

Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М. Ліфшиця

“Допущено до захисту”

Оцінка “_____”

В. о. зав. кафедри теоретичної
фізики імені академіка І.М.
Ліфшиця

Голова ДЕК _____

доц. Рашба Г. І. _____

“_____” червня 2024 р.

“_____” червня 2024 р.

Донченко Олександр Євгенійович
Рух пробних частинок на околиці чорної діри

Дипломна робота на здобуття
освітньо-кваліфікаційного рівня
“Бакалавр”

Науковий керівник —
кандидат фіз.-мат. наук,
проф. Заславський О.Б.

Рецензент —
доктор фіз.-мат. наук,
проф. . . . В.О.

Харків 2024

АНОТАЦІЯ

Донченко О.Є. Рух пробних частинок на околиці чорної діри. - Рукопис. Дипломна робота на здобуття освітньо - кваліфікаційного рівня "Бакалавр" за спеціальністю 104- "фізика та астрономія". -Харків, 2024 -84 с. Іл. 11

Для переходу від ньютонівських моделей до моделей, що використовують ЗТВ минулого розглянуті задачі двох тіл, на прикладі частинки, що потрапила на орбіту шварцшильдської чорної дірки, також оптичної задачі, у якій фотон розсіюється в умовах неоднорідної гравітації.

Виконаний аналіз розв'язку Шварцшильда й знайдені його наслідки, використувані при розв'язку астрометричних і релятивістських кінематичних задач.

Використовуючи, як основу для побудови моделі частинок, що рухаються, близько стаціонарної чорної діри, аналітичний розв'язок рівняння Ейнштейна зі сферично симетричною метрикою простору-часу, а саме метрику Шварцшильда, були складені й вирішені рівняння Гамільтону-Якобі й рівняння ейконалу в гравітаційному полі.

Визначена тривалість часу сигналу близько зовнішньої границі горизонту подій з погляду локального спостерігача й з погляду зовнішнього спостерігача.

Представлені рівняння геодезичних кривих і їх розв'язку, включаючи нерелятивістське наближення.

Визначені перерізи гравітаційного захоплення для світлових променів і частинок.

Доведені твердження щодо властивостей геодезичних.

Розв'язані набори задач з релятивістської теорії гравітації.

Докладно розкриті наслідки розв'язків Шварцшильда.

Ключові слова: ЧОРНА ДІРА, ЧАСТИНКА, ФОТОН, РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНУ-ЯКОБІ, РІВНЯННЯ ЕЙКОНАЛУ, АДАБАТИЧНИЙ ІНВАРІАНТ, ПРИЦІЛЬНИЙ ПАРАМЕТР, ЕКСЦЕНТРИСИТЕТ, ФОКАЛЬНИЙ ПАРАМЕТР, СВІТЛОПОДІБНА ГЕОДЕЗИЧНА, ЧАСОПОДІБНА ГЕОДЕЗИЧНА, ОБМЕЖЕНА ОРБІТА, ЕКВАТОРІАЛЬНА ПЛОЩИНА, ЧАСТОТА, КУТОВИЙ МОМЕНТ

ABSTRACT

To move from Newtonian models to models using RG, we consider two-body problems, for example, a particle trapped in the orbit of a Schwarzschild black hole and an optical problem in which a photon is scattered in inhomogeneous gravity.

The Schwarzschild solution is analyzed and its consequences used in solving astrometric and relativistic kinematic problems are found.

Using the analytical solution of Einstein's equation with a spherically symmetric spacetime metric, namely the Schwarzschild metric, as a basis for constructing a model of particles moving near a stationary black hole, the Hamilton-Jacobi equation and the eikonal equation in the gravitational field were formulated and solved.

The duration of the signal time near the outer boundary of the event horizon is determined from the point of view of a local observer and from the point of view of an external observer.

The equations of geodesic curves and their solutions, including the non-relativistic approximation, are presented.

The cross sections of gravitational capture for light rays and particles are determined.

The statements about the properties of geodesic curves are proved.

The sets of problems on the relativistic theory of gravity are solved. The consequences of the Schwarzschild solutions are discussed in detail.

key words: BLACK HOLE, PARTICLE, PHOTON, HAMILTONIAN-JACOBI EQUATION, EIKONAL EQUATION, ADIABATIC INVARIANT, SIGHTING PARAMETER, ECCENTRICITY, FOCAL PARAMETER, LIGHT-LIKE GEODESIC, TIME-LIKE GEODESIC, BOUNDED ORBIT, EQUATORIAL PLANE, FREQUENCY, ANGULAR MOMENTUM

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 РОЗДІЛ. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	7
1.1 Поле Шварцшильда	7
1.2 Класичні підходи	7
1.3 Сучасні дослідження	9
1.4 Розширені теми	10
1.5 Формулювання завдання дослідження	11
2 РОЗДІЛ. МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МОДЕЛЬ	14
2.1 Аналіз ключових елементів теорії Фазового простору зі шварцшильдської метрикою.	14
2.1.1 Метрика Шварцшильда	14
2.2 Заміна координатних систем як основа для створення моделі з усунутою особливістю	18
2.2.1 Координати Леметра	18
2.2.2 Координати Еддингтона — Фінкельштейна	20
2.2.3 Координати Крускала-Секереса-Новікова	23
2.3 Створення моделі руху частинки за допомогою рівняння Гамільтону-Якобі	30
2.4 Створення моделі руху світлового проміння в околиці чорної діри за допомогою рівняння Ейконалу	32
3 РОЗДІЛ. АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ	36
3.1 Тривалість світового часу наближення частинки до границі сфери Шварцшильда	36
3.2 Власний час частинки біля межі горизонту подій	36
3.3 Світовий час проміння на сфері Шварцшильда	37
3.4 Власний час сигналу спалаху близько границі сфери Шварцшильда	38
3.5 Орбіти частинки на Екваторіальній площині	38
3.5.1 Прицільна відстань частинки	38
3.5.2 Кругові орбіти та визначення їх радіусів	40
3.5.3 Екстремальні значення для радіусів стійких і нестійких орбіт	42
3.5.4 Енергія мінімальної кругової орбіти	42
3.5.5 Диференціальний переріз гравітаційного захоплення	43
3.6 Нерелятивістське наближення руху у гравітаційному полі	44
3.6.1 Прицільна відстань до орбіти фотона	48
3.6.2 Радіус періастрів світлових променів	49
3.6.3 Локальна частота фотона поблизу горизонту подій	50
3.6.4 Побудова графіку функції $\rho(r)$	51
4 ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ШЛЯХОМ РОЗВ'ЯЗКУ ТЕСТОВИХ ЗАДАЧ	53
4.1 Тестування інваріантності кутового моменту відносно перетворення координат на сфері S^2	53
4.2 Докази обмеженості орбіт стійкою екваторіальною площиною	55
4.3 Дослідження локальної швидкості радіальної частинки біля горизонту подій	57

