde{C}_k = \frac{A}{a\mu_k^3}\Big((-1)^k\mu_k l - 1\Big)\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

6) $u(x,t) = \dfrac{2A}{a\,l}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^k\mu_k l - 1\Big)\dfrac{\cos\mu_k x}{\mu_k^3}\sin\omega_k t$;

$$\omega_k = a\mu_k = a\frac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$$

7) $u'_x(0,t)=0$, $u(l,t)=0 \because \cos\mu_k l=0$; $u(x,0)=0$,

$$u'_t(x,0)=\frac{2A}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^k\mu_k l-1\Big)\frac{\cos\mu_k x}{\mu_k^2}=$$

$$=\frac{4Al}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)\cos\frac{\pi x}{2l}(2k+1)=$$

$$=\frac{4Al}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right)=Ax.$$

(см. Приложение 1, формулы 8 и 14).

Известны размерности $[u(x,t)]=W$,

$$[A]=\frac{W}{LT},\quad [a]=\frac{L}{T},\quad [\mu_k l]=[\mu_k x]=[\omega_k t]=1.$$

Поэтому $[u]=[A]\dfrac{T}{L^2}L^3=\dfrac{W}{LT}LT\Rightarrow W$.

№ 3.9 (С). Однородное волновое уравнение с неоднородностями в граничных и начальных условиях.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.\\ u(0,t)=At,\quad u(l,t)=0.\\ u(x,0)=0,\quad u'_t(x,0)=Bx.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u(x,t).\\ 0\le x\le l,\qquad 0\le t<\infty.\\ A,B,a,l=const>0\end{array}$$

1)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0.\\ v(0,t)=v(l,t)=0.\\ v(x,0)=0,\quad v'_t(x,0)=\left(B+\dfrac{A}{l}\right)x-A.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u(x,t)=v(x,t)+At\left(1-\dfrac{x}{l}\right).\\ v=v(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\end{array}$$

2) $v(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)$, где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_n x$, $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$.

3–4) $T''_k+\omega_k^2T_k(t)=0$; $\omega_k=\mu_k a>0$; $T_k(t)=C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t$.

5) $v(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)\equiv\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big\{C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t\Big\}X_k(x)$.

$$v(x,0)=\sum_k C_k X_k(x)=0 \Rightarrow C_k=0.$$

$$v_t'(x,0)=\sum_k \tilde{C}_k\omega_k X_k(x)=\left(B+\frac{A}{l}\right)x-A \Rightarrow \tilde{C}_k\omega_k=\left(\left(B+\frac{A}{l}\right)x-A, X_k\right)=$$

$$=-\frac{1}{\mu_k}\left(Bl(-1)^k+A\right)\sqrt{\frac{2}{l}};\qquad \tilde{C}_k=\frac{-1}{a\mu_k^2}\left(Bl(-1)^k+A\right)\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

6) $u(x,t)=v(x,t)+At\left(1-\dfrac{x}{l}\right)=$

$$=At\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{2}{a\,l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(A+Bl(-1)^k\right)\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k^2}\sin\omega_k t;\quad \omega_k=\mu_k a=a\frac{\pi k}{l}>0.$$

7) $u(0,t)=At,\quad u(l,t)=0 \because \sin\mu_k l=0.\quad u(x,0)=0;$

$$u_t'(x,0)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{2Bl}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}=$$

$$=A\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{2Bl}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{2l}\right)-\frac{2A}{\pi}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)=Bx\ .$$

(см. формулы 3 и 1 в Приложении 1).

$$[u]\equiv W=[A]T+\frac{T}{L^2}([A]+[B]L)L^2 \Rightarrow W \quad \text{при} \quad [A]=\frac{W}{T} \quad \text{и} \quad [B]=\frac{W}{LT}.$$

№ 3.10 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. & u=u(x,t).\\ u(0,t)=u(l,t)=0. & 0\le x\le l,\qquad 0\le t<\infty.\\ u(x,0)=A,\quad u_t'(x,0)=0. & A,a,l=const>0.\end{cases}$$

1–2) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x);\qquad X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x,\qquad \mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$

3–4) $T_k''+\omega_k^2 T_k(t)=0,\quad \omega_k=\mu_k a>0\quad T_k(t)=C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t.$

5) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cos\omega_k t+\tilde{C}_k\sin\omega_k t\right\}X_k(x).$

$$u_t'(x,0)=\sum_k \tilde{C}_k\omega_k X_k(x)=0 \Rightarrow \tilde{C}_k=0.$$

$$u(x,0)=\sum_k C_k X_k(x)=A \Rightarrow C_k=(A,X_k)=A\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \sin\mu_k x\,dx=$$

$$=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\,\Big|_0^l=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(1-(-1)^k\right).$$

6) $u(x,t)=\dfrac{2A}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-(-1)^k\right)\dfrac{\sin\mu_k x}{\mu_k}\cos\omega_k t=$

$$=\frac{4A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n x}{\mu_n}\cos\omega_n t,\qquad \text{где}\qquad \omega_n=a\mu_n=a\frac{\pi}{l}(2n+1)>0.$$

$$u(x,t)=\frac{2A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\left(\sin\mu_n(x+at)+\sin\mu_n(x-at)\right)=$$

$$=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x+at)\,(2n+1)+\sin\frac{\pi}{l}(x-at)\,(2n+1)\right]=$$

$$=\frac{2A}{\pi}\frac{\pi}{4}[sign(x+at)+sign(x-at)]=\text{(см. Приложение 1, формула 5)}$$

$$=\frac{1}{2}A(1+sign(x-at))=A\eta\,(x-at),$$

где $\eta(\alpha)$ – функция Хевисайда при $\alpha\in R$.

7) $u(x,l)=\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{l}(x+at)(2n+1)+\sin\dfrac{\pi}{l}(x-at)(2n+1)\right).$

$$u(0,t)=0;$$

$$u(l,t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\sin\frac{\pi}{l}(l+at)(2n+1)+\sin\frac{\pi}{l}(l-at)(2n+1)\right)=$$

$$=\left[\sin\left(\pi\pm\frac{a\pi t}{l}\right)(2n+1)=\mp\sin\frac{\pi at}{l}(2n+1)\right]=$$

$$=-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\sin\frac{\pi at}{l}(2n+1)-\sin\frac{\pi at}{l}(2n+1)\right)=0.$$

$$u(x,0)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{\pi x}{l}(2n+1)=\frac{4A}{\pi}\frac{\pi}{4}=A.$$

$$u_t'(x,0)=\frac{2Aa}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi x}{l}(2n+1)-\cos\frac{\pi x}{l}(2n+1)\right)=0.$$

Проверка условий для функции Хевисайда:

$u(x,t)=A\eta(x-at).\quad u(0,t)=a\eta(-at)=0\quad$ при $\quad t>0,$

$$u(l,t) = A\eta(l-at) = 0 \ \text{ при } \ t > \frac{l}{a}. \quad u(x,0) = A\eta(x) = A \ \text{ при } \ x > 0,$$

$$u_t'(x,0) = -a\,A\delta(x-at)\big|_{t=0} = -a\,A\delta(x) = 0 \ \text{ при } \ x > 0.$$

Условия размерности выполняются, так как $[u]=[A]$.

№ 3.11 (С). Вывод общей формулы решения волнового уравнения с граничными однородными условиями типа Неймана.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t). \\ u_x'(0,t) = u_x'(l,t) = 0. \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t'(x,0) = g(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \qquad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1–2) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = T_0(t)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$;

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} = const, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x \quad \text{при} \quad k \in N,$$

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0, \qquad \lambda_k = -\mu_k^{\,2} = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 < 0.$$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 - \dfrac{1}{a^2}T_0''X_0 - \dfrac{1}{a^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'' + \omega_k^2 T_k\right\}X_k = F(x,t),$

$$T_0''(t)X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'' + \omega_k^2 T_k(t)\right\}X_k(x) = -a^2F(x,t), \quad \omega_k = \mu_k a = a\frac{k\pi}{l} > 0.$$

$$T_0'' = (-a^2F, X_0) = -\frac{a^2}{\sqrt{l}}\int_0^l F(\xi,t)\,d\xi \equiv \gamma_0(t).$$

$$T_k'' + \omega_k^2 T_k(t) = (-a^2F, X_k) = -a^2\int_0^l F(\xi,t)X_k(\xi)d\xi = \gamma_k(t).$$

4) $T_0(t) = \tilde{C}_0 + C_0 t + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \gamma_0(\tau)\,d\tau$.

$$T_k(t) = \tilde{C}_k\cos\omega_k t + C_k\sin\omega_k t + \int_0^t \gamma_k(\tau)\,\frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k}\,d\tau.$$

$$u(x,t)=\left\{\tilde{C}_o+C_0t+\int_0^t d\tau\int_0^\tau \gamma_0(\tau)\,d\tau\right\}X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\tilde{C}_k\cos\omega_k t+C_k\sin\omega_k+\right.$$

$$\left.+\int_0^t \gamma_k(\tau)\frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k}d\tau\right\}X_k(x)\ .$$

5) $u(x,0)=\tilde{C}_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_kX_k(x)=f(x)$;

$$\tilde{C}_0=(f,X_0)=\int_0^l f(\xi)\,\overline{X}_0(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l f(\xi)\,d\xi\,;$$

$$\tilde{C}_k=(f,X_k)=\int_0^l f(\xi)X_k(\xi)\,d\xi=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l f(\xi)\cos\mu_k\xi\,d\xi\,.$$

$$u_t'(x,0)=C_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\omega_kX_k(x)=g(x).;$$

$$C_0=(g,X_0)=\int_0^l g(\xi)X_0(\xi)\,d\xi\,;$$

$$C_k=\frac{1}{\omega_k}(g,X_k)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^l g(\xi)\overline{X}_k(\xi)\,d\xi\,.$$

6) $u(x,t)=\left\{(f,X_0)+t\,(g,X_0)+\int_0^t d\tau\int_0^\tau \gamma_0(\tau)\,d\tau\right\}X_0(x)+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(f,X_k)\cos\omega_k t+(g,X_k)\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}+\int_0^t\gamma_k(\tau)\frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k}d\tau\right\}X_k(x)=$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\,d\xi+\frac{t}{l}\int_0^l g(\xi)\,d\xi-\frac{a^2}{l}\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\,d\xi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^l f(\xi)\overline{X}_k(\xi)\,d\xi\cdot\cos\omega_k t+\int_0^l g(\xi)\overline{X}_k(\xi)\,d\xi\ \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}-\right.$$

$$\left.-a^2\int_0^t\frac{\sin\omega_k(t-\tau)}{\omega_k}d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\overline{X}_k(\xi)\,d\xi\right\}X_k(x)=$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l\left\{f(\xi)+t\cdot g(\xi)-a^2\int_0^t(t-\tau)\,F(\xi,\tau)\,d\tau\right\}d\xi+\int_0^l g(\xi)\,G(\xi,x\,|\,t)\,d\xi+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\,G(\xi,x\,|\,t)\,d\xi-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\,G(\xi,x\,|\,t-\tau)\,d\xi\,,$$

где $G(\xi, x\,|\,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\omega_k t}{\omega_k} X_k(\xi)\, X_k(x) = \dfrac{2}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\cos\mu_k\xi\cos\mu_k x$.

Здесь была использована формула Коши для многократного интегрирования (см. Приложение 1).

7) $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$.

$$u(x,0) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi + \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi k\xi}{l}\cos\frac{\pi kx}{l}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^l \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi k}{l}(\xi - x) + \cos\frac{\pi k}{l}(\xi + x)\right)\right\} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\pi}{2}\left\{\delta\left(\frac{\pi}{2}(\xi - x)\right) + \delta\left(\frac{\pi}{2}(\xi + x)\right)\right\} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \{\delta(\xi - x) + \delta(\xi + x)\}\, f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = f(x);$$

$$u'_t(x,0) = \frac{1}{l}\int_0^l g(\xi)\,d\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l g(\xi)\,G(\xi, x\,|\,0)\,d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{2l}\int_0^l \left\{\delta\left(\frac{\pi}{l}(\xi - x)\right) + \delta\left(\frac{\pi}{l}(\xi + x)\right)\right\} g(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \{\delta(\xi - x) + \delta(\xi + x)\}\, g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\big(g(x) + g(-x)\big) = g(x).$$

Здесь $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi kx}{l} = \dfrac{\pi}{2}\delta\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) = \dfrac{l}{2}\delta(x)$ при $x \in R$ – дельта-функция Дирака.

По условию задачи имеем размерности $[u(x,t)] = W$, $[f] = W$, $[g] = \dfrac{W}{T}$, $[F] = \dfrac{W}{L^2}$ и $[G] = \dfrac{T}{L}$. Поэтому

$$[u] = \frac{1}{L}\left\{[f] + T[g] + \frac{L^2}{T^2}T[F]T\right\}L +$$

$$+[g]\,[G]\,L + \frac{1}{T}[f][G]L + \frac{L^2}{T^2}T[F][G]L =$$

$$= \left\{W + T\frac{W}{T} + L^2\frac{W}{L^2}\right\} + \frac{W}{T}\frac{T}{L}L + \frac{1}{T}W\frac{T}{L}L + \frac{L^3}{T}\frac{W}{L^2}\frac{T}{L} \Rightarrow W.$$

№ 3.12 (С). Вынужденные гармонические колебания струны со вторым закрепленным концом.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \\ u(0,t) = A\sin\omega t, \quad u(l,t) = 0. \\ u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u = u(x,t). \\ &0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \\ &A, a, l, \omega = const > 0. \end{aligned}$$

1) Приведение граничных условий к однородным.

$$u(x,t) = v(x,t) + A\,(1 - \frac{x}{l})\sin\omega t\,.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -A\,\dfrac{\omega^2}{a^2}\,(1 - \dfrac{x}{l})\sin\omega t. \\ v(0,t) = v(l,t) = 0. \\ v(x,0) = 0, \quad v'_t(x,0) = -A\omega(1 - \dfrac{x}{l}). \end{cases} \qquad \begin{aligned} &v = v(x,t). \\ &0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{aligned}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad \text{где} \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0.$$

3) Вывод линейного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{a^2}\sum_k \left\{ T''_k + (\mu_k a)^2\ T_k \right\} X_k = -A\,\frac{\omega^2}{a^2}\,(1 - \frac{x}{l})\sin\omega t.$$

$$T''_k + (\mu_k a)^2 T_k(t) = \left(A\omega^2\left(1 - \frac{x}{l}\right)\sin\omega t, X_k \right) = \left[\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) d\,\frac{\cos\mu_k x}{-\mu_k} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\mu_k}\left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right)\cos\mu_k x\,\Big|_0^l - \int_0^l \cos\mu_k x\left(-\frac{dx}{l}\right) \right\} = \frac{1}{\mu_k}\left\{ 1 - \frac{\sin\mu_k x}{\mu_k l}\Big|_0^l \right\} = \frac{1}{\mu_k} \right] =$$

$$= A a\frac{\omega^2}{\omega_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\omega t\,.$$

$$T''_k + \omega_k^2\,T_k(t) = Aa\frac{\omega^2}{\omega_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\omega t; \quad \omega \ne \omega_k = \mu_k a > 0\,.$$

4) Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Очевидно, общее решение соответствующего линейного однородного уравнения будет $\overset{o}{T}_k(t) = C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t \quad (C_k, \tilde{C}_k = const)$, а частное решение, соответствующее заданной неоднородности уравнения, будем искать в виде $\tilde{T}_k(t) = P_k \sin\omega t + Q_k \cos\omega t \quad (P_k, Q_k = const)$. Подставив выражение $\tilde{T}_k(t)$ в заданное уравнение, получим

$$\tilde{T}_k'' + \omega_k^2 \tilde{T}_k(t) = (\omega_k^2 - \omega^2)\left(P_k \sin\omega t + Q_k \cos\omega t\right) == \gamma_k \sin\omega t \Rightarrow P_k = \frac{\gamma_k}{\omega_k^2 - \omega^2},$$

$$Q_k = 0.$$

Тогда общее решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения примет вид

$$T_k(t) = \overset{o}{T}_k(t) + \tilde{T}_k(t) = C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t + \frac{\gamma_k}{\omega^2{}_k - \omega^2} \sin\omega t.$$

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий.

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t + \frac{\gamma_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \sin\omega \mathrm{t} \right\} X_k(x)..$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$v_t'(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \tilde{C}_k \omega_k + \frac{\gamma_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \right\} X_k(x) = -A\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right) \Rightarrow \tilde{C}_k \omega_k + \frac{\gamma_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2} =$$

$$= \left(-A\omega\left(1 - \frac{x}{l}\right), X_k \right) = -A\omega\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\mu_k x\, dx =$$

$$= \left[\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\mu_k x\, dx = \right.$$

$$\left. = -\frac{1}{\mu_k} \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos\mu_k x \Big|_0^l + \frac{\sin\mu_k x}{\mu_k l} \Big|_0^l \right\} = \frac{1}{\mu_k} \right] = -Aa\frac{\omega}{\omega_k}\sqrt{\frac{2}{l}} < 0;$$

$$\tilde{C}_k = -\frac{\omega}{\omega_k} \frac{\gamma_k}{\omega_k^2 - \omega^2} - Aa\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} =$$

$$= -Aa\frac{\omega}{\omega_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2} + 1 \right) = \frac{-Aa\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

6) Окончательный вид решения.

$$u(x,t) = v(x,t) + A(1-\frac{x}{l})\sin\omega t =$$

$$= A\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\omega t + \frac{2Aa\omega^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\omega t}{\omega_k} - \frac{\sin\omega_k t}{\omega}\right\}\frac{\sin\mu_k x}{\omega_k^2-\omega^2}.$$

Здесь $\omega_k = a\mu_k = a\dfrac{\pi k}{l} > 0$ – спектр собственных частот колебаний системы и $\omega>0$ – вынуждающая частота. Если при некотором $k = n$ эти частоты совпадают $\omega_n = \omega$, то в колебательной системе наступает резонанс; при этом n-тый член ряда равен $u_n(x,t) = \dfrac{Aa}{\omega l}(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t)\sin\dfrac{\omega x}{a}$ и имеет возрастающую со временем амплитуду.

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,t) = A\sin\omega t;\quad u(l,t) = 0;\quad u(x,0) = 0,$$

$$u_t'(x,0) = A\omega\left(1-\frac{x}{l}\right) + \frac{2Aa}{l}\omega^2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\omega}{\omega^k} - \frac{\omega_k}{\omega}\right\}\frac{\sin\mu_k x}{\omega_k^2-\omega^2} =$$

$$= A\omega\left(1-\frac{x}{l}\right) - \frac{2A}{l}\omega\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k} = \frac{2A}{\pi}\omega\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}\right\} = 0$$

(см. Приложение 1, формула 1).

По условию задачи $[u(x,t)] = [A] = W, [\omega] = [\omega_k] = \dfrac{1}{T},\ \ [\mu_k x] = 1;$ $[u] = [A] + [A]\dfrac{L}{T}\dfrac{1}{L}\dfrac{1}{T^2}T^3 \Rightarrow W$.

№ 3.13 (С). Вынужденные гармонические колебания струны со вторым свободным концом.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. & u = u(x,t). \\ u(0,t) = A\sin\omega \mathrm{t},\quad u_t'(l,t) = 0. & 0 \le x \le l,\quad 0 \le t < \infty. \\ u(x,0) = u_t'(x,0) = 0. & A, a, l, \omega = const > 0. \end{cases}$$

1) $u(x,t) = v(x,t) + A\sin\omega t$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \\ v(0,t) = v'_x(l,t) = 0. \\ V(x,0) = 0, \quad v'_t(x,0) = -A\omega. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) $v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$, где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$,

$\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$.

3) $T_k'' + \omega_k^2 T_k(t) = (A\omega^2 \sin\omega t, X_k) = A\omega^2\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\omega t\int\limits_0^l \sin\mu_k x\, dx =$

$= -Aa\dfrac{\omega^2}{\omega_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\omega t;$ где $\omega_k = a\,\mu_k = \dfrac{\pi a}{2l}(2k+1) \ne \omega$.

4) $T_k(0) = 0;\ T_k'(0) = (-A\omega, X_k) = -A\omega\sqrt{\dfrac{2}{l}}\int\limits_0^l \sin\mu_k x\, d\, x = = -Aa\dfrac{\omega}{\omega_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}} < 0.$

5) Решение начальной задачи Коши.

$$\begin{cases} T_k'' + \omega_k^2\, T_k(t) = -Aa\dfrac{\omega^2}{\omega_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\ \sin\omega t. \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = -Aa\dfrac{\omega}{\omega_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\ . \end{cases}$$

Решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения с заданными начальными условиями проводится аналогично решению соответствующего уравнения в предыдущем примере; в результате получим

$$T_k(t) = \frac{Aa\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega_k} - \frac{\sin\omega_k t}{\omega}\right)\sqrt{\frac{2}{l}} \qquad \text{при } \omega_k \ne \omega.$$

6) $u(x,t) = A\sin\omega t + v(x,t) = A\sin\omega t + \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) =$

$$= A\sin\omega t + \frac{2Aa}{l}\omega^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega_k} - \frac{\sin\omega_k t}{\omega}\right)\frac{\sin\mu_k x}{\omega_k^2-\omega^2}.$$

Здесь в общем случае $\omega_k = a\mu_k = \dfrac{Aa}{2l}(2k+1) \neq \omega > 0$; но если для некоторого $k=n$ эти частоты совпадают $\omega_n = \omega$, то соответствующий член ряда оказывается равным $u_n(x,t) = \dfrac{Aa}{\omega l}(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t)\sin\dfrac{\omega x}{a}$.

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$u(0,t) = A\sin\omega t$, $u'_x(l,t) = 0 \because \cos\mu_k l = 0$, $u(x,0)=0$.

$$u'_t(x,0) = A\omega + \frac{2Aa}{l}\omega^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{\omega_k} - \frac{\omega_k}{\omega}\right)\frac{\sin\mu_k x}{\omega_k^2-\omega^2} =$$

$$= A\omega - \frac{2A}{l}\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k} = \frac{4A}{\pi}\omega\left\{\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1)\right\} = 0$$

(см. Приложение 1, формула 5).

По условию задачи $[A]=[u]=W$. Поэтому получим

$$[u] = [A] + [A]\frac{1}{L}\frac{L}{T}\frac{1}{T^2}\,T\,T^2 \Rightarrow W.$$

№ 3.14 (С). Неоднородное волновое уравнение с правой частью, линейной по амплитуде и гармонической по времени. Однородные граничные условия второго рода (типа Неймана).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ax\sin\omega t. \\ u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0. \\ u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \\ A, a, l, \omega = const > 0. \end{array}$$

1–2) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = T_0(t)X_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$.

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} = const,\ \mu_0 = 0;\ X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x,\ \mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0$$

при $k \in \mathbb{N}$

3) $T_0''(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k''+\omega_k^2 T_k\right\}X_k=-Aa^2x\sin\omega t$;

$\omega_k=a\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}a>0$.

$$T_0''(t)=(-Aa^2x\sin\omega t, X_0)=-Aa^2\sin\omega t\int_0^l x\frac{dx}{\sqrt{l}}=-A\frac{a^2l^2}{2\sqrt{l}}\sin\omega t\cdot$$

$$T_k''+\omega_k^2T_k(t)=(-Aa^2x\sin\omega t, X_k)=-Aa^2\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\omega t\int_0^l x\cos\mu_k x\,dx=$$

$$=\left[\int_0^l xd\,\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k}=\frac{1}{\mu_k}\left(x\sin\mu_k x\big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x\,dx\right)=\frac{-1}{\mu_k}\cdot\frac{\cos\mu_k x}{-\mu_k}\Big|_0^l=\right.$$

$$\left.=-\frac{1}{\mu_k^2}\left(1-(-1)^k\right)\right]=\frac{Aa^2}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(1-(-1)^k\right)\sin\omega t\equiv\gamma_k\sin\omega t\cdot$$

4) $T_0''(t)=-A\dfrac{a^2l^2}{2\sqrt{l}}\sin\omega t\Rightarrow T_0(t)=C_0t+\tilde{C}_0+A\dfrac{a^2l^2}{2\omega^2\sqrt{l}}\sin\omega t$.

$$T_k''+\omega_k^2T_k(t)=\gamma_k\sin\omega t\Rightarrow\overset{o}{T}_k(t)=C_k\sin\omega_k t+\tilde{C}_k\cos\omega_k t$$

$$\tilde{T}_k(t)=P_k\sin\omega t+Q_k\cos\omega t.$$

$$\tilde{T}_k''+\omega_k^2\tilde{T}_k(t)=(-\omega^2+\omega_k^2)\cdot(P_k\sin\omega t+Q_k\cos\omega t)=\gamma_k\sin\omega t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_k=\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2},\qquad Q_k=0.$$

$$\tilde{T}_k(t)=\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\sin\omega t\quad\text{при}\quad\omega_k=a\mu_k\neq\omega.$$

$$T_k(t)=\overset{o}{T}_k(t)+\tilde{T}_k(t)=C_k\sin\omega_kt+\tilde{C}_k\cos\omega_kt+\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

5) $u(x,t)=T_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=$

$$=\left\{C_0t+\tilde{C}_0+A\frac{a^2l^2}{2\omega^2\sqrt{l}}\sin\omega t\right\}X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\sin\omega_kt+\tilde{C}_k\cos\omega_kt+\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\sin\omega t\right\}X_k(x).$$

$$u(x,0)=\tilde{C}_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_kX_k(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_0=\tilde{C}_k=0\cdot$$

$$u'_t(x,0)=\left\{C_0+A\frac{a^2l^2}{2\omega\sqrt{l}}\right\}X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\omega_k+\frac{\gamma_k\omega}{\omega_k^2-\omega^2}\right\}X_k(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0=-A\frac{a^2l^2}{2\omega\sqrt{l}}<0\,,\qquad C_k=-\frac{\omega}{\omega_k}\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\,.$$

6) $$u(x,t)=\left\{-At\frac{a^2l^2}{2\omega\sqrt{l}}+A\frac{a^2l^2}{2\omega^2\sqrt{l}}\sin\omega t\right\}X_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\frac{\omega}{\omega_k}\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\sin\omega_k t+\frac{\gamma_k}{\omega_k^2-\omega^2}\sin\omega t\right\}X_k(x)=$$

$$=-A\frac{a^2l}{2\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)+\frac{2Aa}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k^3}\cdot\frac{\omega_k\sin\omega t-\omega\sin\omega_k t}{\omega_k^2-\omega^2}\cos\mu_k x=$$

$$=-A\frac{a^2l}{2\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)+\frac{4Aa}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_n t}{\omega_n^2-\omega^2}\cdot\frac{\cos\mu_n x}{\mu_n^3}.$$

Здесь для упрощения сделана замена индекса $k=2n+1$; тогда $\omega_k\Rightarrow\omega_n=a\mu_n=\dfrac{\pi a}{l}(2n+1)>0$, причем $\omega_n\neq\omega$. Полученный ряд сходится правильно при всех значениях переменных x и t; порядок общего члена ряда $O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ при $n\to\infty$

Если одна из собственных частот системы $\omega_m=a\mu_m=\dfrac{\pi a}{2l}(2m+1)>0$ совпадает с вынуждающей частотой $\omega_m=\omega$ при $n=m$, то в системе наступает резонанс и амплитуда колебаний возрастает со временем; соответствующий резонансный член ряда в этом случае равен $u_m(x,t)=\dfrac{2Aa^5}{l\omega^4}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\cdot\cos\dfrac{\omega x}{a}$.

7) Проверка решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u'_x(0,t)=0\,,\quad u'_x(l,t)=0\because\sin\mu_n l=0\,.\quad u(x,0)=0\,,$$

$$u'_x(x,0)=-A\frac{a^2\,l}{2\omega^2}(\omega-\omega\cos\omega\,t)\,|_{t=0}+$$

$$+\frac{4Aa}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(\cos\omega t-\cos\omega_n t)\,|_{t=0}\cdot\frac{\omega\,\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}\cdot\frac{\cos\mu_n x}{\mu_n^3}=0\,.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$$

$$=0+\frac{1}{a^2}A\frac{a^2 l}{2\omega^2}\,\omega^2\sin\omega t+\frac{4Aa}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\omega_n\sin\omega t-\omega\sin\omega_n t}{(\omega_n^2-\omega^2)\mu_n^3}(-\mu_n^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\frac{-\omega_n\,\omega^2\,\sin\omega t+\omega\omega_n^2\sin\omega_n t}{(\omega_n^2-\omega^2)\,\mu_n^3}\right\}\cos\mu_n x=$$

$$=\left[\,\omega_n=\mu_n a=\frac{\pi a}{l}(2n+1)>0\,\right]=$$

$$=\frac{1}{2}Al\ \sin\omega t+\frac{4Aa^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\omega_n^3\sin\omega t+\omega\omega_n^2\ \sin\omega_n t+\omega^2\omega_n\sin\omega t-\right.$$

$$\left.-\omega\omega_n^2\ \sin\omega_n t\right\}\frac{\cos\mu_n x}{\omega_n^3(\omega_n^2-\omega^2)}=\frac{1}{2}Al\sin\omega t-\frac{4A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\cos\mu_n x\sin\omega t=$$

$$=A\ \sin\omega\,t\left\{\frac{1}{2}l-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\cos\frac{\pi x}{l}(2n+1)\right\}=$$

$$=\frac{4Al}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{8}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\pi x}{l}(2n+1)\ \right\}\sin\omega t=$$

$$=\frac{4Al}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\right\}\sin\omega t=Ax\sin\omega t$$

(см. Приложение 1, формула 14).

По условиям задачи $[A]=\dfrac{[u]}{L^3}=\dfrac{W}{L^3}$, $[a]=\dfrac{L}{T}$, $[\omega t]=[\omega_n\,t]=[\mu_n x]=1$.

Поэтому получили $[u]=[A]\dfrac{L^2}{T^2}\,LT^2+[A]\dfrac{L}{T}\dfrac{1}{L}\dfrac{T^2}{T}\,L^3=\dfrac{W}{L^3}L^3+\dfrac{W}{L^3}L^3\Rightarrow W$.

№ 3.15 (С). Однородное волновое уравнение со сложным неоднородным граничным условием смешанного типа (третьего рода).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \\ u'_x(0,t)-\chi\,u(0,t)=At,\quad u(l,t)=0. \\ u(x,0)=u'_t(x,0)=0. \\ \end{cases}\qquad \begin{array}{l} u=u(x,t). \\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty. \\ A,\chi,a,l=const>0. \end{array}$$

1) Приведем граничные условия к однородным с помощью замены

$$u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t)x + \beta(t).$$

$$u'_x(0,t) - \chi u(0,t) = v'_x(0,t) + \alpha(t) - \chi v(0,t) - \chi \beta(t) = At \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'_x(0,t) - \chi v(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha(t) - \chi \beta(t) = 0.$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \alpha(t)l + \beta(t) = 0 \Rightarrow v(l,t) = 0 \quad \text{при} \quad a(t)l + \beta(t) = 0.$$

$$\begin{cases} \alpha(t) - \chi \beta(t) = At, \\ \alpha(t)l + \beta(t) = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\chi \\ l & 1 \end{vmatrix} = 1 + \chi l \neq 0.$$

$$\alpha(t) = \frac{At}{\Delta}, \quad \beta(t) = \frac{-Alt}{\Delta}.$$

$$u\ (x,t) = v(x,t) - At\frac{l-x}{\chi l + 1}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \\ v'_x(0,t) - \chi \cdot v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0. \\ v(x,0) = 0, \quad v'_t(x,0) = A\,\dfrac{l-x}{\chi l + 1} \equiv \tilde{A}\,(l-x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Положим $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$, тогда для определения множества базисных собственных функций $X_k(x)$ нужно в гильбертовом пространстве $L_2(0,l\,|\,1)$ решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \hat{D}X = \lambda X(x). \\ X'(0) - \chi X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Здесь $\hat{D} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ – эрмитов оператор и $\lambda = -\mu^2 < 0$ – спектр его собственных значений.

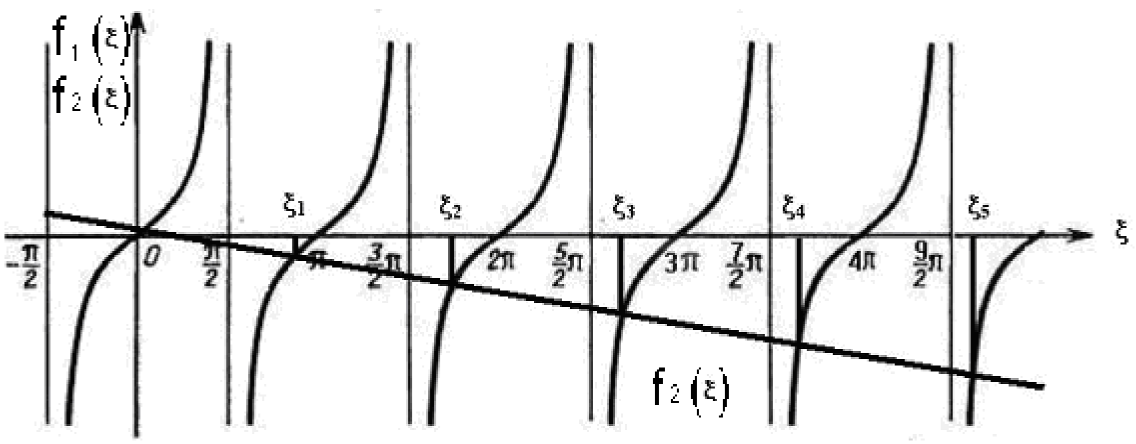
Уравнение $X'' + \mu^2 X(x) = 0$ имеет общее решение $X(x) = C\sin\mu x + \tilde{C}\cos\mu x$, где постоянные C, $\hat{C}$ и μ находятся из граничных условий

$$\begin{cases} X'(0) - \chi X(0) = C\mu - \chi\tilde{C} = 0. \\ X(l) = C\sin\mu l + \tilde{C}\cos\mu l = 0. \end{cases} \qquad \text{Здесь } \tilde{C} = \frac{\mu}{\chi}C \neq 0.$$

Для существования нетривиальных решений однородной системы линейных уравнений определитель этой системы должен равняться нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu & -\chi \\ \sin \mu l & \cos \mu l \end{vmatrix} = \mu \cos \mu l + \chi \sin \mu l = 0,$$

откуда получим дисперсионное уравнение $tg \mu l = -\dfrac{\mu}{\chi} \neq 0$ для определения множества собственных значений $\lambda = -\mu^2 < 0$. Если обозначить $\mu l = \xi > 0$, то уравнение $tg\,\xi = -\dfrac{\xi}{\chi l} \neq 0$ можно решить графическим методом, определив абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(\xi) = tg\,\xi$ и $f_2(\xi) = -\dfrac{\xi}{\chi l}$.



По графику находим бесчисленное множество положительных корней дисперсионного уравнения, равных $\xi_{1,}\ \xi_2, \xi_3, \ldots$, – это абсциссы точек пересечения тангенсоид $f_1(\xi) = tg\xi$ и наклонной прямой $f_2(\xi) = -\dfrac{\xi}{\chi l} < 0$ $\left(\text{здесь} \lim\limits_{x \to \infty} \left(\xi_k - \dfrac{\pi}{2}(2k-1) \right) = 0 \right)$, которые определяют дискретный спектр собственных значений нашей задачи $\lambda_k = -\mu_k^2 = -(\dfrac{\xi_k}{l})^2 < 0$ при $k \in N$. Неположительные корни не нужно рассматривать, так как $\mu_0 = 0$ и $X_0(x) \equiv 0$, а числа $\mu_{-k} = -\mu_k$ при всех значениях $k \in Z$.

Каждому собственному числу $\lambda_k = -\mu_k^2 < 0$ соответствует единственная собственная функция $X_k(x) = C\left(\sin \mu_k x + \dfrac{\mu_k}{\chi} \cos \mu_k x \right) = C_k \sin(\mu_k x + \varphi_k),$

где амплитуда $C_k = C\sqrt{1+\frac{\mu_k^2}{\chi^2}} \neq 0$ и фаза $\varphi_k = arctg\frac{\mu_k}{\chi} > 0$. Причем, в силу эрмитовости (сопряженности) оператора $\hat{D} = \frac{d^2}{dx^2}$, разным собственным значениям λ_k (которые имеют различные номера $k \in N$) в гильбертовом пространстве $L_2(0,l\,|\,1)$ соответствуют различные и взаимно ортогональные собственные функции $X_k(x)$, т. е. скалярное произведение

$$(X_k, X_{k'}) = \int_0^l X_k(x) X_{k'}(x)\,d\,x = 0 \qquad \text{при } k \neq k'.$$

Однако норма полученных собственных функций отлична от единицы, что затрудняет разложение в ряды по таким собственным функциям. Поэтому нужно определить их норму $(X_k, X_k) = \| X_k \|^2 > 0$; при этом получим

$$\| X_k(x) \|^2 \equiv (X_k, X_k) = \int_0^l | X_k(x) |^2\, dx =$$

$$= | C |^2 \int_0^l \sin^2(\mu_k x + \varphi_k)\,d\,x = \frac{1}{2} | C |^2 \int_0^l \big(1 - cos(2\mu_k x + 2\varphi_k)\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2} | C |^2 \left[l - \frac{1}{2\mu_k} \sin\big(2\mu_k\, x + 2\varphi_k\big)\big|_0^l \right] =$$

$$= \frac{1}{2} | C |^2 \left[l - \frac{1}{2\mu_k} \big(\sin(2\mu_k\, l + 2\varphi_k) - \sin 2\varphi_k\big) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} | C |^2 \left[l - \frac{1}{\mu_k} \sin\mu_k l \cos(\mu_k\, l + 2\varphi_k) \right] = \frac{1}{2} | C |^2 \left[l + \frac{1}{\chi} \cos(\mu_k l + 2\varphi_k) \right].$$

Здесь с использованием дисперсионного уравнения, произведена замена $\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k l = -\frac{1}{\chi}\cos\mu_k l$. Далее обозначим

$$Q \equiv \cos\mu_k l \cos(\mu_k l + 2\varphi_k) = \cos\mu_k l(\cos\mu_k l \cos 2\varphi_k - \sin\mu_k l \sin 2\varphi_k) =$$

$$= \cos^2\mu_k l(\cos 2\varphi_k - tg\mu_k l \sin 2\varphi_k) = \cos^2\mu_k l(\cos 2\varphi_k + \frac{\mu_k}{\chi}\sin 2\varphi_k) =$$

$= \cos^2\mu_k\, l \cdot \left(\frac{\chi^2 - \mu_k^2}{\chi^2 + \mu_k^2} + \frac{\mu_k}{\chi} \cdot \frac{2\chi\mu_k}{\chi^2 + \mu_k^2} \right)$, где использованы формулы представления синуса и косинуса через тангенс половинного угла $tg\varphi_k = \frac{\mu_k}{\chi}$ вида

$$\cos 2\varphi_k = \frac{1 - tg^2\varphi_k}{1 + tg^2\varphi_k} = \frac{\chi^2 - \mu_k^2}{\chi^2 + \mu_k^2}, \qquad tg\varphi_k = \frac{\mu_k}{\chi} > 0;$$

$$\sin 2\varphi_k = \frac{2tg\varphi_k}{1 + tg^2\varphi_k} = \frac{2\chi\mu_k}{\chi^2 + \mu_k^2}; \qquad \cos^2 2\varphi_k + \sin^2 2\varphi_k = 1.$$

При этом выражение в круглых скобках обращается в единицу

$$\frac{\chi^2 - \mu_k^2}{\chi^2 + \mu_k^2} + \frac{\mu_k}{\chi} \cdot \frac{2\mu_k\chi}{\chi^2 + \mu_k^2} = \frac{\chi^2 - \mu_k^2 + 2\mu_k^2}{\chi^2 + \mu_k^2} = 1$$

и упрощается значение величины

$$Q = \cos^2 \mu_k l = \frac{1}{1 + tg^2 \mu_k l} = \frac{\chi}{\mu_k^2 + \chi^2} < 1.$$

Теперь норма оказывается равной

$$\| X_k(x) \|^2 = \frac{1}{2} | C |^2 \left(l + \frac{\chi}{\mu_k^2 + \chi^2} \right) = 1.$$

Эта норма станет единичной, если произвольную постоянную C выбрать в виде

$$C = \sqrt{2 \Big/ \left(l + \frac{\chi}{\mu_k^2 + \chi^2} \right)} > 0.$$

Тогда ортонормированная система собственных функций (ортов) примет окончательный вид

$$X_k(x) = \sqrt{2 \Big/ \left(l + \frac{\chi}{\mu_k^2 + \chi^2} \right)} \cdot \sin(\mu_k x + \varphi_k) \equiv N_k \sin(\mu_k x + \varphi_k)$$

и будет выполняться требование нормировки $(X_k, X_{k'}) = \delta_{kk'}$ при $k, k' \in N$. Очевидно, при $\chi = 0$ получили $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$. Тогда дисперсионное уравнение будет иметь решение $\mu_k = \frac{\pi}{2l}(2k+1) \neq 0$ при $k \in Z_0$, а собственные функции находятся из табл. 1 (третья строчка).

3–4) Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\mu_k^2 T_k X_k - \frac{1}{a^2} T_k'' X_k \right\} =$$

$$= \frac{-1}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{T_k'' + (\mu_k a)^2 T_k\right\} X_k(x) = 0 \Rightarrow T_k'' + \omega_k^2 T_k(t) = 0, \qquad \omega_k = a\,\mu_k > 0.$$

Решение этого уравнения очевидно $T_k(t) = C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t$, где C_k, $\tilde{C}_k = const$ – постоянные интегрирования. Тогда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k \cos\omega_k t + \tilde{C}_k \sin\omega_k t\right\} X_k(x).$$

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из начальных условий.

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$v_t'(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_k\,\omega_k\, X_k(x) = \tilde{A}(l-x) \Rightarrow \tilde{C}_k\omega_k = \left(\tilde{A}(l-x), X_k\right) =$$

$$= \tilde{A} N_k \int_0^l (l-x)\sin(\mu_k x + \varphi_k)\,dx = -\frac{\tilde{A}N_k}{\mu_k}\left\{(l-x)\cos(\mu_k x + \varphi_k)\,\Big|_0^l + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \cos(\mu_k x + \varphi_k)\,dx\right\} = \frac{\tilde{A}N_k}{\mu_k^2}\left\{\mu_k l\cos\varphi_k - \sin(\mu_k l + \varphi_k) + \sin\varphi_k\right\} =$$

$$= \frac{\tilde{A}N_k}{\mu_k^2}\cos\varphi_k\left\{\mu_k l - 0 + tg\varphi_k\right\} = \frac{\tilde{A}N_k}{\mu_k^2}\cdot\frac{\chi}{\sqrt{\mu_k^2 + \chi^2}}\left(\mu_k l + \frac{\mu_k}{\chi}\right) =$$

$$= \frac{AN_k}{\mu_k\sqrt{\mu_k^2 + \chi^2}} \Rightarrow \tilde{C}_k = \frac{AN_k}{a\,\mu_k^2\sqrt{\mu_k^2 + \chi^2}} > 0 \qquad \tilde{A} = \frac{A}{\chi l + 1} > 0.$$

6) Окончательный вид решения.

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{At(l-x)}{\chi l + 1} = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_k \sin\omega_k t\, X_k(x) - \frac{At(l-x)}{\chi l + 1} =$$

$$= \frac{2A}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_k x + \varphi_k)}{l + \dfrac{\chi}{\mu_k^2 + \chi^2}}\,\frac{\sin\omega_k t}{\mu_k^2\sqrt{\mu_k^2 + \chi^2}} - \frac{At(l-x)}{\chi l + 1}.$$

Ряд сходится правильно при всех x и t; его общий член имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$. Здесь $\omega_k = a\,\mu_k = \dfrac{a\,\xi_k}{l} > 0$ – собственные частоты.

Если $\chi = 0$, получим ответ для задачи с простым граничным условием $u'_x(0,t) = At$, при этом $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k-1)$ и $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2}$.

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(l,t) = 0 \because \sin(\mu_k l + \varphi_k) = 0; \qquad u(x,0) = 0;$$

$$u'_x(0,t) - \chi u(0,t) = \frac{2A}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\cos\varphi_k - \chi\sin\varphi_k}{l + \dfrac{\chi}{\mu_k^2+\chi^2}}\cdot\frac{\sin\omega_k t}{\mu_k^2\sqrt{\mu_k^2+\chi^2}} + At = At \because$$

$$\because \mu_k\cos\varphi_k - \chi\sin\varphi_k = \mu_k\cos\varphi_k\left(1 - \frac{\chi}{\mu_k}tg\varphi_k\right) = \mu_k\cos\varphi_k\left(1 - \frac{\chi}{\mu_k}\frac{\mu_k}{\chi}\right) = 0.$$

$$u'_t(x,0) = 2A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_k x + \varphi_k)}{l + \dfrac{\chi}{\mu_k^2} + \chi^2}\cdot\frac{1}{\mu_k\sqrt{\mu_k^2+\chi^2}} - \frac{A(l-x)}{\chi l + 1} = 0$$ – это равенство доказывается непосредственным разложением в ряд или проверяется с помощью предела.

$$u'_t(x,0)\,|_{\chi=0} = \frac{2A}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}\sin\left(\mu_k x + \frac{\pi}{2}\right) - A(l-x) = \left[\varphi_k = \frac{\pi}{2};\, k = n+1\right] =$$

$$= -\frac{8Al}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right\} = 0$$

(см. Приложение 1, формула 14).

По условиям задачи

$$\left[u(x,t)\right] = W,\quad [A] = \frac{W}{LT},\quad [\chi] = \frac{1}{L},\quad [a] = \frac{L}{T},\quad [\mu_k x] = [\varphi_k] = [\omega_k t] = 1$$

Поэтому получили $[u] = [A]\,\dfrac{T}{L}\dfrac{1}{L}L^3 + [A]\,T\,L \Rightarrow W$.

№ 3.16 (С). Решение общего вида задачи для одномерного уравнения колебаний (волнового) без приведения граничных условий к однородному виду (к нулям).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t). \\ u'_x(0,t) = \varphi(t), \quad u(l,t) = \psi(t). \\ u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = g(x). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l. \\ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

1) Разделение переменных и решение краевой задачи с однородными граничными условиями, подобными заданным.

$u(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x)$; где $X'' - \mu^2 X(x) = 0$ при $X'(0) = 0$ и $X(l) = 0$.

Решение такой краевой задачи известно:

$\lambda_k = -\mu_k^2 = -\left(\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)\right)^2 < 0$ – бесконечный дискретный спектр собственных значений (чисел) при $k \in \mathrm{Z}_0$. $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cos \mu_k x$ – базис (полное ортонормированное множество собственных векторов-ортов), для которого скалярное произведение задается в виде интеграла $(X_k, X_{k'}) \equiv \int_0^l X_k(\xi) \bar{X}_{k'}(\xi)\, d\xi = \delta_{kk'}$ – символ Кронекера.

2) Вывод уравнения для функции $T_k(t)$, зависящей только от времени.

$$u''_{xx} - \frac{1}{a^2} u''_{tt} = F(x,t) \Rightarrow \left(u''_{xx}, X_k\right) - \frac{1}{a^2}\left(u''_{tt}, X_k\right) = (F, X_k).$$

Введем обозначение $(u, X_k) \equiv \int_0^l u(\xi,t) \bar{X}_k(\xi)\, d\xi = T_k(t)$, далее

$$(u''_{tt}, X_k) \equiv \int_0^l u''_{tt}(\xi,t) \bar{X}_k(\xi)\, d\xi = T''_k(t),$$

$$(F, X_k) \equiv \int_0^l F(\xi,t) \bar{X}_k(\xi)\, d\xi \equiv F_k(t),$$

$$(f, X_k) \equiv \int_0^l f(\xi) X_k(\xi) d\xi = f_k = const,$$

$$(g, X_k) \equiv \int_0^l g(\xi) \bar{X}_k(\xi)\, d\xi = g_k = const.$$

Воспользуемся одномерным представлением формулы Грина

$$(u''_{xx}, X_k) - (u, X''_k) \equiv \int_0^l (u''_{\xi\xi}\overline{X}_k - u\ \overline{X}''_k)\, d\xi = (u'_\xi\ \overline{X}_k - u\ \overline{X}'_k)\,\Big|_0^l =$$

$$= u'_x(l,t)\ \overline{X}_k(l) - u(l,t)\ \overline{X}'_k(l) - u'_x(0,t)\overline{X}_k(0) + u(0,t)\overline{X}'_k(0) =$$

$$= 0 - u(l,t)\ \overline{X}'_k(l) - u'_x(0,t)\ \overline{X}_k(0) + 0 = -\Big(\psi(t)\overline{X}'_k(l) - \varphi(t)\overline{X}_k(0)\Big) \neq 0.$$

Здесь $X'_k(l) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\ \mu_k(-1)^{k+1}$, $X_k(0) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$ отличны от нуля.

Если заменить $X''_k = -\mu_k^2 X_k(x)$, то получим

$$(u''_{xx}, X_k) = -\mu_k^2(u, X_k) - \ldots = = -\mu_k^2\ T_k(k) - \Big(\varphi(t)\ \overline{X}_k(0) + \psi(t)\ \overline{X}'_k(l)\Big).$$

Поставив полученные выражения в уравнение задачи, приведем его к виду

$$-\mu_k^2\ T_k(t) - \Big(\varphi(t)\ \overline{X}_k(0) + \psi(t)\ \overline{X}_k(l)\Big) - \frac{1}{a^2}T''_k(t) = F_k(t)\,.$$

Очевидно, это выражение и является искомым дифференциальным уравнением для функции $T_k(t)$

$$T''_k + (\mu_k a)^2 T_k(t) =$$

$$= -a^2\Big[F_k(t) + \Big(\varphi(t)\overline{X}_k(0) + \psi(t)\overline{X}'_k(l)\Big)\Big] \equiv -a^2\Phi_k(t).$$

Функция $\Phi_k(t)$ введена для сокращения записей.

3) Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$.

Сначала найдем решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\overset{o}{T}{}''_k + (\mu_k a)^2\ \overset{o}{T}_k(t) = 0 \Rightarrow \overset{o}{T}_k(t) = \overset{o}{B}_k \sin\mu_k a t + \overset{o}{C}_k \cos\mu_k a t;$$

$$\overset{o}{B}_k,\ \overset{o}{C}_k = const.$$

Решение исходного неоднородного дифференциального уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных $T_k(t) = B_k(t)\sin\mu_k a\,t + C_k(t)\cos\mu_k a\,t$, для определения которых составим систему уравнений

$$\begin{cases} B'_k(t)\sin\mu_k a\,t + C'_k(t)\ \cos\mu_k a\,t = 0, \\[2mm] B'_k(t)\cos\mu_k a\,t - C'_k(t)\ \sin\mu_k a\,t = -\dfrac{a}{\mu_k}\Phi_k(t). \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = -1 \neq 0$ отличен от нуля, поэтому решение системы можно найти по правилу Крамера

$$B_k'(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \cos\mu_k a t \\ -\dfrac{a}{\mu_k}\Phi_k & \sin\mu_k a t \end{vmatrix} = -\frac{a}{\mu_k}\Phi_k(t)\cos\mu_k a t,$$

$$C_k'(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin\mu_k a t & 0 \\ \cos\mu_k a t & -\dfrac{a}{\mu_k}\Phi_k \end{vmatrix} = +\frac{a}{\mu_k}\Phi_k(t)\sin\mu_k a t.$$

Откуда сами величины $B_k(t)$ и $C_k(t)$ легко находятся интегрированием

$$B_k(t) = \tilde{B}_k - \frac{a}{\mu_k}\int_0^t \Phi_k(\tau)\cos\mu_k a\tau\, d\tau, \quad C_k(t) = \tilde{C}_k + \frac{a}{\mu_k}\int_0^t \Phi_k(\tau)\sin\mu_k a\tau\, d\tau,$$

где $\tilde{B}_k, \tilde{C}_k = const$.

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_k(t)$ можно записать в виде

$$T_k(t) = \tilde{B}_k\sin\mu_k a t + \tilde{C}_k\cos\mu_k a t + \frac{a}{\mu_k}\int_0^t \Phi_k(\tau)(-\sin\mu_k at\cdot\cos\mu_k a\tau +$$

$$+\cos\mu_k a t\cdot\sin\mu_k a\tau)\, d\tau = \tilde{B}_k\sin\mu_k a t + \tilde{C}_k\cos\mu_k a t -$$

$$-\frac{a}{\mu_k}\int_0^t \Phi_k(\tau)\sin\mu_k a(t-\tau)\, d\tau.$$

4) Постоянные интегрирования $\tilde{B}_k$ и $\tilde{C}_k$ можно определить из начальных условий

$$T_k(0) = 0 + \tilde{C}_k - 0 = f_k \Rightarrow \tilde{C}_k = f_k = const,$$

$$T_k'(0) = \mu_k a\tilde{B}_k + 0 - \frac{a}{\mu_k}\left(-\mu_k a\int_0^t \Phi_k(\tau)\cos\mu_k a(t-\tau)\, d\tau +\right.$$

$$\left.+\Phi_k(t)\sin\mu_k a\,(t-t)\right)\Big|_{t=0} = \mu_k a\tilde{B}_k + 0 - 0 = g_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{B}_k = \frac{g_k}{\mu_k a} = const.$$

Теперь искомое решение неоднородного уравнения для функции $T_k(t)$ запишем в окончательном виде

$$T_k(t) = \frac{g_k}{\mu_k a}\sin\mu_k a t + f_k\cos\mu_k a t - \frac{a}{\mu_k}\int_0^t \Phi_k(\tau)\sin\mu_k a\,(t-\tau)\, d\tau.$$

5) Окончательный вид решения всей задачи получаем в виде ряда по собственным функциям $X_k(x)$, найденным для подобной задачи с однородными граничными условиями.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{g_k}{\mu_k a}\sin\mu_k at+f_k\cos\mu_k at-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{\mu_k}\int_0^t\Phi_k(\tau)\sin\mu_k a(t-\tau)\,d\tau\right\}X_k(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^l g(\xi)\bar{X}_k(\xi)\,d\xi\cdot\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}\,X_k(x)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\bar{X}_k(\xi)\,d\xi\cdot\frac{\sin\mu_k a}{\mu_k a}\,X_k(x)-$$

$$-a^2\int_0^t d\tau\left[\int_0^l F(\xi,\tau)\bar{X}_k(\xi)\,d\xi+\varphi(\tau)\,\bar{X}_k(0)+\right.$$

$$\left.\left.+\psi(\tau)\,\bar{X}_k'(l)\;\right]\cdot\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}\,d\tau\right\}X_k(x)=$$

$$=\int_0^l g(\xi)\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k(\xi)\right)\,d\xi+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k at}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k(\xi)\right)d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\,\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k(\xi)\right)d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t\varphi(\tau)\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k(0)\right)d\tau-$$

$$-a^2\int_0^t\psi(\tau)\left(\sum_k\frac{\sin\mu_k a(t-\tau)}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k'(l)\right)d\tau=$$

$$=\int_0^l g(\xi)\,G(x,\xi\,|\,t)\,d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f(\xi)\,G(x,\xi\,|\,t)\,d\xi-$$

$$-\,a^2\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\,G(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t \varphi(\tau)\, G(x,0\,|\,t-\tau)\, d\tau - a^2\int_0^t \psi(\tau)\, G'_\xi(x,l\,|\,t-\tau)\, d\tau\,,$$

где $G(x,\xi\,|\,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k a t}{\mu_k a}X_k(x)\,\bar{X}_k(\xi)$ – функция Грина (источника) нашей задачи, записанная в виде равномерно сходящегося ряда. Временной множитель $\frac{\sin\mu_k a t}{\mu_k a}$ называют ядром функции источника.

Другие частные случаи функции Грина равны $(\theta = t-\tau>0)$

$$G(x,0\,|\,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k a\theta}{\mu_k a}X_k(x)\,\bar{X}_k(0) \quad \text{при} \quad \bar{X}_k(0)=\sqrt{\frac{2}{l}}>0\,;$$

$$G'_\xi(x,l\,|\,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k a\theta}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}'_k(l)$$

при $\bar{X}'_k(l)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\mu_k(-1)^{k+1}\neq 0$.

Очевидно, подобные общие формулы можно получить и при решении задач в других ортогональных системах координат для уравнения колебаний на плоскости и в пространстве. При этом в решении получаются кратные интегралы по координатам и кратные ряды по собственным функциям вида $\Phi_{kn}(x,y)=X_k(x)\,Y_n(y)$ или подобные (см. ниже темы 5, 6 и 7).

6) Проверка полученной формулы решения по всем условиям задачи и по размерностям.

На концах рассматриваемого отрезка $0\le x\le l$ входящий в функцию Грина множитель $X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x$ при $\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0$, найденный для однородных граничных условий $X'_k(0)=0$ и $X_k(l)=0$, дает нулевой результат $G'_x(0,\xi\,|\,t)=0$ и $G(l,\xi\,|\,t)=0$ (аналогично для $G'_\xi(x,0\,|\,\theta)$ и $G(x,l\,|\,\theta)$); поэтому полученная формула решения не может удовлетворять заданным неоднородным граничным условиям. Однако эта формула является решением нашей задачи везде внутри рассматриваемого интервала $0<x<l$, а граничные значения берутся из граничных условий задачи.

При проверке выполнения первого начального условия $u(x,0)=f(x)$ в разрешающей формуле остается только второе слагаемое

$u(x,0)=\int\limits_0^l f(\xi)G_t'(x,\xi\,|\,0)\,d\xi=\int\limits_0^l f(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi=f(x)$ – первое начальное условие выполняется, так как $G_t'(x,\xi\,|\,0)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}X_k(x)\bar{X}_k(\xi)=\delta(\xi-x)$.

При этом $G(x,\xi\,|\,0)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin a\,\mu_k\,t}{\mu_k a}X_k(x)\bar{X}_k(\xi)\Big|_{t=0}=0$.

При проверке второго начального условия $u_t'(x,0)=g(x)$ в разрешающей формуле остается только первое слагаемое $u_t'(x,0)=\int\limits_0^l g(\xi)\,G_t'(x,\xi\,|\,0)\,d\xi=\int\limits_0^l g(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi=g(x)$ – значит, выполняется и второе начальное условие. Здесь использовали $G_{tt}''(x,\xi\,|\,0)=0$, а также производную

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\Big[\varphi(\tau)\,G(x,0\,|\,t-\tau)+\psi(\tau)\,G_\xi'(x,l\,|\,t-\tau)\Big]\,d\tau\Big|_{t=0}=$$

$$=\Bigg[\int\limits_o^t\varphi(\tau)\,G_t'(x,0\,|\,t-\tau)\,d\tau+\varphi(t)\,G(x,0\,|\,t-t)+$$

$$+\int\limits_0^t\psi(\tau)\,G_{\xi t}''(x,l\,|\,t-\tau)\,d\tau+\psi(t)G_\xi'(x,l\,|\,t-t)\Bigg]\Bigg|_{t=0}=0.$$

При проверке того, что полученный ответ $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению задачи, сначала найдем нужные вторые производные от его частей

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,\xi\,|\,t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mu_k^2-\frac{1}{a^2}(-\mu_k^2a^2)\right)\cdot\sin\mu_k a t\cdot X_k(x)\,\bar{X}_k(\xi)\equiv 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_t'(x,\xi\,|\,t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mu_k^2-\frac{1}{a^2}(-\mu_k^2a^2)\right)\cdot\mu_k a\cdot\cos\mu_k at\cdot X_k(x)\,\bar{X}_k(\xi)=0.$$

Ниже при вычислении вторых производных по времени будем использовать формулу Лейбница о дифференцировании интеграла по параметру (здесь $\theta=t-\tau>0$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau)G(x,\xi\,|\,\theta)\,d\xi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial t}G(x,\xi\,|\,\theta)\,d\xi + \int_0^l F(\xi,t)\,G(x,\xi\,|\,t-t)\,d\xi\right\} =$$

$$= \left[G(x,\xi\,|\,0)=0\right] = \int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,\xi\,|\,\theta)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^l F(\xi,t)\;G_t'(x,\xi\,|\,0)\;d\xi = \ldots + \int_0^l F(\xi,t)\;\delta(\xi-x)\;d\xi =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,\xi\,|\,\theta)\;d\xi + F(x,t).$$

Здесь воспользовались представлением δ-функции Дирака в виде ряда

$$G_t'(x,\xi\,|\,0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)\,\bar{X}_k(\xi) = \delta(\xi - x).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \varphi(\tau)\;G(x,0\,|\,\theta)\;d\tau =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t \varphi(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\;G(x,0\,|\,\theta)\,d\tau + \varphi(t)\;G_t'(x,0\,|\,0)\right\} =$$

$$= \int_0^t \varphi(\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,0\,|\,t-\tau)\;d\tau\,;$$

так как $\quad G_t'(x,0\,|\,0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)\bar{X}_k(0) = \delta(x) = 0 \quad$ при $\quad x \neq 0$.

Аналогично предыдущему получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \psi(\tau)\;G_\xi'(x,l\,|\,\theta)\;d\tau = \int_\theta^t \psi(\tau)\;\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_\xi'(x,l\,|\,\theta)\,d\tau\,.$$

Здесь оказывается

$$\frac{\partial}{\partial t}G_\xi'(x,l\,|\,0) = \frac{\partial}{\partial \xi}G_t'(x,l\,|\,0) = \frac{\partial}{\partial \xi}\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)\;\bar{X}_k(\xi)\Big|_{\xi=l} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\delta(\xi-x)\Big|_{\xi=l} = \frac{\delta(l-x)}{l-x} = 0 \quad \text{при} \quad x \neq l\,.$$

Теперь очевидно, что полученное решение $u(x,t)$ удовлетворяет заданному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^l g(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,\xi\,|\,t)\,d\xi+$$

$$+\int_0^l f(\xi)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G'_t(x,\xi\,|\,t)\,d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,\xi\,|\,t-\tau)\,d\xi+F(x,t)-$$

$$-a^2\int_0^t \varphi(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1`}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,0\,|\,t-\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int_0^t \psi(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G'_\xi(x,l\,|\,t-\tau)\,d\tau=$$

$$=0+0-0+F(x,t)-0-0=F(x,t).$$

Значит, полученная нами общая формула решения задачи $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению задачи и всем поставленным условиям в декартовой системе координат Oxt внутри полуполосы вида $D=\{0<x<l,\quad 0\le t<\infty\}$, что и требовалось доказать.

Наконец, проверим совпадение всех размерностей в формуле ответа $u(x,t)$. Пусть $[u(x,t)]=W$, тогда $[F]=\dfrac{W}{L^2}$, $[\varphi]=\dfrac{W}{L}$, $[\psi]=W$, $[f]=W$, $[g]=\dfrac{W}{T}$, $[a]=\dfrac{L}{T}$, $[\mu_k]=\dfrac{1}{L}$ и $[\mu_k l]=1$, $[\mu_k a\,t]=\dfrac{1}{L}\dfrac{L}{T}T=1$, $[X_k]=\dfrac{1}{\sqrt{L}}$, $[G]=L\dfrac{T}{L}\dfrac{1}{L}=\dfrac{T}{L}$.

Тогда $[u(x,t)]\equiv W=$

$$=\frac{W}{T}\frac{T}{L}L+\frac{1}{T}W\frac{T}{L}L+\frac{L^2}{T^2}\left(T\frac{W}{L^2}\frac{T}{L}L+\frac{W}{L}\frac{T}{L}T+W\frac{T}{L^2}T\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W+\frac{L^2}{T^2}\left(W\frac{T^2}{L^2}\right)\Rightarrow W+W\Rightarrow W.$$

<u>Тема 4.</u>

Стационарные задачи

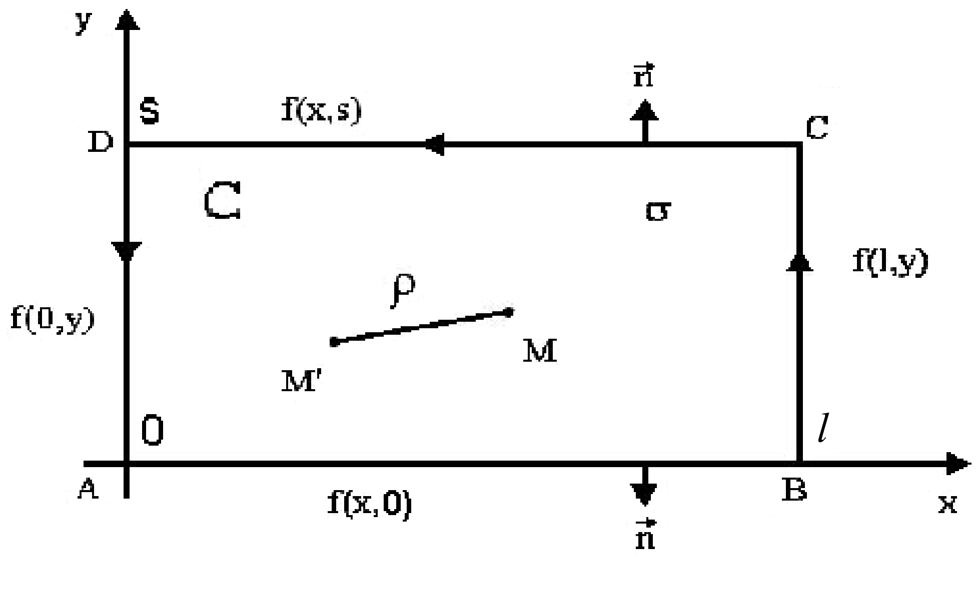
Решение двумерных стационарных задач эллиптического типа методом разложения по собственным функциям.

Основные вопросы. Постановка и решение стационарных плоских (двумерных) задач математической физики для уравнений в частных производных эллиптического типа методом разложения по собственным функциям (разделения переменных). Обычный и многократный ряды Фурье; суммирование простейших рядов. Составление функции Грина (источника). Граничные условия Дирихле, Неймана и смешанные для дифференциальных уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца. Использование метода конформных отображений для решения плоских (двумерных) стационарных задач.

Литература: [1] – гл. 4, § 1 (1, 2). [2] – гл. 18, § 1, 2. гл. 19, § 1, 2, 7. [4] – п. 33, 34. [5] – гл. 8, § 3 № 19, 22, 54, 77. [6] – гл. 4, §1–6.

Задания: [7] – № 180–183, 188. [8] – гл. 4, № 95, 101. гл. 7, № 17, 22.

№ 4.1 (А). Решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца (амплитуд) внутри прямоугольника. Вывод функции Грина (источника).



Постановка задачи:

$$\begin{cases} \Delta_2 u + \chi^2 u(M) = F(M). \\ u|_C = f(M). \end{cases}$$

$M(x, y)$ – точка измерения (параметры интегрирования).
$M'(\xi, \eta)$ – точка источника (заряда) (переменные интегрирования).
$\rho = |M'M| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} > 0$.
$\sigma = \square ABCD$ – заданная прямоугольная область $l \times s$ и $C = \partial\sigma$ – ее граница.
$\vec{n}$ – вектор внешней нормали к контуру C.
$\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа.
$\hat{D} = \Delta_2 + \chi^2$; $\chi = const \geq 0$.
$u = u(M) \equiv u(x, y)$ – искомая функция.
$M(x, y) \in \sigma$, $M'(\xi, \eta) \in \sigma \cup C$; $0 \leq x, \xi \leq l$, $0 \leq y, \eta \leq s$.

1) Граничное условие $u|_C = f(M)$ не всегда удается всюду сделать однородным.

2) Постановка и решение краевой задачи для оператора Лапласа в двумерном случае (граничные условия выбираются по аналогии с заданными, но эти новые условия предполагаются всегда однородными).

$$\begin{cases} \Delta_2 \Phi_{кn} = \lambda_{кn} \Phi_{кn}(M). \\ \Phi_{kn}|_C = 0. \end{cases}$$

$\Phi_{кn}(M) \equiv \Phi_{кn}(x, y) = X_к(x) Y_n(y)$ – собственные функции;
$\lambda_{кn} = -\mu^2{}_{kn} < 0$ – собственные значения.

Здесь после разделения переменных находят значения функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ из краевых задач (см. табл. 1).

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0, \quad k \in N; \quad L_2(0, l\,|\,1).$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \sin \mu_k y, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{s} > 0, \quad n \in N; \quad L_2(0, s\,|\,1).$$

$$\lambda_{kn} = -\mu^2_{кn} = -\mu^2_k - \mu^2_n = -\pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{s^2} \right) < 0 .$$

Множество функций $\Phi_{\kappa n}(x,y)$ составляет ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(M(x,y)\in\sigma\,|\,1)$ со скалярным произведением вида

$$(\Phi_{\kappa n},\Phi_{\kappa' n'})\equiv\iint\limits_{\sigma}\Phi_{\kappa n}(\xi,\eta)\bar{\Phi}_{\kappa' n'}(\xi,\eta)\cdot 1\cdot d\sigma'=$$

$$=\int\limits_0^l X_k(\xi)\bar{X}_{k'}(\xi)d\xi\cdot\int\limits_0^s Y_n(\eta)\bar{Y}_{n'}(\eta)\,d\eta=\delta_{kk'}\,\delta_{nn'}\,;$$

здесь $d\sigma'=d\xi\,d\eta,\quad \|\Phi_{nn}\|^2=(\Phi_{\kappa n},\Phi_{\kappa n})=1$ – условие нормировки.

$$\Delta_2\Phi_{kn}(M)=\Delta_2\left(X_k(x)Y_n(y)\right)=$$

$$=X_k''Y_n+X_kY_n''=-(\mu_k^2+\mu_n^2)\,X_kY_n=$$

$$=-\mu_{kn}^2X_kY_n=\lambda_{kn}X_kY_n=\lambda_{kn}\Phi_{kn}(M).$$

Ниже понадобятся разложения по базису $\Phi_{kn}(M)$ вида

$$u(M)=\sum_{k,n}u_{kn}\Phi_{kn}(M),$$

где $u_{kn}=(u,\Phi_{kn})\equiv\iint\limits_{\sigma}u(M')\,\bar{\Phi}_{kn}(M')\,d\sigma'=const$ – искомая величина (координата),

$$F(M)=\sum_{k,n}F_{kn}\Phi_{kn}(M),$$

где $F_{kn}=(F,\Phi_{kn})\equiv\iint\limits_{\sigma}F(M')\bar{\Phi}_{kn}(M')d\sigma'=const$ – известная.

Здесь символ $\sum\limits_{k,n}$ означает сумму (ряд) по всем значениям $k,n\in N$.

3) Проверка самосопряженности (эрмитовости) оператора $\hat{D}=\Delta_2+\chi^2$ и определение величины (координаты) u_{kn}.

$$(\hat{D}u,\Phi_{kn})-(u,\hat{D}\Phi_{kn})=\iint\limits_{\sigma}\left(\hat{D}u\cdot\bar{\Phi}_{kn}-u\cdot\hat{D}\bar{\Phi}_{kn}\right)d\sigma'=$$

$$=\iint\limits_{\sigma}(F\,\bar{\Phi}_{kn}-u\left(\lambda_{kn}+\chi^2\right)\bar{\Phi}_{kn})\,d\sigma'=$$

$$=F_{kn}-(\lambda_{kn}+\chi^2)\,u_{kn}\equiv(\Delta_2u,\Phi_{kn})-(u,\Delta_2\Phi_{kn})=$$

$$=\iint\limits_{\sigma}(\Delta_2u\cdot\bar{\Phi}_{kn}-u\cdot\Delta_2\bar{\Phi}_{kn})d\sigma'.$$

Если записать формулу Остроградского–Гаусса $\iiint\limits_V div\vec{A}\cdot dV = \oint\!\!\oint\limits_S \vec{A}\,d\vec{s}$ для вектора $\vec{A} = u\,grad\,v - v\,grad\,u$ (здесь замкнутая поверхность S ограничивает объем V и $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$), то получим формулу Грина. Ее плоский случай имеет вид $\iint\limits_\sigma (u\,\Delta_2 v - v\,\Delta_2 u)d\sigma = \oint\limits_C \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) dl$ (здесь C – граница плоской области σ и $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная вдоль внешней нормали к этой границе; дифференциал дуги вдоль границы C равен $d\,l = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$). Применив формулу Грина, получим окончательно

$$(\hat{D}u,\varPhi_{kn}) - (u,\hat{D}\varPhi_{kn}) = \varPhi_{kn} - (\lambda_{kn} + \chi^2)\,u_{kn} =$$

$$= \oint\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial n'}\,\bar{\varPhi}_{kn} - u\,\frac{\partial \bar{\varPhi}_{kn}}{\partial n'}\right) d\,l' =$$

$$= -\oint\limits_C f(M')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,\varPhi_{kn}(M')\,dl' \neq 0, \qquad \text{где } d\,l' = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}\,.$$

В нашей задаче Дирихле в интегралы подставлены заданные граничные условия $u\,|_C = f(M)$ и $\varPhi_{kn}\,|_C = 0$. Ниже (при решении задачи Неймана и смешанной) будут соответственно подставляться граничные условия вида $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f(M)$ или $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\,u\right)\Big|_C = f(M)$. Тогда последний интеграл примет вид $+\oint\limits_C f(M')\,\bar{\varPhi}_{kn}(M')\cdot d\,l'$, т. е. заменится $\frac{\partial}{\partial n} \to -1$.

Результаты проверки операторов на эрмитовость оказываются отрицательными (разность скалярных произведений получается отличной от нуля). Однако удается получить равенство

$$F_{kn} - (\lambda_{kn} + \chi^2)\,u_{kn} = -\oint\limits_C f\,\frac{\partial}{\partial n'}\bar{\varPhi}_{kn}\,d\,l',$$

откуда легко находится координата

$$u_{kn} = \frac{1}{\lambda_{kn} + \chi^2}\left(F_{kn} + \oint\limits_C f\,\frac{\partial}{\partial n'}\bar{\varPhi}_{kn}\,d\,l'\right).$$

4) Окончательный вид решения задачи и вывод функции Грина (источника).

$$u(M)=\sum_{k,n}u_{kn}\Phi_{kn}(M)=\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}F_{kn}\,\Phi_{kn}(M)+$$

$$+\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}\oint\limits_C f(M')\cdot\frac{\partial}{\partial n'}\bar{\Phi}_{\kappa n}(M')\cdot dl'\cdot\Phi_{\kappa n}(M)=$$

$$=\iint\limits_\sigma F(M')\left(\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}\bar{\Phi}_{\kappa n}(M')\,\Phi_{\kappa n}(M)\right)d\sigma'+$$

$$+\oint\limits_C f(M')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}\bar{\Phi}_{\kappa n}(M')\,\Phi_{\kappa n}(M)\right)dl'.$$

Если ввести функцию Грина (источника) по формуле

$$G(M,M')\equiv\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}\bar{\Phi}_{\kappa n}(M')\;\Phi_{\kappa n}(M)\quad\text{при }\lambda_{\kappa n}+\chi^2\neq 0,$$

то окончательный вид формулы решения будет

$$u(M)=\oint\limits_C f(M')\frac{\partial}{\partial n'}G(M,M')\,dl'+\iint\limits_\sigma F(M')\,G(M,M')\,d\sigma'.$$

В случае задач с граничными условиями второго и третьего рода (условий Неймана и смешанных) в первом интеграле окончательной формулы решения нужно сделать замену $\frac{\partial}{\partial n'}\to -1$.

Так как приведенное решение задач выражается через двойные ряды, практическое использование которых сложно и громоздко, а их сведение к однократному ряду (суммирование по одному из индексов) операция трудоемкая, то обычно многомерные задачи решаются методом последовательного разделения переменных, что и будет проведено ниже.

Важно отметить, что общие формулы решения, аналогичные полученным выше, можно указать и для решения задач в других ортогональных системах координат. Аналогичные формулы получаются и для решения стационарных задач в пространстве.

5) Проверка решения и свойства функции Грина.

$$G(M,M')=\bar{G}(M',M)=G(\rho)\quad\text{при}\quad\rho=|MM'|>0.$$

$$\hat{D}_M G\equiv\Delta_2 G+\chi^2 G=\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}+\chi^2}\bar{\Phi}_{\kappa n}(M')\cdot\hat{D}\Phi_{\kappa n}(M)=$$

$$= \sum_{k,n} \frac{1}{\lambda_{kn} + \chi^2} \bar{\Phi}_{\kappa n}(M') \left(\lambda_{\kappa n} + \chi^2\right) \Phi_{\kappa n}(M) =$$

$$= \sum_{k,n} \bar{\Phi}_{\kappa n}(M') \, \Phi_{\kappa n}(M) = \delta(M, M') \equiv \delta(x - \xi) \, \delta(y - \eta) \cdot$$

Постановка задачи для функции Грина при граничных условиях Дирихле:

$$\begin{cases} \hat{D} G \equiv \Delta_2 G + \chi^2 \, G(M, M') = \delta(M, M'). \\ G|_C = 0. \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial n} G(M, M')|_C = \delta(M, M')$ – дополнительное условие.

Проверка выполнения уравнения Гельмгольца при решении задачи Дирихле:

$$\hat{D}_M u(M) = \oint_C f(M') \cdot \hat{D} \frac{\partial}{\partial n'} G(M, M') \, dl' +$$

$$+ \iint_\sigma F(M') \cdot \hat{D} G(M, M') \, d\sigma' =$$

$$= 0 + \iint_\sigma F(M') \cdot \sigma(M, M') \, d\sigma' = F(M);$$

здесь $\hat{D} \dfrac{\partial}{\partial n'} G(M, M')\Big|_C = 0 \cdot$

Для краевых задач Неймана и смешанной проверка выполнения уравнения Гельмгольца проводится аналогично:

$$\hat{D}_M u(M) = -\oint_C f(M') \cdot \hat{D} G(M, M') \, dl' +$$

$$+ \iint_\sigma F(M') \cdot \hat{D} G(M, M') \, d\sigma' =$$

$$= 0 + \iint_\sigma F(M') \, \delta(M, M') \, d\sigma' = F(M);$$

здесь $\hat{D} G(M, M')\Big|_C = 0$.

Проверка выполнения граничного условия при решении задачи Дирихле:

$$u(M)|_C = \oint_C f(M') \frac{\partial}{\partial n'} G(M, M')\Big|_C \, dl' +$$

$$+ \oiint_\sigma F(M') \, G(M, M')\Big|_C \, d\sigma' =$$

$$= \oint_C f(M') \, \delta(M, M') \, dl' + 0 = f(M) \cdot$$

В задачах Неймана и смешанной ставятся граничные условия противоположного вида $\frac{\partial}{\partial n} G(M, M')\big|_C = 0$ и $G(M, M')\,|_C = \delta(M, M')$.

По условиям задачи имеем размерности $[u(x, y)] = Q$,

$$[F] = \frac{Q}{L^2},\quad [f] = Q,\quad [\chi] = \frac{1}{L},\quad [\lambda_{kn}] = \frac{1}{L^2},\quad [\varPhi_{kn}] = \frac{1}{L}.$$

Тогда $[G] = 1$ и $[u] = [f]\,\frac{1}{L}\,L + [F]\,L^2 \Rightarrow Q$.

№ 4.2 (А). Решение смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца внутри прямоугольника методом разделения переменных.

$$u = u(x,t);$$

$$0 \le x \le l,\quad 0 \le y \le s.$$

$$\begin{cases} \Delta_2 u + \chi^2 u(x, y) = A\,y. \\ u'_x(0, y) = 0, \quad u\,(l, y) = 0. \\ u\,(x, 0) = 0, \quad u\,(x, s) = Bx. \end{cases} \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$A, B, \chi, l, s = const > 0.$$

1) Пара граничных условий по переменной $x \in [0, l]$ уже однородна.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной x.

Примем $u(x, y) = \sum_k X_k(x)\,Y_k(y)$, где $X_k(x)$ – собственная функция оператора $\hat{D} = \frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями $X'_k(0) = X_k(l) = 0$; из табл. 1 находим

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x;\quad \mu_k = \frac{\pi}{2l}(2k+1) > 0;\quad k \in Z_0.$$

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $Y_k(y)$.

$$\Delta_2 u + \chi^2\, u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{X''_k Y_k + X_k Y''_k + \chi^2 X_k Y_k\right\} =$$

$$= \sum_k \left\{Y''_k - (\mu_k{}^2 - \chi^2)\,Y_k\right\} X_k = \left[\mu_k{}^2 - \chi^2 = p_k{}^2 > 0\right] =$$

$$= \sum_k \left\{Y''_k - p_k^2 Y_k(y)\right\} X_k(x) = Ay = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(y)\,X_k(x),$$

где $\gamma_k(y) = (Ay, X_k) = Ay\sqrt{\dfrac{2}{l}}\int\limits_0^l \cos\mu_k x\,d\,x =$

$$= \frac{Ay}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x\Big|_0^l = \frac{Ay}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k.$$

Теперь искомое уравнение для функции $Y_k(y)$ имеет вид

$$Y_k'' - p_k^2 Y_k(y) = \gamma_k(y) = \frac{Ay}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k \equiv \tilde{A}_k y\,; \quad \tilde{A}_k = const.$$

4) Решение дифференциального уравнения для функции $Y_k(y)$. Общее решение соответствующего однородного уравнения, очевидно, будет

$$\overset{o}{Y}_k(y) = \overset{1}{C}_k\, e^{p_k y} + \overset{2}{C}_k\, e^{-p_k y} \equiv C_k \cdot sh\; p_k y + \tilde{C}_k \cdot sh\; p_k(s-y).$$

Для упрощения дальнейших вычислений общее решение представлено в форме, где одно слагаемое обращается в нуль при $y = 0$, а другое – на противоположном конце при $y = s$.

Частное решение уравнения, соответствующее его линейной правой части, тоже будем искать в виде линейной функции

$$\tilde{Y}_k(y) = \alpha y + \beta \quad (\alpha, \beta = const),$$

тогда $\tilde{Y}_k'' - p_k^2\, \tilde{Y}_k(y) = 0 - p_k^2\,(\alpha y + \beta) = \tilde{A}_k\; y$.

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях y, получим $\beta = 0$ и $\alpha = -\dfrac{\tilde{A}_k}{p_k^2} = \dfrac{A}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,(-1)^{k+1} = const$.

Окончательно общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка для функции $Y_k(y)$ запишется в виде

$$Y_k(y) = \overset{o}{Y}_k(y) + \tilde{Y}_k(y) =$$

$$= C_k sh\; p_k y + \tilde{C}_k sh\; p_k(s-y) - \frac{A\,y}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k.$$

Теперь искомую функцию $u(x, y)$ можно представить

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{ C_k\; sh\; p_k y + \tilde{C}_k\; sh\; p_k(s-y) - \frac{A\,y}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k \right\} X_k(x),$$

где постоянные C_k и $\tilde{C}_k$ еще подлежат определению.

5) Напомним, что пара однородных условий по x помогла определить базисные функции $X_k(x)$; уравнение для функции $u(x,y)$ позволило записать уравнение для функции $Y_k(y)$. Теперь пара граничных неоднородных условий по y поможет определить постоянные C_k и $\tilde{C}_k$.

Воспользуемся сначала однородным граничным условием при $y=0$ (как более простым) и получим

$$u(x,0)=\sum_k\left\{C_k\cdot 0+\tilde{C}_k\cdot sh\ p_k s-0\right\}X_k(x)=0\Rightarrow \tilde{C}_k=0.$$

Второе граничное условие при $y=s$ дает

$$u(x,s)=\sum_k\left\{C_k\cdot sh\ p_k s+0-\frac{As}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k\right\}X_k(x)=Bx\equiv\sum_k\beta_k X_k(x),$$

где $\beta_k=(B\,x,X_k)=B\sqrt{\dfrac{2}{l}}\displaystyle\int_0^l x\cos\mu_k x\,dx=$

$$=\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(x\sin\mu_k x\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x\,dx\right)=$$

$$=\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(l\,(-1)^k+\frac{\cos\mu_k l-1}{\mu_k}\right)=\frac{B}{\mu_k{}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(\mu_k l(-1)^k-1\right).$$

Из второго граничного условия при $y=s$ находим

$$C_k\ sh\ p_k s-\frac{As}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\ (-1)^k=\beta_k\equiv\frac{B}{\mu_k{}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\mu_k l\,(-1)^k-1\right)$$

или окончательно

$$C_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\frac{As}{\mu_k p_k^2}(-1)^k+\frac{B}{\mu_k{}^2}(\mu_k l(-1)^k-1)\right\}/\,sh\ p_k s,$$

где $p_k^2=\mu_k{}^2-\chi^2>0$, $\mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)>0$, $k\in Z_0$.

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(y)X_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_k\ sh\ p_k y-\frac{Ay}{\mu_k p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k\right\}\sqrt{\frac{2}{l}}\,\cos\mu_k x=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{As}{p_k^2}+\frac{B}{\mu_k}\left(\mu_k l-(-1)^k\right)\right]\frac{sh\,p_k y}{sh\,p_k s}-\frac{Ay}{p_k^2}\right\}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cos\mu_k x,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$. Ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно) при всех значениях x и y. Общий член ряда имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

Отметим, что решения задач эллиптического типа получаются в виде быстро сходящихся рядов, выражающихся через экспоненты. Всегда метод разделения переменных дает ответ в форме простых однократных рядов Фурье, в то время как применение функции Грина в общей формуле дает ряды многократные – они неудобны для расчетов, а к однократным рядам сводятся сложно.