	5
4.4 Дослідження радіального руху частинки	58
4.4.1 Побудова ключового рівняння часоподібної геодезичної .	61
4.5 Визначення рівняння руху проміння та умов його гравітаційного відбиття	63
4.6 Дослідження граничних ефектів руху частинок в гравітаційному полі шляхом доведення тверджень щодо властивостей часоподібних геодезичних	65
4.7 Дослідження граничних ефектів руху світлових променів в гравітаційному полі шляхом доведення тверджень щодо властивостей світлоподібних геодезичних	70
5 ВИСНОВКИ	80
6 ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	84

Розвиток фундаментальної науки накладає особливі вимоги до вчених, що працюють в області астрономії. Це обумовлене тим що, подальший розвиток астрономії нерозривно пов'язане з поліпшенням точності астрономічних спостережень. На жаль, підвищення точності спостережень обмежене сучасним рівнем розвитку вимірювальної техніки. Однак, крім інструментальних принципів спостережень, для досягнення високої астрометричної точності можливо застосувати новий підхід, пов'язаний з моделюванням, який повинен використовувати Загальну Теорію Відносності.

Зокрема, вплив кривизни простору-часу, наприклад від Сонця, а так само інших мас Сонячної системи вносить викривлення в результати інструментальних спостережень. Фактично, зміна гравітаційного поля, обумовлене відносним рухом тіл Сонячної системи і їх приливні взаємодії створюють кілька ефектів відхилення світла, тим самим вносячи помилку у визначення паралаксів і власних рухів. Отже, у процесі виміру слід урахувувати нелінійну затримку сигналів, обумовлену рухом по світлоподібній геодезичній кривій.

Якщо припустити можливість вимірів в умовах нерухомої системи відліку, то найбільше вплив буде вноситися найближчим об'єктом значної маси, планетою або зіркою: уже в першому постньютонівському наближенні їх вплив у кілька тисяч раз сильніше чому від усіх інших внутрішньосистемних об'єктів. Ця обставина дозволяє при моделюванні обмежитися тільки масивними об'єктами, у нульовому наближенні вважаючи їх масовими монополями.

Наслідком прийнятих припущень є відмова від ньютонівських прямих і перехід на набір теоретичних інструментів, наданий Загальною Теорією Відносності (ЗТВ), зокрема, через розв'язок світлоподібних геодезичних кривих, що зв'язують зірки зі спостерігачами. Даний набір інструментів був покладений в основу релятивістської астрометрії, яка пропонує нові тести релятивістської теорії гравітації й сучасні космологічні моделі.

1. РОЗДІЛ. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Поле Шварцшильда

Дослідження руху частинок в гравітаційному полі Шварцшильда займає центральне місце у сучасній теоретичній фізиці та астрофізиці.

Це поле є рішенням рівнянь Ейнштейна для випадку сферично симетричного масивного тіла без заряду й обертання, що дозволяє детально вивчати різні аспекти гравітації та її вплив на рух частинок [1, 2, 3].

У цьому огляді ми розглянемо основні підходи та результати вивчення динаміки частинок у гравітаційному полі Шварцшильда, звернувши увагу на як класичні, так і сучасні дослідження.

Міснер, Торн і Вілер у своїй роботі "Гравітація" [1] розглядають фундаментальні концепції та математичні моделі гравітації в рамках загальної теорії відносності.

Шутц у своєму підручнику "Перший курс загальної теорії відносності" [2] пропонує доступне введення в основні поняття та математику загальної теорії відносності.

Роберт Уолд у своїй книзі "Загальна теорія відносності" [3] пропонує глибокий огляд структури простору-часу та гравітаційних полів.

1.2. Класичні підходи

1. **Основи метрики Шварцшильда.** Рішення Шварцшильда є фундаментальним у загальній теорії відносності (ЗТВ) і описує просторово-часову кривину, створену масивним об'єктом. Ця метрика була вперше отримана Карлом Шварцшильдом у 1916 році й з того часу стала базовим інструментом для вивчення чорних дір та гравітаційних полів [4, 5]. Важливі аспекти цього рішення висвітлені у класичних роботах, таких як "Gravitation" Misner, Thorne і Wheeler [1] та "General Relativity" Wald [3].

Керролл у своїй книзі "Просторочас і геометрія: вступ до загальної теорії відносності" [4] розглядає геометричні аспекти простору-часу та їх зв'язок з гравітацією.

Хартл у своїй роботі "Гравітація: Вступ до загальної теорії відносності Ейнштейна" [5] надає введення в основні концепції гравітації та їх

експериментальне підтвердження.

2. Геодезичні рівняння. Рух частинок у полі Шварцшильда описується геодезичними рівняннями, які визначають траєкторії частинок у викривленому просторі-часі. Ці рівняння є розв'язками рівнянь Ейнштейна для даної метрики й описують як орбіти планет, так і траєкторії світла поблизу чорних дір [6, 7, 8]. Більшість фундаментальних робіт, таких як "The Mathematical Theory of Black Holes" Chandrasekhar [6] та "Spacetime and Geometry" Carroll [4], надають детальні роз'яснення цих рівнянь.

У своїй книзі "Математична теорія чорних дір" [6] Чандрасекар розглядає математичні аспекти та моделі чорних дір.

Оханіан та Руффіні у своїй книзі "Гравітація та просторочас" [7] розглядають взаємодію між гравітацією та структурою простору-часу.

Штрауманн у своїй книзі "Загальна теорія відносності" [8] пропонує докладний огляд різних аспектів та застосувань загальної теорії відносності.

3. Орбіти частинок. Орбітальна динаміка в полі Шварцшильда включає різні типи орбіт: кругові, еліптичні, параболічні та гіперболічні. Особливу увагу приділяється нестабільним орбітам, таким як фотонні орбіти, де світло може рухатися по замкненій траєкторії навколо чорної діри [9, 10]. Класичні роботи Chandrasekhar [6] і сучасні дослідження, описані у "A Relativist's Toolkit" Poisson [13], розглядають ці аспекти.

Вейнберг у своїй роботі "Гравітація і космологія: принципи та застосування загальної теорії відносності" [9] розглядає використання загальної теорії відносності в космологічних моделях.

Фролов та Новіков у своїй книзі "Фізика чорних дір: основні поняття та нові розробки" [10] розглядають сучасні теорії та експериментальні дослідження в галузі фізики чорних дір.

Пуасон у своїй книзі "Інструментарій релятивіста: математика механіки чорних дір" [13] розглядає математичні методи, що використовуються для вивчення чорних дір.

4. Припливні сили. Поблизу горизонту подій чорної діри діють сильні припливні сили, які можуть розтягувати та деформувати об'єкти. Ці сили є важливими для розуміння таких явищ, як приливне розривання зірок, які наближаються до чорної діри [11, 12]. Огляд цих ефектів представлено у роботах "Introducing Einstein's Relativity" D'Inverno [14] та "Exact Solutions of Einstein's Field Equations" Stephani et al. [12].

Хокінг та Елліс у своїй роботі "Великомасштабна структура простору-часу" [11] досліджують структуру Всесвіту в рамках загальної теорії відносності.

Стефані, Крамер, МакКаллум, Хенселерс та Герлт у своїй книзі "Точні розв'язки рівнянь Ейнштейна" [12] представляють точні аналітичні розв'язки рівнянь гравітації Ейнштейна.

1.3. Сучасні дослідження

1. **Чисельне моделювання.** Сучасні методи чисельного моделювання дозволяють вивчати складні динамічні системи в гравітаційному полі Шварцшильда з високою точністю. Ці методи включають розв'язання нелінійних рівнянь Ейнштейна на комп'ютерах і дозволяють моделювати такі явища, як злиття чорних дір і генерація гравітаційних хвиль [13, 14]. Докладно ці питання висвітлюються в "Gravitation and Spacetime" Ohanian і Ruffini [7].

Д'Іверно у своїй роботі "Введення в релятивістську теорію Ейнштейна" [14] надає вступ до загальної теорії відносності та її ключових понять.

2. **Квантові ефекти.** Дослідження квантових ефектів поблизу чорних дір, таких як випромінювання Хокінга, є важливими для розуміння термодинаміки чорних дір і можливих квантових корекцій до класичних теорій гравітації. Це відкриває нові перспективи для теорії квантової гравітації [15, 16, 17].

У другому виданні своєї книги "Перший курс загальної теорії відносності" [15] Шутц детально розглядає концепції та методи загальної теорії відносності.

Баєз та Муніаїн у своїй книзі "Поля, вузли та гравітація" [16] розглядають зв'язок між гравітацією та топологією простору-часу.

Хокінг та Пенроуз у своїй роботі "Природа простору та часу" [17] розглядають філософські та фізичні аспекти простору та часу.

Роботи Bekenstein [28] та Hawking [26] є основоположними у цій галузі.

Хокінг у своїй статті "Чорні діри й термодинаміка" [26] розглядає зв'язок між чорними дірами та термодинамікою.

У статті "Чорні діри та ентропія" [28] Бекенштейн розглядає зв'язок між чорними дірами та поняттям ентропії.

3. **Астрофізичні застосування.** Рух частинок у гравітаційному полі Шварцшильда має важливі астрофізичні застосування, включаючи моделювання акреційних дисків навколо чорних дір, генерацію релятивістських струменів і випромінювання з активних галактичних ядер [18, 19, 20].

В роботі "Темні зірки: еволюція ідеї" [18] Ізраїль досліджує історію розвитку концепції темних зірок та їх вплив на розвиток астрофізики.

Міснер у своїй статті "Метод образів у геометростатиці" [19] розглядає використання методу образів у вивченні гравітаційних систем.

У своїй статті "Оберткові чорні діри: місцеві нерухомі системи, вилучення енергії та скалярне синхротронне випромінювання" [20] Бардін, Прес та Тьюкольський розглядають ротуючі чорні діри та їх властивості.

Ці аспекти розглядаються у роботах Shapiro і Teukolsky [29] та Thorne

[30].

Шапіро та Тьюкольський у своїй книзі "Чорні діри, білі карлики та нейтронні зірки: фізика компактних об'єктів" [29] досліджують фізичні властивості та процеси, що відбуваються в компактних астрономічних об'єктах.

Торн у своїй роботі "Чорні діри та викривлення часу: видатна спадщина Ейнштейна" [30] розглядає історію та розвиток концепцій чорних дір та їх вплив на наше розуміння часу та простору.

4. Гравітаційні хвилі. Дослідження гравітаційних хвиль, що виникають при злитті компактних об'єктів, таких як чорні діри та нейтронні зірки, є однією з найактуальніших тем сучасної астрофізики.

Ці хвилі несуть інформацію про екстремальні гравітаційні поля і дозволяють тестувати ЗТВ у нових умовах [21, 22].

У роботі "Нестійкість Чандракара-Фрідмана-Шутца" [21] Чандрасекар досліджує нерівноважність та нестійкість в системах чорних дір.

Фейнман, Мориніго, Вагнер та Хетфілд у своїй книзі "Лекції Фейнмана з гравітації" [22] надають вступ до загальної теорії відносності за допомогою зрозумілих прикладів та пояснень.