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u'_x(0,y) = 0 \because (\cos\mu_k x)'\big|_{x=0} = 0; \quad u(l,y) = 0 \because \cos\mu_k l = 0;$$

$$u(x,0) = 0 \because \{\cdots\}\big|_{y=0} = 0.$$

$$u\,(x,s) = \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{As}{p_k^2} + \left(\mu_k l - (-1)^k\right)\frac{B}{\mu_k}\right] - \frac{As}{p_k^2}\right\}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cos\mu_k x =$$

$$= \frac{2B}{l}\sum_k\left(\frac{l}{\mu_k}(-1)^k - \frac{1}{\mu_k^{\,2}}\right)\cos\mu_k x =$$

$$= \frac{4lB}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)\cos\frac{\pi x}{2l}(2k+1) =$$

$$= \frac{4lB}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) = Bx.$$

(см. Приложение 1, формулы 8 и 11).

По условиям задачи имеем размерности $[u(x,y)] = Q$,

$$[A] = \frac{Q}{L^3}, \quad [B] = \frac{Q}{L}, \quad [\chi] = \frac{1}{L}, \quad [\mu_k] = \left[\,p_k = \sqrt{\mu_k^{\,2} - \chi^2}\,\right] = \frac{1}{L}.$$

Поэтому получим

$$[u] = \frac{1}{L}\left\{\left[\frac{Q}{L^3}LL^2 + \frac{Q}{L}L(1)\right]\cdot 1 + \frac{Q}{L^3}LL^2\right\}L \Rightarrow Q.$$

№ 4.3 (А). Решение смешанной краевой задачи для однородного уравнения Гельмгольца внутри прямоугольника.

$$\begin{cases} \Delta_2 u + \chi^2 u(x,y) = 0. \\ u(0,y) = 0, \quad u'_x(l,y) = A. \\ u'_y(x,0) = u'_y(x,s) = 0. \end{cases} \qquad u = u(x,y); \;\; 0 \le x \le l; \quad 0 \le y \le s.$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$A, x, l, s = const > 0.$$

1) Приведение пары граничных условий по переменной x к однородным достигается заменой искомой функции $u(x,y) = v(x,y) + Ax$. Построение базиса по уже однородной паре граничных условий для переменной y с производными на обоих концах оказывается более громоздким.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \chi^2 v(x,y) = -A\chi^2 x. \\ v(0,y) = v'_x(l,y) = 0. \\ v'_y(x,0) = v'_y(x,s) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v = v(x,y). \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le y \le s. \end{array}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной x.

Примем $v(x,y) = \sum\limits_k X_k(x)\,Y_k(y)$, где $X_k(x)$ – собственная функция оператора $\hat{D} = \dfrac{d^2}{d\,x^2}$ с граничными условиями $X_k(0) = X'_k(l) = 0$; из табл. 1 находим $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin \mu_k x$; $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$; $k \in Z_0$.

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $Y_k(y)$.

$$\Delta_2 u + \chi^2 u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ X''_k Y_k + X_k Y''_k + \chi^2 X_k Y_k \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Y''_k - p_k^2\, Y_k(y) \right\} X_k(x) = -A\chi^2 x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k X_k(x),$$

где $p_k^2 = {\mu_k}^2 - \chi^2 > 0$.

$$\gamma_k = (-A\chi^2 x,\ X_k) = -A\chi^2\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l x\sin\mu_k x\,dx =$$

$$= \frac{A\chi^2}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{x\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\mu_k x dx\right\} =$$

$$= \frac{A\chi^2}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{0 - \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k x\Big|_0^l\right\} = \frac{A\chi^2}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^{k+1} = const.$$

Теперь уравнение для функции $Y_k(y)$ примет вид

$$Y_k'' - p_k^2\cdot Y_k(y) = \gamma_k \equiv \frac{A\chi^2}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^{k+1}.$$

4) Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения для функции $Y_k(y)$.

$\overset{o}{Y}_k(y) = C_k\cdot ch\,p_k y + \tilde{C}_k\cdot ch\,p_k(s-y)$ – общее решение однородного уравнения, записанное в виде, удобном для удовлетворения граничных условий по переменной *y*; здесь $C_k, \tilde{C}_k = const$.

Частное решение уравнения будем искать в линейной форме $\tilde{Y}_k(y) = \alpha y + \beta \quad (\alpha, \beta = const)$, тогда

$\tilde{Y}_k(y) = -\dfrac{\gamma_k}{p_k^2} = \dfrac{A\chi^2}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot(-1)^k = const$ – частное решение неоднородного уравнения оказывается постоянным.

Тогда общее решение линейного дифференциального уравнения для функции $Y_k(y)$ оказывается равным

$$Y_k(y) = \overset{o}{Y}_k(y) + \tilde{Y}_k(y) =$$

$$= C_k\cdot ch\,p_k y + \tilde{C}_k\cdot ch\,p_k(s-y) + \frac{A\chi^2}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^k.$$

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по координате *y*.

$$v(x,y) = \sum_k Y_k(y)\cdot X_k(x) =$$

$$= \sum_k \left\{C_k\cdot ch\,p_k y + \tilde{C}_k\cdot ch\,p_k(s-y) + \frac{A\chi^2}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot(-1)^k\right\}\cdot X_k(x).$$

$$v'_y(x,0) = \sum_k \left\{ 0 - \tilde{C}_k p_k \cdot sh\, p_k s + 0 \right\} \cdot X_k(x) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_k = 0.$$

$$v'_y(x,s) = \sum_k \left\{ \tilde{C}_k \cdot p_k sh\, p_k s - 0 + 0 \right\} \cdot X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,y) = v(x,y) + Ax = Ax + \frac{2A}{l}\chi^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu_k^2 p_k^2} \cdot \sin \mu_k x,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$ и $p_k^2 = \mu_k^2 - \chi^2 > 0$. Полученный ряд сходится правильно при всех значениях переменных *x* и *y*; его общий член имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^4}\right)$ при $k \to \infty$. Здесь решение вообще не зависит от значений y.

7) Проверка полученного решения по всем условиям, уравнению и по размерностям.

$$u(0,y) = 0\ ,\quad u'_y(x,0) = u'_y(x,y) = 0;$$

$$u'_x(l,y) = A + \frac{2A}{l}\chi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^k}{\mu_k p_k^2} \cdot \cos \mu_k l = A \because \cos \mu_k l = \cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \chi^2 u(x,y) =$$

$$= 0 + A\chi^2 x + \frac{2A}{l}\chi^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu_k^2 p_k^2}\left(-\mu_k^2 + 0 + \chi^2\right) \cdot \sin \mu_k x =$$

$$= \frac{2A}{l}\chi^2 \left\{ \frac{1}{2} l\, x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu_k^2} \sin \mu_k x \right\} =$$

$$= \frac{8Al}{\pi^2}\chi^2 \left\{ \frac{\pi^2 x}{8\, l} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2l}(2k+1) \right\} = 0$$

(см. Приложение 1, формула 12).

По условию задачи имели размерности $\left[\mathrm{u(x,y)}\right] = \mathrm{Q}$, $\left[\mathrm{A}\right] = \dfrac{Q}{L}$, $\left[\chi\right] = \dfrac{1}{L}$, $\left[l\right] = \left[\mathrm{s}\right] = \mathrm{L}$. Тогда $[\mathrm{u}] = \dfrac{Q}{L} \cdot L + \dfrac{Q}{L} \cdot \dfrac{1}{L} \cdot \dfrac{1}{L^2} \cdot L^2 \cdot L^2 \Rightarrow Q$.

8) Если $\chi = 0$ (при этом уравнение Гельмгольца превращается в уравнение Лапласа), получаем совсем простое решение задачи *u(x,y)=Ax*.

№ 4.4 (В). Смешанная краевая задача (когда все граничные условия однородны) для уравнения Пуассона внутри прямоугольника.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Axy. & u = u(x,y). \\ u(0,y) = u'_x(l,y) = 0. & 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s. \\ u'_y(x,0) = u(x,s) = 0. & A, l, s = const > 0. \end{cases}$$

1) Все граничные условия задачи заданы однородными.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи.

Рассмотрим, например, оператор $\hat{D} = \dfrac{d^2}{d\,y^2}$ с граничными условиями $Y'(0)=Y(s)=0$; из табл. 1 найдем

$$\mathrm{Y}_k(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \cos \mu_k y\,; \qquad \mu_k = \frac{\pi}{2s}(2k+1) > 0\,; \qquad k \in \mathbb{Z}_0\,.$$

Поэтому решение будем искать в виде разложения

$$\mathrm{u(x,y)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y)\,.$$

3–4). Вывод и решение дифференциального уравнения для функции $X_k(x)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_k \left\{ X_k'' - \mu_k^2 \cdot X_k(x) \right\} Y_k(y) = A\,x\,y = \sum_k \gamma_k(x) \cdot Y_k(y)\,.$$

Здесь $\gamma_k(x) = (A\,x\,y, Y_k) =$

$$= A\,x \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \int_0^s y \cdot \cos \mu_k y \cdot dy = \frac{Ax}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \left\{ y \cdot \sin \mu_k x \Big|_0^s - \int_0^s \sin \mu_k y \cdot dy \right\} =$$

$$= \frac{A\,x}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \left\{ s(-1)^k + \frac{1}{\mu_k} \cdot \cos \mu_k y \Big|_0^s \right\} = \frac{A\,x}{\mu_k^2} \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \left(\mu_k s \cdot (-1)^k - 1 \right) \equiv \Gamma_k \cdot x\,.$$

$$X_k'' - \mu_k^2 \cdot X_k(x) = \Gamma_k x\,; \qquad \Gamma_k = \frac{A}{\mu_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{s}} \left(\mu_k s \cdot (-1)^k - 1 \right) = const\,.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения удобно записать в виде $\overset{\circ}{X}_k(x) = C_k \cdot sh\,\mu_k x + \tilde{C}_k \cdot ch\,\mu_k (l - x)$, а частное решение будем искать в виде линейной функции $\tilde{X}_k(x) = \alpha x + \beta$ при $\alpha, \beta = const$ (соответственно виду правой части уравнения). Получим $\tilde{X}_k(x) = -\dfrac{\Gamma_k}{\mu_k^2} x$. Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения окажется равным

$$X_k(x) = \overset{\circ}{X}_k(x) + \tilde{X}_k(x) = C_k \cdot sh\,\mu_k x + \tilde{C}_k \cdot ch\,\mu_k (l - x) - \frac{\Gamma_k}{\mu_k^2} x,$$

где $C_k, \tilde{C}_k$=*const* – постоянные интегрирования.

5) Постоянные интегрирования легко определить, используя пару однородных граничных условий по переменной *x*; при этом получим $X_k(0) = X_k'(l) = 0$, а постоянные оказываются равными $\tilde{C}_k = 0$ и $C_k = \dfrac{\Gamma_k}{\mu_k^3} / ch\,\mu_k l$. Тогда окончательно получим

$$X_k(x) = \frac{\Gamma_k}{\mu_k^3} \cdot \left(\frac{sh\,\mu_k x}{ch\,\mu_k l} - \mu_k x \right).$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) =$$

$$= \frac{2A}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{sh\,\mu_k x}{ch\,\mu_k l} - \mu_k x \right) \cdot \frac{(-1)^k \cdot \mu_k s - 1}{\mu_k^5} \cdot \cos \mu_k y.$$

Полученный ряд сходится правильно, и его общий член имеет наименьший порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

7) Проверка решения по всем условиям задачи и по размерностям.

$$u(0, y) = 0; \qquad u_x'(l, y) = 0 \because \left(\frac{sh\,\mu_k x}{ch\,\mu_k l} - \mu_k x \right)' \Big|_{x=l} = 0.$$

$$u_y'(x, 0) = 0 \because (\cos \mu_k y)' \Big|_{y=0} = 0\ ; \qquad u(x, s) = 0 \because \cos \mu_k s = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{2A}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \mu_k^2 \cdot \frac{sh\,\mu_k x}{ch\,\mu_k l} - 0 - \mu_k^2 \left(\frac{sh\,\mu_k x}{ch\,\mu_k l} - \mu_k x \right) \right\} \cdot \frac{(-1)^k \mu_k s - 1}{\mu_k^5} \cdot \cos \mu_k y =$$

$$= \frac{2Ax}{s} \cdot \sum_k \left(s\frac{(-1)^k}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_k^2} \right) \cdot \cos \mu_k y =$$

$$= \frac{4Asx}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \cdot \cos \frac{\pi y}{2s}(2k+1) =$$

$$= \frac{4As}{\pi} x \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{y}{s}\right)\right) = Axy.$$

Имеем размерности по условию задачи $[u(x,y)] = Q$,

$[A] = \dfrac{Q}{L^4}$, $\quad [l] = [s] = L$, $\quad [\mu_k] = \dfrac{1}{L}$. Поэтому $[u] = \dfrac{[A]}{L} L^5 \Rightarrow Q$.

8) Так как все граничные условия задачи однородные, то можно ввести для оператора Лапласа $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ единую двумерную собственную функцию $\Phi_{kn}(x,y) = X_k(x) \cdot Y_n(y)$, составленную из произведения функций одномерных разных переменных (см. табл. 1)

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x, \qquad \mu_k = \frac{\pi}{2s}(2k+1) > 0, \qquad k \in Z_0;$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \cos \mu_n y, \qquad \mu_n = \frac{\pi}{2s}(2n+1) > 0, \qquad n \in Z_0.$$

А искать решение задачи будем в виде двойного ряда Фурье $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{kn} \cdot X_k(x) \cdot Y_n(y) \equiv \sum\limits_{k,n} C_{kn}\Phi_{kn}(x,y)$; здесь обязательно $\lim\limits_{k,n\to\infty} C_{kn} = 0$. Постоянную величину C_{kn} нетрудно определить

$$\Delta_2 u = \sum_{k,n} C_{kn} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_{kn} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_{kn} \right) = -\sum_{k,n}\left(\mu_k^2 + \mu_n^2\right) C_{kn}\Phi_{kn} =$$

$$= \sum_{k,n} \lambda_{kn} C_{kn} \Phi_{kn}(x,y) = Axy \equiv \sum_{k,n} \gamma_{kn} \Phi_{kn}(x,y).$$

Здесь двумерное собственное число является суммой обоих одномерных собственных чисел, действительно

$$\lambda_{kn} = \lambda_k + \lambda_n = -\mu_k^2 - \mu_n^2 = -\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{(2k+1)^2}{l^2} + \frac{(2n+1)^2}{s^2} \right) < 0.$$

Для определения коэффициента разложения C_{kn} запишем $\lambda_{kn}\cdot C_{kn}=-(\mu_k^2+\mu_n^2)C_{kn}=\gamma_{kn}$, где

$$\gamma_{kn}=(A\,x\,y,\Phi_{kn})=A\cdot(x,X_k)\cdot(y,Y_n)=A\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\cdot\frac{(-1)^n\cdot\mu_n s-1}{\mu_n^2}=const;$$

откуда $C_{kn}=A\cdot\dfrac{(-1)^k\cdot(1-(-1)^n\cdot\mu_n s)}{\mu_k^2\cdot\mu_n^2\cdot(\mu_k^2+\mu_n^2)}$.

Так что решение задачи окончательно получится в виде

$$u(x,y)=\frac{4A}{l\,s}\cdot\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot((-1)^n\cdot\mu_n s-1)}{\mu_k^2\cdot\mu_n^2\cdot(\mu_k^2+\mu_n^2)}\cdot\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y,$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)>0$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1)>0$. Полученный двукратный ряд сходится правильно (абсолютно и равномерно при всех значениях $x\in(0,l)$ и $y\in(0,s)$). Общий член ряда убывает порядка $O\left(\dfrac{1}{k^4\cdot n^3}\right)$ при $k,n\to\infty$.

Заметим, что всегда (и в трехмерном пространстве также) многомерная собственная функция состоит из произведения одномерных собственных функций. А многомерное собственное число состоит всегда из суммы одномерных собственных чисел. Из множества собственных функций $\Phi_{kn}(x,y)$ составляется базис, ортонормированный на плоскости (в двумерном случае); а скалярным произведением служат двойные интегралы.

Ответ, полученный в задаче в виде двойного ряда Фурье, неудобен для практических расчетов, поэтому его следует просуммировать по одному из индексов и получить предыдущий ответ – однократный ряд.

№ 4.5 (В). Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона, когда все неоднородности постоянные. Проверка условия разрешимости задачи.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=A. & u=u(x,y).\\ u'_x(0,y)=u'_x(l,y)=0. & 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s.\\ u'_y(x,0)=0,\quad u'_y(x,s)=B. & A,B,l,s=const>0.\end{cases}$$

1) Пара граничных условий по переменной x однородна по условию.

2) Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной x.

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(y)\cdot X_k(x)=Y_0(y)\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)\cdot X_k(x),$$

где $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}},\quad X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x;\quad \mu_k=\dfrac{k\pi}{l},\quad k=0,1,2,3,...$ (см. табл. 1).

3) Вывод дифференциальных уравнений для функций $Y_0(y)$ и $Y_k(y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=Y_0''X_0+\sum_{k=1}^{\infty}(Y_k''-\mu_k^2\cdot Y_k)\cdot X_k=A.$$

$$Y_0''(y)=(A,X_0)=A\cdot\int_0^l\frac{dx}{\sqrt{l}}=A\sqrt{l}\neq 0 \qquad \text{при } k=0;$$

$$Y_k''-\mu_k^2\cdot Y_k(y)=(A,X_k)=A\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l\cos\mu_k x\cdot dx=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin k\pi=0$$

при $k=1,2,3,...\quad (k\neq 0)$.

4) Решение дифференциальных уравнений для функций $Y_0(y)$ и $Y_k(y)$.

$$Y_0(y)=\frac{1}{2}Ay^2\sqrt{l}+C_0y+\tilde{C}_0;$$

$$Y_k(y)=C_k\cdot ch\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k(s-y)\ ; \qquad \mu_k=\frac{\pi k}{l}>0,$$

где $C_0,\tilde{C}_0,C_k$ и $\tilde{C}_k$ – постоянные интегрирования. Теперь искомую функцию $u(x,y)$ можно представить в виде

$$u(x,y)=\left(\frac{1}{2}Ay^2\sqrt{l}+\tilde{C}_0y+C_0\right)\cdot X_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cdot ch\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k(s-y)\right\}\cdot X_k(x).$$

5) Определение постоянных интегрирования из граничных условий по переменной y.

$$u_y'(x,0)=\tilde{C}_0\cdot X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{C}_k\cdot\mu_k\cdot sh\,\mu_k s\cdot X_k(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_0=\tilde{C}_k=0.$$

$$u'_y(x,s) = As\sqrt{l}\cdot X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot\mu_k\cdot sh\,\mu_k s\cdot X_k(x) = B \Rightarrow As\sqrt{l} = (B, X_0) =$$

$$= B\cdot\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{l}} = B\sqrt{l} \Rightarrow As = B;$$

$$C_k\mu_k\cdot sh\mu_k s = (B, X_k) = B\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l \cos\mu_k x\cdot dx =$$

$$= \frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k l = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,y) = (\frac{1}{2}Ay^2\sqrt{l} + C_0)\cdot X_0 + 0 = \frac{1}{2}Ay^2 + const;$$

т. е. задача решается только с точностью до аддитивного произвольного постоянного слагаемого. Переменная x в ответ не вошла.

7) Проверка полученного решения по всем условиям задачи и по разностям.

$u'_x(0,y) = u'_x(l,y) = u'_y(x,0) = 0$ – что очевидно.

$u'_y(x,s) = Ay\big|_{y=s} = As = B$ – условие разрешимости задачи.

$\Delta_2\, u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + A = A.$

По условию задачи имеем размерности $\left[\mathrm{u(x,y)}\right] = \mathrm{Q}$,

$[A] = \dfrac{Q}{L^2}$, $[B] = \dfrac{Q}{L}$. Поэтому $[u] = [A]\cdot L^2 \Rightarrow Q$.

8) Вывод условия разрешимости задачи Неймана.

Пусть такая задача $\Delta_2\, u = F$ и $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f$ для искомой функции $u = u(x,y)$ поставлена внутри прямоугольника $\sigma = \left\{0 \le x \le l,\quad 0 \le y \le s\right\}$ с границей $C = \partial\sigma$ ($\vec{n}-$ внешняя нормаль к C); функции $f(x,y)$ и $F(x,y)$ непрерывны в области $\sigma \bigcup C$. В нашей плоской области формула Грина $\iint\limits_{\sigma}(v\cdot\Delta_2\, u - u\cdot\Delta_2 v)d\sigma = \oint\limits_C (v\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial v}{\partial n})dl$ (здесь $d\sigma = dx\cdot dy$ и $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$) для двух функций – искомой $u(x,y) \ne const$ и некоторой постоянной $v(x,y) \equiv 1$ – принимает вид

$\iint\limits_{\sigma} F(x,y)\cdot d\sigma = \oint\limits_{C} f(x,y)\,dl$, что и является необходимым условием разрешимости. Если в нашем случае принять $F(x,y)=A$ и $f(x,y)=B$ – постоянные, то условие разрешимости упростится

$$\iint\limits_{\sigma} A\cdot dx\cdot dy = \oint\limits_{C} B\cdot dl \equiv \int\limits_{l}^{0} B(-dx) \Rightarrow Al\,s = Bl \quad \text{или} \quad As = B > 0.$$

№ 4,6 (В). Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри прямоугольника.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. & u=u(x,y).\\ u(0,y)=Ay, \quad u'_x(l,y)=0. & 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s.\\ u'_y(x,0)=0, \quad u(x,s)=Bx. & A,B,l,s=const>0. \end{cases}$$

1) Если привести к однородным, например, пару граничных условий по переменной x, то получим $u(x,y)=v(x,y)+A\,y$ и задачу для новой функции $v(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. & \\ v(0,y)=v'_x(l,y)=0. & v=v(x,y).\\ v'_y(x,0)=-A, \quad v(x,s)=B\,x-A\,s. & 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s. \end{cases}$$

2) Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной x.

$$v(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y)\cdot X_k(x), \text{ где } X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x \text{ и } \mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0.$$

3) Постановка задачи для функции $Y_k(y)$.

$$\begin{cases} Y_k''-\mu_k^2\cdot Y_k(y)=0.\\ Y_k'(0)=(-A,X_k)=-\dfrac{A}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}},\\ Y_k(s)=\left(Bx-As,X_k\right)=\dfrac{1}{\mu_k^2}\left(B\cdot(-1)^k-A\cdot\mu_k s\right)\sqrt{\dfrac{2}{l}}. \end{cases}$$

4–5) Решение задачи для функции $Y_k(y)$ и определение постоянных интегрирования.

$$Y_k(y) = C_k \cdot ch\,\mu_k y + \tilde{C}_k \cdot sh\,\mu_k(s-y), \qquad C_k, \tilde{C}_k = const,$$

где $Y_k'(0) = -\tilde{C}_k \cdot \mu_k \cdot ch\,\mu_k s$, $\quad Y_k(s) = C_k \cdot ch\,\mu_k s$. Поэтому

$$Y_k(y) = \left(B\cdot(-1)^k - A\cdot\mu_k s\right)\frac{ch\,\mu_k y}{\mu_k^2 \cdot ch\,\mu_k s}\sqrt{\frac{2}{s}} + A\frac{sh\,\mu_k(s-y)}{\mu_k^2\cdot ch\,\mu_k s}\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,y) = Ay + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y)\cdot X_k(x) =$$

$$= Ay + \frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(B\cdot(-1)^k - A\cdot\mu_k s\right)\cdot ch\,\mu_k y + A\cdot sh\mu_k(s-y)\right\}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k^2\cdot ch\,\mu_k s},$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$. Этот ряд сходится лучше, чем $O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ при $k\to\infty$.

7) Проверка решения по условиям задачи и размерностям.

$$u(0,y) = Ay, \qquad u_x'(l,y) = 0 \because (\sin\mu_k x)'\big|_{x=l} = 0.$$

$$u_y'(x,0) = A\left\{1 - \frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k}\right\} = A\left\{1-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1)\right\} = 0,$$

$$u(x,s) = As + \frac{2}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{B\cdot(-1)^k - A\mu_k s\right\}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k^2} =$$

$$= As + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{2Bl}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} - \frac{As}{2k+1}\right\}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1) =$$

$$= As + \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{2Bl}{\pi}\frac{\pi^2 x}{8l} - As\frac{\pi}{4}\right) = Bx$$

(см. Приложение 1, формулы 15 и 5).

По условию задачи имеет размерности $\left[u(x,y)\right] = Q$, $[A] = [B] = Q/L$, $[\mu_k l] = [\mu_k s] = 1$.

Поэтому $[u] = [A]\cdot L + \dfrac{1}{L}\{[B] + [A]\}\cdot L^2 \Rightarrow Q$.

№ 4.7 (С). Неоднородная задача Дирихле для уравнения Пуассона внутри прямоугольника.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A\,x\,y. \\ u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = B. \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,s) = C. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & u = u(x,y). \\ & 0 \le x \le l, \\ & 0 \le y \le s. \\ & A, B, C, l, s = const. \end{aligned}$$

1) Приведем к однородным пару граничных условий, например, по переменной x с помощью замены $u(x,y) = v(x,y) + B\dfrac{x}{l}$, где для функции $v(x,y)$ получим видоизмененную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A\,x\,y. \\ v(0,y) = v(l,s) = 0. \\ v(x,0) = -B\dfrac{x}{l}, \quad v(x,s) = C - B\dfrac{x}{l}. \end{cases} \qquad \begin{aligned} & v = v(x,y). \\ & 0 \le x \le l, \\ & 0 \le y \le s. \end{aligned}$$

2). Разделение переменных и решение краевой задачи по переменной x.

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \cdot X_k(x), \quad \text{где} \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x \quad \text{и} \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0$$

(см. табл. 1).

3) Постановка задачи для функции $Y_k(y)$.

$$\begin{cases} Y_k'' - \mu_k^2 \cdot Y_k(y) = (A\,x\,y, X_k) = A\,y\,l\dfrac{(-1)^{k+1}}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}} \equiv \tilde{A}_k \cdot y. \\ Y_k(0) = \left(-B\dfrac{x}{l}, X_k \right) = B \cdot \dfrac{(-1)^k}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{l}} \equiv \tilde{B}_k. \\ Y_k(s) = \left(C - B\dfrac{x}{l}, X_k \right) = \dfrac{1}{\mu_k}\Big(C - (-1)^k \cdot (C - B) \Big)\sqrt{\dfrac{2}{l}} \equiv \tilde{D}_k. \end{cases}$$

4) Решение уравнения для функции $Y_k(y)$.

$\overset{o}{Y}_k(y) = C_k \cdot sh\,\mu_k y + \tilde{C}_k \cdot sh\,\mu_k (s - y)$ – общее решение однородного уравнения; $C_k, \tilde{C}_k = const$ – постоянные интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $\tilde{Y}_k(y)=\alpha y+\beta$ (по виду правой части), здесь $\alpha,\beta=const$; очевидно, найдем $\tilde{Y}_k(y)=-\tilde{A}_k\dfrac{y}{\mu_k^2}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения получим

$$Y_k(y)=\overset{o}{Y}_k(y)+\tilde{Y}_k(y)=C_k\cdot sh\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot sh\,\mu_k(s-y)+A\,y\,l\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\,.$$

5) Определение постоянных C_k и $\tilde{C}_k$ из граничных условий по y.

$$v(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)\cdot X_k(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cdot sh\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot sh\,\mu_k(s-y)+A\,y\,l\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\right\}\cdot X_k(x).$$

$$v(x,0)=\sum_k\tilde{C}_k\cdot sh\,\mu_k s\cdot X_k(x)=-B\frac{x}{l}\Rightarrow\tilde{C}_k=\frac{\tilde{B}_k}{sh\,\mu_k s}.$$

$$v(x,s)=\sum_k\left\{C_k\cdot sh\,\mu_k s-A\,s\,l\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}\right\}\cdot X_k(x)=$$

$$=C-B\frac{x}{l}\Rightarrow C_k\cdot sh\,\mu_k s-A\,s\,l\frac{(-1)^k}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}}=\tilde{D}_k\,.$$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(x,y)=v(x,y)+B\frac{x}{l}=$$

$$=B\frac{x}{l}+\frac{2}{l}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[C-(C-B)\cdot(-1)^k-A\,s\,l\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\right]\cdot\frac{sh\,\mu_k y}{sh\,\mu_k s}+\right.$$

$$\left.+B\cdot(-1)^k\cdot\frac{sh\,\mu_k(s-y)}{sh\,\mu_k s}+A\,l\,y\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\right\}\cdot\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k},$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$ и ряд сходится лучше, чем $O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ при $k\to\infty$.

7) Проверка полученного решения по условиям и размерностям.

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=B\because\sin\mu_k l=0\,.$$

$$u(x,0) = B\frac{x}{l} + \frac{2B}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\sin\mu_k x = B\frac{x}{l} + \frac{2B}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi k x}{l} =$$

$$= B\frac{x}{l} - \frac{2B}{\pi}\cdot\frac{\pi x}{2l} = 0.$$

$$u(x,s) = B\frac{x}{l} + \frac{2}{l}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Big(C-(C-B)\cdot(-1)^k\Big)\cdot\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k x =$$

$$= B\frac{x}{l} + \frac{2C}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\sin\frac{\pi k x}{l} - \frac{2}{\pi}(C-B)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi k x}{l} =$$

$$= B\frac{x}{l} + \frac{2C}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \frac{2}{\pi}(C-B)\cdot\frac{\pi x}{2l} = C$$

(см. Приложение 1, формулы 3 и 1).

По условиям задачи $\big[\mathrm{u(x,y)}\big] = \mathrm{Q}$, $[A] = Q/L^4$, $[B]=[C]=Q$.

Поэтому $[u]=[B]+\dfrac{1}{L}\{[C]+[B]+[A]\cdot L^4+[B]+[A]\cdot L^4\}\cdot L \Rightarrow Q$.

№ 4.8 (С).

Постановка задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \chi^2\cdot u(x,y) = A\,x\,y. \\ u(0,y)=0, \quad u(l,y)=B. \\ u(x,0) = u_y{}'(x,s) = 0.\end{cases} \qquad \begin{matrix} u=u(x,y), \\ 0\le x\le l, \quad 0\le y\le l. \\ A,B,\chi,l,s = const > 0.\end{matrix}$$

1–2) $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} X_k(x)\cdot Y_k(y)$,

где $Y_k(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot\sin\mu_k y, \quad \mu_k = \dfrac{\pi}{2s}(2k+1) > 0.$

$$3)\ \begin{cases} X_k{}'' - p_k^2\cdot X_k(x) = (A\,x\,y, Y_k) = \dfrac{A\,x}{\mu_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot(-1)^k; \quad p_k^2 = \mu_k^2 - \chi^2 > 0. \\ X_k(0)=0, \quad X_k(l) = (B,Y_k) = \dfrac{B}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{s}}. \end{cases}$$

4) $X_k(x) = C_k \cdot sh\, p_k x + \tilde{C}_k \cdot sh\, p_k(l-x) - \dfrac{Ax}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{s}} \cdot (-1)^k;\; C_k, \tilde{C}_k = const.$

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ C_k \cdot sh\, p_k x + \tilde{C}_k \cdot sh\, p_k(l-x) - \frac{Ax}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}} \cdot (-1)^k \right\} \cdot Y_k(y).$$

5) $u(0,y) = \sum\limits_k \tilde{C}_k \cdot sh\, p_k l \cdot Y_k(y) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_k = 0.$

$$u(l,y) = \sum_k \left\{ C_k \cdot sh\, p_k l - \frac{Al}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}}(-1)^k \right\} \cdot Y_k(y) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k \cdot sh\, p_k l - \frac{Al}{\mu_k^2 p_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\,(-1)^k - (B, Y_k),$$

$$C_k = \left[B + Al\frac{(-1)^k}{\mu_k p_k^2} \right] \Big/ \mu_k \cdot sh\, p_k l.$$

6) $u(x,y) = \dfrac{2}{s} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[B + Al\dfrac{(-1)^k}{\mu_k p_k^2} \right] \dfrac{sh\, \mu_k x}{sh\, \mu_k l} - Ax\dfrac{(-1)^k}{\mu_k p_k^2} \right\} \dfrac{\sin \mu_k y}{\mu_k};$

$$p_k^2 = \mu_k^2 - \chi^2 > 0, \quad \mu_k = \frac{\pi}{2s}(2k+1) > 0.$$

7) $u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_y'(x,s) = 0 \because \cos \mu_k s = 0.$

$$u(l,y) = \frac{2B}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k y = \frac{4B}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{\pi y}{2s}(2k+1) = \frac{4B}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = B$$

(см. Приложение 1, формула 5).

По условию имеем $[\mathrm{u(x,y)}] = \mathrm{Q}$, $[A] = \dfrac{Q}{L^4}$, $[B] = Q$, $[\chi] = [p_k] = [\mu_k] = \dfrac{1}{L}$.

Поэтому $[u] = \dfrac{1}{L}\left\{ [B] + [A] \cdot L \cdot L^3 \right\} L \Rightarrow Q$.

№ 4.9 (С). Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике с граничными условиями, допускающими решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \\ u_x{}'(0,y)=+Al, \quad u_x{}'(l,y)=0. \\ u_y{}'(x,0)=-As, \quad u_y{}'(x,s)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u=u(x,y), \\ 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s. \\ A,l,s=const>0. \end{array}$$

1) Приведем пару граничных условий по переменной x к однородным с помощью замены $u(x,y)=v(x,y)+\alpha(y)\cdot x+\beta(y)\cdot x^2$; легко получить $\beta(y)=Al$ и $\alpha(y)=-\dfrac{1}{2}A$. Поэтому

$$u(x,y)=v(x,y)+\frac{1}{2}Ax\cdot(2l-x)=v(x,y)+\frac{1}{2}A\left(l^2-(l-x)^2\right).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=A. \\ v_x{}'(0,y)=v_x{}'(l,y)=0. \\ v_y{}'(x,0)=-As, \quad v_y{}'(x,s)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v=v(x,y). \\ 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s. \end{array}$$

2) $v(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}X_k(x)\cdot Y_k(y)=X_0(x)\cdot Y_0(y)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k(x)\cdot Y_k(y)$,

где $X_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{l}}=const$, $\quad X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x;\quad \mu_k=\dfrac{\pi k}{l}\ge 0$.

3) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=Y_0{}''X_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(Y_k{}''-\mu_k^2\cdot Y_k)\,X_k=A.$

$$Y_0{}''(y)=(A,X_0)=\int_0^l\frac{A}{\sqrt{l}}dx=A\sqrt{l}=const.$$

$$Y_k{}''-\mu_k^2\cdot Y_k(y)=(A,X_k)=A\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l\cos\mu_k x\cdot dx=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\mu_k x\Big|_0^l=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_k{}''-\mu_k^2\cdot Y_k(y)=0.$$

4) $Y_0(y)=\frac{1}{2}Ay^2\sqrt{l}+C_0y+\tilde{C}_0,\quad Y_k(y)=C_k\cdot ch\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k(s-y)$;

$$C_0,\tilde{C}_0,C_k,\tilde{C}_k=const\,.$$

5) $v(x,y)=\left(\frac{1}{2}Ay^2+C_0y+\tilde{C}_0\right)\cdot X_0+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cdot ch\,\mu_k y+\tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k(s-y)\right\}\cdot X_k(x).$$

$$v_y'(x,0)=C_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}(-\mu_k\tilde{C}_k)\cdot sh\,\mu_k s\,X_k=-As\Rightarrow C_0=-As\sqrt{l},\quad \tilde{C}_k=0\,.$$

$$v_y'(x,s)=\left(As\sqrt{l}+C_0\right)\cdot X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kC_k\cdot sh\mu_k s\cdot X_k\left(x\right)=0\Rightarrow C_0=-As\sqrt{l},\quad C_k=0$$

$$v(x,y)=(\frac{1}{2}Ay^2\sqrt{l}-As\sqrt{l}y+\tilde{C}_0)\cdot X_0+0=-\frac{1}{2}Ay(2s-y)+\tilde{C}_0\big/\sqrt{l}.$$

6) $u(x,y)=v(x,y)-\frac{1}{2}Ax(2l-x)=$

$$=\frac{1}{2}Ax(2l-x)-\frac{1}{2}Ay(2s-y)+\tilde{C}_0\big/\sqrt{l}=$$

$$=\frac{1}{2}A\left((y-s)^2-(x-l)^2\right)+const.$$

Решение задачи находится только с точностью до произвольной аддитивной постоянной!

7) $\Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-1+1=0.$

$$u_x'(0,y)=+Al,\quad u_x'(l,y)=0;\quad u_y'(x,0)=-As,\quad u_y'(x,s)=0.$$

По условию $[A]=Q\big/L^2$, следовательно, размерности в формуле ответа совпадают.

Проверим выполнение условия разрешимости

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}dl=\iint_\sigma\Delta_2u\cdot d\sigma \quad \text{при} \quad C=\partial\sigma\,.$$

Для нашего уравнения Лапласа $\Delta_2u=0$ получим

$$0=\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}dl\equiv-\int_0^l u_y'(x,0)\,dx+\int_0^s u_x'(l,y)\,dy+$$

$$+\int_l^0 u_y{}'(x,s)\cdot(-dx)-\int_s^0 u_y{}'(0,y)\cdot(-dy)=$$

$$=+Asl+0+0-Als=0$$ – условие выполняется.

8) Решение уравнения Пуассона с постоянными условиями может быть найдено в виде многочлена:

$$u(x,y)=\tilde{A}x^2+\tilde{B}xy+\tilde{C}y^2+\tilde{D}x+\tilde{E}y+\tilde{F}.$$

Найдем значение $\Delta_2 u=2\tilde{A}+2\tilde{C}=0\Rightarrow\tilde{C}=-\tilde{A},$ поэтому

$$u(x,y)=\tilde{A}(x^2-y^2)+\tilde{B}xy+\tilde{D}x+\tilde{E}y+\tilde{F}.$$

Проверим соответствие граничных условий:

$u_x{}'(0,y)=\tilde{B}y+\tilde{D}=\tilde{A}l,$ $\quad u_y{}'(x,0)=\tilde{B}x+\tilde{E}=-As,$

$u_x{}'(l,y)=2\tilde{A}l+\tilde{B}+\tilde{D}=0;$ $\quad u_y{}'(x,s)=-2\tilde{A}s+\tilde{B}x+\tilde{E}=0.$

Здесь $\tilde{B}\equiv 0$, так как все граничные условия постоянны; поэтому $\tilde{D}=\tilde{A}l,\quad \tilde{E}=-\tilde{A}s,$

$$\tilde{A}=-\tilde{D}/2l=\tilde{E}/2s=-\frac{1}{2}A,\qquad \tilde{F}=const.$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}A\,(y^2-x^2)+0+Alx-Asy+\tilde{F}=$$

$$=\frac{1}{2}A\cdot\left((y-s)^2-(x-l)^2\right)+const.$$

№ 4.10 (С). Решение уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями внутри прямоугольника. Суммирование ряда в формуле решения задачи.

$$\begin{cases}\Delta_2\,u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0. & u=u(x,y),\\ u(0,y)=A,\quad u_x{}'(l,y)=0. & 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s.\\ u(x,0)=u(x,s)=0. & A,l,s=const>0.\end{cases}$$

1–2) $u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k(x)\cdot Y_k(y);\quad Y_k(y)=\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot\sin\mu_k y;\quad \mu_k=\dfrac{\pi k}{s}>0.$

3–4) $X_k{}''-\mu_k^2\cdot X_k(x)=0;\qquad X_k(x)=C_k\cdot sh\,\mu_k x+\tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k(l-x).$

5) $u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{C_k\cdot sh\,\mu_k x+\tilde{C}_k\cdot sh\,\mu_k(l-x)\right\}\cdot Y_k(y).$

$$u_x{}'(l,y)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot\mu_k\cdot ch\,\mu_k l\cdot Y_k(y)=0\Rightarrow C_k=0.$$

$$u(0,y)=\sum_k \tilde{C}_k\cdot ch\,\mu_k l\cdot Y_k(y)=A\Rightarrow \tilde{C}_k\cdot sh\,\mu_k l=$$

$$=(A,Y_k)=A\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\int_0^s \sin\mu_k y\cdot d\,y=$$

$$=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\cos\mu_k y\Big|_0^y=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\left(1-(-1)^k\right),$$

где $\tilde{C}_k=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot(1-(-1)^k)\Big/ch\,\mu_k\,s.$

6) $$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\cdot Y_k(y)=\frac{2A}{s}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k}\frac{ch\,\mu_k(l-x)}{ch\,\mu_k l}\sin\mu_k y;$$

$$\mu_k=\frac{\pi k}{s}>0.\qquad 1-(-1)^k=\begin{cases}2\ \forall\ k=2n+1\\ 0\ \forall\ k=2n\end{cases};\qquad n=0,1,2,3,\dots .$$

$$u(x,y)=\frac{4A}{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ch\,\mu_n(l-x)}{ch\,\mu_n l}\cdot\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n};\qquad \mu_n=\frac{\pi}{s}(2n+1)>0.$$

Ряд сходится быстро, так как $\frac{ch\,\mu_n(l-x)}{ch\,\mu_n l}\cong e^{-\mu_n x}\to 0$ при $n\to\infty$ и $0<x<l$.