Огляд сучасного стану цієї галузі можна знайти у роботах Thorne, Price і Macdonald [23].

У книзі "Чорні діри: Мембранна парадигма" [23] Торн, Пріс та Макдональд досліджують чорні діри з точки зору мембранної парадигми.

1.4. Розширені теми

1. гравітаційне лінзування. гравітаційне лінзування, викликана масивними об'єктами, є потужним інструментом для дослідження темної матерії та темної енергії у Всесвіті. Рух частинок і світла в полі Шварцшильда дозволяє моделювати ефекти лінзування та інтерпретувати астрономічні спостереження [23, 24]. Ці аспекти детально розглядаються в роботах "Gauge Fields, Knots and Gravity" Baez і Muniain [16].

У книзі "Загальна теорія відносності та космологія" [24] Уолд досліджує зв'язок між загальною теорією відносності та космологією.

2. Теорія струн. Включення ідей теорії струн у дослідження чорних дір відкриває нові перспективи для розуміння квантової гравітації. Зокрема, розглядаються мікроскопічні структури чорних дір і можливість об'єднання різних фундаментальних взаємодій у єдину теорію [25, 26, 27]. Ці питання детально описані у роботах Israel [18] та Frolov і Novikov [10].

Еддингтон у своїй книзі "Простір, час і гравітація" [25] розглядає фундаментальні концепції простору, часу та гравітації.

3. Сингулярності та горизонти подій. Дослідження природи

сингулярностей і горизонтів подій залишається важливим напрямом у теоретичній фізиці. Нові математичні методи дозволяють детальніше вивчати структуру простору-часу поблизу сингулярностей і можливі способи їх уникнення в теоріях квантової гравітації [28, 29, 30]. Ці питання розглядаються у роботах "General Relativity" Wald [3] та "The Classical Theory of Fields" Landau і Lifshitz [31].

Ландау та Ліфшиц у своїй класичній роботі "Теорія поля" [33] розглядають гравітаційні поля з точки зору теорії відносності.

Пейн у своїй роботі "Семинар з гравітації" [31] надає глибокий аналіз гравітаційних явищ та їх математичних моделей.

1.5. Формулювання завдання дослідження

Таким чином, завданням дослідження є висвітлення окремих моментів щодо математичного опису руху частинок та спалахів світла у полі стаціонарної чорної дірки. Потрібно проблему спостереження руху частинок тривіалізувати до використання моделі однієї тестової частинки чи фотона, які рухаються біля чорної дірки, що дозволяє дослідити механічні властивості Шварцшильдського просторочасу з виявленням як можна більшої кількості гравітаційних ефектів.

Висловлюємо припущення, що для складання та розв'язку постановлених задач з центральносиметричним просторочасом достатньо обмежитесь двома параметрами - енергією та кутовим моментом.

Визначаємо **вхідні дані**:

1. Пробна частинка, масою m , переміщається в околиці шварцвальдської чорної діри з відомим гравітаційним радіусом $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, та залежно від початкових умов потрапляє на одну із наведених категорій орбіт чи розсівається. Значення енергії й кутового моменту задані та відповідно рівних E і L .

2. Тестовий фотон, масою $m=0$, потрапив на одну з орбіт стаціонарної чорної дірки чи віддзеркалюється. Значення частоти ω , і адиабатичного інваріанта l відомі з початкових умов.

Примітка: використовується система одиниць виміру СГС

Стверджуємо, що початок координат розташовано у точці з нескінченним значенням Ріманової кривизни просторочасу Шварцшильда. Область дослідження обмежено простором що сягаю від горизонту подій до нескінченності.

Потрібно довести, що стійкість колових орбіт частинки при мінімальних радіусах залежать від співвідношення енергії та маси.

Необхідно, також, довести стійкість екваторіальній площині, на якій лежить орбіта. В наслідку чого рух частинок завжди обмежено площиною.

Ціль дослідження

1. Аналіз ключових елементів теорії Фазового простору зі шварцшильдською метрикою.
2. Для усунення сингулярності в горизонті подій у координатах Шварцшильда виконати заміну координатних систем: Еддингтона-Фінкельштейна, Леметра, Крускала-Секериса-Новікова.
3. Скласти й розв'язати рівняння Гамільтону-Якобі й рівняння ейконалу в гравітаційному полі.
4. Обчислити узагальнену траєкторію частинки та узагальнену траєкторію фотона в гравітаційному полі.
5. Перевірити, чи є світовий час досягнення пробною частинкою та час наближення тестового променя світла горизонті подій кінцевим або ж нескінченним.
6. Перевірити, чи є власний час досягнення пробною частинкою й тестовим світловим променем горизонті подій кінцевим або ж нескінченним.
7. Визначити локальну частоту фотона поблизу границі сфери Шварцшильда ($r \rightarrow r_g$). Визначити, чи можливо відправити сигнал на нескінченність із точки лежачої на горизонті подій $r = r_g$.
8. Знайти радіуси стійких і нестійких (R_0) кругових орбіт частинки та визначити радіус умовно стійкої (R_p) кругової орбіти фотона.
9. Одержати формули прицільної відстані: релятивістської частинки що розсіваються, нерелятивістської частинки яка вийшла зі стану спокою на нескінченності, та світлового фотона. Розрахувати прицільну відстань гравітаційного захоплення як для релятивістської, так і для нерелятивістської частинок, а також прицільну відстань гравітаційного захоплення фотона на умовно стійку орбіту.
10. Розрахувати ефективний переріз гравітаційного захоплення σ : релятивістської частинки, нерелятивістської частки, та фотона.
11. Знайти асимптотично ньютонівську межу для ефективного потенціалу $U(r)$. Для частинок лежачих на обмежених і замкнених орбітах одержати кеплерівські криві другого роду.
12. Показати ключові інтеграли руху частинки й та інтеграли руху світлового проміння. Довести інваріантність енергії й кутового моменту, згідно з теоремою Нетер, відносно перетворення координат та часу.
13. Довести стійкість екваторіальної площини, яка обмежує орбіту вільних частинок.
14. Розглянути властивості радіальних геодезичних кривих для обмежених і необмежених (за енергією) у просторі геодезичних кривих.
15. Визначити локально вимірювану швидкість частинки $\frac{dr}{d\tau}$ стосовно нерухомого спостерігача в точці з тим же значенням радіуса в координатах Шварцшильда.
16. Теоретично показати якісні особливості часоподібних геодезичних пробної частинки, а так само для світлоподібних геодезичних тестового проміння світла.

17. Довести репрезентативність і дійсність тверджень про властивості часоподібних геодезичних, а так само властивостей світлоподібних геодезичних.

2. РОЗДІЛ. МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МОДЕЛЬ

2.1. Аналіз ключових елементів теорії Фазового простору зі шварцшильдської метрикою.

2.1.1. Метрика Шварцшильда

Розглянемо систему координат поза горизонтом подій чорної дірки

$$\begin{cases} (x) = (ct \ r \ \varphi \ \theta) \in \mathcal{R}_3^1 \\ \mathcal{U} = \left[-\infty < t < \infty \quad r_g < r < \infty \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi \right] \end{cases} \quad (2.1)$$

Метричний тензор визначений [31, 36, 37]:

$$\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Інтервал при $r > r_g$:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(cdt)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(d\varphi)^2 \quad (2.3)$$

Часоподібний інтервал частинки, що потрапила за горизонт подій $r < r_g$ є простороподібним:

$$(ds)^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right)(cdt)^2 + \frac{1}{\left(\frac{r_g}{r} - 1\right)}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(d\varphi)^2 \quad (2.4)$$

-”на горизонті подій час і простір міняються місцями”

Простороподібні інтервали не розглядаються згідно з початковою умовою обмеження простору Шварцшильда.

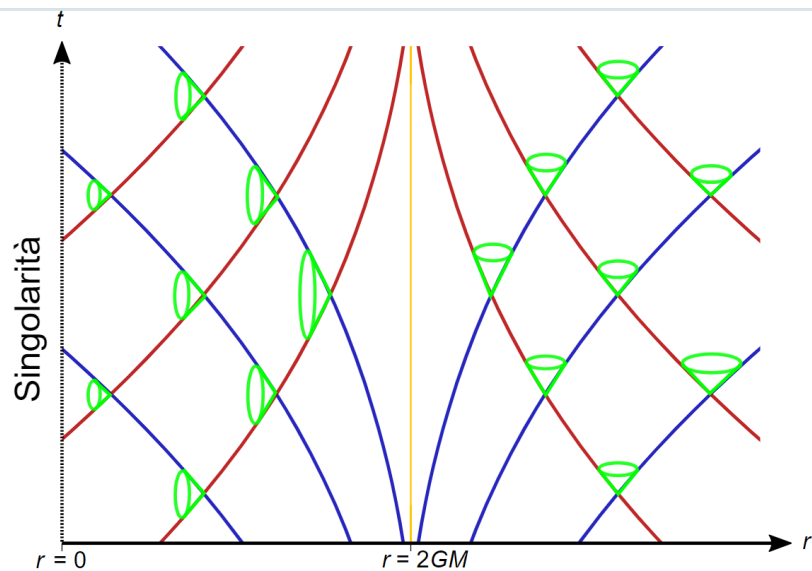


Figure 2.1. Координати Шварцшильда з видаленими двома просторовими вимірами

Координата r не є справжньою довжиною радіус-вектора, і вводиться так, щоб у якійсь довільній точці (x), при цьому площа сфери була рівна:

$$\begin{cases} \sigma(\mathcal{U}) = 4\pi r^2 \\ r > r_g \end{cases} \quad (2.5)$$

Фізичний зміст гравітаційного радіуса чорної діри $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ - радіус орбіти, яку можливо покинути частинкою, що догодила, лише розігнавши її до швидкості світла $v_{II} = c$, є радіусом горизонту подій.

Поверхня $r = r_g$ називається горизонтом подій. При більш удалому виборі координат, наприклад у координатах Леметра або Крускала, можна показати, що ніякі сигнали не можуть вийти із чорної діри через обрій подій. Що буде доведено на прикладі обчислення локальної частоти спалахів біля горизонту подій.

Для розв'язку задач слід обмежити область припустимих визначень для r даною поверхнею на нижній границі.

Траєкторія частинки описує лінію часу (s), у кожній точці подій (x) якої лежить спрямований вектор імпульсу (p) частинки, який колінеарне дотичній до лінії часу. Рівняння дотичної до часоподібної геодезичної в точці подій (x_0)

має вигляд:

$$\begin{cases} x^i = x_0^i + \frac{p^i}{(mc)}(s - s_0) \\ p^i = (mc) \frac{dx^i}{ds} \end{cases} \quad (2.6)$$

Узагальнений 4-імпульс частинки є тензором першого рангу. Та інтегралом руху відносно віртуальних трансляцій у просторочасі. Абсолютна величина 4-імпульсу частинки не залежить від положення точки подій (x) у просторі і є константою:

$$\|p\| = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(p^0)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}(p^r)^2 - r^2(p^\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(p^\varphi)^2 = (mc)^2 \quad (2.7)$$

2.1.1.1. Метрична зв'язність шварцшильдської геометрії

Симетричні символи Кристоффеля є псевдотензорами вираженими через похідні коваріантно постійного метричного тензора Шварцшильда, таким чином:

$$g_{ij,s} = u^k g_{ij;k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_{kl,i} - \Gamma_{ki}^m g_{ml} - \Gamma_{li}^m g_{km} = 0 \\ + \\ g_{li,k} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} = 0 \\ - \\ g_{ik,l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{(ik)}^n = \frac{1}{2} g^{nl} (g_{li,k} + g_{kl,i} - g_{ik,l}) \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} u^i = \frac{dx^i}{ds} \\ u^i_{,s} + \frac{1}{2} g^{in} (g_{kn,l} + g_{nl,k} - g_{kl,n}) u^k u^l = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{r0}^0 = \Gamma_{0r}^0 = \frac{\frac{r_g}{2r^2}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{00}^r = \frac{rg}{2r^2} \left(1 - \frac{rg}{r}\right) \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \left(1 - \frac{rg}{r}\right) \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \left(1 - \frac{rg}{r}\right) \sin^2(\theta) \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{\varphi\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = \text{ctg}(\theta) \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (2.18)$$

2.1.1.2. 4-Швидкість радіальної частинки Для обчислення 4-швидкості радіальної частинки у координатах Шварцшильда, зосередимося на геодезичному русі частинки, яка вільно падає в чорну діру.