7) $u(x,0)=0,\quad u(x,s)=0;\quad u_x{}'(l,y)=0,$

$$u(0,y)=\frac{4A}{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n}=\frac{4A}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\sin\frac{\pi y}{s}(2n+1)=\frac{4A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=A$$

(Приложение 1, формула 5).

$$u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{2A}{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mu_n^2-\mu_n^2\right\}\frac{ch\,\mu_n(l-x)}{ch\,\mu_n l}\sin\mu_n y=0.$$

Размерности $[u(x,y)]=Q,\quad [A]=[u],\quad [\mu_n l]=[\mu_n y]=1$. Поэтому $[u]=\left[\frac{A}{s}\right]\cdot L\Rightarrow Q.$

8) При решении стационарных задач внутри прямоугольника легко найти асимптоту решения вдоль той оси, где решение представлено

монотонными функциями (не колебательными!); в нашем случае при $l \to \infty$ решение в горизонтальной полосе будет

$$u(x,y) = \frac{4A}{s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n x} \cdot \frac{\sin \mu_n y}{\mu_n} = \frac{4A}{s} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} e^{-\mu_n \overline{z}} = \left[z = x + i\,y = (\overline{z})^* \right] =$$

$$= -\frac{4A}{s} \cdot \operatorname{Im} \sum_n \int_{+\infty}^{\overline{z}} e^{-\mu_n \alpha}\, d\alpha = -\frac{4A}{s} \cdot \operatorname{Im} \int_{+\infty}^{\overline{z}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\alpha}{s}(2n+1)} \right) d\alpha =$$

$$= -\frac{4A}{s} \cdot \operatorname{Im} \int_{+\infty}^{\overline{z}} \left(\sum_n e^{-\frac{2\pi n}{s}\alpha} \right) \cdot e^{-\frac{\pi\alpha}{s}} \cdot d\alpha =$$

$$= \left[q = e^{-\frac{2\pi}{s}\alpha} < 1 - \text{коэффициент геометрической прогрессии} \right] =$$

$$= -\frac{4A}{s} \cdot \operatorname{Im} \int_{+\infty}^{\overline{z}} \frac{e^{-\frac{\pi\alpha}{s}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{s}\alpha}} d\alpha = -\frac{4A}{\pi} \cdot \operatorname{Im} \int_{+\infty}^{\overline{z}} \frac{d(e^{\frac{\pi}{s}\alpha})}{(e^{\frac{\pi}{s}\alpha})^2 - 1} =$$

$$= -\frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln \frac{e^{\pi\alpha/s} - 1}{e^{\pi\alpha/s} + 1} \Bigg|_{+\infty}^{\overline{z}} = \frac{2A}{\pi} \operatorname{Im} \ln cth \frac{\pi \overline{z}}{2s} =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot \arg th \frac{\pi(x + i\,y)}{2s} = \frac{2A}{\pi} \cdot \arg \frac{sh\xi \cdot \cos\eta + i \cdot ch\xi \cdot \sin\eta}{ch\xi \cdot \cos\eta - i \cdot sh\xi \cdot \sin\eta} =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot \left(arctg(cth\,\xi \cdot tg\,\eta) - arctg(th\,\xi \cdot tg\,\eta) \right) =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot arctg \frac{tg\,\eta \cdot (ctg\,\xi - tg\,\xi)}{1 + tg^2\eta} =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot arctg(tg\,\eta \cdot \cos^2\eta \cdot \frac{ch^2\xi - sh^2\xi}{ch\,\xi \cdot sh\,\xi}) = \frac{2A}{\pi} \cdot arctg \frac{\sin \pi y/s}{sh\,\pi x/s}$$

при $\quad \xi = \dfrac{\pi x}{2s}, \qquad \eta = \dfrac{\pi y}{2s}.$

Для получения асимптотики $s \to \infty$ нужно переделать все решение заново в форме разложения в ряды по собственным функциям по переменной x. Суммирование в случае обоих ограниченных значений l и s (прямоугольник) приводит к неэлементарным эллиптическим функциям.

№ 4.11 (С). Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри прямоугольника. Суммирование ряда в ответе.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \\ u(0,y) = u_x{}'(l,y) = 0. \\ u(x,0) = Ax, \quad u_y{}'(x,s) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u = u(x,y), \\ &0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s. \\ &A, l, s = const > 0. \end{aligned}$$

1–2) $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y)$; $\qquad X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$,

$\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$

3–4) $Y_k'' - \mu_k^2 \cdot Y_k(y) = 0$; $\qquad Y_k(y) = C_k \cdot sh\, \mu_k y + \tilde{C}_k \cdot ch\, \mu_k (s-y).$

5) $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\{ C_k \cdot sh\, \mu_k y + \tilde{C}_k \cdot ch\, \mu_k (s-y) \right\} \cdot X_k(x).$

$$u_y{}'(x,s) = \sum_k C_k \cdot \mu_k \cdot ch\, \mu_k s \cdot X_k(x) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$u(x,0) = \sum_k \tilde{C}_k \cdot ch\, \mu_k s \cdot X_k(x) = Ax \Rightarrow \tilde{C}_k \cdot ch\, \mu_k s = (Ax, X_k) =$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l x \sin \mu_k x \cdot dx =$$

$$= -\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left\{ x \cdot \cos \mu_k x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \mu_k x \cdot dx \right\} = \frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k;$$

$$\tilde{C}_k = \frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k \big/ ch\, \mu_k s = const.$$

6) $u(x,y) = \dfrac{2A}{l} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2} \dfrac{ch\, \mu_k (s-y)}{ch\, \mu_k s} \cdot \sin \mu_k x$; $\qquad \mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0.$

Ряд сходится быстро, так как $\dfrac{ch\, \mu_k (s-y)}{sh\, \mu_k s} \cong e^{-\mu_k y} \to 0$ при $k \to \infty$ и $0 < y < s$.

7) $u(0,y)=0; \qquad u_x{}'(l,y)=0 \because \cos\mu_k l=0$.

$$u_y{}'(x,s)=0 \because \left(ch\,\mu_k(s-y)\right)_y{}'\Big|_{y=s}=0.$$

$$u(x,0)=\frac{2A}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k x=$$

$$=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1)=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2 x}{8l}=Ax.$$

$$u_{xx}{}''+u_{yy}{}''=\frac{2A}{l}\cdot\sum_k(-1)^k\cdot\{1-1\}\cdot\frac{ch\,\mu_k(s-y)}{ch\,\mu_k s}\sin\mu_k x=0;$$

(см. Приложение 1, формула 15).

Размерности $[u(x,y)]=Q$, $[A]=\dfrac{Q}{L}$, $[\mu_k l]=[\mu_k y]=1$. Поэтому $[u]=\left[\dfrac{A}{s}\right]\cdot L\Rightarrow Q.$

8) Ряд, полученный в ответе, может быть просуммирован к эллиптическим (неэлементарным) функциям; но в случае $s\to+\infty$ (в вертикальной полуполосе $0\le x\le l$ и $0\le y\le\infty$) ряд можно просуммировать гораздо проще (воспользовавшись монотонными составляющими функций ряда):

$$u(x,y)=\frac{2A}{l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}e^{-\mu_k y}\cdot\sin\mu_k x=\frac{8A}{\pi^2}\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}q^{2k+1}=$$

$$=\left[q=e^{\frac{i\pi z}{2l}},\quad z=x+iy,\quad |q|=e^{-\frac{\pi y}{2l}}<1\quad\forall\quad y>0\right]=$$

$$=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\operatorname{Im}\int_0^q\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}q^{2k}\right)\cdot dq=$$

$$=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\operatorname{Im}arctg\,i(q)=\frac{8Al}{\pi^2}\cdot\operatorname{Im}arctg\,i\left(e^{-\frac{i\pi z}{2l}}\right),$$

где функция $arctg\, i(q) = \int\limits_0^q arctg\, q \cdot \dfrac{d\,q}{q}$ – интегральный арктангенс (интеграл не берется в конечном виде).

№ 4.12 (С). Задача Дирихле для уравнения Лапласа внутри прямоугольника. Суммирование ряда.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. & u = u(x, y), \\ u(0, y) = A, \quad u(l, y) = 0. & 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s. \\ u(x, 0) = u(x, s) = 0. & A, l, s = const > 0. \end{cases}$$

1–2) $u(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y);\quad Y_k(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}} \cdot \sin \mu_k y,\quad \mu_k = \dfrac{\pi k}{s} > 0.$

3–4) $X_k'' - \mu_k^2 \cdot X_k(x) = 0;\qquad X_k(x) = C_k \cdot sh\, \mu_k x + \tilde{C}_k \cdot sh\, \mu_k (l - x).$

5) $u(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k \cdot sh\, \mu_k x + \tilde{C}_k \cdot sh\, \mu_k (l - x) \right\} \cdot Y_k(y).$

$$u(l, y) = \sum_k C_k \cdot sh\, \mu_k l \cdot Y_k(y) = 0 \Rightarrow C_k = 0.$$

$$u(0, y) = \sum_k \tilde{C}_k \cdot sh\, \mu_k l \cdot Y_k(y) = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_k \cdot sh\, \mu_k l = (A, Y_k) = A\sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \int\limits_0^s \sin \mu_k y \cdot d\,y =$$

$$= \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \left(1 - (-1)^k\right); \qquad \tilde{C}_k = \frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}} \cdot (1 - (-1)^k) \big/ sh\, \mu_k l = const.$$

6) $u(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) = \dfrac{2A}{s} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1 - (-1)^k}{\mu_k} \dfrac{sh\, \mu_k (l - x)}{sh\, \mu_k l} \cdot \sin \mu_k y;$

$$\mu_k = \frac{\pi k}{s} > 0. \qquad u(x, y) = \frac{4A}{s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sh\, \mu_n (l - x)}{sh\, \mu_n l} \cdot \frac{\sin \mu_n y}{\mu_n}$$

при $\mu_n = \dfrac{\pi}{s}(2n + 1) > 0.$

Ряд сходится быстро, так как $\dfrac{sh\, \mu_n (l - x)}{sh\, \mu_n l} \cong e^{-\mu_n x} \to 0$ при $n \to \infty$ и $0 < x < l.$

7) $u(x,0) = u(x,s) = 0$; $\quad u(l,y) = 0.\qquad \Delta_2 u = 0.$

$$u(0,y) = \frac{4A}{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n} = \frac{4A}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\sin\frac{\pi y}{s}(2n+1) = \frac{4A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = A.$$

(см. Приложение 1, формула 5).

8) При больших значениях $l \gg 1$ оказывается $\dfrac{sh\,\mu_n(l-x)}{sh\,\mu_n l} \cong e^{-\mu_n x} \le 1$, поэтому при $l \to \infty$ получим решение задачи Дирихле в горизонтальной полуполосе $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le s$; при этом решение записывается в виде

$$u(x,y) = \frac{4A}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\mu_n x}\cdot\frac{\sin\mu_n y}{2n+1} = \frac{4A}{\pi}\cdot\mathrm{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-\frac{\pi\bar z}{s}(2n+1)};\quad \bar z = x - iy.$$

Так как модуль $\left|e^{-\frac{\pi}{s}\bar z}\right| = e^{-\frac{\pi}{s}x} < 1$ при $x > 0$, можно найти производную и просуммировать ряд как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$u'_x(x,y) = -\frac{4A}{s}\mathrm{Im}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\pi z}{s}(2n+1)} = -\frac{4A}{s}\mathrm{Im}\frac{e^{-\frac{\pi}{s}\bar z}}{e^{-\frac{2\pi}{s}\bar z}-1} = -\frac{2A}{s}\cdot\mathrm{Im}\,\mathrm{csc}h\frac{\pi\bar z}{s}.$$

Воспользовавшись интегралом $\displaystyle\int_{+\infty}^{\alpha}\frac{d\alpha}{sh\,\alpha} = \ln th\frac{\alpha}{2}$, можно получить

$$u(x,y) = \int_{+\infty}^{x}u_x{}'(x,y)\,dx = -\frac{2A}{\pi}\mathrm{Im}\ln th\frac{\pi(x-iy)}{2s} = \frac{2A}{\pi}\cdot\arg th\frac{\pi(x+iy)}{2s}.$$

А зная формулу суммы аргументов для гиперболического тангенса $th(\alpha \pm i\beta) = \dfrac{sh2\alpha \pm i\cdot\sin 2\beta}{ch2\alpha + \cos 2\beta}$, легко найти ответ в окончательной форме

$$u(x,y) = \frac{2A}{\pi}\cdot arctg\frac{\sin\pi y/s}{sh\;\pi x/s}.$$

№ 4.13 (С). Использование некоторых методов теории функций комплексного переменного при решении плоских стационарных задач математической физики.

Докажем инвариантность оператора Лапласа при конформных отображениях.

Пусть переменная $z = x + i\,y \in \bar{D}_z$, где $\bar{D}_z = D_z \bigcup C_z$ – односвязная плоская область со сложной границей $C_z = \partial D_z$. Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ аналитична в области D_z и конформно отображает ее на область D_w с более простой границей $C_w = \partial D_w$.

Поставим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \chi^2 \cdot \Phi(x,y) = F(x,y). \\ \Phi\Big|_{C_z} = g(x,y). \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Phi = \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{D}_z. \\ &\chi = const \ge 0. \end{aligned}$$

Проделаем преобразование оператора Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{аналогично} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}; \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial w}.$$

$$\Delta_z \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial \bar{z}} = \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial w \cdot \partial \bar{w}} =$$

$$= \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \equiv \left|f'(z)\right|^2 \cdot \Delta_w.$$

Преобразование уравнения Гельмгольца

$$\Delta_z \Phi + \chi^2 \cdot \Phi(x,y) = F(x,y) \Rightarrow \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|^2 \cdot \Delta_w \Phi + \chi^2 \cdot \Phi\big(x(u,v), y(u,v)\big) =$$

$$= F(x(u,v), y(u,v)) \Rightarrow \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|^2 \cdot \Delta_w \tilde{\Phi} + \chi^2 \cdot \tilde{\Phi}(u,v) = \tilde{F}(u,v).$$

В новой области D_w наша задача Дирихле примет вид

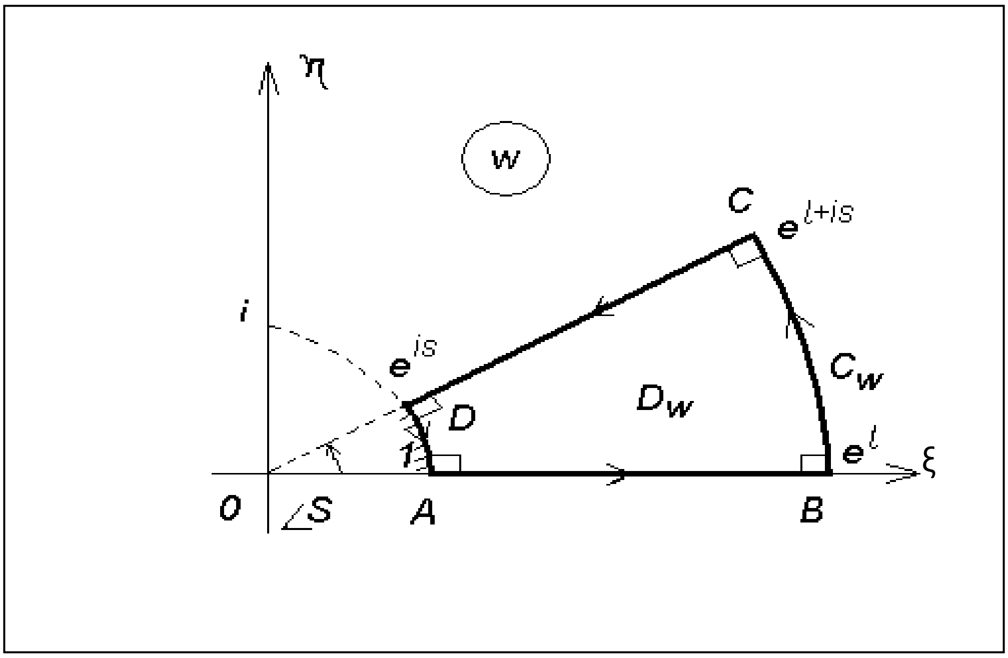
$$\begin{cases} \Delta_w \tilde{\Phi} + \chi^2 \cdot \left|\dfrac{d\,z}{d\,w}\right|^2 \cdot \tilde{\Phi}(u,v) = \left|\dfrac{d\,z}{d\,w}\right|^2 \cdot \tilde{F}(u,v) \quad \textit{при } f'(z) \ne 0. \\ \tilde{\Phi}\Big|_{C_w} = \tilde{g}(u,v). \end{cases}$$

В случае задачи Неймана граничное условие будет

$$\frac{\partial}{\partial n_z}\Phi(x,y)\Big|_{C_z} = \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right| \cdot \frac{\partial}{\partial n_w}\tilde{\Phi}(u,v)\Big|_{C_w} = \tilde{y}(u,v).$$

№ 4.14 (С). Зная решение некоторой краевой задачи внутри прямоугольника и воспользовавшись конформным отображением этого прямоугольника на другие криволинейные прямоугольники (заменяя ортогональную декартову систему координат на другие ортогональные системы), можно получить решения краевых задач в этих новых областях.

А. Заданный прямоугольник $\sigma \equiv D_z = \square ABCD = \{0 \le x \le l, 0 \le y \le s\}$ на плоскости Oxy (см. условия задачи 4.1(А)) аналитическая функция $w = \xi + i\eta = e^z = \exp(x + i\,y)$ конформно отобразит внутрь криволинейной трапеции тоже с прямыми углами при вершинах на плоскости w. Здесь стороны АВ и CD – отрезки прямых (первая вдоль оси абсцисс, а вторая под углом $\angle S$ к этой оси), а стороны ВС и DA – дуги окружностей (единичного радиуса и радиуса $e^l > 1$). Форме новой области D_w соответствует полярная система координат $w = e^z = e^{x+i\,y} = r\,e^{i\varphi}$, где $r = e^x$ и $\varphi = y$.



Теперь можно просто найти решение некоторой плоской задачи Дирихле в новой области; так, например, для задачи 4.12 (С) решение в новой области будет

$$u(\ln r, \varphi) \equiv \tilde{u}(r, \varphi) = \frac{4A}{s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sh\,\mu_n(l - \ln r)}{sh\,\mu_n l} \frac{\sin \mu_n \varphi}{\mu_n}; \quad \mu_n = \frac{\pi}{s}(2n+1) > 0.$$

А при $l \to \infty$ получим решение задачи в бесконечном секторе (здесь дуга ВС уходит вправо на бесконечность).

$$\tilde{u}(r,\varphi)=\frac{2A}{\pi}\cdot arctg\frac{\sin\pi\varphi/s}{sh\left(\frac{\pi}{s}\ln r\right)}=\frac{2A}{\pi}arctg\frac{2\cdot\sin\pi\varphi/s}{r^{\pi/s}-r^{-\pi/s}}.$$

Уравнение Гельмгольца в новых координатах $w=\xi+i\eta$ примет вид

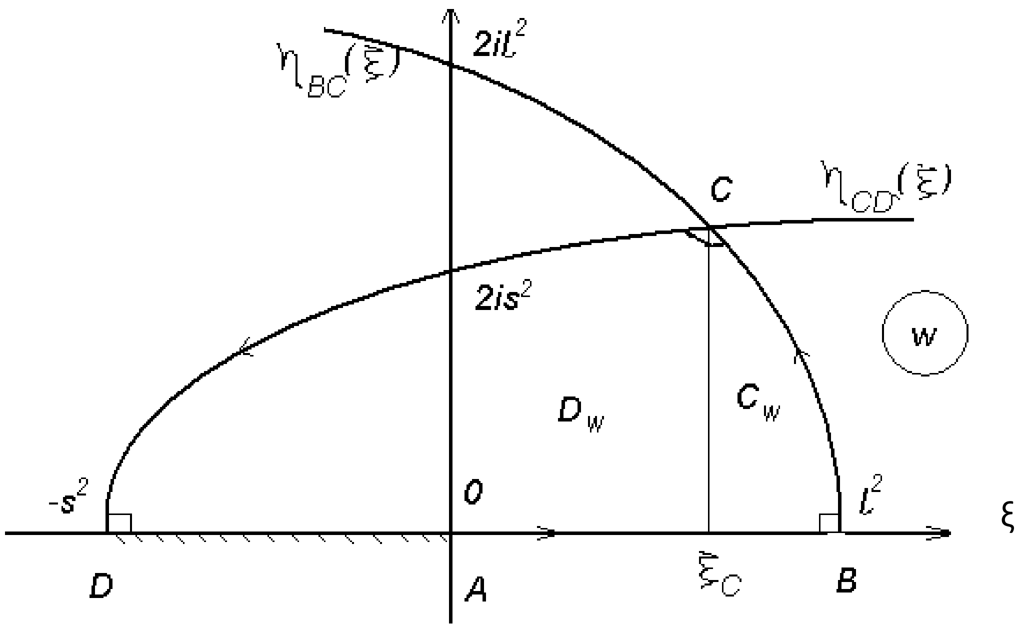
$$\Delta_z\Phi+\chi^2\cdot\Phi(x,y)=F(x,y)\Rightarrow\Delta_w\tilde{\Phi}+\frac{\chi^2}{\xi^2+\eta^2}\cdot\tilde{\Phi}(\xi,\eta)=\frac{\tilde{F}(\xi,\eta)}{\xi^2+\eta^2}.$$

Коэффициент искажения $k=\left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|^2=\left|e^z\right|^2=\xi^2+\eta^2=r^2>0$ – всегда должен быть больше нуля.

В. Если сделать конформное отображение с помощью квадратичной аналитической функции $w=\xi+i\eta=z^2=(x+i\,y)^2$, то получим $\xi(x,y)=x^2-y^2$ и $\eta(x,y)=2x\,y$ (параболическая ортогональная система координат) или, наоборот,

$$x(\xi,\eta)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi\right)},\qquad y(\xi,\eta)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi\right)}.$$

При этом на плоскости w получим криволинейный прямоугольный треугольник, у которого основание DAB – отрезок $-s^2\le\xi\le l^2$ на оси абсцисс, а стороны BC и CD – отрезки двух парабол. Первая – $w_{BC}=(l+iy)^2$ или $\eta_{BC}=2l\cdot\sqrt{l^2-\xi}>0$, а вторая – $w_{CD}=(x+i\,s)^2$ или $\eta_{CD}=2s\cdot\sqrt{s^2+\xi}>0$. Точки пересечения этих парабол $w_C=(l+i\,s)$ или $\xi_C=l^2-s^2$ и $\eta_C=2l\,s>0$. Три угла при вершинах – прямые $\angle B=\angle C=\angle D=\frac{\pi}{2}$, но угол $\angle A=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$ (здесь для функции $w=z^2$ – точка ветвления второго порядка).



Решение краевой задачи $\tilde{u}(\xi,\eta)$ внутри новой области D_w получится, если в решении задачи для прямоугольника $\square ABCD = D_z$ сделать замены координат $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$. Предельный переход $l \to \infty$ в новой области D_w отодвигает границу ВС вправо на бесконечность, и получится область в верхней половине параболы $0 < \eta_{CD} = 2s\sqrt{s^2+\xi} < +\infty$ при $-s^2 < \xi < +\infty$.

При отображении, осуществляемом функцией $w = z^2$, коэффициент искажения равен $k = \left|\dfrac{dw}{dz}\right|^2 = 4|z|^2 = 4(x^2+y^2) = 4\sqrt{\xi^2+\eta^2} > 0$ – он должен быть всегда положителен внутри области D_w (кроме z *=0* – это точка ветвления, особая точка границы).

№ 4. 15 (С). Воспользовавшись общей формулой (см. задачу 4.1 (А)), решить смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона внутри прямоугольника. Суммирование ряда.

$$\begin{cases} \Delta_2\, u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A. \\ u_x{}'(0,y) = B\cdot(1-\dfrac{y}{s}), \quad u(l,y) = 0. \\ u(x,0) = u(x,s) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y), \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s. \\ A, B, l, s = const > 0. \end{array}$$

1) Определение функции Грина (источника) задачи.

Общая формула для решения задачи имеет вид

$$u(M)=\oint_C f(M')\cdot\frac{\partial}{\partial n'}G(M,M')\cdot dl'+\iint_\sigma F(M')\cdot G(M,M')d\sigma',$$

где $M(x,y)$ – точка измерения (параметры подынтегральных функций), $M'(\xi,\eta)$ – точка источника (переменные интегрирования); $d\sigma'=d\xi\cdot d\eta$ – дифференциал элементарной площадки внутри прямоугольника σ, граница которого C и $\vec{n}$ – орт внешней нормали к границе; $d\,l'=\sqrt{d\,\xi'^2+d\,\eta'^2}$ – дифференциал дуги вдоль контура границы. Функция $f(M)$ определяет граничные условия, а функция $F(M)=A$ – правая часть уравнения.

Общий вид функции Грина (источника) известен

$$G(M,M')=\sum_{k,n}\frac{1}{\lambda_{kn}}\cdot\Phi_{kn}(M)\cdot\Phi_{kn}(M').$$

Здесь собственные функции $\Phi_{kn}(M)$ и собственные значения $\lambda_{kn}<0$ являются решениями вспомогательной краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta_2\Phi\equiv\Phi''_{xx}+\Phi''_{yy}=\lambda\cdot\Phi(x,y).\\ \Phi'_x(0,y)=\Phi(l,y)=0,\\ \Phi(x,0)=\Phi(x,s)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}\Phi=\Phi(x,y).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s.\end{array}$$

Здесь граничные условия поставлены по образу условий исходной задачи, но все однородные. Разделяя переменные, найдем ортонормированную систему собственных функций вспомогательной задачи $\Phi_{kn}(x,y)=X_k(x)\cdot Y_n(y)$, где собственные функции определяются из табл. 1

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\cos\mu_k x;\qquad \mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0,\quad k=0,1,2,3,\dots\,.$$

$$Y_n(y)=\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\sin\mu_n y;\qquad \mu_n=\frac{\pi}{s}n>0,\quad n=1,2,3,\dots\,.$$

Собственные значения вспомогательной задачи будут

$$\lambda_{kn}=-(\mu_k^2+\mu_n^2)=-\pi^2\cdot\left(\frac{(2k+1)^2}{4l^2}+\frac{n^2}{s^2}\right)<0.$$

Функцию Грина (источника) исходной задачи можно теперь записать в виде двойного ряда Фурье

$$G(M,M') \equiv G(x,y;\xi,\eta) =$$

$$= -\frac{4}{ls} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \mu_n^2} \cdot \cos\mu_k x \cdot \sin\mu_n y \cdot \cos\mu_k \xi \cdot \sin\mu_n \eta.$$

Полученный двойной ряд иногда удается просуммировать по одному из индексов; в нашем случае для этого можно использовать известное разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2l}(2k+1)}{(2k+1)^2 + \left(\frac{2nl}{s}\right)^2} = \frac{\pi s}{8nl} \frac{sh\frac{\pi n}{s}\left(l - |\alpha|\right)}{ch\frac{\pi nl}{s}}$$

и получится упрощенный ряд для функции Грина только по одному индексу

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\frac{2}{s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(x,\xi)}{\mu_n \cdot ch\,\mu_n l} \cdot \sin\mu_n y \cdot \sin\mu_n \eta,$$

где обозначено $R_n(x,\xi) = \begin{cases} sh\,\mu_n(l-x)\cdot ch\,\mu_n\xi & \text{при} \quad 0 \le \xi < x, \\ sh\,\mu_n(l-\xi)\cdot ch\,\mu_n x & \qquad\quad x < \xi \le l. \end{cases}$

Полученный результат характерен для задач эллиптического типа, так как функция источника G терпит излом вдоль линии $x = \xi$ (сама функция G при $x = \xi$ непрерывна, но ее производная терпит там разрыв). Указанный скачок получается за счет модуля при α в использованной сумме, поэтому при суммировании получаются различные ответы при $\alpha = x \pm \xi > 0$ и при $\alpha = x \pm \xi < 0$.

Хотя решение задачи можно продолжать и без суммирования ряда, но после суммирования ряд в решении лучше сходится к тем участкам границы, где условия неоднородны. Поэтому суммировать предпочтительнее по индексу, соответствующему той координате, по которой граничные условия неоднородны. Кроме того, проводить численные расчеты проще с однократными рядами. К сожалению, многие ряды сходятся к неэлементарным функциям.

2) Решение рассматриваемой задачи по общей формуле.

Подставив заданные условия в общую формулу, получим

$$u(x,y)=\int_s^0 B\left(1-\frac{\eta}{s}\right)\cdot G(x,y;0,\eta)\cdot(-d\eta)+\int_0^s d\eta\int_0^l A\cdot G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi.$$

Отметим, что задача имеет граничные условия смешанного типа (это третья краевая задача), поэтому в первом интеграле по границе области поставлена сама функция Грина на участке этой границы при $x=0$ (а не нормальная производная такой функции, как было бы нужно в задаче с граничными условиями Дирихле – первой краевой задаче). Вдоль оставшейся части границы $C_0=C\setminus(x=0;\, s\geq y\geq 0)$ граничные условия нулевые.

Подставив в интегралы найденное выше значение функции Грина, получим

$$u(x,y)=-\frac{2}{s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left\{B\cdot R_n(x,0)\cdot\int_0^s(1-\frac{\eta}{s})\cdot\sin\mu_n\eta\cdot d\eta+\right.$$

$$\left.+A\cdot\int_0^s\sin\mu_n\eta\cdot d\eta\cdot\int_0^l R_n(x,\xi)\,d\xi\right\}\cdot\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n\cdot ch\,\mu_n l};\qquad \mu_n=\frac{\pi n}{s}>0.$$

Вычислим предложенные интегралы по отдельности:

$$\int_0^s\left(1-\frac{\eta}{s}\right)\cdot\sin\mu_n\eta\cdot d\eta=-\frac{1}{\mu_n}\left\{\left(1-\frac{\eta}{s}\right)\cdot\cos\mu_n\eta\Big|_0^s-\int_0^s\cos\mu_n\eta\cdot\left(-\frac{d\eta}{s}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\mu_n}\left\{-1+\frac{1}{s}\frac{\sin\mu_n\eta}{\mu_n}\Big|_0^s\right\}=\frac{1}{\mu_n}\left\{1-\frac{\sin\mu_n s}{\mu_n s}\right\}=\frac{1}{\mu_n};$$

$$\int_0^s\sin\mu_n\eta\cdot d\eta=\frac{1}{\mu_n}(1-\cos\mu_n s)=\frac{1}{\mu_n}\left(1-(-1)^n\right);$$

$$\int_0^l R_n(x,\xi)\cdot d\,\xi=\int_0^x sh\,\mu_n(l-x)\cdot ch\,\mu_n\xi\cdot d\,\xi+\int_x^l sh\,\mu_n(l-\xi)\cdot ch\,\mu_n x\cdot d\,\xi=$$

$$=sh\,\mu_n(l-x)\cdot\frac{1}{\mu_n}\cdot sh\,\mu_n\xi\Big|_0^x-ch\,\mu_n x\cdot\frac{1}{\mu_n}ch\,\mu_n(l-\xi)\Big|_x^l=$$

$$=\frac{1}{\mu_n}\cdot\left[sh\,\mu_n(l-x)\cdot sh\,\mu_n x-ch\,\mu_n x+ch\,\mu_n x\cdot ch\,\mu_n(l-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu_n}\left[ch\,\mu_n(l-x+x)-ch\,\mu_n x\right]=\frac{1}{\mu_n}\cdot\left(ch\,\mu_n l-ch\,\mu_n x\right)>0;$$

$$R_n(x,0)=sh\,\mu_n(l-x)>0.$$

Подставив полученные результаты в формулу для $u(x,y)$, получим еще не упрощенный ответ

$$u(x,y)=-\frac{2}{s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A}{\mu_n}\cdot(1-(-1)^n)\cdot\left(1-\frac{ch\,\mu_n x}{ch\,\mu_n l}\right)+B\frac{sh\,\mu_n(l-x)}{ch\,\mu_n l}\right\}\cdot\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n^2};$$

$$\mu_n=\frac{\pi n}{s}>0.$$

Если в первой части ряда оставить только члены с нечетными индексами $n=2m+1$ $(m=0,1,2,...)$ и часть, не зависящую от x, просуммировать (см. Приложение 1, формула 21), то окончательный вид решения будет

$$u(x,y)=-\frac{1}{2}A\,y(s-y)+\frac{4A}{s}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{ch\,\mu_m x}{ch\,\mu_m l}\frac{\sin\mu_m y}{\mu_m^3}-$$

$$-\frac{2B}{s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\,\mu_n(l-x)}{ch\,\mu_n l}\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n^2},$$

где $\mu_n=\dfrac{\pi n}{s}>0,\quad \mu_m=\dfrac{\pi}{s}(2m+1)>0.$

Полученные ряды сходятся правильно и не медленнее, чем $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $n,m\to\infty$.

3) Проверка найденного решения по условиям задачи и по размерностям.

$u(x,0)=u(x,s)=0$ – очевидно.

$$u'_x(0,y)=0+0+\frac{2B}{s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\sin\mu_n y=$$

$$=\frac{2B}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{\pi n y}{s}=\frac{2B}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{y}{s}\right)=B(1-\frac{y}{s});$$

$$u(l,y) = -\frac{1}{2}A\,y(s-y) + \frac{4A}{s}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^3}\cdot\sin\mu_m y - 0 = -\frac{1}{2}A\,y(s-y) +$$

$$+\frac{4\,A s^2}{\pi^3}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\cdot\sin\frac{\pi y}{s}(2m+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}A\,y(s-y) + \frac{4As^2}{\pi^3}\cdot\frac{\pi^3 y}{8s}(1-\frac{y}{s}) = 0$$

(см. Приложение 1, формулы № 1 и 15).

По условиям задачи имеем размерности

$$[u(x,y)] = Q, \quad [A] = Q/L^2, \quad [B] = Q/L, \quad [\mu l] = [\mu s] = 1.$$

Поэтому $[u] = [A]\cdot L^2 + [A]\cdot\frac{1}{L}\cdot L^3 + [B]\cdot\frac{1}{L}\cdot L^2 \Rightarrow Q.$

Тема 5.

Многомерные уравнения теплопроводности

Решение многомерных задач теплопроводности в прямоугольных областях методом собственных функций (разделения переменных) и методом функции Грина (источника).

Основные вопросы. Постановка и решение различных типов задач математической физики методом разложения по многократным собственным функциям (методом разделения переменных) в многомерных областях. Собственные функции и значения краевых задач в прямоугольных многомерных областях; сведение решений таких задач к одномерным методом последовательного разделения переменных. Вывод общих формул для решения многомерных нестационарных задач с использованием функции Грина (источника). Физический смысл рассматриваемых задач.

Литература: [1] – гл. 6, § 2 (1, 3). [3] – п. 205, 206. [5] – гл. 8, § 3 № 51. [6] – гл. 6, § 4.

Задания: [8] – гл. 5, № 9, 10.

№ 5.1 (А). Вывод общей формулы для решения плоской задачи параболического типа (уравнения переноса тепла и др.) с граничными условиями Дирихле (первого рода) внутри прямоугольника (см. задачу № 4.1(А). Получение функции Грина (источника) этой задачи.

$$\begin{cases} \Delta_2\, u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = F(M,t). \\ u\big|_C = \varphi(M,t), \qquad\qquad u = u(M,t) \equiv u(x,y;t) - \text{искомая функция.} \\ u\big|_{t=0} = f(M). \end{cases}$$

$$M(x,y) \in \sigma,\ \ M'(\xi,\eta) \in \sigma \cup C,\ \ C = \partial\sigma = \square ABCD;\ \ \rho = |M\,M'| > 0.$$

$M(x,y)$ – точка измерения (параметры интегрирования).

$M'(\xi,\eta)$ – точка источника (переменные интегрирования).

$0 \le x,\xi \le l, \quad 0 \le y,\eta \le s; \quad 0 \le t,\tau < \infty.$

$\vec{\nu}$ – вектор внешней нормали к граничному контуру C.

1) Привести к однородным граничные условия сразу на всех сторонах прямоугольника $\sigma = \square ABCD$ не удается; но оказывается, что и не требуется этого.

2) Постановка и решение вспомогательной (модульной) задачи Дирихле для оператора Лапласа, где все граничные условия поставлены по типу условий исходной задачи, однако все они равны нулю (однородны).

$$\begin{cases} \Delta_2 \Phi_{kn} = \lambda_{kn} \cdot \Phi_{kn}(M). \\ \Phi_{kn}\big|_C = 0. \end{cases}$$

$\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2 \le 0$ – собственные значения (числа) задачи; ее спектр.

$\Phi_{kn}(M) \equiv \Phi_{kn}(x,y) = X_k(x) \cdot Y_n(y)$ – собственные функции задачи.

Множество функций $\Phi_{kn}(x,y)$ составляет ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(M(x,y) \in \sigma | r)$ со скалярным произведением вида

$$(\Phi_{kn}, \Phi_{k'n'}) \equiv \iint_\sigma \Phi_{kn}(\xi,\eta) \cdot \bar{\Phi}_{k'n'}(\xi,\eta) \cdot r(\xi,\eta)\, d\sigma' = \delta_{kk'} \cdot \delta_{nn'},$$

где $d\sigma' = d\xi \cdot d\eta$ и $r(\xi,\eta) > 0$ – весовая функция, которая в декартовой системе координат всегда равна единице $r(x,y) \equiv 1$. Здесь $\Phi_{kn}(M) \equiv \Phi_{kn}(x,y) = X_k(x) \cdot Y_n(y)$, а значения функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ находим в табл. 1.

Искомую функцию $u(M,t)$ можно представить в виде разложения

$$u(M,t) = \sum_{k,n} T_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(M) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(M),$$

где коэффициент разложения (координата) равен

$$T_{kn}(t) = (u, \Phi_{kn}) = \iint_\sigma u(\xi,\eta;t) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(\xi,\eta) \cdot d\sigma'; \qquad d\sigma' = d\xi \cdot d\eta.$$

Аналогично найдем коэффициенты разложения функций

$$F(M,t) = \sum_{k,n} F_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(M), \qquad \text{где} \quad F_{kn}(t) = (F, \Phi_{kn});$$

$$u\Big|_{t=0} = f(M) = \sum_{k,n} f_{kn} \cdot \Phi_{kn}(M), \qquad \text{где } f_{kn} = (f, \Phi_{kn}) = const.$$

3) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

Заданное уравнение теплопроводности почленно скалярно умножим на собственную функцию $\Phi_{kn}(M)$

$$(\Delta_2\, u, \Phi_{kn}) - \frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Phi_{kn}\right) = (F, \Phi_{kn});$$

тогда получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u, \Phi_{kn}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(u, \Phi_{kn}) = \frac{d}{dt} T_{kn}(t) \equiv T'_{kn}(t).$$

Далее воспользуемся формулой Грина на плоскости

$$(\Delta_2 u, \Phi_{kn}) - (u, \Delta_2 \Phi_k) = \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial \nu'} \bar{\Phi}_{kn} - u \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_{kn}}{\partial \nu'}\right) d\,l';$$

$$dl' = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} \geq 0 \text{ и учтем заданные условия}$$

$\Phi_{kn}\Big|_C = 0, \quad u\Big|_C = \varphi(M, t)$ и $\Delta_2 \Phi_{kn} = -\mu_{kn}^2 \cdot \Phi_{kn}$, тогда

$$(\Delta_2\, u, \Phi_{kn}) = -\mu_{kn}^2 \cdot (u, \Phi_{kn}) + \oint_C \left(0 - \varphi\left(M', t\right) \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_{kn}}{\partial \nu'}\right) \cdot d\,l' =$$

$$= -\mu_{kn}^2 \cdot T_{kn}(t) - \oint_C \varphi(M', t) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \bar{\Phi}_{kn}(M') \cdot d\,l'.$$

Поэтому исходное уравнение задачи можно представить в виде

$$T'_{kn}(t) + (b\mu_{kn})^2 \cdot T_{kn}(t) =$$

$$= -b^2 \cdot F_{kn}(t) - b^2 \cdot \oint_C \varphi(M', t) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \bar{\Phi}_{kn}(M') \cdot d\,l' \equiv F_{kn.}$$

4) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$\overset{\circ}{T}{}'_{kn} + (b\mu_{kn})^2 \cdot \overset{\circ}{T}_{kn}(t) = 0$, очевидно, равно $\overset{\circ}{T}_{kn}(t) = C_{kn} \cdot e^{-(b\,\mu_{kn})^2 t}$, где $C_{kn} = const$ – постоянная интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольной постоянной $T_{kn}(t) = C_{kn}(t) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t}$ и для определения неизвестной функции $C_{kn}(t)$ обратимся к уравнению

$$T'_{kn} + (b\mu_{kn})^2 \cdot T_{kn}(t) = C'_{kn}(t) \cdot e^{-\cdots} + C_{kn}(t) \cdot \left(-(b\mu_{kn})^2\right) \cdot e^{-\cdots} +$$

$$+(b\mu_{kn})^2 \cdot C_{kn}(t) \cdot e^{-\cdots} = C'_{kn}(t) \cdot e^{-\cdots} = F_{kn}(t).$$

Откуда найдем $C'_{kn}(t) = F_{kn}(t) \cdot e^{+(b\mu_{kn})^2 t}$ или

$C_{kn}(t) = C_{kn} + \int\limits_0^t F_{kn}(\tau) \cdot e^{+(b\mu_{kn})^2 \tau} \cdot d\tau$; здесь $C_{kn} = const.$ Возвращаясь к функции $T_{kn}(t)$, получим

$$T_{kn}(t) = C_{kn}(t) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t} = C_{kn} \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t} + \int\limits_0^t F_{kn}(\tau) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau;$$

$$C_{kn} = const.$$

5) Определение постоянной C_{kn} из начального условия.

Теперь решение задачи можно записать предварительно

$$u(M,t) = \sum_{k,n} T_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(M) =$$

$$= \sum_{k,n} \left\{ C_{kn} \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t} + \int\limits_0^t F_{kn}(\tau) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \right\} \cdot \Phi_{kn}(M).$$

Использовав заданное начальное условие, получим

$$u\big|_{t=0} \equiv u(M,0) = \sum_{k,n} \left\{ C_{kn} + 0 \right\} \cdot \Phi_{kn}(M) = f(M) = \sum_{k,n} f_{kn} \cdot \Phi_{kn}(M).$$

Поэтому искомая постоянная равна $C_{kn} = f_{kn} = (f, \Phi_{kn})$.