Нормування 4-швидкості:

$$g_{tt}(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 = 1. \quad (2.19)$$

Тобто:

$$\left(1 - \frac{rg}{r}\right) (u^t)^2 - \frac{1}{1 - \frac{rg}{r}} (u^r)^2 = 1. \Rightarrow u^t = \frac{1}{1 - \frac{rg}{r}}. \quad (2.20)$$

Отже, рівняння нормування набуває вигляду:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} (u^r)^2 = 1. \Rightarrow u^r = \sqrt{\frac{r_g}{r}}. \quad (2.21)$$

Компоненти 4-швидкості радіальної частинки в координатах Шварцшильда будуть:

$$\begin{cases} u^t = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \\ u^r = -\sqrt{\frac{r_g}{r}}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Знак мінус для u^r вказує на те, що частинка рухається в напрямку зменшення r .

2.2. Заміна координатних систем як основа для створення моделі з усуненою особливістю

2.2.1. Координати Леметра

У метриці Шварцшильда є присутня сингулярність у точці $r = r_g$, що є фіктивною особливістю. Особливість точок горизонту подій обумовлена тим що, стаціонарні координати Шварцшильда неможливо реалізувати за допомогою фізичних тіл під гравітаційним радіусом. Під гравітаційним радіусом усі тіла, включаючи промені світла, падають у напрямку до центру й ніякими силами неможливо удержати фізичне тіло на постійному радіусі.

Перетворення від координат Шварцшильда до нових координат Леметра

$$(ct \ r \ \varphi \ \theta) \rightarrow (c\tau \ R \ \varphi \ \theta) \quad (2.23)$$

У шварцшильдській метриці g_{tt} звертається в нуль, а g_{rr} - у нескінченність при $r = r_g$ (на шварцшильдській сфері).

Ця обставина могла б дати підстави для висновку про наявність особливості просторово-часової метрики й потім до висновку про неможливість існування тіл з "радіусом" (при заданій масі), меншим гравітаційного радіуса. Насправді однак, такі висновки були б невірними. На це вказує вже та обставина, що визначник $g = -r^4 \sin^2(\theta)$ ніякої особливості

при $r = r_g$ не має, так що умова $g < 0$ не порушується. Ми побачимо, що фактично ми маємо справу лише з неможливістю здійснення при $r < r_g$ твердої системи відліку.

Для з'ясування дійсного характеру просторово-часової метрики в цій області зробимо перетворення координат вигляду

$$\begin{cases} c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1-\frac{r_g}{r}}, \\ R = ct + \int \frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})f(r)} \end{cases} \quad (2.24)$$

[3] Тоді

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2(r)} (c^2 d\tau^2 - f^2(r) dr^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2). \quad (2.25)$$

Усунення особливості при $r = r_g$ припустимо, при виборі $f(r)$ так, щоб було $f(r_g) = 1$. Якщо покласти $f(r) = \sqrt{\frac{r_g}{r}}$, то нова система координат буде також і синхронною ($g_{\tau\tau} = 1$). Вибравши спочатку для визначеності верхні знаки, будемо мати:

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2(r))dr}{(1 - \frac{r_g}{r})} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}} dr = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{r_g}} \quad (2.26)$$

або

$$r = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}(R - c\tau)} \right)^2 \sqrt[3]{r_g} \quad (2.27)$$

(постійна інтегрування, що залежить від початку часу τ , вважається рівною нулю). Елемент інтервалу:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dr^2}{\left(\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right)^{2/3}} - \left(\frac{3}{2}(R - c\tau)\right)^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2). \quad (2.28)$$

У координатах Леметра сингулярність на гравітаційному радіусі шварцшильдської сфери (якої відповідає тут рівність $\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$) відсутня.

Дійсна ж сингулярність у центрі, $(R - c\tau) = 0$, зберігається.

Координата R є скрізь просторова, а τ - часова.
Метрика нестационарна, має вигляд

$$\begin{pmatrix} g_{\tau\tau} \\ g_{RR} \\ g_{\theta\theta} \\ g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\left(\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right)^{2/3}} \\ -\left(\frac{3}{2}(R-c\tau)\right)^{4/3} r_g^{2/3} \\ -\left(\frac{3}{2}(R-c\tau)\right)^{4/3} r_g^{2/3} \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Як і у всякій синхронній системі відліку, лінії часу (s) в ній є геодезичними лініями. Інакше кажучи, що спочивають щодо системи відліку ”пробні” частинки це частинки, що вільно рухаються в даному полі.

Заданим значенням r відповідають світові лінії $R - c\tau = const$.

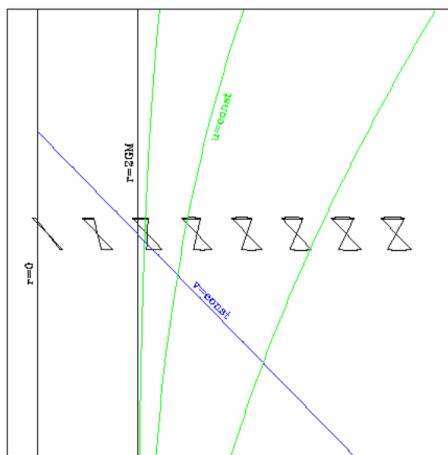


Figure 2.2. Горизонт представляється білою дірою, (Горизонт подій, з якого можуть виходити матерія й світло, але ніщо не може ввійти усередину)

2.2.2. Координати Еддингтона — Фінкельштейна

Координати Еддингтона — Фінкельштейна засновані на черепащачій координаті, яка задовольняє умовам

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (2.30)$$

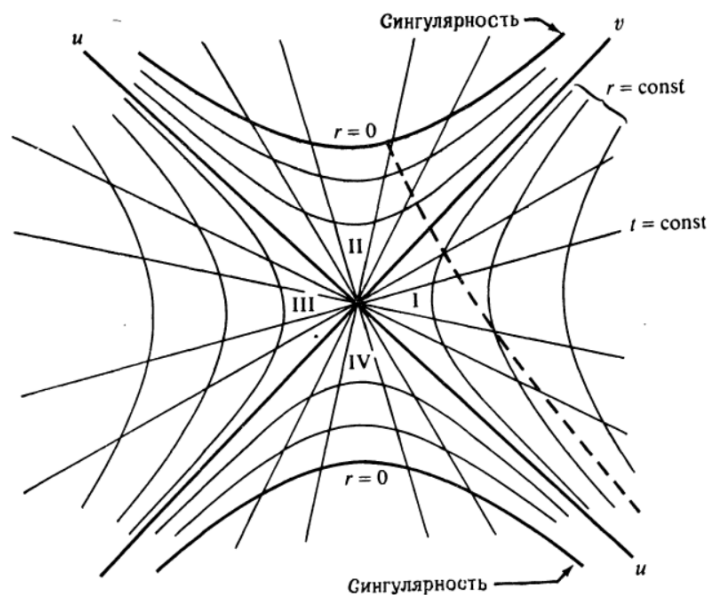


Figure 2.3. Зображення Геометрії Шварцшильда на площині в координатах u, v еквівалентних координатам Крускала.

I визначається так

$$r^* = r + r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| \quad (2.31)$$

Черепашача координата r^* наближається до нескінченності ∞ , коли r наближається до радіуса Шварцшильда r_g

Коли який-небудь зонд (наприклад, світловий промінь або спостерігач) наближається до горизонту подій чорної діри, його часова координата Шварцшильда збільшується нескінченно.

Що йдуть на нескінченність нульові геодезичні в цій системі координат мають нескінченна зміна t при виході за горизонт.

Черепашача координата нескінченно росте з відповідною швидкістю й нівелює сингулярна поведінка в системах координат, побудованих на її основі.

Збільшення часової координати нескінченно в міру наближення до горизонту подій є причиною того, чому інформацію від будь-якого зонда, відправленого через такий горизонт подій, не можна одержати назад.

І це попри те, що сам зонд, проте, може переміщатися за горизонт.

Це також є причиною того, що просторово-часова метрика чорної діри, виражена в координатах Шварцшильда, стає сингулярною на горизонті — і, таким чином, не може використовуватися для повного (у всій області простору) зображення траєкторії зонда, що падає.

Стискальна система координат Еддингтона — Фінкельштейна виходять

заміною координати t новою координатою $\nu = ct + r^*$.

У цих координатах метрику Шварцшильда можна записати як

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)d\nu^2 + 2drd\nu - r^2(\sin^2(\theta)d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.32)$$

Метричний тензор визначений:

$$\begin{pmatrix} g_{\nu\nu} & g_{r\nu} & 0 & 0 \\ g_{\nu r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Аналогічно система, що розширюється, координат Еддингтона — Фінкельштейна виходять заміною t на нову координату $\mu = ct - r^*$. Тоді метрика дається вираженням

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)d\mu^2 - 2drd\mu - r^2(\sin^2(\theta)d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.34)$$

Метричний тензор визначений:

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\mu} & g_{r\mu} & 0 & 0 \\ g_{\mu r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

В обох цих системах координат метрика явно не має особливості на радіусі Шварцшильда (навіть якщо один компонент звертається в нуль на цьому радіусі, визначник метрики як і раніше не звертається в нуль, і зворотна метрика також не має розбіжних членів у цій точці).

Система, що розширюється, координат описує викид частинок із центру за межі гравітаційного радіуса, але при спробі використовувати її для падучих частинок усередині гравітаційного радіуса виникає сингулярність аналогічна шварцшильдської.

Для стискальної системи координат падучі частинки усередині гравітаційного радіуса не мають особливості, але сингулярність виникає при спробі описати вихідні частки за межею гравітаційного радіуса.

Стискальна система координат використовується для опису гравітаційного колапсу.

При побудові діаграм Еддингтона — Фінкельштейна поверхні з

постійними μ або ϑ звичайно малюється у вигляді конусів, а постійні лінії μ або ϑ малюються як похилі під кутом $\frac{\pi}{4}$ радіан, а не як площини

Деякі джерела замість цього використовують заміну $ct' = ct \pm (r^* - r)$, що відповідає площинам на таких діаграмах.

$$ds^2 = (c^2 dt'^2 - dr^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 - r^2 d\theta^2) - \frac{r_g}{r} (dr \pm c dt')^2 \quad (2.36)$$

У цих координатах (для ct') метрика стає мінковскою при великих r .

Координати Еддингтона — Фінкельштейна усе ще неповні й можуть бути розширені. Наприклад, що рухаються на нескінченність часоподібні геодезичні, обумовлені (із власним часом τ)

$$\begin{cases} r(\tau) = \sqrt{r_g c \tau} \\ \vartheta(\tau) = \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_g}{r(\tau)}} + r^* = C' + c\tau + 2r^*(\tau) \\ \mu(\tau) = \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_g}{r(\tau)}} - r^* = C' + c\tau \end{cases} \quad (2.37)$$

Часоподібна геодезична має кінцеву власну довжину в минуле, де вона виходить із горизонту ($r = r_g$), коли $\lim_{r \rightarrow r_g} [\nu] = -\infty$.

Області для кінцевих ν і $r < r_g$ відрізняються від кінцевих μ і $r < r_g$.

Горизонт $r = r_g$ і кінцевий ϑ (горизонт чорної діри) відрізняються від горизонту з $r = r_g$ і кінцевим μ (горизонт білої діри).

У системі координат Еддингтона — Фінкельштейна, як і в координатах Шварцшильда, метрика не залежить від часу (або t по Шварцшильду, або μ або ν у різних системах координат Еддингтона — Фінкельштейна), але жодна з них не покриває весь простір-час.