6) Окончательный вид решения задачи и вывод функции Грина (источника).

$$u(M,t) = \sum_{k,n} T_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(M) =$$

$$= \sum_{k,n} \left\{ f_{kn} \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t} + \int\limits_0^t F_{kn}(\tau) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \right\} \cdot \Phi_{kn}(M) =$$

$$= \sum_{k,n} \left(\iint_\sigma f(M') \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M') \cdot d\sigma' \right) \cdot e^{-(b\mu_{kn})^2 t} \cdot \Phi_{kn}(M) -$$

$$- b^2 \cdot \sum_{k,n} \int_0^t \left[\iint_\sigma F(M',\tau) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M') \cdot d\sigma' + \right.$$

$$\left. + \oint_C \varphi(M',\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \bar{\Phi}_{kn}(M') \cdot dl' \right] \cdot \Phi_{kn}(M) e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau =$$

$$= \iint_\sigma f(M') \cdot \left(\sum_{k,n} e^{-(b\mu_{kn})^2 t} \cdot \Phi_{kn}(M) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M') \right) \cdot d\sigma' -$$

$$-b^2 \cdot \int_0^t \left[\iint_\sigma F(M',\tau) \cdot \left(\sum_{k,n} e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \Phi_{kn}(M) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M') \right) \cdot d\sigma' + \right.$$

$$\left. + \oint_C \varphi(M',\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \left(\sum_{k,n} e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \Phi_{kn}(M) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M') \right) dl' \right] \cdot d\tau =$$

$$= \iint_\sigma f(M') \cdot G(M,M'|t) \cdot d\sigma' - b^2 \cdot \int_0^t \left[\iint_\sigma F(M',\tau) \cdot G\big(M,M'\big|t-\tau\big) d\sigma' + \right.$$

$$\left. + \oint_C \varphi(M',\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \cdot G(M,M'\,|\,t-\tau)\, dl' \right] \cdot d\tau;$$

где функция Грина (источника) равна

$$G\big(M,M'\big|\,t\big) \equiv G\big(x,y;\xi,\eta\,\big|\,t\big) = \sum_{k,n}^{\infty} e^{-(b\mu_{kn})^2 \cdot t} \cdot \Phi_{kn}(M) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(M');$$

$$\mu_{kn}^2 = \mu_k^2 + \mu_n^2 = \pi^2 \cdot \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{s^2} \right) > 0.$$

Двойной ряд для функции Грина можно представить в виде произведения двух однократных рядов по индексам k и n. Каждый из рядов сходится правильно и может быть выражен через Θ- и H-функции (тета- и эта-функции, входящие в состав неэлементарных эллиптических функций Якоби).

При решении задач для уравнения переноса с граничными условиями Неймана $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_C = \varphi(M,t)$ (вторая краевая задача) или со смешанными краевыми условиями $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha\cdot u\right)\Big|_C=\varphi(M,t)$ (третья краевая задача) форма окончательной формулы ответа несколько изменяется – необходимо сделать замену $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\to -1$ и поставить другие собственные функции $\Phi_{kn}(M)$, выбранные из табл. 1. Формулы, аналогичные полученным, выводятся и при решении задачи для уравнения переноса в пространстве – внутри прямоугольного параллелепипеда, а также в других ортогональных системах координат.

7) Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

Функция Грина для уравнения переноса с граничными условиями Дирихле (первого рода) является решением задачи

$$\begin{cases}\Delta_2 G-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial G}{\partial t}=-\dfrac{1}{b^2}\cdot\delta(M,M')\cdot\delta(t-\tau).\\ G\big|_C=0,\quad G\big|_{t=0}=\delta(M,M').\end{cases}\qquad G=G(M,t).$$

Выполнение этих условий очевидно

$$G(M,M'|\,t)\big|_C=0\because\Phi_{kn}(M)\big|_C=X_k(x)\cdot Y_n(y)\big|_C=0;$$

$$G\big|_{t=0}=G(M,M'|0)=\sum_{k,n}\Phi_{kn}(M)\cdot\bar{\Phi}_{kn}(M')=\delta(M,M').$$

Кроме того, выполняется дополнительное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu'}G(M,M'|\,t)\big|_C=-\frac{1}{b^2}\cdot\delta(M,M')\cdot\delta(t-\tau).$$

Проверим выполнение всех условий нашей задачи.

$$u\big|_{t=0}=\iint_\sigma f(M')\cdot G(M,M'|0)\,d\sigma'-0=\iint_\sigma f(M')\cdot\delta(M,M')\,d\sigma'=f(M).$$

$$u\big|_C=\iint_\sigma f\cdot G\big|_C\cdot d\sigma'-b^2\cdot\int_0^t\left[\iint_\sigma F\cdot G\big|_C\cdot d\sigma'+\oint_C\varphi\cdot\frac{\partial G}{\partial \nu'}\Big|_C\cdot dl'\right]\cdot d\tau=$$

$$=0-b^2\cdot\int_0^t\left[0+\oint_C\varphi(M',\tau)\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\cdot\delta(M,M')\cdot\delta(t,\tau)\right)\cdot dl'\right]\cdot d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\oint_C\varphi(M',\tau)\cdot\delta(M,M')\cdot dl'\right)\delta(\tau-t)\,d\tau=\varphi(M,t).$$

$$\Delta_2 u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\iint_\sigma f\cdot\left(\Delta_2 G-\frac{1}{b^2}\frac{\partial G}{\partial t}\right)d\sigma'-$$

$$-b^2\cdot\int_0^t\left[\iint_\sigma F\cdot\left(\Delta_2 G-\frac{1}{b^2}\frac{\partial G}{\partial t}\right)d\sigma'+\oint_C\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\nu'}\left(\Delta_2 G-\frac{1}{b^2}\frac{\partial G}{\partial t}\right)\cdot d\,l'\right]d\tau=$$

$$=0-b^2\cdot\int_0^t\left[\iint_\sigma F\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\cdot\delta(M,M')\cdot\delta(t-\tau)\right)d\sigma'+0\right]d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\iint_\sigma F(M',\tau)\cdot\delta(M,M')\cdot d\sigma'\right)\cdot\delta(\tau-t)\,d\tau=F(M,t).$$

По условию задачи имеем размерности $[u(M,t)]=Q$, $[F]=Q/L^2$, $[\varphi]=[f]=Q$, $[G]=1/L^2$, $[b^2]=L^2/T$; поэтому

$$[u]=[f]\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L^2+\frac{L^2}{T}\left\{[F]\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L^2+[\varphi]\cdot\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L\right\}T\Rightarrow Q.$$

8) При решении задачи для уравнения переноса в трехмерном пространстве с граничными условиями Дирихле получим выражения, построенные по типу предыдущих.

$$\begin{cases}\Delta_3\,u-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(M,t).\\[2mm] u\big|_\sigma=\varphi(M,t),\quad u\big|_{t=0}=f(M).\end{cases}\qquad\begin{aligned}&u=u(M,t).\\&M(x,y,z)\in V,\\&M'(\xi,\eta,\zeta)\in V\cup\sigma.\end{aligned}$$

V – прямоугольный параллелепипед и $\sigma=\partial V$ – его поверхность.

$0\le x,\xi\le l,\quad 0\le y,\eta\le s,\quad 0\le z,\zeta\le H.\quad 0\le t,\tau<\infty.$

$$\begin{cases}\Delta_3\Phi=\lambda\cdot\Phi(M),\\ \Phi\big|_\sigma=0.\end{cases}\ \text{– краевая задача Дирихле.}$$

$\lambda_{knm}=-\mu_{knm}^2<0$ – собственные значения (числа).

$\Phi_{knm}(M)=X_k(x)\cdot Y_n(y)\cdot Z_m(z)$ – ортонормированное множество собственных функций (базис).

Решение задачи имеет вид

$$u(M,t)=\iiint_V f(M')\cdot G(M,M'|\,t)\,dV'-$$

$$-b^2\cdot\int_0^t\left[\oiint_\sigma\varphi(M',\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\nu'}G\big(M,M'|\,t-\tau\big)dV'+\right.$$

$$\left.+\iiint_V F(M',\tau)\cdot G(M,M'|\,t-\tau)\,dV'\right]d\tau.$$

$$\begin{cases} \Delta_3 G - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial G}{\partial t} = -\dfrac{1}{b^2}\cdot\delta(M,M')\cdot\delta(t-\tau). \\ G\big|_{\sigma} = 0, \quad G\big|_{t=0} = \delta(M,M'). \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}G\big|_{\sigma} = \frac{-1}{b^2}\delta(M,M')\cdot\delta(t-\tau).$$

При решении аналогичных задач с граничными условиями $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\sigma} = \varphi$ (Неймана) или $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha\cdot u\right)\Big\|_{\sigma} = \varphi$ (смешанным) в формуле решения происходит замена $\dfrac{\partial}{\partial \nu'} \to -1$.

№ 5.2 (А). Решение двумерного уравнения переноса внутри прямоугольника со смешанными граничными условиями методом последовательного отделения переменных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = At. \\ u(0,y,t) = 0, \quad u'_x(l,y,t) = B; \\ u'_y(x,0,t) = 0, \quad u(x,s,t) = 0; \\ u(x,y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s; \\ 0 \le t < \infty. \\ A,B,b,l,s = const > 0. \end{array}$$

1) Пара граничных условий по координате y уже однородна по условиям.

2) Отделение зависимости от y и решение соответствующей краевой задачи (см. табл. 1).

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)\cdot Y_k(y);$$

здесь $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t) = 0$ и $Y_k(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot\cos\mu_k y$, где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2s}(2k+1) > 0$ и $k \in Z_0$.

3) Постановка задачи для функции $u_k(x,t)$.

$$\Delta_2 u - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\cdot Y_k + u_k\cdot Y''_k - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}\cdot Y_k \right\} =$$

$$=\sum_k\left\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot u_k\right\}\cdot Y_k(y)=At\equiv\sum_k\gamma_k(t)\cdot Y_k(y),$$

где $\gamma_k(t)=(At,Y_k)=At\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot\displaystyle\int_0^s\cos\mu_k y\cdot dy=\dfrac{At}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot(-1)^k.$

Преобразование граничных условий по координате x и начального условия по времени t:

$$u(0,y,t)=\sum_k u_k(0,t)\cdot Y_k(y)=0\Rightarrow u_k(0,t)=0;$$

$$u'_x(l,y,t)=\sum_k\frac{\partial}{\partial x}u_k(l,t)\cdot Y_k(y)=B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}u_k(l,t)=(B,Y_k)=B\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\int_0^s\cos\mu_k y\cdot dy=$$

$$=\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot(-1)^k=const;$$

$$u(x,y,0)=\sum_k u_k(x,0)\cdot Y_k(y)=0\Rightarrow u_k(x,0)=0.$$

Таким образом, для функции $u_k(x,t)$ получаем обычную одномерную задачу математической физики на отрезке $0\le x\le l$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot u_k(x,t)=\gamma_k(t)=\dfrac{At}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot(-1)^k\equiv\tilde{A}_k\cdot t.\\ u_k(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}u_k(l,t)=\dfrac{B}{\mu_k}\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cdot(-1)^k\equiv\tilde{B}_k.\\ u_k(x,0)=0.\end{cases}$$

4) Приведение граничных условий по x к однородным выполним с помощью замены $u_k(x,t)=v_k(x,t)+\alpha(t)\cdot x+\beta(t)$, тогда

$$u_k(0,t)=v_k(0,t)+0+\beta(t)=0\Rightarrow v_k(0,t)=0,\qquad \beta(t)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_k(l,t)=\frac{\partial}{\partial x}v_k(l,t)+\alpha(t)=\tilde{B}_k\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}v_k(l,t)=0,\qquad \alpha(t)=\tilde{B}_k.$$

Итак, получено $u_k(x,t)=v_k(x,t)+\tilde{B}_k\cdot x$. Поэтому

$$u_k(x,0)=v_k(x,0)+\tilde{B}_k\cdot x=0\Rightarrow v_k(x,0)=-\tilde{B}_k\cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot u_k=\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot\left(v_k+\tilde{B}_k\cdot x\right)=\tilde{A}_k t.$$

Постановка задачи для новой функции $v_k(x,t)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k(x,t)=\tilde{A}_k\cdot t+\mu_k^2\tilde{B}_k\cdot x.\\ v_k(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}v_k(l,t)=0.\\ v_k(x,0)=-\tilde{B}_k\cdot x.\end{cases}\qquad \begin{matrix}v_k=v_k(x,t);\\ 0\le x\le l,\\ 0\le t<\infty.\end{matrix}$$

5) Разделение переменных для функции $v_k(x,t)$ и решение краевой задачи по другой координате x (см. табл. 1).

$$v_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot X_n(x);$$

здесь $\lim\limits_{k,n\to\infty}T_{kn}(t)=0$ и $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\sin\mu_n x$, где $\mu_n=\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)>0$ и $n\in\mathbb{Z}_0$.

6) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2 v_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{T_{kn}\cdot X_n''-\frac{1}{b^2}T_{kn}'\cdot X_n-\mu_k^2\cdot T_{kn}X_n\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\cdot\sum_n\left\{T_{kn}'+p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t)\right\}X_n(x)=\tilde{A}_k t+\mu_k^2\,\tilde{B}_k\,x=\sum_n\Gamma_{kn}(t)\cdot X_n(x),$$

где $p_{kn}^2=b^2\cdot(\mu_k^2+\mu_n^2)=\dfrac{1}{4}\pi^2 b^2\cdot\left(\dfrac{(2k+1)^2}{l^2}+\dfrac{(2n+1)^2}{s^2}\right)>0$,

$$\Gamma_{kn}(t)=(\tilde{A}_k t+\mu_k^2\tilde{B}_k x,X_n)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l(\tilde{A}_k t+\mu_k^2\tilde{B}_k x)\cdot\sin\mu_n x\cdot dx=$$

$$=\frac{-1}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left[(\tilde{A}_k t+\mu_k^2\tilde{B}_k x)\cdot\cos\mu_n x\Big|_0^l-\int_0^l(0+\mu_k^2\tilde{B}_k)\cdot\cos\mu_n x\cdot dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu_n^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\left(\tilde{A}_k\cdot\mu_n t+\mu_k^2\tilde{B}_k\cdot(-1)^n\right).$$

Приравнивая коэффициенты по индексу n, получим

$$T'_{kn} + p_{kn}^2 \cdot T_{kn}(t) = -b^2 \cdot \Gamma_{kn}(t) = -\frac{b^2}{\mu_n^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(\tilde{A}_k \mu_n t + \mu_k^2 \tilde{B}_k \cdot (-1)^n \right).$$

7) Решение дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

Решение соответствующего однородного уравнения

$\dfrac{d\mathring{T}_{kn}}{dt} = -p_{kn}^2 \cdot \mathring{T}_{kn}(t)$, очевидно, равно $\mathring{T}_{kn}(t) = C_{kn} \cdot e^{-p_{kn}^2 t}$, где C_{kn} – постоянная интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде бинома $\tilde{T}_{kn}(t) = \alpha t + \beta$ $(\alpha, \beta = const)$ в соответствии с правой частью рассматриваемого уравнения. Тогда получим

$$\tilde{T}'_{kn} + p_{kn}^2 \cdot \tilde{T}_{kn}(t) = \alpha + p_{kn}^2 \cdot (\alpha t + \beta) = -\frac{b^2}{\mu_n^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(\tilde{A}_k \mu_n t + \mu_k^2 \tilde{B}_k \cdot (-1)^n \right);$$

приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях t, найдем

$$\alpha = -\frac{b^2}{\mu_n p_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\ \tilde{A}_k = \frac{2Ab^2}{\mu_k \mu_n p_{kn}^2} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{ls}},$$

$$\beta = \frac{-1}{p_{kn}^2}\left(\alpha + b^2\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{\mu_k^2}{\mu_n^2}\ \tilde{B}_k \cdot (-1)^n \right) =$$

$$= \frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2}\left(\frac{A}{\mu_k p_{kn}^2} - B \cdot (-1)^n \cdot \frac{\mu_k}{\mu_n} \right) \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{ls}}.$$

Теперь общее решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$ примет вид

$$T_{kn}(t) = \mathring{T}_{kn}(t) + \tilde{T}_{kn}(t) =$$

$$= C_{kn} \cdot e^{-p_{kn}^2 t} - \frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{ls}} \cdot \left[\frac{A}{\mu_k} \cdot \left(t - \frac{1}{p_{kn}^2} \right) + (-1)^n B \cdot \frac{\mu_k}{\mu_n} \right],$$

а разложение промежуточной функции $v_k(x,t)$ будет

$$v_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(t) \cdot X_n(x) = \sum_n \left\{ C_{kn} \cdot e^{-p_{kn}^2 t} - \frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{ls}} \cdot \left[\frac{A}{\mu_k}\left(t - \frac{1}{p_{kn}^2} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^n B \cdot \frac{\mu_k}{\mu_n} \right] \right\} \cdot X_n(x).$$

8) Определение постоянной C_{kn} из начального условия $v_k(x,0) = -\tilde{B}_k x.$

$$v_k(x,0) = \sum_n \left\{ C_{kn} + \frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{l s}} \cdot \left(\frac{A}{\mu_k p_{kn}^2} - (-1)^n B \frac{\mu_k}{\mu_n} \right) \right\} X_n(x) =$$

$$= -\tilde{B}_k x \equiv \sum_n \beta_{kn} \cdot X_n(x),$$

где $\beta_{kn} = \left(-\tilde{B}_k x, X_n \right) = -\tilde{B}_k \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l x \cdot \sin \mu_n x \cdot d\,x =$

$$= \frac{\tilde{B}_k}{\mu_n^2} \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(x \cdot \cos \mu_n x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \mu_n x \cdot dx \right) =$$

$$= \frac{\tilde{B}_k}{\mu_n^2} \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^{n+1} = \frac{-B}{\mu_k \mu_n^2} \cdot \frac{(-1)^{k+n}}{\sqrt{l s}},$$

$$C_{kn} = \beta_{kn} - \frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{ls}} \left(\frac{A}{\mu_k p_{kn}^2} - (-1)^n \cdot B \frac{\mu_k}{\mu_n} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{\mu_n \sqrt{l s}} \cdot \left[\frac{b^2}{p_{kn}^2} \cdot \left(\frac{A}{\mu_k p_{kn}^2} - (-1)^n \cdot B \frac{\mu_k}{\mu_n} \right) + (-1)^n \frac{B}{\mu_k \mu_n} \right].$$

Подставив далее значение постоянной C_{kn} в разложение функции $v_k(x,t)$, получим

$$v_k(x,t) = \frac{2 \cdot (-1)^k}{\sqrt{l s}} \cdot \sum_n \left\{ \frac{b^2}{p_{kn}^2} \cdot \left[\frac{A}{\mu_k} \left(\frac{1}{p_{kn}^2} - t \right) - (-1)^n B \frac{\mu_k}{\mu_n} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{b^2}{p_{kn}^2} \left(\frac{A}{\mu_k p_{kn}^2} - (-1)^n B \frac{\mu_k}{\mu_n} \right) + (-1)^n \frac{B}{\mu_k \mu_n} \right] \cdot e^{-p_{kn}^2 t} \right\} \cdot \frac{1}{\mu_n} X_n(x).$$

9) Окончательный вид решения.

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \cdot Y_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(v_k(x,t) + \tilde{B}_k x \right) \cdot Y_k(y) =$$

$$= B\,x + \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x,t) \cdot Y_k(y) =$$

$$= B\,x + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_{k\,n}(t)\cdot X_n(x)\right)\cdot Y_k(y) =$$

$$= B\,x + \frac{4}{l\,s}\cdot\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_n}\left\{\frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\cdot\left[\frac{A}{\mu_k}\cdot\left(\frac{1}{p_{k\,n}^2}-t\right)-(-1)^n\cdot B\frac{\mu_k}{\mu_n}\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\cdot\left(\frac{A}{\mu_k\,p_{k\,n}^2}-(-1)^n\cdot B\,\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)+(-1)^n\cdot\frac{B}{\mu_k\mu_n}\right]\cdot e^{-p_{kn}^2 t}\right\}\cdot\cos\mu_k y\cdot\sin\mu_n x,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2s}(2k+1) > 0$, $\mu_n = \dfrac{\pi}{2l}(2n+1)$ и $p_{k\,n}^2 = b^2(\mu_k^2+\mu_n^2) > 0.$

Двойной ряд в ответе сходится правильно по всем переменным; самые слабые оценки общего члена ряда $O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ и $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $k,n\to\infty$. Член ряда, связанный с экспонентой, может быть выражен через Θ- и H-функции (тета- и эта-функции); эта часть ряда сходится очень быстро.

10) Проверка решения задачи по условиям и по размерностям.

$$u(0,y,t)=0,\qquad u'_x(l,y,t)=B\because\cos\mu_n\,l=0.$$

$u'_y(x,0,t)=0$, $u(x,s,t)=B\,x-0\neq 0\because\cos\mu_k s=0$ – условие не выполняется, так как разложение по $\cos\mu_k y$ типа ряда № 8 при $y=s$ теряет смысл: здесь ряд не удается просуммировать.

$$u(x,y,0)=Bx+\frac{4}{ls}\cdot\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_n}\frac{B\cdot(-1)^{n+1}}{\mu_k\mu_n}\cdot\cos\mu_k y\cdot\sin\mu_n x=$$

$$=Bx-\frac{32Bl}{\pi^3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos\frac{\pi y}{2s}(2k+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2l}(2n+1)=$$

$$=Bx-\frac{32Bl}{\pi^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi^2 x}{8l}=Bx-Bx=0$$ (см. Приложение 1, формулы № 8 и 12).

Для многомерных задач не будем проверять, что полученный ответ удовлетворяет так же и уравнению, так как при этом приходилось бы производить громоздкие вычисления.

По условию задачи имеем размерности величин $[u(M,t)]=Q$, $[A]=Q/L^2T$, $[B]=Q/L$, $[b^2]=L^2/T$, $[p_{kn}^2]=1/T$, $[\mu_k]=[\mu_n]=1/L$. Поэтому $[u]=[B]\cdot L+\dfrac{1}{L^2}\cdot L\cdot\left\{[b^2]\cdot T\cdot\left([A]\cdot LT+[B]\right)+[B]\cdot L^2\right\}\Rightarrow Q.$

11) Решение той же задачи по общей формуле с использованием функции Грина (источника) для случая граничных условий второго рода с заменой $\dfrac{\partial G}{\partial n} \to -G$.

$$G(M,M'\,|\,t) \equiv G(x,y;\xi,\eta\,|\,t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} e^{-p_{kn}^2 t} \cdot \Phi_{kn}(x,y) \cdot \bar{\Phi}_{kn}(\xi,\eta);$$

$$\Phi_{kn}(x,y) = X_n(x) \cdot Y_k(y); \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\mu_n x; \quad Y_k(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \cdot \cos\mu_k y;$$

$$\mu_n = \frac{\pi}{2l}(2n+1); \quad \mu_k = \frac{\pi}{2s}(2k+1); \quad p_{kn}^2 = b^2(\mu_k^2 + \mu_n^2) > 0.$$

$$u(M,t) = \iint_\sigma f \cdot G \cdot d\sigma' - b^2 \cdot \int_0^t \left\{ -\oint_C \varphi \cdot G \cdot dl' + \right.$$

$$\left. + \iint_\sigma F \cdot G \cdot d\sigma' \right\} d\tau; \qquad d\sigma' = d\xi \cdot d\eta, \qquad dl' = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}.$$

$$u(M,t) = 0 + b^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^s B \cdot G\left(M,M'\middle|t-\tau\right)\Big|_{\xi=l} \cdot d\eta - \right.$$

$$\left. - \iint_\sigma A\tau \cdot G\left(M,M'\middle|t-\tau\right) \cdot d\sigma' \right\} d\tau =$$

$$= \frac{4b^2}{ls} \cdot \int_0^t \sum_{k,n=0}^{\infty} \left\{ B \cdot \int_0^s \sin\mu_n x \cdot \sin\mu_n l \cdot \cos\mu_k y \cdot \cos\mu_k \eta \cdot d\eta - \right.$$

$$\left. - A\tau \cdot \int_0^l \sin\mu_n x \cdot \sin\mu_n \xi \cdot d\xi \cdot \int_0^s \cos\mu_k y \cdot \cos\mu_k \eta \cdot d\eta \right\} \cdot e^{-p_{kn}^2(t-\tau)} \cdot d\tau =$$

$$= \frac{4b^2}{ls} \cdot \sum_{k,n} e^{-p_{kn}^2 t} \left\{ B \cdot \sin\mu_n x \cdot (-1)^n \cdot \cos\mu_k y \cdot \frac{\sin\mu_k \eta}{\mu_k}\Big|_0^s \cdot \frac{e^{p_{kn}^2 \tau}}{p_{kn}^2}\Big|_0^t - \right.$$

$$\left. - A \cdot \sin\mu_n x \cdot \frac{\cos\mu_n \xi}{-\mu_n}\Big|_0^l \cdot \cos\mu_k y \cdot \frac{\sin\mu_k \eta}{\mu_k}\Big|_0^s \cdot \frac{1}{p_{kn}^2}\left(te^{p_{kn}^2 t} - \frac{1}{p_{kn}^2}\left(e^{p_{kn}^2 t} - 1\right)\right) \right\} =$$

$$= \frac{4b^2}{ls} \cdot \sum_{k,n} \left\{ \left(B \cdot (-1)^n + \frac{A}{\mu_n} \cdot \frac{1}{p_{kn}^2} \right)\left(1 - e^{-p_{kn}^2 t}\right) - \frac{At}{\mu_n} \right\} \frac{(-1)^k}{\mu_k p_{kn}^2} \cdot \sin\mu_n x \cdot \cos\mu_k y.$$

Полученный ряд правильно сходится при всех значениях переменных, рассматриваемых в задаче. Это ответ снова удовлетворяет только тем же четырем из пяти заданных условий. Все размерности совпадают.

№ 5.3 (В). Решение неоднородного уравнения переноса на плоскости с многими нестационарностями.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = A x t. \\ u(0,y,t) = 0, \quad u'_x(l,y,t) = 0. \\ u'_y(x,0,t) = Bt, \quad u(x,s,t) = 0. \\ u(x,y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y,t) \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s; \\ 0 \le t < \infty. \\ A,B,b,l,s = const > 0. \end{array}$$

1–2) Пара граничных условий по переменной x уже однородна по условиям задачи, поэтому удобно отделить первой именно эту переменную и построить по ней базис для разложения в ряд.

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y,t) \cdot X_k(x),$$

где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \sin \mu_k x$ и $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$ (см. табл. 1). $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(y,t) = 0$.

3) Постановка задачи для функции $u_k(y,t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} - \mu_k^2 u_k - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t} \right\} X_k(x) =$$
$$= A x t \equiv \sum_k \gamma_k(y,t) \cdot X_k(x),$$

где $\gamma_k(y,t) = (A x t, X_k) = At\sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \displaystyle\int_0^l x \cdot \sin \mu_k x \cdot dx =$

$$= At\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left\{ x \cdot \frac{\cos \mu_k x}{-\mu_k}\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\cos \mu_k x}{-\mu_k} dx \right\} = \frac{At}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot (-1)^k \equiv \tilde{A}_k \cdot t.$$

Теперь уравнение для функции $u_k(y,t)$ получено в виде

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t} - \mu_k^2 u_k(y,t) = \gamma_k(y,t) \equiv \tilde{A}_k\, t.$$

Нетрудно вывести и условия задачи

$$u'_y(x,0,t) = \sum_k \frac{\partial}{\partial y} u_k(0,t) \cdot X_k(x) = Bt = \sum_k \beta_k(t) \cdot X_k(x),$$

где $\beta_k(t) = (Bt, X_k) = Bt\sqrt{\dfrac{2}{l}} \cdot \int\limits_0^l \sin \mu_k x \cdot dx =$

$$= \frac{Bt}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \equiv \tilde{B}_k t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} u_k(0,t) = \frac{Bt}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}} \equiv \tilde{B}_k t.$$

$$u(x,s,t) = \sum_k u_k(s,t) \cdot X_k(x) = 0 \Rightarrow u_k(s,t) = 0.$$

$$u(x,y,0) = \sum_k u_k(y,0) \cdot X_k(x) = 0 \Rightarrow u_k(y,0) = 0.$$

Задача для функции $u_k(y,t)$ теперь принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_k}{\partial t} - \mu_k^2 \cdot u_k(y,t) = \tilde{A}_k t. \\ \dfrac{\partial}{\partial y} u_k(0,t) = \tilde{B}_k t, \quad u_k(s,t) = 0; \\ u_k(y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u_k = u_k(y,t). \\ &0 \le y \le s, \\ &0 \le t < \infty. \end{aligned}$$

4) Приведение граничных условий к однородным здесь легко выполнить с помощью замены $u_k(y,t) = v_k(y,t) - \tilde{B}_k t \cdot (s-y)$, и тогда получим задачу для функции $v_k(y,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_k}{\partial t} - \mu_k^2 v_k(y,t) = \tilde{A}_k t - \tilde{B}_k \cdot \left(\mu_k^2 t + \dfrac{1}{b^2}\right) \cdot (s-y). \\ \dfrac{\partial}{\partial y} v_k(0,t) = 0, \quad v_k(s,t) = 0; \\ v_k(y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &v_k = v_k(y,t). \\ &0 \le y \le s, \\ &0 \le t < \infty. \end{aligned}$$

5) Отделение переменной y и решение для этой переменной краевой задачи $v_k(y,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_{k\,n}(t) \cdot Y_n(y)$, где $Y_n(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}} \cdot \cos \mu_n y$ и $\mu_n = \dfrac{\pi}{2s}(2n+1) > 0$ (см. табл. 1). Требуется $\lim\limits_{k,n \to \infty} T_{kn}(t) = 0$.

6) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t} - \mu_k^2 v_k(y,t) = -\frac{1}{b^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{T'_{kn} + p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t)\right\}\cdot Y_n(y) =$$

$$= \tilde{A}_k t - \tilde{B}_k\left(\mu_k^2 t + \frac{1}{b^2}\right)\cdot(s-y), \quad \text{где} \quad p_{kn}^2 = b^2\cdot(\mu_k^2 + \mu_n^2) > 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{T'_{kn} + p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t)\right\}\cdot Y_n(y) = -\tilde{A}_k b^2 t + \tilde{B}_k(\mu_k^2 b^2 t + 1)\cdot(s-y) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_{kn}(t)\cdot Y_n(y), \quad \text{где} \quad \Gamma_{kn}(t) = \left(-\tilde{A}_k b^2 t + \tilde{B}_k\cdot(\mu_k^2 b^2 t + 1)\cdot(s-y), Y_n\right) =$$

$$= -\tilde{A}_k b^2 t\cdot\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\int_0^s \cos\mu_n y\cdot dy + \tilde{B}_k(\mu_k^2 b^2 t + 1)\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\int_0^s (s-y)\cdot\cos\mu_n y\cdot dy =$$

$$= -\tilde{A}_k b^2 t\cdot\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\frac{\sin\mu_n y}{\mu_n}\Big|_0^s + \tilde{B}_k(\mu_k^2 b^2 t + 1)\cdot\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\frac{1}{\mu_n}\cdot\Big[(s-y)\cdot\sin\mu_n y\Big|_0^s +$$

$$\left. + \int_0^s \sin\mu_n y\cdot dy\right] = -\tilde{A}_k b^2 t\cdot\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\frac{(-1)^n}{\mu_n} + \tilde{B}_k\cdot\left(\mu_k^2 b^2 t + 1\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\frac{1}{\mu_n^2}.$$

Тогда уравнение для $T_{kn}(t)$ будет

$$T'_{kn} + p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t) = \Gamma_{kn}(t) \equiv \left(B\frac{\mu_k}{\mu_n^2} - A\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k^2\mu_n}\right)\cdot\frac{2b^2 t}{\sqrt{l\,s}} + \frac{2B}{\mu_k\mu_n^2\sqrt{l\,s}}.$$

7) Решение неоднородного дифференциального уравнения для $T_{kn}(t)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения, очевидно, равно $\overset{\circ}{T}_{kn}(t) = C_{kn}\cdot e^{-p_{kn}^2 t}$, где $C_{kn} = const$ – постоянная интегрирования. В соответствии с видом неоднородности уравнения, его частное решение следует искать в виде двучлена $\tilde{T}_{kn}(t) = M\,t + N \quad (M, N = const)$, тогда

$$\tilde{T}'_{kn} + p_{kn}^2\cdot\tilde{T}_{kn}(t) = M + p_{kn}^2\cdot(M\,t + N) = M\cdot p_{kn}^2 t + (M + p_{kn}^2 N) =$$

$$= \left(B\frac{\mu_k}{\mu_n^2} - \frac{A\cdot(-1)^{k+n}}{\mu_k^2\mu_n}\right)\frac{2b^2 t}{\sqrt{l\,s}} + \frac{2B}{\mu_k\mu_n^2\sqrt{l\,s}}.$$

Приравняв в правых частях коэффициенты при одинаковых степенях t, легко получим

$$M = \left(B\frac{\mu_k}{\mu_n} - A\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k^2}\right)\frac{2b^2}{\mu_n p_{kn}^2\sqrt{l\,s}} = const;$$

$$N = \left(B\mu_n + \frac{A}{\mu_k}(-1)^{k+n} \right) \frac{2}{\mu_k\, \mu_n\, p_{kn}^2 \sqrt{l\, s}} = const.$$

Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения для функции $T_{kn}(t)$ равно

$$T_{kn}(t) = \overset{\circ}{T}_{kn}(t) + \tilde{T}_{kn}(t) = C_{kn} \cdot e^{-p_{kn}^2 t} + M\, t + N =$$

$$= C_{kn} \cdot e^{-p_{kn}^2 t} + \left(B\,\frac{\mu_k}{\mu_n} - A\,\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k^2} \right) \cdot \frac{2b^2 t}{\mu_n p_{kn}^2 \sqrt{l\, s}} +$$

$$+ \frac{2b^2 \cdot \left(B\,\mu_k\, \mu_n + A \cdot (-1)^{k+n} \right)}{\mu_k^2\, \mu_n\, p_{kn}^4 \sqrt{l\, s}}.$$

8) Определение постоянной C_{kn} из начального условия.

Воспользовавшись соответствием

$$v_k(y,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(0) \cdot Y_n(y) = 0 \Rightarrow T_{kn}(0) = 0,$$

сразу находим $T_{kn}(0) = C_{kn} + 0 + \dfrac{2b^2 \cdot \left(B\,\mu_n\, \mu_k + A \cdot (-1)^{k+n} \right)}{\mu_k^2\, \mu_n \cdot p_{kn}^4 \cdot \sqrt{ls}} = 0$

или $C_{kn} = -\dfrac{2b^2 \cdot \left(B\,\mu_n\, \mu_k + A \cdot (-1)^{k+n} \right)}{\mu_k^2\, \mu_n \cdot p_{kn}^4 \cdot \sqrt{l\, s}} = const.$

$$T_{kn}(t) = \frac{2b^2}{\mu_n\, p_{kn}^2 \sqrt{l\, s}} \left\{ \frac{1}{p_{kn}^2} \left(B\,\frac{\mu_n}{\mu_k} + (-1)^{k+n} \cdot \frac{A}{\mu_k^2} \right) \left(1 - e^{-P_{kn}^2 t} \right) + \right.$$

$$\left. + t \cdot \left(B\,\frac{\mu_k}{\mu_n} - (-1)^{k+n}\,\frac{A}{\mu_k^2} \right) \right\}.$$

9) Окончательный вид решения.

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y,t) \cdot X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(v_k(y,t) - \tilde{B}_k\, t\, (s-y) \right) \cdot X_k(x) =$$

$$= \sum_{k,n=0}^{\infty} T_{kn}(t) \cdot X_k(x) \cdot Y_n(y) - Bt \cdot (s-y) =$$

$$= \frac{4b^2}{l\, s} \cdot \sum_{k,n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p_{kn}^2} \cdot \left(B\,\frac{\mu_n}{\mu_k} + (-1)^{k+n}\,\frac{A}{\mu_k^2} \right) \left(1 - e^{-P_{kn}^2 t} \right) + \right.$$

$$+t\cdot\left(B\,\frac{\mu_k}{\mu_n}-A\,\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k^2}\right)\Bigg\}\cdot\frac{\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y}{\mu_n p_{kn}^2}-Bt\cdot(s-y)\,,$$

где $\quad p_{kn}^2=b^2(\mu_k^2+\mu_n^2),\quad \mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)>0,\quad \mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1)>0.$

Ряд сходится правильно по всем переменным x, y и t; его общий член имеет порядок лучше, чем $O\left(\dfrac{1}{n(k^2+n^2)}\right)$ при $k,n\to\infty$.

В случае однородного уравнения переноса $A=0$ получим

$$u(x,y,t)=\frac{4Bb^2}{ls}\sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}(1-e^{-p_{kn}^2 t})+\mu_k^2 t\right\}\frac{1}{\mu_k\,\mu_n^2\,p_{kn}^2}\cdot\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y-$$

$$-Bt\cdot(s-y).$$

Очевидно, что сходимость ряда в этом частном случае лучше, чем в предыдущем общем.

10) Проверка решения задачи по заданным условиям и размерностям.

$u_x'(l,y,t)=0\because\cos\mu_k l=0,\qquad u(x,y,0)=0,$

$u_y'(x,0,y)=0+Bt=Bt,\qquad u(x,s,t)=0\because\cos\mu_n s=0,$

$u(0,y,t)=0-Bt(s-y)\neq 0$.

Здесь при получении выражения $-Bt(s-y)$ использовался ряд $1=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\sin\dfrac{\pi x}{2l}(2k+1)$, который задается только при $0<x\le l$ (см. Приложение 1, формула № 5), а при $x\to\pm 0$ равен, соответственно, ± 1. Однако значение в точке разрыва $x=0$ следует заменить средним значением $\dfrac{1}{2}(+1-1)=0$.

По условиям задачи имеем размерности $[u(x,y,t)]=Q$,

$$[A]=Q/L^3T,\quad [B]=Q/LT,\quad [b^2]=L^2/T,\quad [\mu_{k,n}]=1/L,$$

$$[p_{kn}^2 t]=\left[b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)t\right]=\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}T=1.$$

Поэтому

$$[u]=\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}\cdot\left\{T\cdot\frac{Q}{LT}\right\}\cdot L\,T+\frac{Q}{LT}TL\Rightarrow Q.$$

№ 5.4 (В). Решение двумерного уравнения переноса.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u'_x(0,y,t) = At, \quad u(l,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,s,t) = 0, \\ u(x,y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y,t) \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s, \\ 0 \le t \le \infty. \\ A, b, l, s = const > 0. \end{array}$$

1–2) Начнем с разложения искомой функции по базисным векторам, зависящим от переменной y, где граничные условия заданы однородными (решим самосопряженную граничную задачу).

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) Y_n(y), \quad \text{где} \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \sin \mu_n y$$

и $\mu_n = \dfrac{\pi n}{s} > 0$ (см. табл. 1); $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t) = 0$.

3) Постановка задачи для функции $u_n(x,t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_n \left\{ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \mu_n^2 u_n - \frac{1}{b^2}\frac{\partial u_n}{\partial t} \right\} Y_n(y) = 0.$$

$$u'_x(0,y,t) = \sum_n \frac{\partial}{\partial x} u_n(0,t) Y_n(y) = At,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x} u_n(0,t) = (At, Y_n) = At\sqrt{\dfrac{2}{s}} \displaystyle\int_0^s \sin \mu_n y \cdot dy = \dfrac{At}{\mu_n}\sqrt{\dfrac{2}{s}} \left(1 - (-1)^n\right) \equiv \tilde{A}_n t$.

$$u(l,y,t) = 0 \Rightarrow u_n(l,t) = 0; \qquad u(x,y,t) = 0 \Rightarrow u_n(x,0) = 0.$$

Теперь задача для функции $u_n(x,t)$ принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \mu_n^2 u_n(x,t) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u_n(0,t) = \tilde{A}_n t; \quad u_n(l,t) = 0; \\ u_n(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_n = u_n(x,t), \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

4) Привести к однородным граничные условия по переменной x можно с помощью замены искомой функции $u_n(x,t) = v_n(x,t) - \tilde{A}_n\, t(l-x)$. Тогда для новой функции $v_n(x,t)$ получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_n}{\partial t} - \mu_n^2\, v_n(x,t) = -\tilde{A}_n(l-x)\left(\mu_n^2\, t + \dfrac{1}{b^2}\right). \\ \dfrac{\partial}{\partial x} v_n(0,t) = \tilde{A}_n\, t; \quad v_n(l,t) = 0; \\ v_n(x,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v_n = v_n(x,t), \\ 0 \le x \le l, \\ 0 \le t < \infty. \end{array}$$

5) Отделение переменной x и решение для этой переменной краевой задачи

$$v_n(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{kn}(t)\cdot X_k(x),$$

где $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\,\cos\mu_k x$ и $\mu_k = \dfrac{\pi}{2l}(2k+1) > 0$ (см. табл. 1).

6) Вывод дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial v_n}{\partial t} - \mu_n^2\, v_n(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{b^2}\sum_k \left\{ T'_{kn} + p_{kn}^2 \cdot T_{kn}(t) \right\} X_k(x) = -\tilde{A}_n(l-x)\cdot\left(\mu_n^2\, t + \frac{1}{b^2}\right);$$

где $p_{kn}^2 = b^2\left(\mu_k^2 + \mu_n^2\right) > 0$.

$$\sum_{k=0}\left\{ T'_{kn} + p_{kn}^2 \cdot T_{kn}(t) \right\} X_k(x) = \tilde{A}_n(l-x)\cdot\left(\mu_n^2\, b^2 t + 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{kn}(t)\cdot X_k(x),$$

где $\gamma_{kn}(t) = \left(\tilde{A}_n(l-x)\cdot\left(\mu_n^2\, b^2\, t + 1\right), X_k\right) =$

$$= \tilde{A}_n\left(\mu_n^2 b^2 t + 1\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l (l-x)\,\cos\mu_k x\cdot dx = \frac{\tilde{A}_n}{\mu_k^2}\left(\mu_n^2 b^2 t + 1\right)\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

$$T'_{kn} + p_{kn}^2 T_{kn}(t) = \gamma_{kn}(t) \equiv \frac{\tilde{A}_n}{\mu_k^2}\left(\mu_n^2\, b^2\, t + 1\right)\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

7) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения получим $\overset{o}{T}_{kn}(t)=C_{kn}\cdot e^{-p_{kn}^2 t}$, где $C_{kn}=const$ – постоянная интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения для $T_{kn}(t)$ будем искать в виде двучлена $\tilde{T}_{kn}(t)=M\,t+N\ \ (M,N=const)$, тогда

$$\tilde{T}'_{kn}+p_{kn}^2\cdot\tilde{T}_{kn}(t)=M+p_{kn}^2(M\,t+N)=$$

$$=p_{kn}^2\cdot M\,t+M+p_{kn}^2\cdot N=\frac{\tilde{A}_n}{\mu_k^2}\left(\mu_n^2 b^2 t+1\right)\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Приравнивая в правой части выражения коэффициенты при одинаковых степенях переменной *t,* находим постоянные *M* и *N* и составим частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{T}_{kn}(t)=\frac{\tilde{A}_n}{\mu_k^2 p_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\mu_n^2 b^2 t+1-\frac{b^2\mu_n^2}{p_{kn}^2}\right).$$

Поэтому общее решение заданного неоднородного уравнения будет

$$T_{kn}(t)=\overset{o}{T}_{kn}(t)+\tilde{T}_{kn}(t)=C_{kn}\cdot e^{-p_{kn}^2 t}+\frac{\tilde{A}_n}{\mu_k^2 p_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\mu_n^2 b^2 t+1-\frac{b^2\mu_n^2}{p_{kn}^2}\right).$$

8) Для определения постоянной C_{kn} воспользуемся соответствием начальных условий $v_n(x,0)=0\Rightarrow T_{kn}(0)=0$ и получим

$$T_{kn}(t)=\frac{\tilde{A}_n}{\mu_n^2 p_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left[\mu_n^2 b^2 t+\left(1-\frac{\mu_n^2 b^2}{p_{kn}^2}\right)\left(1-e^{-p_{kn}^2 t}\right)\right]=$$

$$=\frac{\tilde{A}_n b^2}{\mu_n^2 p_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left[\mu_n^2 t+\frac{\mu_k^2}{p_{kn}^2}\left(1-e^{-p_{kn}^2 t}\right)\right]=$$

$$=\frac{2Ab^2\left(1-(-1)^n\right)}{\mu_n\mu_k^2 p_{kn}^2\sqrt{l\,s}}\cdot\left[\mu_n^2 t+\frac{\mu_k^2}{p_{kn}^2}\left(1-e^{-p_{kn}^2 t}\right)\right].$$

Сделав замену $n = 2m+1$ при $m \in Z_0$ и положив $\mu_n = \dfrac{\pi}{s} n \Rightarrow \mu_m = \dfrac{\pi}{s}(2m+1) > 0$ и $p_{kn} \Rightarrow p_{km} > 0$, упростим полученное выражение

$$T_{km}(t) = \frac{4Ab^2}{\mu_m \mu_k^2 p_{km}^2} \left\{ \mu_m^2 t + \frac{\mu_k^2}{p_{km}^2}\left(1 - e^{-p_{km}^2 t}\right) \right\}.$$

9) Окончательный вид решения

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t) Y_m(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ v_m(x,t) - \tilde{A}_m t(l-x) \right\} Y_m(y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} T_{km}(t) \cdot X_k(x) \right) Y_m(y) - t(l-x) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m \cdot Y_m(y) =$$

$$= \frac{8Ab^2}{ls} \cdot \sum_{k,m=0}^{\infty} \left\{ \mu_m^2 t + \frac{\mu_k^2}{p_{km}^2}\left(1 - e^{-p_{km}^2 t}\right) \right\} \frac{\cos \mu_k x \cdot \sin \mu_m y}{\mu_m \mu_k^2 p_{km}^2} -$$

$$- \frac{4At}{\pi}(l-x) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin \frac{\pi y}{s}(2m+1) =$$

$$= \frac{8Ab^2}{ls} \cdot \sum_{k,m=0}^{\infty} \left\{ \mu_m^2 t + \frac{\mu_k^2}{p_{km}^2}\left(1 - e^{-p_{km}^2 t}\right) \right\} \frac{\cos \mu_k x \cdot \sin \mu_m y}{\mu_m \mu_k^2 p_{km}^2} - At(l-x).$$

Последняя форма ответа менее громоздкая, чем предыдущая (использована формула суммирования второго члена – см. Приложение 1, формула № 5), но только в ответе с суммой выполняются граничные условия при $y = 0$ и $y = s$.

Ряд в последней форме ответа правильно сходится по всем переменным *x, y* и *t*; общий член этого ряда имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{mk^4}\right)$ при $m, k \to \infty$.

10) Проверка правильности ответа по условиям задачи и по размерностям.

$$u'_x(0,y,t) = At \because \left(\cos \mu_k x\right)'_x \Big|_{x=0} = 0; \qquad u(l,y,t) = 0 \because \cos \mu_k l = 0.$$

$u(x,0,t) = u(x,s,t) = 0$ –если рассматривать вторую часть ответа только в виде ряда (не суммировать). $u(x,y,0) = 0$.

По условиям задачи имеем размерности $\left[u(x,y,t)\right]=Q$,

$$\left[A\right]=Q\,/\,LT,\quad \left[b^2\right]=L^2\,/\,T,\quad \left[\mu_{k,m}\right]=1\,/\,L,$$

$$\left[p_{k\,m}^2\right]=\left[b^2\left(\mu_m^2+\mu_k^2\right)\right]=L^2\,/\,T\cdot 1\,/\,L^2=1\,/\,T.$$

Поэтому $\left[u\right]=\left[A\right]\cdot\dfrac{L^2}{T}\dfrac{1}{L^2}\left\{\dfrac{1}{L^2}T+\dfrac{1}{L^2}T\right\}L\cdot L^2T+\left[A\right]\cdot TL\Rightarrow Q$.

№ 5.5 (С). Решение уравнения переноса внутри прямоугольного параллелепипеда со всеми однородными граничными условиями первого рода (типа Дирихле).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.\\ u\big|_{x=0,l}=u\big|_{y=0,s}=u\big|_{z=0,H}=0.\\ u\big|_{t=0}=A\,x\,y\,z.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u\left(x,y,z,t\right).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s,\\ 0\le z\le H,\quad 0\le t\le\infty.\\ A,b,l,s,H=const>0.\end{array}$$

1–2) Будем искать решение в виде разложения в трехкратный ряд Фурье.

$$u\left(x,y,z,t\right)=\sum_{k,n,m=1}^{\infty}T_{k\,n\,m}\left(t\right)\cdot\Phi_{k\,n\,m}\left(x,y,z\right),$$

где $\Phi_{k\,n\,m}\left(x,y,z\right)=X_k\left(x\right)\cdot Y_n\left(y\right)\cdot Z_m\left(z\right)$; $X_k\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$ и $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$;

$Y_n\left(y\right)=\sqrt{\dfrac{2}{s}}\sin\mu_n y$ и $\mu_n=\dfrac{\pi n}{s}>0$; $Z_m\left(z\right)=\sqrt{\dfrac{2}{H}}\sin\mu_m z$ и $\mu_m=\dfrac{\pi m}{H}>0$;

$$\lim_{k,n,m\to\infty}T_{knm}\left(t\right)=0$$

(см. табл. 1).

3-6) Подставив разложение в заданное дифференциальное уравнение, получим уравнение для функции $T_{k\,n\,m}\left(t\right)$

$$\Delta_3\,u-\frac{1}{b^2}u'_t=-\frac{1}{b^2}\sum_{k,n,m}\left\{T'_{k\,n\,m}+p_{k\,n\,m}^2T_{k\,n\,m}\left(t\right)\right\}\Phi_{k\,n\,m}\left(x,y,z\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_{k\,n\,m}+p_{k\,n\,m}^2T_{k\,n\,m}\left(t\right)=0,\qquad \text{где } p_{k\,n\,m}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2\right)>0.$$

7) Решение полученного уравнения будет $T_{knm}(t)=C_{knm}e^{-p_{knm}^2 t}$, где $C_{knm}=const$ – постоянная интегрирования. Теперь для искомой функции запишем $u(x,y,z,t)=\sum\limits_{k,n,m} C_{knm}e^{-P_{knm}^2 t}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)$.

8) Для определения постоянной C_{knm} используем начальное условие задачи

$$u(x,y,z,0)=\sum_{k,n,m} C_{knm}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=A\,x\,y\,z,$$

$$C_{knm}=\left(A\,x\,y\,z,\Phi_{knm}\right)=$$

$$=\frac{2A\sqrt{2}}{\sqrt{l\,s\,H}}\int_0^l x\sin\mu_k x\,dx\cdot\int_0^s y\,d\frac{\cos\mu_n y}{-\mu_n}\cdot\frac{-1}{\mu_m}\left[z\cos\mu_m z\Big|_0^H-\int_0^H\cos\mu_m z\,dz\right]=$$

$$=\frac{2A\sqrt{2}}{\sqrt{l\,s\,H}}\left(-\frac{l}{\mu_k}\cos\mu_k l\right)\cdot\left(-\frac{s}{\mu_n}(-1)^n\right)\cdot\left(-\frac{H}{\mu_m}(-1)^m\right)=$$

$$=\frac{2A\sqrt{2l\,s\,H}}{\mu_k\mu_n\mu_m}\cdot(-1)^{k+n+m+1}.$$

9) Окончательный вид решения

$$u(x,y,z,t)=\sum_{k,n,m} C_{knm}e^{-p_{knm}^2 t}\cdot X_k(x)\cdot Y_n(y)\cdot Z_m(z)=$$

$$=-8A\sum_{k,n,m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n+m}}{\mu_k\mu_n\mu_m}e^{-p_{knm}^2 t}\cdot\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_n y\cdot\sin\mu_m z,$$

где $p_{knm}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2\right)=\pi^2 b^2\left(\dfrac{k^2}{l^2}+\dfrac{n^2}{s^2}+\dfrac{m^2}{H^2}\right)>0.$

Ряд сходится правильно по всем аргументам, и его общий член быстро стремится к нулю при $k,n,m\to\infty$.

10) Проверка решения задачи по условиям и размерностям.

$$u\big|_{x=0,l}=u\big|_{y=0,s}=u\big|_{z=0,H}=0 \text{ – очевидно.}$$

$$u(x,y,z,0)=-8A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k}\sin\mu_k x\cdot\frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n y}{s}\cdot\frac{H}{\pi}\left(-\frac{\pi z}{2H}\right)=$$

$$=-8A\left(-\frac{x}{2}\frac{y}{2}\frac{z}{2}\right)=+A\,x\,y\,z.$$

(см. Приложение 1, формула № 3).

Здесь $\left[A\right]=Q\,/\,L^3$, поэтому все размерности в формуле ответа совпадают.

№ 5.6 (С). Решение уравнения теплопроводности на плоскости со стационарными граничными условиями.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.\\ u(0,y,t)=0, \quad u'_x(l,y,t)=0.\\ u'_y(x,0,t)=A\,x, \quad u(x,s,t)=0.\\ u(x,y,0)=0\end{cases}$$

$$u=u(x,y,t).$$
$$0\le x\le l, \quad 0\le y\le s,$$
$$0\le t<\infty.$$
$$A,b,l,s=const>0.$$

1–2) Отделение переменной *x,* по которой граничные условия однородны, и решение для нее краевой задачи

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,t)\cdot X_k(x),$$

где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$ и $\mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1)$ (см. табл. 1).

$\lim\limits_{k\to\infty}u_k(y,t)=0.$

3) Постановка задачи для функции $u_k(y,t)$.

$$\Delta_2\,u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_k\left\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\mu_k^2\,u_k-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}X_k(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\,u_k(y,t)=0.$$

$$u'_y(x,0,t)=\sum_k\frac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)\cdot X_k(x)=A\,x=\sum_k\gamma_k(t)\cdot X_k(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma_k(t)=(A\,x,X_k)=A\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l x\sin\mu_n x\,dx=$$

$$=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}}(-1)^k\equiv\tilde{A}_k=const;\qquad\frac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)=\tilde{A}_k.$$

$$u(x,s,t)=\sum_k u_k(s,t)\cdot X_k(x)=0 \Rightarrow u_k(s,t)=0.$$

$$u(x,y,0)=\sum_k u_k(y,0)\cdot X_k(x)=0 \Rightarrow u_k(y,0)=0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot u_k(y,t)=0; \\ \dfrac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)=\tilde{A}_k, \quad u_k(s,t)=0; \\ u_k(y,0)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_k=u_k(y,t). \\ 0\le y\le s, \\ 0\le t<\infty. \end{array}$$

4) Приведение граничных условий по y к однородным.

$$u_k(y,t)=v_k(y,t)+\alpha(t)y+\beta(t).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)=\frac{\partial}{\partial y}v_k(0,t)+\alpha(t)=\tilde{A}_k \Rightarrow \alpha(t)=\tilde{A}_k \text{ при } \frac{\partial}{\partial y}v_k(0,t)=0.$$

$$u_k(s,t)=v_k(s,t)+\alpha(t)\cdot s+\beta(t)=0 \Rightarrow \beta(t)=-s\cdot\alpha(t)=-s\cdot\tilde{A}_k$$

при $v_k(s,t)=0.$ $\qquad u_k(y,0)=v_k(y,0)-\tilde{A}_k(s-y).$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_k}{d t}-\mu_k^2\cdot v_k(y,t)=-\tilde{A}_k\,\mu_k^2(s-y) & v_k=v_k(y,t). \\ \dfrac{\partial}{\partial y}v_k(0,t)=0, \quad v_k(0,t)=0; & 0\le y\le s, \quad 0\le t\le\infty. \\ v_k(y,0)=\tilde{A}_k(s-y). & u_k(y,t)=v_k(y,t)-\tilde{A}_k(s-y). \end{cases}$$

5) Отделение переменной y и решение краевой задачи по этой переменной.

$$v_k(y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot Y_n(y),$$

где $Y_n(y)=\sqrt{\dfrac{2}{s}}\cos\mu_n y$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1)>0, \quad n\in Z_0.$ (см. табл. 1).

6) Вывод дифференциального уравнения для $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k(y,t)=-\frac{1}{b^2}\sum_n\left\{T'_{kn}+p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t)\right\}\cdot Y_n(y)=$$

$$=-\mu_k^2\tilde{A}_k(s-y); \qquad p_{kn}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)>0.$$

$$\sum_n \left\{T'_{kn} + p_{kn}^2 T_{kn}(t)\right\} \cdot Y_n(y) = b^2 \mu_k^2 \tilde{A}_k(s-y) =$$

$$= Ab^2(s-y)\sqrt{\frac{2}{l}}\,(-1)^k = \sum_n \Gamma_{kn}(t)\cdot Y_n(y).$$

$$\Gamma_{kn}(t) = \left(Ab^2\sqrt{\frac{2}{l}}(-1)^k (s-y), Y_n \right) =$$

$$= \frac{2Ab^2}{\sqrt{ls}} \cdot (-1)^k \int_0^s (s-y)\cos\mu_n y \cdot dy = \frac{2Ab^2}{\mu_n^2\sqrt{ls}}(-1)^k = const.$$

$$T'_{kn} + p_{kn}^2 \cdot T_{kn}(t) = \Gamma_{kn} \equiv \frac{2Ab^2}{\mu_n^2\sqrt{l\,s}}(-1)^k.$$

7) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$T_{kn}(t) = \overset{o}{T}_{kn}(t) + \tilde{T}_{kn}(t) = C_{kn}e^{-p_{kn}^2 t} + \frac{\Gamma_{kn}}{p_{kn}^2} = C_{kn}e^{-p_{kn}^2 t} + \frac{2Ab^2}{\mu_n^2 p_{kn}^2\sqrt{l\,s}}(-1)^k.$$

$$v_k(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{ C_{kn}e^{-p_{kn}^2 t} + \frac{2Ab^2(-1)^k}{\mu_n^2 p_{kn}^2\sqrt{l\,s}} \right\}\cdot Y_n(y).$$

8) Определение постоянной C_{kn} из начального условия для функции $v_k(y,t)$.

$$v_k(y,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{ C_{kn} + \frac{\Gamma_{kn}}{p_{kn}^2} \right\}\cdot Y_n = \tilde{A}_k(s-y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q_{kn}\cdot Y_n(y),$$

$$q_{kn} = \left(\tilde{A}_k(s-y), Y_n\right) = \frac{2A(-1)^k}{\mu_k^2\sqrt{l\,s}}\cdot\int_0^s (s-y)\,\cos\mu_n y\cdot d\,y = \frac{2A(-1)^k}{\mu_k^2\mu_n^2\sqrt{l\,s}}.$$

$$C_{kn} = \frac{2A(-1)^k}{\mu_k^2\mu_n^2\sqrt{l\,s}} - \frac{2Ab^2(-1)^k}{\mu_n^2 p_{kn}^2\sqrt{l\,s}} = \frac{2Ab^2(-1)^k}{\mu_k^2 p_{kn}^2\sqrt{l\,s}}.$$

9) Окончательный вид решения.

$$v_k(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{ \frac{\Gamma_{kn}}{p_{kn}^2}\frac{\mu_n^2}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2 t} + \frac{\Gamma^2{}_{kn}}{p_{kn}^2} \right\}\cdot Y_n(y) =$$

$$= \frac{2Ab^2\sqrt{2}}{s\sqrt{l}}\cdot(-1)^k\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2 t} + \frac{1}{\mu_n^2} \right)\frac{1}{p_{kn}^2}\cos\mu_n y.$$

$$u_k(y,t)=v_k(y,t)-\tilde{A}_k(s-y)=$$

$$=A\sqrt{\frac{2}{l}}(-1)^k\left\{\frac{2b^2}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2t}+\frac{1}{\mu_n^2}\right)\frac{1}{p_{kn}^2}\cos\mu_n y-\frac{s-y}{\mu_k^2}\right\}.$$

$$u(x,y,t)=\frac{2A}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(s-y)\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^2}\sin\mu_k x+\right.$$

$$\left.+\frac{2b^2}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2t}+\frac{1}{\mu_n^2}\right)\frac{(-1)^k}{p_{kn}^2}\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y\right\}=$$

$$=\frac{8Al}{\pi^2}(s-l)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi x}{2l}(2k+1)+$$

$$+\frac{4Ab^2}{l\,s}\sum_{k,n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2t}+\frac{1}{\mu_n^2}\right)\frac{(-1)^k}{p_{kn}^2}\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y=$$

$$=-Ax(s-y)+\frac{4Ab^2}{l\,s}\sum_{k,n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu_k^2}e^{-p_{kn}^2t}+\frac{1}{\mu_n^2}\right)\frac{(-1)^k}{p_{kn}^2}\sin\mu_k x\cdot\cos\mu_n y.$$

Здесь использована формула № 15 из Приложения 1. Полученное разложение сходится правильно по всем переменным *x, y* и *t*. Общий член разложения имеет порядок $O\left(\frac{1}{(k^2+n^2)n^2}\right)$ при $k,n\to\infty$.

10) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(0,y,t)=0,\qquad u'_y(x,0,t)=0,\qquad u(x,s,t)=0.$$

$$u(x,y,0)=\frac{4A}{l\,s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\mu_k x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\cos\mu_n y-Ax(s-y)=$$

$$=\frac{4A}{ls}\frac{xl}{2}\frac{s}{2}(s-y)-Ax(s-y)=0,$$

(см. Приложение 1, формулы № 15 и 14).

$u'_x(l,y,t)=0-A(s-y)\neq 0$ – для выполнения условия нужно просуммировать ряды.

По условиям задачи имеем размерности $\left[u(x,y,t)\right]=Q,\ \left[A\right]=Q/L^2,$ $\left[b^2\right]=L^2/T,\ \left[\mu_{k,n}\right]=1/L,\ \left[p_{kn}^2\right]=1/T.$ Поэтому

$$\left[u\right]=\left[A\right]L^2+\left[A\right]\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}\left(L^2+L^2\right)T\Rightarrow Q.$$

№ 5.7 (С). Решение уравнения переноса со смешанными стационарными граничными условиями внутри прямоугольника.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=A.\\ u\left(0,y,t\right)=0,\quad u_x'\left(l,y,t\right)=B.\\ u_y'\left(x,0,t\right)=u\left(x,s,t\right)=0.\\ u\left(x,y,0\right)=0.\end{cases}\qquad \begin{array}{l}u=u\left(x,y,t\right).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s.\\ 0\le t<\infty.\\ A,B,b,l,s=const>0.\end{array}$$

1–2) Пара граничных условий по y однородна, поэтому эту переменную можно отделить и решить соответствующую краевую задачу.

$$u\left(x,y,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\left(x,t\right)\cdot Y_k\left(y\right),$$

где $Y_k\left(y\right)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\mu_k y$ и $\mu_k=\dfrac{\pi}{2s}\left(2k+1\right)>0$ (см. табл. 1),

$\lim\limits_{k\to\infty}u_k\left(x,t\right)=0.$

3) Постановка задачи для функции $u_k\left(x,t\right)$.

$$\Delta_2\,u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_k\left\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\mu_k^2 u_k\left(x,t\right)-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}Y_k\left(y\right)=$$

$$=A=\sum_k\gamma_k\left(t\right)\cdot Y_k\left(y\right),$$

$$\gamma_k=\left(A,Y_k\right)=A\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^s\cos\mu_k y\cdot dy=\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\left(-1\right)^k\equiv\tilde{A}_k.$$

$$u_x'\left(l,y,t\right)=\sum_k\frac{\partial}{\partial x}u_k\left(l,t\right)\cdot Y_k\left(y\right)=B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}u_k\left(l,t\right)=B\sqrt{\frac{2}{s}}\cdot\int_0^s\cos\mu_k y\,d\,y=\frac{B}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\left(-1\right)^k\equiv\tilde{B}_k$$

$$u(0,y,t)=\sum_k u_k(0,t)\cdot Y_k(y)=0\Rightarrow u_k(0,t)=0.$$

$$u(x,y,0)=\sum_k u_k(x,0)\cdot Y_k(y)=0\Rightarrow u_k(x,0)=0.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot u_k(x,t)=\tilde{A}_k;\\ \dfrac{\partial}{\partial x}u_k(l,t)=\tilde{B}_k,\quad u_k(0,t)=0;\\ u_k(x,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{gathered}u_k=u_k(x,t)\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\end{gathered}$$

4) Приведение граничных условий к однородным выполним с помощью замены $u_k(x,t)=v_k(x,t)+\tilde{B}_k x$ и получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k(x,t)=\tilde{A}_k+\tilde{B}_k\cdot\mu_k^2\, x.\\ v_k(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}v_k(l,t)=0;\\ v_k(x,0)=-\tilde{B}_k\, x.\end{cases}\qquad \begin{gathered}v_k=v_k(x,t).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le t<\infty.\end{gathered}$$

5) Разделение переменных для функции $v_k(x,t)$ и решение краевой задачи по переменной x.

$$v_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot X_n(x),$$

где $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\,\sin\mu_n x$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)>0$ (см. табл.1.), $\lim\limits_{k,n\to\infty}T_{kn}(t)=0.$

6). Вывод дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k(x,t)=\sum_n\left\{T_{kn}\cdot X_n''-\frac{1}{b^2}T_{kn}'\cdot X_n-\mu_k^2\,T_{kn}\cdot X_n\right\}=$$

$$=-\frac{1}{b^2}\sum_n\left\{T_{kn}'+p_{kn}^2\cdot T_{kn}(t)\right\}\cdot X_n(x)=\tilde{A}_k+\tilde{B}_k\,\mu_k^2 x\equiv\sum_n\Gamma_{kn}\cdot X_n(x);$$

$$p_{kn}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)>0.$$

$$\Gamma_{k\,n} = \left(\tilde{A}_k + \tilde{B}_k\,\mu_k^2\,x, X_n\right) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \left(\tilde{A}_k + \tilde{B}_k\,\mu_k^2\,x\right)\sin\mu_n\,x\cdot d\,x =$$

$$= \frac{-1}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\left[\left(\tilde{A}_k + \tilde{B}_k\,\mu_k^2\,x\right)\cos\mu_n\,x\Big|_0^l - \int_0^l\left(0+\mu_k^2\,\tilde{B}_k\right)\cos\mu_n\,x\cdot d\,x\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2}\left[\tilde{A}_k\,\mu_n + \mu_k^2\,\tilde{B}_k\left(-1\right)^n\right] = const.$$

$$\sum_n\left\{T'_{k\,n} + p_{k\,n}^2\cdot T_{k\,n}\left(t\right)\right\}\cdot X_n\left(x\right) = -b^2\sum_n\Gamma_{k\,n}\cdot X_n\left(x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_{k\,n} + p_{k\,n}^2\cdot T_{k\,n}\left(t\right) = -b^2\cdot\Gamma_{k\,n} = \frac{-b^2}{\mu_n^2}\left(\tilde{A}_k\mu_n + \left(-1\right)^n\,\mu_k^2\tilde{B}_k\right) = const.$$

7) Решение дифференциального уравнения для $T_{k\,n}\left(t\right)$.

$$T_{k\,n}\left(t\right) = \overset{o}{T}_{k\,n} + \tilde{T}_{k\,n} = C_{k\,n}\cdot e^{-p_{k\,n}^2\,t} - \frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\Gamma_{k\,n}.$$

8) Определение постоянной $C_{k\,n}$ из начального условия для функции $v_k\left(x,t\right)$.

$$v_k\left(x,t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}T_{k\,n}\left(t\right)\cdot X_n\left(x\right) = \sum_n\left\{C_{k\,n}\cdot e^{-p_{k\,n}^2\,t} - \frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\Gamma_{k\,n}\right\}\cdot X_n\left(x\right).$$

$$v_k\left(x,0\right) = \sum_n\left\{C_{k\,n} - \frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\Gamma_{k\,n}\right\}\cdot X_n\left(x\right) = -\tilde{B}_k x \equiv \sum_n\beta_{k\,n}\cdot X_n\left(x\right);$$

$$\beta_{k\,n} = \left(-\tilde{B}_k x, X_n\right) = -\tilde{B}_k\,\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\,\sin\mu_n x\,d\,x =$$

$$= \frac{\tilde{B}_k}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(x\cos\mu_n\,x\Big|_0^l - \int_0^l\cos\mu_n x\,d\,x\right) =$$

$$= \frac{\tilde{B}_k}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(-1\right)^{n+1} = const \Rightarrow C_{k\,n} - \frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\Gamma_{k\,n} = \beta_{k\,n};$$

$$C_{k\,n} = \frac{b^2}{p_{k\,n}^2}\Gamma_{k\,n} + \beta_{k\,n} = const.$$

9) Окончательный вид решения и его упрощение.

$$u\left(x,y,t\right) = \sum_k u_k\left(x,t\right)\cdot Y_k\left(y\right) = \sum_k\left(v_k\left(x,t\right) + \tilde{B}_k x\right)\cdot Y_k\left(y\right) =$$

$$= Bx + \sum_k v_k(x,t)\cdot Y_k(y) = Bx + \sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{C_{kn}e^{-P_{kn}^2 t} - \frac{b^2}{p_{kn}^2}\Gamma_{kn}\right\}X_n Y_k =$$

$$= Bx + \sum_{k,n}\left\{\left(\frac{b^2}{p_{kn}^2}\Gamma_{kn} + \beta_{kn}\right)e^{-p_{kn}^2 t} - \frac{b^2}{p_{kn}^2}\Gamma_{kn}\right\}X_n(x)Y_k(y) =$$

$$= Bx + \sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sum_{k,n}\left\{\left[\frac{b^2}{p_{kn}^2}\left(\tilde{A}_k\mu_n + \mu_k^2\,\tilde{B}_k(-1)^n\right) - \tilde{B}_k(-1)^n\right]\cdot e^{-p_{kn}^2 t} -\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{p_{kn}^2}\left(\tilde{A}_k\mu_n + \mu_k^2\,\tilde{B}_k(-1)^n\right)\right\}\frac{1}{\mu_n^2}X_n(x)Y_k(y).$$

$$u(x,y,t) = Bx + \frac{4b^2}{ls}\sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{p_{kn}^2}\left(A\mu_n + (-1)^n B\mu_k^2\right) - (-1)^n\frac{B}{b^2}\right]e^{-p_{kn}^2 t} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p_{kn}^2}\left(A\mu_n + (-1)^n B\mu_k^2\right)\right\}\cdot\frac{(-1)^k}{\mu_k\mu_n^2}\sin\mu_n x\cos\mu_k y,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi}{2s}(2k+1), \qquad \mu_n = \dfrac{\pi}{2l}(2n+1), \qquad p_{kn}^2 = b^2\left(\mu_k^2 + \mu_k^2\right) > 0.$

Двойной ряд сходится правильно по всем аргументам *x, y* и *t*. Самые слабые оценки сходимости общего члена ряда составляют $O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ и $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $k,n\to\infty$.

10) Проверка решения задачи по заданным условиям и по размерностям.

$$u(0,y,t) = 0; \qquad u'_x(l,y,t) = B \because \left(\sin\mu_n x\right)'_x\Big|_{x=l} = 0; \qquad u'_y(x,0,t) = 0.$$

$$u(x,y,0) = Bx + \sum_{k,n}\left\{\left(\frac{b^2}{p_{kn}^2}\Gamma_{kn} + \beta_{kn}\right)\cdot 1 - \frac{b^2}{p_{kn}^2}\Gamma_{kn}\right\}X_n(x)\cdot Y_k(y) =$$

$$= Bx - \frac{4B}{ls}\cdot\sum_k\frac{(-1)^k}{\mu_k}\cos\mu_k y\cdot\sum_n\frac{(-1)^n}{\mu_n}\sin\mu_n x = Bx -$$

$$-\frac{4B}{ls}\cdot\frac{2s}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{\pi y}{2s}(2k+1)\cdot\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{\pi x}{2l}(2n+1) =$$

$$= Bx - \frac{32Bl}{\pi^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi^2 x}{8l} = Bx - Bx = 0$$ (см. Приложение 1, формулы № 8 и 12).

$u(x,s,t) = Bx \neq 0$ – условие не выполняется.

Замечания. Полученное для ответа $u(x,y,t)$ разложение в двойной ряд Фурье не сходится к какой-либо конечной комбинации элементарных функций, но может быть сведено к линейной комбинации нескольких Θ и Н (тета и эта) функций Якоби (из отношений которых получаются известные двоякопериодические эллиптические функции sn, cn и dn). Именно только через комбинацию Θ- и Н-функций Якоби может быть записан ответ решаемой задачи, который удовлетворяет всем условиям. Полученная же нами громоздкая форма решения задачи в виде двойного ряда Фурье (не приведенная к комбинации Θ- и Н-функций Якоби) не удовлетворяет условию задачи при $y = s$, так как (один из составляющих ответ) ряд вида

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\frac{\pi y}{2s}(2k+1) \; \forall \; 0 \le y < s$$

не имеет смысла в концевой точке $y = s$, ведь там получается неравенство $\frac{\pi}{4} \neq 0$, так как имеем $\cos\frac{\pi y}{2s}(2k+1)\Big|_{y=s} = \cos\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

По условию задачи имеем размерности $[u(x,y,t)] = Q$,
$[A] = Q/L^2$, $[B] = Q/L$, $[b^2] = L^2/T$, $[\mu_{k,n}] = 1/L$, $[p_{kn}^2] = 1/T$.
Поэтому

$$[u] = [B]L +$$
$$+\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}\left\{\left[T\left([A]\frac{1}{L} + [B]\frac{1}{L^2}\right) + [B]\frac{T}{L^2}\right] + T\left([A]\frac{1}{L} + [B]\frac{1}{L^2}\right)\right\} L^3 \Rightarrow Q \cdot$$

№ 5.8 (С). Решение уравнения переноса на плоскости со стационарными условиями.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0. \\ u(0,y,t) = 0, \quad u'_x(l,y,t) = 0. \\ u'_y(x,0,t) = Ax, \quad u(x,s,t) = 0. \\ u(x,y,0) = 0. \end{cases}$$

$$u = u(x,y,t).$$
$$0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s.$$
$$0 \le t < \infty.$$
$$A, b, l, s = const > 0.$$

1–2) $u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,t)\cdot X_k(x),$ где $X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x,$

$\mu_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)>0$ (см. табл. 1). Требуется $\lim_{k\to\infty}u_k(x,t)=0.$

3) $$\Delta_2 u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_k\left\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\mu_k^2 u_k(x,t)-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\}X_k(x)=0.$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u_k}{\partial t}-\mu_k^2 u_k(y,t)=0.$$

$$u'_y(x,0,t)=\sum_k\frac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)\cdot X_k(x)=At\equiv\sum_k\gamma_k(t)\cdot X_k(x),$$

$$\gamma_k(t)=(At,X_k)=At\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\mu_k x\,dx=\frac{At}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{l}}\equiv\tilde{A}_k t>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)=\tilde{A}_k t.$$

$$u(x,s,t)=0\Rightarrow u_k(s,t)=0,\qquad u(x,y,0)=0\Rightarrow u_k(y,0)=0.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u_k}{\partial t}-\mu^2\cdot u_k(y,t)=0.\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}u_k(0,t)=\tilde{A}_k t,\quad u_k(s,t)=0.\\[2mm] u_k(y,0)=0.\end{cases}\qquad \begin{aligned}&u_k=u_k(y,t).\\ &0\le y\le s,\quad 0\le t<\infty.\end{aligned}$$

4) $u_k(y,t)=v_k(y,t)-\tilde{A}_k t(s-y).$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k(y,t)=-\tilde{A}_k(s-y)\left(\mu_k^2 t+\dfrac{1}{b^2}\right).\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}v_k(0,t)=0,\qquad v_k(s,t)=0.\qquad v_k=v_k(y,t).\\[2mm] v_k(y,0)=0\qquad\qquad 0\le y\le s,\quad 0\le t<\infty.\end{cases}$$

5) $v_k\left(y,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}\left(t\right)\cdot Y_n\left(y\right); \quad Y_n\left(y\right)=\sqrt{\frac{2}{s}}\cos\mu_n y,$

$$\mu_n=\frac{\pi}{2s}\left(2n+1\right)>0 \quad \text{(см. табл. 1)}, \quad \lim_{k,n\to\infty}T_{kn}\left(t\right)=0.$$

6) $$\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}-\mu_k^2\cdot v_k=-\frac{1}{b^2}\sum_n\left\{T'_{kn}+p_{kn}^2\cdot T_{kn}\left(t\right)\right\}\cdot Y_n\left(y\right)=$$

$$=-\tilde{A}_k\left(s-y\right)\left(\mu_k^2 t+\frac{1}{b^2}\right);$$

$$p_{kn}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)>0. \qquad T'_{kn}+p_{kn}^2\cdot T_{kn}\left(t\right)=\Gamma_{kn}\left(t\right),$$

$$\Gamma_{kn}\left(t\right)=\left(\tilde{A}_k\left(s-y\right)\left(\mu_k^2 b^2 t+1\right),Y_n\right)=$$

$$=\tilde{A}_k\left(\mu_k^2 b^2 t+1\right)\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^s\left(s-y\right)\cos\mu_n y\,dy=$$

$$=\frac{2A}{\mu_k\mu_n^2\sqrt{l s}}\left(\mu_k^2 b^2 t+1\right)\equiv\tilde{B}_{kn}\left(\mu_k^2 b^2 t+1\right).$$

$$T'_{kn}+p_{kn}^2\cdot T_{kn}\left(t\right)=\Gamma_{kn}\left(t\right)\equiv\tilde{B}_{kn}\left(\mu_k^2 b^2 t+1\right).$$

7) $T_{kn}\left(t\right)=\overset{o}{T}_{kn}\left(t\right)+\tilde{T}_{kn}\left(t\right); \qquad \overset{o}{T}{}'_{kn}+p_{kn}^2\cdot\overset{o}{T}_{kn}\left(t\right)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\overset{o}{T}_{kn}\left(t\right)=C_{kn}\cdot e^{-p_{kn}^2 t}, \qquad C_{kn}=const.$$

$$\tilde{T}_{kn}\left(t\right)=\alpha t+\beta \qquad \left(\alpha,\beta=const\right).$$

$$\tilde{T}'_{kn}+p_{kn}^2\cdot\tilde{T}_{kn}\left(t\right)=\alpha+p_{kn}^2\left(\alpha t+\beta\right)=\tilde{B}_{kn}\left(\mu_k^2\,b^2\,t+1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=\tilde{B}_{kn}\mu_k^2 b^2/p_{kn}^2,$$

$$\beta=\left(\tilde{B}_{kn}-\alpha\right)/p_{kn}^2=\left(\tilde{B}_{kn}-\tilde{B}_{kn}\mu_k^2 b^2/p_{kn}^2\right)/p_{kn}^2=$$

$$=\tilde{B}_{kn}\mu_k^2 b^2/p_{kn}^4=\frac{2Ab^2}{\mu_k p_{kn}^4\sqrt{l s}}>0.$$

$$\tilde{T}_{kn}(t)=\tilde{B}_{kn}\frac{\mu_k^2 b^2}{p_{kn}^2}t+\tilde{B}_{kn}\left(1-\frac{\mu_k^2 b^2}{p_{kn}^2}\right)/\,p_{kn}^2=\tilde{B}_{kn}\frac{b^2}{p_{kn}^2}\left(\mu_k^2 t+\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}\right)>0.$$

$$T_{kn}(t)=\overset{o}{T}_{kn}+\tilde{T}_{kn}=C_{kn}e^{-p_{kn}^2 t}+\tilde{B}_{kn}\frac{b^2}{p_{kn}^2}\left(\mu_k^2 t+\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}\right).$$

8) $v_k(y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot Y_n(y)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_{kn}e^{-p_{kn}^2 t}+\tilde{B}_{kn}\frac{b^2}{p_{kn}^2}\left(\mu_k^2 t+\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}\right)\right\}\cdot Y_n(y).$$

$$v_k(y,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_{kn}+\tilde{B}_{kn}\frac{b^2\,\mu_n^2}{p_{kn}^4}\right\}\cdot Y_n(y)=0\Rightarrow C_{kn}=-\tilde{B}_{kn}\frac{b^2\mu_n^2}{p_{kn}^4}<0.$$

9) $u_k(y,t)=v_k(y,t)-\tilde{A}_k\,t(s-y)=$

$$=-\tilde{A}_k\,t\,(s-y)+b^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_{kn}}{p_{kn}^2}\left\{\mu_k^2 t+\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}\left(1-e^{-p_{kn}^2 t}\right)\right\}\cdot Y_n(y).$$

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,t)\cdot X_k(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(y,t)\cdot X_k(x)-t(s-y)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{A}_k\cdot X_k(x)=$$

$$=\frac{4Ab^2}{l\,s}\cdot\sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{\frac{\mu_n^2}{p_{kn}^2}\left(1-e^{-p_{kn}^2 t}\right)+\mu_k^2\,t\right\}\frac{\sin\mu_k x\,\cos\mu_n y}{\mu_k\mu_n^2 p_{kn}^2}-At(s-y),$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi}{2l}(2k+1),\quad \mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1),\quad p_{kn}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right).$

10) $u'_x(l,y,t)=0\because\left(\sin\mu_k x\right)'_x\Big|_{x=l}=0;\quad u'_y(x,0,t)=At;$

$$u(x,s,t)=0\because\cos\mu_n s=0;\quad u(x,y,0)=0.$$

$$u(0,y,t)=0-At(s-y)\neq 0$$ – без представления в виде ряда.

$$[u(x,y,t)]=Q, \quad [A]=Q/L^2T, \quad \left[b^2\right]=L^2/T, \quad \left[\mu_{k,n}\right]=1/L,$$

$$\left[p_{kn}^2\right]=1/T. \quad [u]=[A]\frac{L^2}{T}\frac{1}{L^2}\left\{\frac{1}{L^2}T\right\}L^3\,T+[A]L\,T\Rightarrow Q.$$

№ 5.9 (С). Решение трехмерного уравнения переноса с однородными граничными условиями первого рода Дирихле по общей формуле (см. задачу 5.1 (А) пункт 8) и методом разделения переменных.

$$\begin{cases}\Delta_3 u-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(M,t)\equiv Axt.\\ u\big|_\sigma=\varphi(M,t)\equiv 0, \quad u\big|_{t=0}=f(M)\equiv Byz.\end{cases}$$

$$u=u(M,t)\equiv u(x,y,z,t).$$

$$M(x,y,z)\in V,$$

$$M'(\xi,\eta,\zeta)\in V\bigcup\sigma.$$

$$0\le x,\xi\le l, \quad 0\le y,\eta\le s, \quad 0\le z,\zeta\le H, \quad 0\le t,\tau<\infty.$$

$M(x,y,z)$ – точка измерения (параметры интегралов).

$M'(\xi,\eta,\zeta)$ – точка источника (переменные интегрирования).

V – объем прямоугольного параллелепипеда размера $l\times s\times H$,

$\sigma=\partial V$ – его поверхность, $\quad \vec{\upsilon}$ – орт внешней нормали.

1) Общая формула решения задачи с помощью функции Грина (источника) имеет вид

$$u(M,t)=\iiint\limits_V f(M')\cdot G(M,M'|t)\,dV'-$$

$$-b^2\int\limits_0^t\left[\;\oiint\limits_\sigma \varphi(M',\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\upsilon'}\cdot G(M,M'|t-\tau)\,d\sigma'+\right.$$

$$\left.+\iiint\limits_V F(M',\tau)\cdot G(M,M'|t-\tau)\,dV'\right]d\tau;$$

где $dV'=d\xi\cdot d\eta\cdot d\zeta, \quad d\sigma_\xi=d\eta\cdot d\zeta$ и т.п.

$$G(M,M'|t)=\sum_{k,n,m=1}^{\infty}e^{-p_{knm}^2 t}\cdot\Phi_{knm}(M)\cdot\Phi^*_{knm}(M')$$ – функция Грина (источника), где трехмерные базисные орты (множество собственных функций) равны

$$\Phi_{knm}(M)\equiv\Phi_{knm}(x,y,z)=X_k(x)\cdot Y_n(y)\cdot Z_m(z).$$

Из табл. 1 находим значения

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x \quad \text{и} \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l} > 0\,,$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{s}}\sin\mu_n y \quad \text{и} \quad \mu_n = \frac{\pi n}{s} > 0,$$

$$Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{H}}\sin\mu_m z \quad \text{и} \quad \mu_m = \frac{\pi m}{H} > 0. \qquad k,n,m \in \mathrm{N}.$$

$$p_{knm}^2 = b^2\left(\mu_k^2 + \mu_n^2 + \mu_m^2\right) = \pi^2 b^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{s^2} + \frac{m^2}{H^2}\right) > 0.$$

2) С условиями нашей задачи общая формула ее решения принимает вид

$$u(M,t) = \iiint\limits_V B\eta\zeta\, G(M,M'\,|t)\,dV' - b^2\int_0^t\left[0 - \iiint\limits_V A\xi\tau\, G(M,M'\,|t-\tau)\,dV'\right]d\tau =$$

$$= \sum_{k,n,m=1}^{\infty}\left\{B e^{-p_{knm}^2 t}\cdot\iiint\limits_V \eta\zeta\cdot\Phi^*_{knm}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\, d\eta\, d\zeta -\right.$$

$$\left. - Ab^2\int_0^t e^{-p_{knm}^2(t-\tau)}\tau\, d\tau\iiint\limits_V \xi\cdot\Phi^*_{knm}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\, d\eta\, d\zeta\right\}\cdot\Phi^*_{knm}(x,y,z),$$

где $\displaystyle\iiint\limits_V \Phi_{knm}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\eta\zeta\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta =$

$$= \int_0^l X_k(\xi)\, d\xi\cdot\int_0^s Y_n(\eta)\,\eta d\eta\cdot\int_0^H Z_m(\zeta)\,\varsigma d\zeta =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{l s H}}\cdot\int_0^l \sin\mu_k\xi\, d\xi\cdot\int_0^s \sin\mu_n\eta\cdot\eta\, d\eta\cdot\int_0^H \sin\mu_m\zeta\cdot\zeta\, d\zeta =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{l s H}}\cdot\left.\frac{\cos\mu_k\xi}{-\mu_k}\right|_0^l\cdot\frac{-1}{\mu_n}\left(\eta\cos\mu_n\eta\Big|_0^s - \int_0^s\cos\mu_n\eta\, d\eta\right)\cdot\frac{-1}{\mu_m}\left(\zeta\cos\mu_m\zeta\Big|_0^H -\right.$$

$$\left. -\int_0^H\cos\mu_m\zeta\, d\zeta\right) = \frac{2}{\mu_k\,\mu_n\,\mu_m}\sqrt{\frac{2sH}{l}}\left(1-(-1)^k\right)(-1)^{n+m};$$

$$\iiint\limits_V \Phi_{knm}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\xi\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int_0^l X_k(\xi)\xi d\xi\cdot\int_0^s Y_n(\eta)d\eta\cdot\int_0^H Z_m(\zeta)d\zeta =$$

$$=\frac{-2}{\mu_k\,\mu_n\,\mu_m}\sqrt{\frac{2l}{sH}}\,(-1)^k\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^m\right).$$

$$\int_0^t e^{-p_{knm}^2(t-\tau)}\cdot\tau\,d\tau=\frac{1}{p^2}e^{-p^2t}\left(\tau\,e^{p^2\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{p^2\tau}d\,\tau\right)=$$

$$=\frac{1}{p_{knm}^2}\left(t-\frac{1}{p_{knm}^2}\left(1-e^{-p_{knm}^2t}\right)\right).$$

3) Окончательное решение задачи.

$$u(x,y,z,t)=8\sum_{k,n,m=1}^{\infty}\left\{\frac{B}{l}\left(1-(-1)^k\right)(-1)^{n+m}e^{-p_{knm}^2t}+\right.$$

$$\left.+\frac{Ab^2}{sH\,p_{knm}^2}\left(t-\frac{1}{p_{knm}^2}\left(1-e^{-p_{knm}^2t}\right)\right)(-1)^k\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^m\right)\right\}.$$

$$\cdot\frac{1}{\mu_k\mu_n\mu_m}\cdot\sin\mu_kx\cdot\sin\mu_ny\cdot\sin\mu_mz,$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l},\quad \mu_n=\dfrac{\pi n}{s},\quad \mu_m=\dfrac{\pi m}{H},\quad p_{knm}^2=b^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2\right)>0.$

Некоторые суммы здесь упрощаются, если в выражениях вида $1-(-1)^k$ перейти к $k=2k'+1$ и т. п.

4) Проверка решения по условиям задачи.

$$u\big|_\sigma=0\because\sin 0=\sin\mu_kl=\sin\mu_ns=\sin\mu_mH=0.$$

$$u\big|_{t=0}=\frac{8B}{l}\cdot\sum_{k,n,m=1}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k}\sin\mu_kx\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n}\sin\mu_ny\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu_m}\sin\mu_mz=$$

$$=\frac{8B}{l}\left(\frac{l-x}{2}-\frac{-x}{2}\right)\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}=B\,yz\quad\text{(см. ряды № 1 и 3).}$$

Проверка размерностей: $[u(x,y,t)]=Q,\ [A]=Q/L^3T,\ [B]=Q/L^2,$

$$\left[b^2\right]=L^2/T,\quad\left[\mu_{k,n,m}\right]=1/L,\quad\left[p_{knm}^2\right]=1/T.$$

$$[u]=\left\{[B]\frac{1}{L}+[A]\frac{L^2}{T}\frac{T}{L^2}T\right\}L^3\Rightarrow Q.$$

5) Решение задачи методом разделения переменных.
Пусть

$$u(M,t)=\sum_{k,n,m} T_{knm}(t)\cdot \Phi_{knm}(M).$$

$$\Delta_3 u-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{b^2}\sum_{k,n,m}\left\{T'_{knm}+p_{knm}^2\cdot T_{knm}(t)\right\}\cdot \Phi_{knm}(M)=Axt.$$

$$T'_{knm}+p_{knm}^2\cdot T_{knm}(t)=-b^2\cdot\left(Axt,\Phi_{knm}\right)=-Atb^2\cdot\iiint\limits_V \Phi_{knm}(M')\,\xi\, dV'\equiv \tilde{A}_{knm}t.$$

$$u\big|_{t=0}=\sum_{k,n,m} T_{knm}(0)\cdot \Phi_{knm}(M)=Byz\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{knm}(0)=\left(Byz,\Phi_{knm}\right)=B\iiint\limits_V \Phi_{knm}(M')\,\eta\zeta\cdot dV'\equiv \tilde{B}_{knm}=const.$$

$$\begin{cases} T'_{knm}+p_{knm}^2\cdot T_{knm}(t)=\tilde{A}_{knm}\,t. \\ T_{knm}(0)=\tilde{B}_{knm}. \end{cases} \qquad T_{knm}(t)=\overset{o}{T}_{knm}(t)+\tilde{T}_{knm}(t).$$

$$\overset{o}{T}_{knm}(t)=C_{knm}e^{-p_{knm}^2 t},\qquad C_{knm}=const.$$

$$\tilde{T}_{knm}(t)=\alpha t+\beta,$$

$$\tilde{T}'+p^2\cdot\tilde{T}(t)=\alpha+p^2(\alpha t+\beta)=\tilde{A}t\Rightarrow \tilde{T}(t)=\frac{\tilde{A}}{p^2}\left(t-\frac{1}{p^2}\right).$$

$$T_{knm}(t)=\overset{o}{T}_{knm}+\tilde{T}_{knm}=C_{knm}e^{-p_{knm}^2 t}+\frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^2}\left(t-\frac{1}{p_{knm}^2}\right).$$

$$u(M,t)=\sum_{k,n,m} T_{knm}(t)\cdot \Phi_{knm}(M)=$$

$$=\sum_{k,n,m}\left\{C_{knm}e^{-p_{knm}^2 t}+\frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^2}\left(t-\frac{1}{p_{knm}^2}\right)\right\}\cdot \Phi_{knm}(M).$$

$$u(M,0)=\sum_{k,n,m}\left\{C_{knm}-\frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^4}\right\}\cdot \Phi_{knm}(M)=\sum_{k,n,m} T_{knm}(0)\cdot \Phi_{knm}(M).$$

$$T_{knm}(0) = C_{knm} - \frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^4} = \tilde{B}_{knm} \Rightarrow C_{knm} = \tilde{B}_{knm} + \frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^4}.$$

$$u(M,t) = \sum_{k,n,m} \left\{ \left(\tilde{B}_{knm} + \frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^4} \right) e^{-p_{knm}^2 t} + \frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^2} \left(t - \frac{1}{p_{knm}^2} \right) \right\} \cdot \Phi_{knm}(M) =$$

$$= \sum_{k,n,m} \left\{ \tilde{B}_{knm} \cdot e^{-p_{knm}^2 t} + \frac{\tilde{A}_{knm}}{p_{knm}^2} \left(t - \frac{1}{p_{knm}^2} \left(1 - e^{-p_{knm}^2 t} \right) \right) \right\} \cdot \Phi_{knm}(M).$$

Подставив сюда значения величин $\tilde{A}_{knm}$, $\tilde{B}_{knm}$ и $\Phi_{knm}(M)$, а также интегралы от функции $\Phi_{knm}(M)$ (вычесленные выше), получим предыдущую форму ответа.

Тема 6.
Многомерные волновые уравнения

Решение задач для уравнения колебаний в многомерных областях.

Литература: [1] – гл. 5, §3 (1, 2). [2] – гл. 17, §1, 3. [3] – п. 176, 185, 187, 190. [5] – гл. 8, §3 № 46, 47. [6] – гл. 3, §11, 12.

Задания: [7] – № 122. [8] – гл. 6, № 47, 48.

№ 6.1 (А). Вывод общей формулы для решения плоской задачи гиперболического типа (волновое уравнение) с граничными условиями первого рода Дирихле внутри прямоугольника (см. условия задачи №4.1 (А)); задача о колебаниях плоской мембраны. Получение функции Грина (источника) этой задачи.

$$\begin{cases} \Delta_2 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(M,t) \\ u\big|_C = \varphi(M,t); \\ u\big|_{t=0} = f(M), \quad u'_t\big|_{t=0} = g(M). \end{cases}$$

$$u = u(M,t) \equiv u(x,y,t).$$
$$M(x,y) \in \sigma, \quad M'(\xi,\eta) \in \sigma \bigcup C.$$
$$C \equiv \partial\sigma = \square ABCD.$$
$$0 \le x,\xi \le l, \quad 0 \le y,\eta \le s,$$
$$0 \le t,\tau < \infty.$$

$M(x,y)$ – точка измерения (параметры интегрирования).

$M'(\xi,\eta)$ – точка источника (переменные интегрирования).

$\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к контуру C.

1) Привести к однородным граничные условия сразу на всех сторонах прямоугольника σ не удается; но этого обычно и не требуется.

2) Постановка и решение однородной (самосопряженной) краевой задачи для оператора Лапласа.

Здесь принимаются граничные условия решаемой задачи, но однородные.

$$\begin{cases} \Delta_2 \Phi_{kn} = \lambda_{kn} \cdot \Phi_{kn}(M), \\ \Phi_{kn}\big|_C = 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2 = -\mu_k^2 - \mu_n^2 < 0. \\ &\Phi_{kn}(M) = X_k(x)\cdot Y_n(y). \end{aligned}$$

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x, \qquad \mu_k=\frac{\pi k}{l}>0, \quad k\in N.$$

$$Y_n(y)=\sqrt{\frac{2}{s}}\sin\mu_n y, \qquad \mu_n=\frac{\pi n}{s}>0, \quad n\in N.$$

$$u(M,t)=\sum_{k.n=1}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot\Phi_{kn}(M),$$

$$T_{kn}(t)=(u,\Phi_{kn})=\iint_{\sigma}u(M',t)\cdot\Phi^{*}{}_{kn}(M')\,d\sigma'.$$

$$F(M,t)=\sum_{k,n}F_{kn}(t)\cdot\Phi_{kn}(M),$$

$$F_{kn}(t)=(F,\Phi_{kn})=\iint_{\sigma}F(M',t)\cdot\Phi^{*}{}_{kn}(M')d\sigma'.$$

3) Проверка эрмитовости оператора Δ_2 и вывод уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

$$(\Delta_2 u,\Phi_{kn})-(u,\Delta_2\Phi_{kn})\equiv\iint_{\sigma}\left(\Delta_2 u\cdot\Phi^{*}_{kn}-u\cdot\Delta_2\Phi^{*}_{kn}\right)d\sigma'=$$

$$=\oint_C\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon'}\Phi^{*}_{k}-u\frac{\partial\Phi^{*}_{kn}}{\partial\upsilon'}\right)dl'=\oint_C\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon'}0-\varphi\frac{\partial\Phi^{*}_{kn}}{\partial\upsilon'}\right)dl'=$$

$$=-\oint_C\varphi(M',t)\frac{\partial}{\partial\upsilon'}\Phi^{*}_{kn}(M')\,dl'; \qquad d\sigma'=d\xi\cdot d\eta, \quad dl'=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}.$$

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F\right)\Phi^{*}{}_{kn}-u\lambda_{kn}\Phi^{*}{}_{kn}\right]d\sigma'=\oint_C\varphi\frac{\partial\Phi^{*}_{kn}}{\partial\upsilon'}dl';$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u,\Phi^{*}{}_{kn})+(F,\Phi_{kn})+\mu^2_{kn}(u,\Phi^{*}{}_{kn})=-\oint_C\varphi\frac{\partial\Phi^{*}_{kn}}{\partial\upsilon'}dl';$$

$$T''_{kn}+(a\,\mu_{kn})^2T_{kn}(t)=-a^2\left(F_{kn}(t)+\oint_C\varphi\frac{\partial\Phi^{*}_{kn}}{\partial\upsilon'}dl'\right).$$

4) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$.

Решение будем искать в виде $T_{knm}(t)=\overset{o}{T}_{knm}(t)+\tilde{T}_{knm}(t)$, где общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$\overset{0}{T}_{knm}(t) = C_{kn}\sin\mu_{kn}\, a t + \tilde{C}_{kn}\cos\mu_{kn}\, a t,$ а $C_{kn}, \tilde{C}_{kn} = const$ – постоянные интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных
$\tilde{T}_{knm}(t) = C_{kn}(t)\sin\mu_{kn} a t + \tilde{C}_{kn}(t)\cos\mu_{kn} a t$. Здесь неизвестные функции $C_{kn}(t)$ и $\tilde{C}_{kn}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C'_{kn}(t)\,\sin\mu_{kn} a t + \tilde{C}'_{kn}(t)\,\cos\mu_{kn}\, a t = 0, \\ C'_{kn}(t)\sin\mu_{kn} a t - \tilde{C}'_{kn}(t)\,\cos\mu_{kn} a t = \\ = -\dfrac{a}{\mu_{kn}}\left(F_{kn}(t) + \oint\limits_C \varphi\dfrac{\partial\Phi^*_{kn}}{\partial\upsilon'}d\,l'\right) \equiv -\dfrac{a}{\mu_{kn}}\,Q_{kn}(t) = \tilde{Q}_{kn}(t). \end{cases}$$

Определитель этой системы (он является и вронскианом) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\mu_{kn}\, a t & \cos\mu_{kn}\, a t \\ \cos\mu_{kn}\, a t & -\sin\mu_{kn}\, a t \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

а значения величин $C'_{kn}(t)$ и $\tilde{C}'_{kn}(t)$ найдем по правилу Крамера

$$C'_{kn}(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \cos\mu_{kn} a t \\ \tilde{Q}_{kn}(t) & -\sin\mu_{kn} a t \end{vmatrix} = -\frac{a}{\mu_{kn}}\,Q_{kn}(t)\,\cos\mu_{kn} a t,$$

$$\tilde{C}'_{kn}(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin\mu_{kn}\, a t & 0 \\ \cos\mu_{kn}\, a t & \tilde{Q}_{kn}(t) \end{vmatrix} = +\frac{a}{\mu_{kn}}\,Q_{kn}(t)\sin\mu_{kn}\, a t\,.$$

$$C_{kn}(t) = C_{kn} - \frac{a}{\mu_{kn}}\int\limits_0^t Q_{kn}(\tau)\cdot\cos\mu_{kn}\, a\,\tau\, d\,\tau,$$

$$\tilde{C}_{kn}(t) = \tilde{C}_{kn} + \frac{a}{\mu_{kn}}\int\limits_0^t Q_{kn}(\tau)\cdot\sin\mu_{kn}\, a\,\tau\, d\,\tau; \qquad C_{kn}, \tilde{C}_{kn} = const.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения для функции $T_{kn}(t)$ равно

$$T_{kn}(t) = C_{kn}(t)\sin\mu_{kn}\, a t + \tilde{C}_{kn}(t)\cos\mu_{kn}\, a t =$$

$$= C_{kn}\sin\mu_{kn}\, a t + \tilde{C}_{kn}\cos\mu_{kn}\, a t - \frac{a}{\mu_{kn}}\int\limits_0^t Q_{kn}(\tau)\cdot\sin\mu_{kn}\, a\,(t-\tau)\,d\,\tau.$$

5) Определение постоянных C_{kn} и $\tilde{C}_{kn}$ из начальных условий.

$$u(M,t)=\sum_{k.n=1}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot\Phi_{kn}(M)=$$

$$=\sum_{k,n}\left\{C_{kn}\sin\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\cos\omega_{kn}t-\frac{a^2}{\omega_{kn}}\int_0^t Q_{kn}(\tau)\sin\mu_{kn}a\,(t-\tau)\,d\tau\right\}\Phi_{kn}(M)=$$

$$=\sum_{k,n}\left\{\ C_{kn}\sin\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\cos\omega_{kn}t-\right.$$

$$\left.-a^2\int_0^t\left[F_{kn}(\tau)+\oint_C\varphi(M',t)\,\frac{\partial}{\partial\upsilon'}\,\Phi^*_{kn}(M')\,dl'\right]\frac{\sin\omega_{kn}(t-\tau)}{\omega_{kn}}d\tau\right\}\Phi_{kn}(M),$$

где $\omega_{kn}^2=\left(a\,\mu_{kn}\right)^2=a^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)>0$ – собственные частоты системы.

$$u(M,0)=\sum_{k,n}\left\{0+\tilde{C}_{kn}-\frac{a^2}{\omega_{kn}}\int_0^0\ldots\right\}\Phi_{kn}(M)=f(M)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{kn}=\left(f,\Phi_{kn}\right)=\iint_\sigma f(M')\,\Phi^*_{kn}(M')\,d\sigma'\equiv f_{kn}=const.$$

$$u_t'(M,0)=\sum_{k,n}\left\{\omega_{kn}C_{kn}-0-\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{\omega_{kn}}\cdot\left[\int_0^t Q_{kn}(\tau)\,\omega_{kn}\cos\omega_{kn}(t-\tau)\,d\tau+Q_{kn}(t)\sin\omega_{kn}(t-t)\right]\Big|_{t=0}\right\}\Phi_{kn}(M)=$$

$$=g(M)\Rightarrow\omega_{kn}C_{kn}=\left(g,\Phi_{kn}\right)=\iint_\sigma g(M')\cdot\Phi^*_{kn}(M')\,d\sigma'\equiv g_{kn}$$

или $C_{kn}=\dfrac{g_{kn}}{\omega_{kn}}=const.$

6) Окончательный вид решения задачи.

$$u(M,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot\Phi_{kn}(M)=$$

$$=\sum_{k,n}\left\{f_{kn}\cos\omega_{kn}t+g_{kn}\frac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}-a^2\int_0^t Q_{kn}(\tau)\,\frac{\sin\omega_{kn}(t-\tau)}{\omega_{kn}}\,d\tau\right\}\Phi_{kn}(M).$$

Если использовать производную $\cos\omega_{kn}t=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}$, то формула примет более однородный вид

$$u(M,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}\right)\iint_{\sigma} f(M')\cdot\Phi^*_{kn}(M')d\sigma'+\right.$$

$$+\frac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}\iint_{\sigma} g(M')\cdot\Phi^*_{kn}(M')\,d\sigma'-a^2\int_0^1\left[\iint_{\sigma}F(M',\tau)\cdot\Phi^*_{kn}(M')\,d\sigma'+\right.$$

$$\left.\left.+\oint_C\varphi(M',\tau)\frac{\partial}{\partial\upsilon'}\Phi^*_{kn}(M')\,dl'\right]\frac{\sin\omega_{kn}(t-\tau)}{\omega_{kn}}\,d\tau\right\}\Phi_{kn}(M).$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial\upsilon}\Phi_{kn}(M)=grad\ \Phi_{kn}(M)\cdot\vec{\upsilon}$ – производная вдоль вектора $\vec{\upsilon}$ – внешней нормали к граничному контуру *C*. Орт $\vec{\upsilon}$ на разных участках контура *C*, ограничивающего прямоугольник $l\times s$, имеет различные направления, параллельные осям координат.

Окончательный вид решения компактно можно записать через функцию Грина (источника)

$$u(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\sigma} f(M')\cdot G(M,M'|t)\,d\sigma'+\iint_{\sigma} g\,(M')\cdot G(M,M'|t)\,d\sigma'-$$

$$-a^2\int_0^t\left\{\iint_{\sigma}F(M',\tau)\cdot G(M,M'|t-\tau)d\sigma'+\oint_C\varphi(M',\tau)\frac{\partial}{\partial\upsilon'}G(M,M'|t-\tau)dl'\right\}d\tau,$$

где функция Грина равна

$$G(M,M'|t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}\cdot\Phi^*_{kn}(M')\cdot\Phi_{kn}(M).$$

Можно показать, что функция Грина обладает следующими свойствами

$$\begin{cases}\Delta_2 G-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{a^2}\,\delta(M,M')\ \delta(t-\tau),\\ G\big|_C=0;\quad G\big|_{t=0}=0;\quad G'_t\big|_{t=0}=\delta(M,M').\end{cases}\qquad \begin{array}{l}G=G(M,M'|t)\\ 0\le\tau\le t<\infty.\end{array}$$

Действительно: $G(M,M'|t)=G^*(M',M|t)$;

$$G(M,M'|0)=\sum_{k,n}0\cdot\Phi^*_{kn}(M')\cdot\Phi_{kn}(M)\equiv 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(M,M'|0)=\sum_{k,n}\Phi^*_{kn}(M)\cdot\Phi_{kn}(M)=\delta(M,M');$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(M,M'|0)=0.\qquad \frac{\partial}{\partial\upsilon}G(M,M'|t-\tau)=-\frac{1}{a^2}\,\delta\,(M,M')\,\delta(t-\tau).$$

7) Проверка решения по условиям задачи и по размерностям.

$$u(M,t)\Big|_C = 0 \because G(M,M'|t)\Big|_C = G(M,M'|t-\tau)\Big|_C = 0;$$

$$u(M,0) = \iint_\sigma f(M')\cdot G'_t(M,M'|0)d\sigma' + \iint_\sigma g(M')\cdot G(M,M'|0)d\sigma' -$$

$$-a^2\int_0^0 \{...\}\, d\tau = \iint_\sigma f(M')\cdot\delta(M,M')\, d\sigma' + \iint_\sigma g(M')\cdot 0\cdot d\sigma' - 0 = f(M).$$

$$u'_t(M,0) = \iint_\sigma f(M')\cdot G''_{tt}(M,M'|0)\, d\sigma' + \iint_\sigma g(M')\cdot G'_t(M,M'|0)\, d\sigma' -$$

$$-a^2\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t \{...\}\big|_{t=0}\cdot d\tau = 0 + \iint_\sigma g(M')\cdot\delta(M,M')\, d\sigma' - 0 =$$

$$= g(M) \because G''_{tt}(M,M'|t)\Big|_{t=0} = G''_{tt}(M,M'|t-\tau)\Big|_{t=0} = 0.$$

По условию задачи имеем размерности: $[u(M,t)] = W$, $[F] = W/L^2$, $[f] = [\varphi] = W$, $[g] = W/T$, $[a] = \dfrac{L}{T}$, $[\omega_{kn}] = \dfrac{1}{T}$, $[\Phi_{kn}] = \dfrac{1}{L}$, $[G] = \dfrac{T}{L^2}$, $[dl] = L$, $[d\sigma] = L^2$. Поэтому

$$[u] = \frac{1}{T}[f]\cdot[G]\cdot L^2 + [g]\cdot[G]\cdot L^2 + \frac{L^2}{T^2}\left\{[F]\cdot[G]\cdot L^2 + [\varphi]\cdot\frac{1}{L}\cdot[G]\cdot L\right\}T =$$

$$= \frac{1}{T}W\cdot\frac{T}{L^2}L^2 + W/T\cdot\frac{T}{L^2}L^2 + \frac{L^2}{T}\left\{W/L^2\cdot\frac{T}{L^2}L^2 + W\cdot\frac{T}{L^2}\right\} \Rightarrow W.$$

8) Замечания о решении других задач гиперболического типа (волновых уравнений).

Решение задачи для уравнения колебаний в трехмерном пространстве задается формулой, аналогичной полученной выше для плоского случая.

$$\begin{cases} \Delta_3 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(M,t) \\ u\big|_\sigma = \varphi(M,t); \quad u\big|_{t=0} = f(M); \\ u'_t\big|_{t=0} = g(M). \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u = u(M,t) \equiv u(x,y,z,t). \\ &0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s, \\ &0 \le z \le H, \quad 0 \le t < \infty. \end{aligned}$$

$M(x,y,z) \in V$, $M'(\xi,\eta,\zeta) \in V \cup \sigma$. V – прямоугольный параллелепипед размером $l\times s\times H$ и $\sigma = \partial V$ – его поверхность. $\vec{\upsilon}$ – орт внешней нормали.

Модельная задача с однородными граничными условиями первого рода Дирихле

$$\begin{cases} \Delta_3 \Phi_{knm} = \lambda_{knm} \cdot \Phi_{knm}(M), \\ \Phi_{knm}\big|_{\sigma} = 0. \end{cases} \qquad \lambda_{knm} = -\mu_{knm}^2 = -\left(\mu_k^2 + \mu_n^2 + \mu_m^2\right) \le 0.$$

Решая модельную задачу, получим

$$\Phi_{knm}(M) \equiv \Phi_{knm}(x,y,z) = X_k(x) \cdot Y_n(y) \cdot Z_m(z);$$

одномерные функции-сомножители, как и их собственные значения, здесь легко находятся из табл. 1.

Окончательная формула решения имеет вид

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V f(M') \cdot G\left(M, M' \middle| t\right) dV' + \iiint\limits_V g(M') \cdot G\left(M, M' \middle| t\right) dV' -$$

$$-a^2 \int\limits_0^t \left\{ \iiint\limits_V F(M', \tau) \cdot G\left(M, M' \middle| t - \tau\right) dV' + \right.$$

$$\left. + \oiint\limits_{\sigma} \varphi(M', \tau) \frac{\partial}{\partial \upsilon'} G\left(M, M' \middle| t - \tau\right) d\sigma' \right\} d\tau,$$

где $dV' = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$, $d\sigma'_{\xi} = d\eta \cdot d\zeta$ и т. п. Функция Грина равна

$$G\left(M, M' \middle| t\right) = \sum_{k,n,m=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{knm} t}{\omega_{knm}} \cdot \Phi^*_{knm}(M') \cdot \Phi_{knm}(M); \quad \omega_{knm} = a\mu_{knm} > 0.$$

При решении задач гиперболического типа с граничными условиями второго рода (условия Неймана) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|_{\sigma} = \varphi(M,t)$ или третьего рода (смешанными) $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} + \alpha \cdot u\right)\right|_{\sigma} = \varphi(M,t)$ ставится соответствующее однородное (!) граничное условие в краевой задаче для собственных функций $\Phi_{knm}(M)$, т. е. будет $\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}\right|_{\sigma} = 0$ или $\left.\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \upsilon} + \alpha \cdot \Phi\right)\right|_{\sigma} = 0$. Кроме того, в окончательной формуле решения происходит замена $\dfrac{\partial}{\partial \upsilon} \to -1$ (в плоском и линейном случаях поступают аналогично).

№ 6.2 (В). Решение двумерного волнового уравнения о колебании прямоугольной мембраны с возмущением на одной из сторон методом разделения переменных и методом общей формулы (через функцию Грина).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \\ u(0,y,t)=u(l,y,t)=0, \\ u(x,0,t)=0, \quad u(x,s,t)=Ax, \\ u(x,y,0)=u_t'(x,y,0)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u=u(x,y,t). \\ 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s, \\ 0\le t<\infty. \\ A,a,l,s=const>0. \end{array}$$

1–2) Пара граничных условий по переменной x однородна, поэтому можно решить краевую задачу по этой координате (см. табл. 1).

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,t)\cdot X_k(x),$$

где $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x, \quad \mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0$ при $k\in N$. $\lim\limits_{k\to\infty}u_k(y,t)=0.$

3) Постановка задачи для функции $u_k(y,t)$.

$$\Delta_2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_k\left\{-\mu_k^2 u_k+\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right\}X_k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\mu_k^2 u_k(y,t)=0.$$

$$u(x,0,t)=0\Rightarrow u_k(0,t)=0, \qquad u(x,y,0)=0\Rightarrow u_k(y,0)=0,$$

$$u(x,s,t)=\sum_k u_k(s,t)\cdot X_k(x)=Ax\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_k(s,t)=(Ax,X_k)=At\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\sin\mu_k x\cdot x\,dx=\frac{A\sqrt{2l}}{\mu_k}(-1)^{k+1}\equiv\tilde{A}_k.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\mu_k^2 u_k(y,t)=0. \\ u_k(0,t)=0, \quad u_k(s,t)=\tilde{A}_k; \\ u_k(y,0)=\dfrac{\partial}{\partial t}u_k(y,0)=0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_k=u_k(y,t). \\ 0\le y\le s, \quad 0\le t<\infty. \end{array}$$

4) Приведение граничных условий по координате y к однородным выполним с помощью замены $u_k(y,t) = v_k(y,t) + \tilde{A}_k \dfrac{y}{s}$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} - \mu_k^2 \cdot v_k(y,t) = \mu_k^2 \tilde{A}_k \dfrac{y}{s}. \\ v_k(0,t) = v_k(s,t) = 0; \\ v_k(y,0) = -\tilde{A}_k \dfrac{y}{s}, \quad \dfrac{\partial}{\partial t} v_k(y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v_k = v_k(y,t). \\ 0 \le y \le s, \\ 0 \le t \le \infty. \end{array}$$

5) Разделение переменных для функции $v_k(y,t)$ и решение краевой задачи по координате y (см. табл. 1).

$$v_k(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(t) \cdot Y_n(y),$$

где $Y_n(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}} \sin \mu_n y$ и $\mu_n = \dfrac{\pi n}{s} > 0, \quad n \in N. \quad \lim\limits_{k,n\to\infty} T_{kn}(t) = 0.$

6) Вывод дифференциального уравнения для $T_{kn}(t)$.

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \mu_k^2 \cdot v_k - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\mu_n^2 - \mu_k^2\right) \cdot T_{kn} - \frac{1}{a^2} T''_{kn} \right\} Y_n =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \sum_n \left\{ T''_{kn} + \omega_{kn}^2 T_{kn}(t) \right\} Y_n(y) = \mu_k^2 \tilde{A}_k \frac{y}{s} \equiv \sum_n \gamma_{kn} \cdot Y_n(y),$$

где $\omega_{kn}^2 = a^2\left(\mu_n^2 + \mu_k^2\right) = \pi^2 a^2 \left(\dfrac{k^2}{l^2} + \dfrac{n^2}{s^2} \right) = const > 0,$

$$\gamma_{kn} = \left(-a^2 \mu_k^2 \tilde{A}_k \frac{y}{s}, Y_n \right) = -a^2 \frac{\mu_k^2}{s} \tilde{A}_k \sqrt{\frac{2}{s}} \int_0^s \sin \mu_n y \cdot y\, d\, y =$$

$$= \frac{a^2 \mu_k^2}{s \mu_n} \tilde{A}_k \sqrt{\frac{2}{s}} \left\{ y \cdot \cos \mu_n y \Big|_0^s - \int_0^s \cos \mu_n y \cdot dy \right\} =$$

$$= \frac{a^2 \mu_k^2}{\mu_n} \tilde{A}_k \sqrt{\frac{2}{s}} (-1)^n = const. \qquad T''_{kn} + \omega_{kn}^2 T_{kn}(t) = \gamma_{kn}.$$

7) Решение неоднородного дифференциального уравнения для функции $T_{kn}(t)$ равно

$$T_{kn}(t) = C_{kn} \cos \omega_{kn} t + \tilde{C}_{kn} \sin \omega_{kn} t + \frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2},$$

где $C_{kn}, \tilde{C}_{kn} = const$ – постоянные интегрирования.

$$v_k(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\cdot Y_n(y) = \sum_n \left\{ C_{kn}\cos\omega_{kn}t + \tilde{C}_{kn}\sin\omega_{kn}t + \frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2} \right\} Y_n(y).$$

8) Определение постоянных C_{kn} и $\tilde{C}_{kn}$ из начальных условий для функции $v_k(y,t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k(y,0) = \sum_n \tilde{C}_{kn}\omega_{kn} Y_n(y) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_{kn} = 0.$$

$$v_k(y,0) = \sum_n \left\{ C_{kn} + \frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2} \right\} Y_n(y) = -\tilde{A}_k \frac{y}{s} \Rightarrow C_{kn} + \frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2} =$$

$$= \left(-\tilde{A}_k \frac{y}{s}, Y_n \right) = -\frac{\tilde{A}_k}{s}\sqrt{\frac{2}{s}} \int_0^s \sin\mu_n y\cdot y\,dy = \frac{\tilde{A}_k}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{s}}\,(-1)^n = const.$$

$$C_{kn} = \frac{\tilde{A}_k}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{s}}(-1)^n - \frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2} = (-1)^n \frac{\tilde{A}_k}{\mu_n}\sqrt{\frac{2}{s}}\left(1 - \frac{a^2\mu_k^2}{\omega_{kn}^2}\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{\tilde{A}_k}{\mu_n} \frac{\mu_k^2 + \mu_n^2 - \mu_k^2}{\mu_k^2 + \mu_n^2}\sqrt{\frac{2}{s}} = (-1)^n \frac{\tilde{A}_k\,\mu_n\, a^2}{\omega_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{s}}.$$

$$v_k(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ (-1)^n \tilde{A}_k \frac{\mu_n a^2}{\omega_{kn}^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\cos\omega_{kn}t + \frac{a^2\mu_k^2}{\mu_n\,\omega_{kn}^2}(-1)^n \tilde{A}_k\sqrt{\frac{2}{s}} \right\} Y_n(y) =$$

$$= -2a^2 A\frac{\sqrt{2l}}{s}\sum_n \frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k\,\mu_n\,\omega_{kn}^2}\left(\mu_k^2 + \mu_n^2\cos\omega_{kn}t\right)\sin\mu_n y.$$

9) Окончательный вид решения.

$$u_k(y,t) = v_k(y,t) + \tilde{A}_k\frac{y}{s} = \tilde{A}_k\frac{y}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\cdot Y_n(y) =$$

$$= \tilde{A}_k\frac{y}{s} - 2a^2 A\frac{\sqrt{2l}}{s}\sum_n \frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k\,\mu_n\,\omega_{kn}^2}\left(\mu_k^2 + \mu_n^2\cos\omega_{kn}t\right)\sin\mu_n y.$$

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y,t)\cdot X_k(x) =$$

$$= Ax\frac{y}{s} - \frac{4Aa^2}{s}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k\,\mu_n\,\omega_{kn}^2}\left(\mu_k^2 + \mu_n^2\cos\omega_{kn}t\right)\sin\mu_k x\sin\mu_n y.$$

Полученную формулу ответа можно упростить

$$u(x,y,t) = Ax\frac{y}{s} - \frac{4A}{s}\sum_{k,n}\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k\,\mu_n}\left(\frac{\mu_n^2\,\cos\omega_{kn}t - \mu_n^2}{\mu_k^2+\mu_n^2}+1\right)\sin\mu_k x\,\sin\mu_n y =$$

$$= Ax\frac{y}{s} - \frac{4A}{s}\sum_{k,n}\frac{\mu_n}{\mu_k}(-1)^{k+n}\,\frac{1-\cos\omega_{kn}t}{\mu_k^2+\mu_n^2}\sin\mu_k x\,\sin\mu_n y -$$

$$-\frac{4Al}{\pi^2}\sum_{k,n}\frac{(-1)^{k+n}}{kn}\cdot\sin\frac{\pi k x}{l}\cdot\sin\frac{\pi n y}{s} =$$

$$= Ax\frac{y}{s} + \frac{4a^2A}{s}\sum_{k,n}\frac{\mu_n}{\mu_k}\,\frac{(-1)^{k+n}}{\omega_{kn}^2}\left(1-\cos\omega_{kn}t\right)\sin\mu_k x\,\sin\mu_n y -$$

$$-\frac{4Al}{\pi^2}\cdot\frac{\pi x}{2l}\cdot\frac{\pi y}{2s} = \qquad \text{(см. Приложение 1, формула 3)}$$

$$= \frac{4a^2A}{s}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\mu_k}\,\frac{(-1)^{k+n}}{\omega_{kn}^2}\left(1-\cos\omega_{kn}t\right)\sin\mu_k x\,\sin\mu_n y;$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l} > 0$, $\mu_n = \dfrac{\pi n}{s} > 0$, $\omega_{kn}^2 = a^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right) > 0.$

Полученный двойной ряд сходится правильно по всем переменным *x, y* и *t* внутри области их задания. Общий член ряда имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{k^3 n}\right)$ при $k,n\to\infty$.

10) Проверка полученного решения по условиям задачи и по размерностям.

Использовав сначала неупрощенный вид ответа, получим

$u(0,y,t)=0,\qquad u(l,y,t) = Al\,\dfrac{y}{s}\neq 0 \because \sin\mu_k l = 0;\qquad u(x,0,t)=0,$

$u(x,s,t) = Ax;\quad u'_t(x,y,0)=0,$

$$u(x,y,0) = Ax\frac{y}{s} - \frac{4A}{s}\sum_{k,n}\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_k\,\mu_n}\sin\mu_k x\,\sin\mu_n y =$$

$$= Ax\frac{y}{s} - \frac{4A}{s}\frac{ls}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n y}{s} =$$

$$= Ax\frac{y}{s} - \frac{4Al}{\pi^2}\frac{\pi x}{2l}\frac{\pi y}{2s} = 0. \qquad \text{(см. Приложение 1, формула № 3).}$$

Упрощенная форма ответа дает несколько отличный результат

$$u(0,y,t)=0,\quad u(l,y,t)=0 \because \sin\mu_k l=0;\quad u(x,0,t)=0,$$

$$u(x,s,t)=0\neq Ax \because \sin\mu_n s=0.\qquad u(x,y,0)=0,\qquad u'_t(x,y,0)=0.$$

Частичные несовпадения граничных условий объясняются тем, что обе полученные формы ответа должны полностью удовлетворять всем условиям задачи только строго внутри области σ (прямоугольника размерами $l\times s$), а полученные ряды могут иметь разрывы первого рода на некоторой части границы области $C=\partial\sigma$.

По условиям задачи имеем размерности величин: $[u(x,y,t)]=W$, $[A]=W/L$, $[a]=L/T$, $[\mu_{k,n}]=1/L$, $[\omega_{kn}]=1/T$. Здесь для обеих форм ответа размерности выполняются

$$[u]=[A]\cdot\frac{L^2}{L}+\frac{[A]}{L}\frac{L^2}{T^2}L^2\cdot T^2/L^2\Rightarrow W.$$

$$[u]=[A]\cdot\frac{1}{L}\frac{L^2}{T^2}\frac{L}{L}T^2\Rightarrow W.$$

11). Решение задачи по общей формуле (см. задачу 6.1 (А), пункт 6).

$$u(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}\iint_\sigma f(M')\cdot G(M,M'|t)\,d\sigma'+\iint_\sigma g(M')\cdot G(M,M'|t)\,d\sigma'-$$

$$-a^2\int_0^t\left\{\iint_\sigma F(M',\tau)\cdot G(M,M'|t-\tau)\,d\sigma'+\right.$$

$$\left.+\oint_C\varphi(M',\tau)\frac{\partial}{\partial\upsilon'}G(M,M'|t-\tau)\,dl'\right\}d\tau.$$

В нашем случае условия $F(M,t)=f(M)=g(M)=0$ и на границе $C=\partial\sigma$ имеем $u(x,s,t)=Ax$ при $0\le x\le l$ и $u(x,y,t)=0$ при $y\neq s$. Функция Грина $G(M,M'|t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_{kn}t}{\omega_{kn}}\cdot\Phi^*_{kn}(M')\cdot\Phi_{kn}(M)$, где $\Phi_{kn}(M)=X_k(x)\cdot Y_n(y)$ – последние функции уже определены ранее.

Таким образом, остается вычислить интеграл вида

$$u(M,t)=-a^2\int_0^t d\tau\int_l^0 A\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}G(x,y;\xi,s|t-\tau)\cdot(-d\xi)=$$

$$= -Aa^2 \int_0^t d\tau \int_0^l \left\{ \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{kn}(t-\tau)}{\omega_{kn}} \Phi_{kn}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^*{}_{kn}(\xi,s) \right\} \xi \, d\xi =$$

$$= -Aa^2 \sum_{k,n} \int_0^t \sin \omega_{kn}(t-\tau) \frac{d\tau}{\omega_{kn}} \cdot \int_0^l \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^*{}_{kn}(\xi,s)\, \xi \, d\xi \cdot \Phi_{kn}(x,y),$$

где $\displaystyle\int_0^t \sin \omega_{kn}(t-\tau) \frac{d\tau}{\omega_{kn}} = \frac{1}{\omega_{kn}^2} \cos \omega_{kn}(t-\tau) \Big|_0^t = \frac{1}{\omega_{kn}^2}\left(1-\cos \omega_{kn} t\right),$

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^*{}_{kn}(\xi,s)\, \xi \, d\xi = Y_n'(s) \int_0^l X_k(\xi)\, \xi \, d\xi = (-1)^n \mu_n \frac{2}{\sqrt{ls}} \int_0^l \sin \mu_k \xi \cdot \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2\mu_n}{\mu_k \sqrt{ls}} (-1)^{n+1} \left\{ \xi \cos \mu_k \xi \Big|_0^l - \int_0^l \cos \mu_k \xi \cdot d\xi \right\} = \frac{2\mu_n}{\mu_k} \sqrt{\frac{l}{s}}\, (-1)^{k+n+1}.$$

$$u(x,y,t) = \frac{4Aa^2}{s} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu_k} \frac{(-1)^{k+n}}{\omega_{kn}^2} \left(1-\cos \omega_{kn} t\right) \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_n y,$$

что совпадает с найденным выше решением.

№ 6.3 (С). Решение уравнения колебаний мембраны, закрепленной вдоль прямоугольной границы. Мембрана имеет пирамидальную начальную форму $f(x,y) = Axy(l-x)(s-y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(0,y,t) = u(l,y,t) = u(x,0,t) = u(x,s,t) = 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y) \equiv Axy(l-x)(s-y), \\ u_t'(x,y,0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y,t). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s \\ 0 \le t < \infty. \\ A, a, l, s = const > 0. \end{array}$$

1–2) $\displaystyle u(x,y,t) = \sum_{k.n=1}^{\infty} T_{kn}(t) \cdot \Phi_{kn}(x,y),$

где $\Phi_{kn}(x,y) = X_k(x) \cdot Y_n(y)$; $\quad X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \mu_k x \quad$ и $\quad \mu_k = \dfrac{\pi k}{l} > 0;$

$Y_n(y) = \sqrt{\dfrac{2}{s}} \sin \mu_n y$ и $\mu_n = \dfrac{\pi n}{s} > 0$. $\displaystyle\lim_{k,n \to \infty} T_{kn}(t) = 0.$

$$3)\ \Delta_2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{k,n}\left\{\left(-\mu_k^2-\mu_n^2\right)T_{kn}-\frac{1}{a^2}T''_{kn}\right\}\Phi_{kn}(x,y)=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sum_{k,n}\left\{T''_{kn}+\omega_{kn}^2 T_{kn}(t)\right\}\Phi_{kn}(x,y)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T''_{kn}+\omega_{kn}^2 T_{kn}(t)=0;\quad \omega_{kn}^2=a^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2\right)>0.$$

$$4)\ T_{kn}(t)=C_{kn}\cos\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\sin\omega_{kn}t,\qquad C_{kn},\tilde{C}_{kn}=const\,.$$

$$5)\ u(x,y,t)=\sum_{k.n}T_{kn}(t)\Phi_{kn}(x,y)=$$

$$=\sum_{k,n}\left\{C_{kn}\cos\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\sin\omega_{kn}t\right\}\Phi_{kn}(x,y).$$

$$u'_t(x,y,0)=\sum_{k,n}\tilde{C}_{kn}\omega_{kn}\Phi_{kn}(x,y)=0\Rightarrow\tilde{C}_{kn}=0.$$

$$u(x,y,0)=\sum_{k,n}C_{kn}\Phi_{kn}(x,y)=f(x,y)\equiv A\,x\,y(l-x)(s-y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{kn}=\left(f,\Phi_{kn}\right)=\frac{2A}{\sqrt{l\,s}}\int_0^l\left(l\,x-x^2\right)\sin\mu_k x\,d\,x\cdot\int_0^s\left(s\,y-y^2\right)\sin\mu_n y\,d\,y.$$

Здесь $\displaystyle\int_0^l\left(l\,x-x^2\right)\sin\mu_k x\,d\,x=$

$$=\frac{-1}{\mu_k}\left\{\left(l\,x-x^2\right)\cos\mu_k x\,\Big|_0^l-\int_0^l\cos\mu_k x\,(l-2x)\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{\mu_k^2}\left\{(l-2x)\sin\mu_k x\,\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x\,(-2\,d\,x)\right\}=\frac{-2}{\mu_k^3}\left(1-(-1)^k\right),$$

$$\int_0^s\left(sy-y^2\right)\sin\mu_n y\,d\,y=\frac{-2}{\mu_n^3}\left(1-(-1)^n\right).$$

$$6)\ u(x,y,t)=\frac{16A}{l\,s}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\mu_k^3}\cdot\frac{1-(-1)^k}{\mu_n^3}\cdot\cos\omega_{kn}t\cdot\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_n y=$$

$$=\frac{64A}{l\,s}\sum_{k',n'=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_{k'n'}t}{\mu_{k'}^3\mu_{n'}^3}\cdot\sin\mu_{k'}x\cdot\sin\mu_{n'}y,$$

где $\quad k=2k'+1,\quad n=2n'+1;\quad \mu_{k'}=\dfrac{\pi}{l}\left(2k'+1\right),\quad \mu_{n'}=\dfrac{\pi}{s}\left(2n'+1\right),$

$\omega_{k'n'}^2=a^2\left(\mu_{k'}^2+\mu_{n'}^2\right)>0\,.$

7) $u(0,y,t)=u(l,y,t)=u(x,0,t)=u(x,s,t)=0, \qquad u'_t(x,y,0)=0.$

$$u(x,y,0)=\frac{64A}{ls}\left(\frac{ls}{\pi^2}\right)^3\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(2k'+1)^3}\sin\frac{\pi x}{l}(2k'+1)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{1}{(2n'+1)^3}\sin\frac{\pi y}{s}(2n'+1)=$$

$$=\frac{64A}{\pi^6}l^2s^2\cdot\frac{\pi^3x}{8l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\frac{\pi^3y}{8s}\left(1-\frac{y}{s}\right)=Axy(l-x)(s-y)\equiv f(x,y)$$

(см. Приложение 1, формула № 21).

$$[u(x,y,t)]=W, \quad [A]=W/L^4, \quad [a]=L/T, \quad [\mu_{k,n}]=1/L,$$

$$[\omega_{kn}]=1/T, \quad [u]=[A]/L^2\cdot L^6=\frac{[u]}{L^4}L^4\Rightarrow W.$$

№ 6.4 (С). Волновое уравнение на плоскости (колебания прямоугольной мембраны) со стационарной неоднородностью в граничных условиях смешанного типа.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0.\\ u'_x(0,y,t)=0, \quad u(l,y,t)=Ay,\\ u(x,0,t)=u'_y(x,s,t)=0.\\ u(x,y,0)=u'_t(x,y,0)=0.\end{cases} \qquad \begin{array}{l}u=u(x,y,t).\\ 0\le x\le l, \quad 0\le y\le s,\\ 0\le t\le\infty.\\ A,a,l,s=const>0.\end{array}$$

1-2) $\quad u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t)\cdot Y_k(y), \qquad$ где $\qquad Y_k(y)=\sqrt{\dfrac{2}{s}}\sin\mu_k y$

и $\mu_k=\dfrac{\pi}{2s}(2k+1)>0$. $\quad \lim\limits_{k\to\infty}u_k(x,t)=0$.

$$3)\ \Delta_2u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_k\left\{\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2}-\mu_k^2\cdot u_k-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u_k}{\partial t^2}\right\}Y_k(y)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u_k}{\partial t^2}-\mu_k^2\cdot u_k(x,t)=0.$$

$$u'_x(0,y,t)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u_k(0,t)=0; \;\; u(x,y,0)=0 \Rightarrow u_k(x,0)=0,$$

$$u'_t(x,y,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}u_k(x,0)=0.$$

$$u(l,y,t)=\sum_k u_k(l,t)\cdot Y_k(y)=A\,y \Rightarrow u_k(l,t)=(A\,y,Y_k)=$$

$$=A\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^s \sin\mu_k y\cdot y\,d\,y=-\frac{A}{\mu_k}\sqrt{\frac{2}{s}}\left\{y\cos\mu_k\,y\Big|_0^s-\int_0^s\cos\mu_k y\cdot d\,y\right\}=$$

$$=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\sin\mu_k\,y\Big|_0^s=\frac{A}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\left(-1\right)^k\equiv\tilde{A}_k.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\mu_k^2\cdot u_k(x,t)=0.\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}u_k(0,t)=0, \quad u_k(l,t)=\tilde{A}_k;\\[2mm] u_k(x,0)=\dfrac{\partial}{\partial t}u_k(x,0)=0.\end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_k=u_k(x,t).\\ 0\le x\le l,\\ 0\le t<\infty.\end{array}$$

4) $u_k(x,t)=v_k(x,t)+\tilde{A}_k=v_k(x,t)+A\,\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sqrt{\dfrac{2}{s}}.$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}-\mu_k^2\cdot v_k(x,t)=\mu_k^2\tilde{A}_k.\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}v_k(0,t)=v_k(l,t)=0;\\[2mm] v_k(x,0)=-\tilde{A}_k, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}v_k(x,0)=0.\end{cases}$$

5) $v_k(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_{kn}(t)\cdot X_n(x),$ где $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cdot\cos\mu_n x$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)>0.$ $\lim\limits_{k,n\to\infty}T_{kn}(t)=0.$

6)

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}-\mu_k^2\cdot v_k(x,t)=\sum_n\left\{(-\mu_k^2-\mu_n^2)\cdot T_{kn}-\frac{1}{a^2}T''_{kn}\right\}X_n(x)=$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\sum_n\left\{T''_{kn}+\omega_{kn}^2 T_{kn}(t)\right\} X_n(x)=\mu_k^2\tilde{A}_k, \quad \text{где} \;\; \omega_{kn}^2=a^2(\mu_k^2+\mu_n^2)>0.$$

$$\sum_n\left\{T''_{kn}+\omega_{kn}^2 T_{kn}(t)\right\}\cdot X_n(x)=-a^2\mu_k^2\tilde{A}_k=\sum_n\gamma_{kn}\cdot X_n(x),$$

$$\gamma_{kn}=(-a^2\mu_k^2\,\tilde{A}_k,X_n)=-a^2\mu_k^2\,\tilde{A}_k\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\int_0^l\cos\mu_n x\cdot dx=$$

$$=-a^2\mu_k^2\,\tilde{A}_k\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{(-1)^n}{\mu_n}=\frac{2Aa^2}{\mu_n\sqrt{ls}}(-1)^{k+n+1}. \qquad T''_{kn}+\omega_{kn}^2 T_{kn}(t)=\gamma_{kn}.$$

7) $T_{kn}(t)=C_{kn}\cos\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\cdot\sin\omega_{kn}t+\dfrac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}; \quad C_{k,n},\tilde{C}_{k,n}=const.$

$$v_k(x,t)=\sum_n T_{kn}(t)\cdot X_n(x)=$$

$$=\sum_n\left\{C_{kn}\cdot\cos\omega_{kn}t+\tilde{C}_{kn}\cdot\sin\omega_{kn}t+\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}\right\}X_n(x).$$

8) $\dfrac{\partial}{\partial t}v_k(x,0)=\sum\limits_n\tilde{C}_{kn}\cdot\omega_{kn}\cdot X_n(x)=0\Rightarrow\tilde{C}_{kn}=0.$

$$v_k(x,0)=\sum_n\left\{C_{kn}+\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}\right\}X_n(x)=-\tilde{A}_k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{kn}+\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}=\left(-\tilde{A}_k,X_n\right)=-\tilde{A}_k\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\cos\mu_n x\,dx=$$

$$=-\tilde{A}_k\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{(-1)^n}{\mu_n}=-A\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{(-1)^n}{\mu_n}=\frac{2A(-1)^{k+n+1}}{\mu_k^2\,\mu_n\sqrt{ls}}\equiv\Gamma_{kn}.$$

9) $u(x,y,t)=\sum\limits_k u_k(x,t)\cdot Y_k(y)=\sum\limits_k\left(v_k(x,t)+\tilde{A}_k\right)\cdot Y_k(y)=$

$$=Ay+\sum_k\left(\sum_n T_{kn}(t)X_n(x)\right)Y_k(y)=$$

$$=Ay+\sum_{k,n=0}^{\infty}\left\{\left(\Gamma_{kn}-\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}\right)\cos\omega_{kn}t+\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}\right\}X_n(x)\cdot Y_k(y)=$$

$$=\left[\Gamma_{kn}-\frac{\gamma_{kn}}{\omega_{kn}^2}=\frac{2A(-1)^{k+n+1}}{\mu_n\sqrt{ls}}\left(\frac{1}{\mu_k^2}+\frac{1}{\mu_n^2+\mu_k^2}\right)=\frac{2Aa^2\mu_n}{\mu_k^2\,\omega_{kn}^2\sqrt{ls}}(-1)^{k+n+1}\right]=$$

$$= A\,y - \frac{4Aa^2}{l\,s}\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_n\,\omega_{kn}^2}\left(\frac{\mu_n^2}{\mu_k^2}\cos\omega_{kn}t+1\right)\cdot\sin\mu_k y\cdot\cos\mu_n x.$$

10) $u'_x(0,y,t)=0,\qquad u(l,y,t)=A\,y \because \cos\mu_n l=0;\qquad u(x,0,t)=0,$

$u'_y(x,s,t)=A\neq 0 \because \left(\sin\mu_k y\right)'_y\Big|_{y=s}=\mu_k\cdot\cos\mu_n s=0$ – на верхнем участке границы при $y=s$ и $0\le x\le l$ условие не выполняется, этот участок не входит в область определения ряда.

$$u(x,y,0)=A\,y-\frac{4A}{l\,s}\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{\mu_n\,(\mu_k^2+\mu_n^2)}\left(\frac{\mu_n^2}{\mu_k^2}+1\right)\cdot\sin\mu_k y\cdot\cos\mu_n x=$$

$$=A\,y-\frac{4A}{l\,s}\frac{4s^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi y}{2s}(2k+1)\cdot\frac{2l}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)=$$

$$=Ay-\frac{32\,A\,s}{\pi^3}\cdot\frac{\pi^2 y}{8s}\cdot\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{(см. Приложение 1, формулы № 8 и 15).}$$

$$u'_t(x,y,0)=0\,.$$

$$\left[u(x,y,t)\right]=W,\quad \left[A\right]=W/L,\quad \left[a\right]=L/T,\quad \left[\mu_{k,n}\right]=1/L,$$

$$\left[\omega_{kn}\right]=1/T,\quad \left[u\right]=\left[A\right]\cdot L+\frac{\left[A\right]}{L^2}\frac{L^2}{T^2}LT^2\Rightarrow\left[A\right]\cdot L\Rightarrow W\,.$$

№ 6.5 (С). Трехмерное неоднородное волновое уравнение с однородными граничными (смешанного типа) и начальными условиями.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=A\,x\,t.\\ u\,\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=u\,\big|_{y=0}=u'_y\big|_{y=s}=\\ =u'_z\,\big|_{z=0}=u\big|_{z=H}=0;\\ u\,\big|_{t=0}=u'_t\,\big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

$u=u(x,y,z,t).$

$0\le x\le l,\quad 0\le y\le s,$

$0\le z\le H,\quad 0\le t<\infty.$

$A,a,l,s,H=const>0.$

1–2) $u(x,y,z,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}T_{knm}(t)\cdot\Phi_{knm}(x,y,z),$

где $\Phi_{knm}(x,y,z)=X_k(x)\cdot Y_n(y)\cdot Z_m(z)$; здесь $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$

и $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0,$ $Y_n(y)=\sqrt{\dfrac{2}{s}}\sin\mu_n y$ и $\mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1)>0,$

$Z_m(z)=\sqrt{\dfrac{2}{H}}\cos\mu_m z$ и $\mu_m=\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)>0.$

$$3)\ \Delta_3 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{k,n,m}\left\{\left(-\mu_k^2-\mu_n^2-\mu_m^2\right)T_{knm}-\frac{1}{a^2}T''_{knm}\right\}\cdot\Phi_{knm}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sum_{k,n,m}\left\{T''_{knm}+\omega_{knm}^2T_{knm}(t)\right\}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=Axt;$$

$$\sum_{k,n,m}\left\{T''_{knm}+\omega_{knm}^2T_{knm}(t)\right\}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=-a^2Axt=$$

$$=\sum_{k,n,m}\Gamma_{knm}(t)\cdot\Phi_{knm}(x,y,z);\qquad \omega_{knm}^2=a^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2\right)>0,$$

$$\Gamma_{knm}(t)=\left(-a^2Axt,\Phi_{knm}\right)=$$

$$=-Aa^2t\sqrt{\frac{8}{lsH}}\cdot\int_0^l\sin\mu_k x\cdot xdx\cdot\int_0^s\sin\mu_n y\cdot dy\cdot\int_0^H\cos\mu_m z\cdot dz=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\,Aa^2t}{\sqrt{lsH}}\cdot\frac{1}{\mu_k}\left(x\cos\mu_k x\Big|_0^l-\int_0^l\sin\mu_k x\cdot dx\right)\cdot\frac{\cos\mu_n y}{-\mu_n}\Bigg|_0^s\cdot\frac{\sin\mu_m z}{\mu_m}\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}Aa^2t}{\mu_k\mu_n\mu_m\sqrt{lsH}}\cdot l(-1)^k(-1)^m=\frac{2Aa^2}{\mu_k\mu_n\mu_m}\sqrt{\frac{2l}{sH}}(-1)^{k+m}t\equiv\gamma_{knm}t,$$

$$\gamma_{knm}=const.\qquad T''_{knm}+\omega_{knm}^2T_{knm}(t)=\Gamma_{knm}(t)\equiv\gamma_{knm}t.$$

$$4)\ T_{knm}(t)=C_{knm}\cos\omega_{knm}t+\tilde{C}_{knm}\cdot\sin\omega_{knm}t+\frac{\gamma_{knm}t}{\omega_{knm}^2};$$

$$C_{knm},\tilde{C}_{knm}=const.$$

$$5)\ u(x,y,z,t)=\sum_{k,n,m}T_{knm}(t)\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=$$

$$=\sum_{k,n,m}\left\{C_{knm}\cos\omega_{knm}t+\tilde{C}_{knm}\cdot\sin\omega_{knm}t+\frac{\gamma_{knm}t}{\omega_{knm}^2}\right\}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z).$$

$$u(x,y,z,0)=\sum_{k,n,m} C_{knm}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=0\Rightarrow C_{knm}=0.$$

$$u'_t(x,y,z,0)=\sum_{k,n,m}\left\{\tilde{C}_{knm}\omega_{knm}+\frac{\gamma_{knm}}{\omega^2_{knm}}\right\}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\tilde{C}_{knm}=-\frac{\gamma_{knm}}{\omega^3_{knm}}\neq 0.$$

6) $$u(x,y,z,t)=\sum_{k,n,m}\frac{\gamma_{knm}}{\omega^3_{knm}}\left(\omega_{knm}t-\sin\omega_{knm}t\right)\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=$$

$$=\frac{8Aa^2}{sH}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega_{knm}t-\sin\omega_{knm}t}{\mu_k\mu_n\mu_m\omega^3_{knm}}\cdot(-1)^{k+m}\cdot\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_n y\cdot\cos\mu_m z,$$

где $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0,\qquad \mu_n=\dfrac{\pi}{2s}(2n+1)>0,\qquad \mu_m=\dfrac{\pi}{2H}(2m+1)>0.$

$\omega^2_{knm}=a^2\left(\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2\right)>0$.

7) $$u(0,y,z,t)=0,\qquad u(l,y,z,t)=0\because\sin\mu_k l=0;$$

$$u(x,0,z,t)=0,\qquad u(x,s,z,t)=0\because\left(\sin\mu_n y\right)'_y\Big|_{y=s}=\mu_n\cos\mu_n s=0;$$

$$u'_z(x,y,0,t)=0,\qquad u(x,y,H,t)=0\because\cos\mu_m H=0;$$

$$u(x,y,z,0)=0,\qquad u'_t(x,y,z,0)=0\because\left(\omega_{knm}t-\sin\omega_{knm}t\right)'_t\Big|_{t=0}=0.$$

$$\left[u(x,y,z,t)\right]=W,\qquad [A]=W/L^3T,\qquad [a]=L/T,\qquad \left[\mu_{k,n,m}\right]=1/L,$$

$$\left[\omega_{knm}\right]=1/T.\qquad [u]=[A]\cdot\frac{1}{L^2}\frac{L^2}{T^2}L^3T^3\Rightarrow[A]\cdot L^3T\Rightarrow W.$$

<u>Тема 7.</u>

Многомерные стационарные задачи

Решение стационарных краевых задач для уравнений эллиптического типа в многомерных областях.

Литература: [1] – гл. 7, §1 (1, 2). [2] – гл. 24, §3. [5] – гл. 8, §3 № 77.
Задания: [7] – № 175А, 181, 188, 194. [8] – гл. 7, № 22 (а, б), 24 (а, б).

№ 7.1 (С). Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа внутри прямоугольного параллелепипеда.

$$\begin{cases} \Delta_3 u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \\ u(0,y,z) = u(l,y,z) = 0, \\ u(x,0,z) = Axz, \quad u'_z(x,s,z) = 0, \\ u'_z(x,y,0) = u(x,y,H) = 0. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u = u(x,y,z). \\ 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le s, \\ 0 \le z \le H. \\ A, l, s, H = const > 0. \end{array}$$

1–2) $u(x,y,z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_{kn}(y)\cdot\Phi_{kn}(x,z)$,

где $\Phi_{kn}(x,z) = X_k(x)\cdot Z_n(z)$ при $X_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$ и $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l} > 0$,

$Z_n(z) = \sqrt{\dfrac{2}{H}}\cos\mu_n z$ и $\mu_n = \dfrac{\pi}{2H}(2n+1) > 0$.

3). $\Delta_3\, u = \sum\limits_{k,n}\left\{-\mu_k^2 Y_{kn} + Y''_{kn} - \mu_n^2 Y_{kn}\right\}\Phi_{kn}(x,z) =$

$$= \sum_{k,n}\left\{Y''_{kn} - p_{kn}^2 Y_{kn}(y)\right\}\Phi_{kn}(x,z) = 0 \Rightarrow Y''_{kn} - p_{kn}^2 Y_{kn}(y) = 0,$$

где $p_{kn}^2 = \mu_k^2 + \mu_k^2 > 0$.

4) $Y_{kn}(y) = C_{kn} sh\, p_{kn} y + \tilde{C}_{kn} ch\, p_{kn}(s-y); \quad C_{kn}, \tilde{C}_{kn} = const.$

5) $$u(x,y,z) = \sum_{k,n}^{\infty} Y_{kn}(y) \cdot \Phi_{kn}(x,z) =$$

$$= \sum_{k,n} \left\{ C_{kn} sh\, p_{kn} y + \tilde{C}_{kn}\ chp_{kn}(s-y) \right\} \cdot \Phi_{kn}(x,z).$$

$$u'_y(x,s,z) = \sum_{k,n} \left\{ C_{kn} p_{kn}\ ch\, p_{kn} s - 0 \right\} \cdot \Phi_{kn}(x,z) = 0 \Rightarrow C_{kn} = 0;$$

$$u(x,0,z) = \sum_{k,n} \left\{ 0 + \tilde{C}_{kn} ch\, p_{kn} s \right\} \cdot \Phi_{kn}(x,z) = A x z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_{kn} ch\, p_{kn} s = \left(A x z, \Phi_{kn} \right) = \frac{2A}{\sqrt{lH}} \int_0^l \sin \mu_k x \cdot x\, dx \cdot \int_0^H \cos \mu_n z \cdot z\, dz =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{lH}} \cdot \frac{-1}{\mu_k} \left(x \cos \mu_k x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \mu_k x \cdot dx \right) \frac{1}{\mu_n} \left(z \sin \mu_n z \Big|_0^H - \int_0^H \sin \mu_n z \cdot dz \right) =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{lH}} \cdot \frac{-l}{\mu_k} (-1)^k \cdot \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\mu_n} - \frac{\cos \mu_n z}{-\mu_n} \Bigg|_0^H \right) =$$

$$= 2A \sqrt{\frac{l}{H}} \cdot \frac{(-1)^k}{\mu_k \mu_n} \left(\frac{1}{\mu_n} - H(-1)^n \right) \equiv \gamma_{kn}$$

6) $$u(x,y,z) = \sum_{k,n} \gamma_{kn} \frac{ch\, p_{kn}(s-y)}{ch\, p_{kn} s} \cdot \Phi_{kn}(x,z) =$$

$$= \frac{4A}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu_k \mu_n} \left(\frac{1}{\mu_n} - H(-1)^n \right) \frac{ch\, p_{kn}(s-y)}{ch\, p_{kn}\, s} \cdot \sin \mu_k x \cdot \cos \mu_n z,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l}, \quad \mu_n = \dfrac{\pi}{2H}(2n+1), \quad p_{kn}^2 = \mu_k^2 + \mu_k^2 > 0.$

7) $u(0,y,z) = 0, \quad u(l,y,z) = 0 \because \sin \mu_k l = 0;$

$$u'_y(x,s,z) = 0 \because \left(ch\, p_{kn}(s-y) \right)'_y \Big|_{y=s} = 0;$$

$$u'_z(x,y,0) = 0, \quad u(x,y,H) = 0 \because \cos \mu_n H = 0;$$

$$u(x,0,z) =$$

$$= \frac{8AlH}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) \cos \frac{\pi z}{2H}(2n+1) =$$

$$=\frac{8AlH}{\pi^2}\cdot\frac{-\pi x}{2l}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{z}{H}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=Axz$$

(см. Приложение 1, формулы № 3, 14 и 8).

$$\left[u(x,y,z)\right]=Q,\ \left[A\right]=Q/L^2,\ \left[\mu_{k,n}\right]=\left[p_{kn}\right]=1/L,\ \left[u\right]=\left[A\right]\cdot\frac{1}{L}L^2L\Rightarrow Q.$$

№ 7.2 (С). Смешанная краевая задача для уравнения Пуассона внутри прямоугольного параллелепипеда с однородными граничными условиями.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=A\,x\,y\,z.\\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=u\big|_{y=0}=u'_y\big|_{y=s}=u'_z\big|_{z=0}=u\big|_{z=H}=0.\end{cases}\qquad \begin{gathered}u=u(x,y,z).\\ 0\le x\le l,\quad 0\le y\le s,\\ 0\le z\le H.\end{gathered}$$

1–2) $u(x,y,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_{knm}\Phi_{knm}(x,y,z),$

где $\Phi_{knm}(x,y,z)=X_k(x)\cdot Y_n(y)\cdot Z_m(z).$

Здесь $X_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\mu_k x$ и $\mu_k=\dfrac{\pi k}{l}>0,$

$$Y_n(y)=\sqrt{\frac{2}{s}}\sin\mu_n y\quad\text{и}\quad \mu_n=\frac{\pi}{2s}(2n+1)>0,$$

$$Z_m(z)=\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\mu_m z\quad\text{и}\quad \mu_m=\frac{\pi}{2H}(2m+1)>0.$$

3) $\Delta_3 u=\sum\limits_{k,n,m}\left(-\mu_k^2-\mu_n^2-\mu_m^2\right)C_{knm}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=$

$$=-\sum_{k,n,m}p_{knm}^2C_{knm}\cdot\Phi_{knm}(x,y,z)=A\,x\,y\,z,\ \text{где}\ p_{knm}^2=\mu_k^2+\mu_n^2+\mu_m^2>0,$$

$$-p_{knm}^2C_{knm}=\left(Axyz,\Phi_{knm}\right)=$$

$$=\frac{2A\sqrt{2}}{\sqrt{lsH}}\cdot\int_0^l\sin\mu_k x\cdot x\,dx\cdot\int_0^s\sin\mu_n y\cdot y\,dy\cdot\int_0^H\cos\mu_m z\cdot z\,dz=$$

$$= \frac{2A\sqrt{2}}{\sqrt{l\,s\,H}} \frac{1}{\mu_k \mu_n \mu_m} \left(x \cos \mu_k\, x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \mu_k x \, d\, x \right) \cdot$$

$$\cdot \left(y \cos \mu_n\, y \Big|_0^s - \int_0^s \cos \mu_n y \, d\, y \right) \left(z \sin \mu_m\, z \Big|_0^H - \int_0^H \sin \mu_m z \, d\, z \right) =$$

$$= \frac{2A\sqrt{2}}{\sqrt{l\,s\,H}\; \mu_k \mu_n \mu_m} \frac{\sin \mu_k\, x}{-\mu_k} \Bigg|_0^l \cdot s\left(-1\right)^n \cdot \left(H\left(-1\right)^m - \frac{\cos \mu_m z}{-\mu_m} \Bigg|_0^H \right) =$$

$$= 2A\sqrt{\frac{2s}{l\,H}}\; \frac{\left(-1\right)^{k+n+1}}{\mu_k^2 \mu_n \mu_m^2} \left(\left(-1\right)^m \mu_m H - 1 \right).$$

$$C_{k\,n\,m} = 2A\sqrt{\frac{2s}{l\,H}} \cdot \frac{\left(-1\right)^{k+n+1} \left(\left(-1\right)^m \mu_m H - 1 \right)}{\mu_k^2 \mu_n \mu_m^2 p_{knm}^2} = O\left(\frac{1}{k^4 n^3 m^3} \right) \text{ при } k, n, m \to \infty.$$

4) $$u\left(x, y, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k\,n\,m}\, \Phi_{k\,n\,m}\left(x, y, z\right) =$$

$$= \frac{8A}{l\,H} \sum_{k,n,m} \frac{\left(-1\right)^{k+n} \cdot \left(\left(-1\right)^m \mu_m H - 1 \right)}{\mu_k^2 \mu_n \mu_m^2 p_{knm}^2} \cdot \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_n y \cdot \cos \mu_m z,$$

где $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l}, \quad \mu_n = \dfrac{\pi}{2s}(2n+1), \quad \mu_m = \dfrac{\pi}{2H}\left(2m+1\right),$

$p_{k\,n\,m}^2 = \mu_k^2 + \mu_n^2 + \mu_m^2 > 0$ при $k \in \mathrm{N}$ и $n, m \in \mathrm{Z}_0$.

5) $u\left(0, y, z\right) = 0, \quad u\left(l, y, z\right) = 0 \because \left(\sin \mu_k x\right)\Big|_{x=l} = 0;$

$$u\left(x, 0, z\right) = 0, \quad u'_y\left(x, s, z\right) = 0 \because \cos \mu_n s = 0;$$

$$u'_z\left(x, y, 0\right) = 0 \because \left(\cos \mu_m z\right)'_z \Big|_{z=0} = 0; \quad u\left(x, y, H\right) = 0 \because \cos \mu_m H = 0.$$

$[u(M)] = Q,\ \left[A\right] = Q / L^5,\ \left[\mu_{k,n,m}\right] = \left[p_{k\,n\,m}\right] = 1/L,\ \left[u\right] = \left[A\right] \cdot \dfrac{1}{L^2} L^7 \Rightarrow Q.$

Приложение 1
Справочные математические материалы

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right),\qquad 0<x\le l.$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{\pi k x}{l}=-\ln\left|2\sin\frac{\pi x}{2l}\right|,\qquad 0<x\le l.$$

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi x}{2l},\qquad 0\le x<l.$$

4. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos\frac{\pi k x}{l}=\ln\left|2\cos\frac{\pi x}{2l}\right|,\qquad 0\le x<l.$$

5. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi}{4},\qquad 0<x\le l.$$

6. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cos\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{1}{2}\ln\left|ctg\frac{\pi x}{2l}\right|,\qquad 0<x<l.$$

7. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\pi x}{2l}\right|,\qquad 0<x<l.$$

8. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\cos\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi}{4},\qquad 0\le x<l.$$

9. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx=-\int_0^x\ln\left|2\sin\frac{\xi}{2}\right|d\xi,\qquad 0<x<2\pi.$$

10. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi^2}{12l^2}\left(2l^2-6lx+3x^2\right),\qquad 0\le x\le l.$$

11. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\sin kx=\int_0^x\ln\left|2\cos\frac{\xi}{2}\right|d\xi,\qquad |x|<\pi.$$

12. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi^2}{12l^2}\left(l^2-3x^2\right),\qquad 0\le x\le l.$$

13. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=-\frac{1}{2}\int_0^x\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi,\qquad 0<x<\pi.$$

14. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^2}{8l}(l-x), \qquad 0\le x\le l.$$

15. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^2 x}{8l}, \qquad 0\le x\le l.$$

16. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos x(2k+1)=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \qquad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

17. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi^3 x}{12l^3}(l-x)(2l-x), \qquad 0\le x\le l.$$

18. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\cos k x=\zeta(3)+\int_0^x dx\int_0^x\ln\left|2\sin\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \qquad 0<x<2\pi.$$

19. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\sin\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi^3 x}{12l^3}\left(l^2-x^2\right), \qquad 0\le x\le l.$$

20. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\cos k x=\frac{3}{4}\cdot\zeta(3)-\int_0^x d x\int_0^x\ln\left|\,2\cos\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \qquad |x|<\pi.$$

21. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^3 x}{32l^2}(2l-x), \qquad 0\le x\le l.$$

22. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos x(2k+1)=\frac{7}{8}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{2}\int_0^x dx\int_0^x\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \quad 0<x<\pi.$$

23. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3}\sin x(2k+1)=\frac{7}{8}\zeta(3)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}dx\int_0^x\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

24. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3}\cos\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^4}{32l^2}\left(l^2-x^2\right), \qquad 0\le x\le l.$$

25. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin k x=x\cdot\zeta(3)+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2\ln\left|2\sin\frac{\xi}{2}\right|d\xi, \qquad 0<x<2\pi.$$

26. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\cos\frac{\pi k x}{l}=\frac{\pi^4}{36l^4}\left[\frac{2}{5}l^4-\frac{3}{4}x^2\left(x^2+4l(l-x)\right)\right], \quad 0\le x\le l.$$

27. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^4}\sin kx=\frac{3}{4}x\zeta(3)-\frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2\ln\left|2\cos\frac{\xi}{2}\right|d\xi,\quad |x|<\pi.$$

28. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^4}\cos\frac{\pi kx}{l}=\frac{1}{45}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\left(7l^4-15x^2\left(2l^2-x^2\right)\right),\quad 0\le x\le l.$$

29. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{7}{8}x\cdot\varsigma(3)+\frac{1}{4}\int_0^x (x-\xi)^2\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi,$$

$0<x<\pi.$

30. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\cos\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^4}{32\cdot 3l^3}(l-x)\left(l^2+lx-\frac{1}{2}x^2\right),$$

$0\le x\le l.$

31. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}\sin\frac{\pi x(2k+1)}{2l}=\frac{\pi^4 x}{64l^3}\left(l^2-\frac{1}{3}x^2\right),\ 0\le x\le l.$$

32. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}\cos x(2k+1)=\zeta(4)+\frac{7}{8}x\zeta(3)+\frac{1}{2}\int_0^x dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}dx\int_0^x\ln\left|tg\frac{\xi}{2}\right|d\xi,$$

$|x|<\dfrac{\pi}{2}.$

Для упрощения общих членов рядов Фурье удобно использовать формулы приведения тригонометрических функций

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2k+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(-1)^k\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2k+1)x;$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}k(\pi+x)=(-1)^k\cdot\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}kx;$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2k+1)(\pi+x)=-\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2k+1)x;\qquad k\in Z.$$

При суммировании рядов использовалась также ζ-функция (дзета-функция) Римана от целочисленного аргумента

$$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}=\frac{1}{1-2^{1-n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^n}=\frac{1}{1-2^{-n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^n},$$ этот ряд

сходится абсолютно при всех $n=2,3,4,5,...$. При $n=1$ существует только неабсолютно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 = 0,693147181\ldots$.

Приведем еще несколько численных значений дзета-функции

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668\ldots, \qquad \zeta(3) = 1,2020569032\ldots,$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,0823232337\ldots, \quad \zeta(5) = 1,0369277551\ldots, \quad \zeta(\infty) = 1.$$

Для упрощения многократного интеграла от раскладываемой функции использовалась формула Коши

$$\int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x f(x)\,(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{n-1}\, d\xi \qquad \text{при} \;\; n \in \mathrm{N}.$$

Приложение 2
Свойства дельта-функции

Такого типа функции называются обобщенными; они вводятся для расширения множества непрерывных дифференцируемых функций такими разрывными функциями, производные от которых могут быть найдены какими-либо искусственными методами.

$$\eta(x) = \frac{1}{2}(1 + sign\, x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} 1 & \forall\; x \ge 0 \\ 0 & \forall\; x < 0 \end{cases} \text{ - функция Хевисайда.}$$

$$\frac{d}{dx}\eta(x - x_0) = \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \forall\; x \ne x_0 \\ \infty & \forall\; x = x_0 \end{cases} \text{ или } \eta'(x) = \delta(x) = \begin{cases} 0 & \forall\; x \ne 0 \\ \infty & \forall\; x = 0 \end{cases}.$$

Если $f(x)$ – функция, непрерывная при всех $x \in R$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0);$$

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \forall\; x_0 \in (a,b) \\ 0 & \forall\; x_0 \,\overline{\in}\, [a,b] \end{cases}; \quad \int_0^b f(x)\,\delta(x)\, dx = \frac{1}{2} f(0).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(xt + \alpha)\cdot cos(yt + \beta)\, dt = \pi \cdot \delta(x - y).$$

Откуда $f(x)\,\delta(x-x_0)=f(x_0)\,\delta(x-x_0)$ или $f(x)\,\delta(x)=f(0)\,\delta(x)$, $x\,\delta(x)=0\cdot\delta(x)=0,\ 0\cdot\delta(0)=0$ и т. п.

Методом многократного интегрирования по частям вычисляются интегралы от производных δ-функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta^{(n)}(x-x_0)\,dx=(-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad \text{при } n=1,2,3,\ldots .$$

Таким же образом получим $x^{n+1}\cdot\delta^{(n)}(x)=0$ и $x\cdot\delta^{(n)}(x)+n\cdot\delta^{(n-1)}(x)=0,$ в частности $x^2\cdot\delta'(x)=0$, $x\cdot\delta'(x)=-\delta(x)$ и т. п.

Многомерная δ-функция от $M(x,y,z)$ и $M'(\xi,\eta,\zeta)$ выражается через произведение одномерных

$$\delta(M,M')=\delta(x-\xi)\cdot\delta(y-\eta)\cdot\delta(z-\zeta).$$

Здесь $0\cdot\delta(y-\eta)\cdot\delta(z-\zeta)=0$ и т. п.

Если непрерывная функция $\varphi(x)$ имеет при $x=x_k$ простые нули $\varphi(x_k)=0$ и $\varphi'(x_k)\neq 0$, то $\delta(\varphi(x))=\sum\limits_k \dfrac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(\varphi(x))dx=\sum\limits_k \dfrac{f(x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$; откуда $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$ при $a\neq 0$ и $\delta((x-a)(x-b))=(\delta(x-a)+\delta(x-b))/|a-b|$ при $a\neq b$, $\delta(-x)=\delta(x)$ – четность и др.

Если функция $f(x)$ имеет при $x=x_k$ точки разрыва первого рода (конечные скачки), то производная

$$f'_{\text{обобщен.}}(x)=f'_{\text{классич.}}(x)+\sum_k\big(f(x_k+0)-f(x_k-0)\big)\,\delta(x-x_k).$$

Дельта функция допускает разложения в обобщенные ряды Фурье; например, при $0\le x\le 2\pi$ получим

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\cdot\sin kx_0; \qquad \frac{\pi}{2}\delta(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx.$$

Задания для самостоятельной работы

Требуется решить задачи для трех основных уравнений математической физики в декартовой системе координат методом разделения переменных.

В каждом из приведенных ниже трех примеров студенты, фамилии которых стоят в списке группы под номерами № 1–8, решают заданные уравнения с условиями, конкретные значения правых частей которых указаны под номерами № 1–8, соответственно. При этом значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в граничных условиях задач выбираются из группы А. Другие студенты, фамилии которых стоят в списке под номерами № 9–16, № 17–24, № 25–32, решают каждое уравнение снова с условиями № 1–8, но выбирают значения параметров в граничных условиях уже из групп Б, В и Г, соответственно.

Например, студент, фамилия которого стоит в списке группы под номером № 13, решают все три задачи с условиями № 5, а значения параметров в граничных условиях каждой задачи выбирает из группы Б.

В условиях всех задач постоянные $A, B = const > 0$ и $\kappa = const \geq 0$; все параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ могут принимать только значения, равные нулю или единице. В каждом пункте с номерами № 1–8 заданы конкретные значения всех неоднородных правых частей уравнений и условий задач.

Все неуказанные в пункте значения условий считаются равными нулю.

В конце решения каждой задачи следует сделать проверку полученного результата по условию задачи и по размерностям.

Пример 1. Решение одномерного волнового уравнения на отрезке.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t); \qquad u = u(x,t); \\ \alpha_1 \cdot u'_x\,(0,t) + \alpha_2 \cdot u(0,t) = \varphi(t); \qquad 0 \leq x \leq l; \\ \beta_1 \cdot u'_x\,(l,t) + \beta_2 \cdot u(l,t) = \psi(t); \qquad 0 \leq t < \infty. \\ u(x,0) = f(x), \qquad u'_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. $F(x,t)=Ax$, $\varphi(t)=Bt$.
№ 2. $F(x,t)=Ax$, $\psi(t)=Bt$.
№ 3. $F(x,t)=At$, $\varphi(t)=B$.
№ 4. $F(x,t)=At$, $\psi(t)=B$.
№ 5. $\varphi(t)=At$, $f(x)=Bx$.
№ 6. $\psi(t)=At$, $f(x)=Bx$.
№ 7. $\varphi(t)=At$, $g(x)=Bx$.
№ 8. $\psi(t)=At$, $g(x)=Bx$.

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_1=\beta_1=0,\quad \alpha_2=\beta_2=1.$
Б. № 9–16. $\alpha_1=\beta_2=0,\quad \alpha_2=\beta_1=1.$
В. № 17–24. $\alpha_2=\beta_1=0,\quad \alpha_1=\beta_2=1.$
Г. № 25–32. $\alpha_2=\beta_2=0,\quad \alpha_1=\beta_1=1.$

Пример 2. Решение уравнения теплопроводности в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(x,y,t); \\ \alpha_1\cdot u'_x\,(0,y,t)+\alpha_2\cdot u(0,y,t)=\varphi_1(y,t); \\ \beta_1\cdot u'_x\,(l,y,t)+\beta_2\cdot u(l,y,t)=\varphi_2(y,t); \\ \gamma_1\cdot u'_y(x,0,t)+\gamma_2\cdot u(x,0,t)=\psi_1(x,t); \\ \delta_1\cdot u'_y(x,s,t)+\delta_2\cdot u(x,s,t)=\psi_2(x,t); \\ u(x,y,0)=f(x,y); \\ u=u(x,y,t);\quad 0\le x\le l;\quad 0\le y\le s;\quad 0\le t<\infty; \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. $\varphi_1(y,t)=At$.
№ 2. $\varphi_1(y,t)=Ay$.
№ 3. $\varphi_2(y,t)=At$.
№ 4. $\varphi_2(y,t)=Ay$.
№ 5. $\psi_1(t)=At$.
№ 6. $\psi_1(t)=Ax$.
№ 7. $\psi_2(t)=At$.
№ 8. $\psi_2(t)=Ax$.

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

Б. № 9–16. $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

В. № 17–24. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_2 = 1.$

Г. № 25–32. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_2 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_1 = 1.$

Пример 3. Решение уравнения Гельмгольца в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \kappa^2 u(x,y) = F(x,y); \\ \alpha_1 \cdot u'_x\ (0,y) + \alpha_2 \cdot u(0,y) = \varphi_1(y); \\ \beta_1 \cdot u'_x\ (l,y) + \beta_2 \cdot u(l,y) = \varphi_2(y); \\ \gamma_1 \cdot u'_y(x,0) + \gamma_2 \cdot u(x,0) = \psi_1(x); \\ \delta_1 \cdot u'_y(x,s) + \delta_2 \cdot u(x,s) = \psi_2(x). \\ u = u(x,y); \quad 0 \le x \le l; \quad 0 \le y \le s. \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. *F(x,y)=Ax,* $\varphi_1(y) = By.$

№ 2. *F(x,y)=Ax,* $\varphi_2(y) = By.$

№ 3. *F(x,y)=Axy,* $\varphi_1(y) = B.$

№ 4. *F(x,y)=Axy,* $\varphi_2(y) = B.$

№ 5. *F(x,y)=Ay,* $\psi_1(x) = Bx.$

№ 6. *F(x,y)=Ay,* $\psi_2(x) = Bx..$

№ 7. *F(x,y)=Axy,* $\psi_1(x) = B.$

№ 8. *F(x,y)=Axy,* $\psi_2(x) = B.$

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

Б. № 9–16. $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

В. № 17–24. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_2 = 1.$

Г. № 25–32. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_2 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_1 = 1.$

Основная литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Изд. 5, стер. – М.: Наука, 1977. – 734 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. изд. 21, стер. – М.: Наука, 1974. – 655 с.
4. Левин В. И., Гросберг Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 576 с.
5. Крукович Г. И. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – Изд. 3, перераб. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.
6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – Изд. 3, перераб. и доп. – М.: Наука, 1984. – 383 с.
7. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. – Изд. 3, доп. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
8. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – Изд. 3. – М.: Наука, 1980. – 686 с.

Навчальне видання

Кондратьєв Борис Вікторович
Лесік Ніна Іванівна

ПРАКТИКУМ

з розв’язку задач математичної фізики

Методичний посібник

(Рос. мовою)

Комп’ютерне верстання *В. В. Савінкова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х80/16. Ум. друк. арк. 12,16. Тираж 100 пр. Зам. № 126/11.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна.
61077, Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел.: 705-24-32