2.2.3. Координати Крускала-Секереса-Новікова

У загальній теорії відносності координати Крускала-Секереса, являють собою систему координат для геометрії Шварцшильда чорної діри.

Ці координати мають перевагу перед координатами Еддингтона-Фінкельштейна, тому що вони охоплюють усе просторово-тимчасове різноманіття максимальне розширеного розв'язку Шварцшильда й не мають фіктивних особливих точок за межами фізичної сингулярності. Сингулярності координат на горизонті немає.

Простір-Час в області колапсу зірки в чорну діру апроксимується координатами Крускала – Секереса-Новікова (або координатами Шварцшильда).

Поверхня чорної дірки залишається поза горизонтом подій у координатах Шварцшильда, але перетинає його в координатах Крускала – Секереса. (У будь-який «чорній дірі», яку ми спостерігаємо, ми бачимо її в той момент, коли її

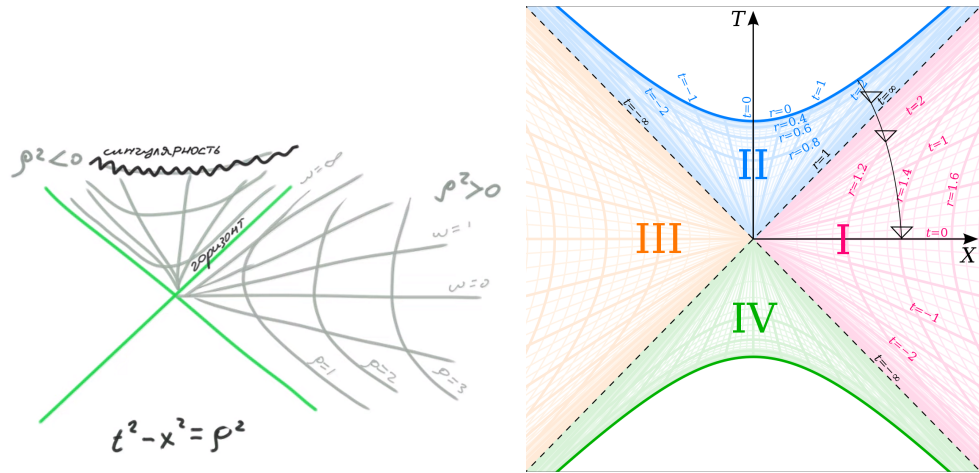


Figure 2.4. Области простору-часу з метрикою Крускала-Секериша. Зовні горизонту подій - правий квадрант. Область II у середині чорної діри, що з'єднує їх, називається мостом Ейнштейна — Розена.

матерія ще не закінчила колапс, тому насправді це ще не чорна діра.)

Точно так само об'єкти, що падають у чорну діру, залишаються за межами горизонту подій у координатах Шварцшильда, але перетинають його в координатах Крускала – Секереса-Новікова.

Координати Крускала – Секереса в геометрії чорної діри визначаються на основі координат Шварцшильда, замінивши t і r нової часоподібною координатою T і нової простороподібною координатою X :

$$\begin{cases} T = \frac{r_g}{c} \sqrt{\left|1 - \frac{r}{r_g}\right|} \exp\left(\frac{r}{2r_g}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \\ X = r_g \sqrt{\left|1 - \frac{r}{r_g}\right|} \exp\left(\frac{r}{2r_g}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \end{cases} \quad (2.38)$$

Часова шварцшильдська координата в координатах Крускала-Секереса-Новікова

$$t = \begin{cases} \frac{2r_g}{c} \operatorname{arth}\left(\frac{cT}{X}\right), (cT)^2 - X^2 < 0, X > 0, - \text{у зовнішній області чорної діри} \\ \frac{2r_g}{c} \operatorname{arth}\left(\frac{X}{cT}\right), 0 < (cT)^2 - X^2 < r_g^2, T > 0, - \text{у внутрішній області чорної діри} \end{cases} \quad (2.39)$$

При об'єднанні зовнішньої області горизонту подій і внутрішньої області горизонту подій радіальна координата r визначається в координатах Крускала-

Секереса як розв'язок рівняння

$$(cT)^2 - X^2 = r_g^2 \left(1 - \frac{r}{r_g}\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right), \quad (cT)^2 - X^2 < r_g^2 \Rightarrow \quad (2.40)$$

Головна гілка W-Функції Ламберта Калугіна-Джеффри-Корлесса :

$$\begin{cases} r = r_g \left(1 + W_0\left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}\right)\right), \\ W_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{x \sin(\gamma)}{\gamma} e^{\frac{\gamma}{\tan(\gamma)}}\right) d\gamma \end{cases} \quad (2.41)$$

Де W-Функція Ламберта визначається як зворотна функція $f(x) = xe^x \iff x = W(xe^x)$

Властивості функції Ламберта

$$\begin{cases} W(ze^z) = z \\ \frac{dW(z)}{dz} = \frac{1}{z W(z) + 1} \end{cases} \quad (2.42)$$

Диференціальні перетворення шварцшильдських координат на крускальські

$$\begin{cases} d(ct) = \frac{2r_g(cTdX - Xd(cT))}{(cT)^2 - X^2} \\ dr = \frac{2r_g W_0\left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}\right) (cTd(cT) - d(X)X)}{1 + W_0\left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}\right) (cT)^2 - X^2} \end{cases} \quad (2.43)$$

Перетворення метрики Шварцшильда на метрику Крускала

$$(ct \ r \ \varphi \ \theta) \rightarrow (cT \ X \ \varphi \ \theta) \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} 0 < X < \infty \\ 0 < (cT)^2 - X^2 < r_g^2 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{r_g}{r})d(ct)^2 = \frac{4r_g^2 W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}) (cT dT - X d(cT))^2}{1 + W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}) ((cT)^2 - X^2)^2} \\ -\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} dr^2 = -\frac{4r_g^2 W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}) (cT d(cT) - X dX)^2}{1 + W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}) ((cT)^2 - X^2)^2} \\ -r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(d\varphi)^2 = -r_g^2 (1 + W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2}))^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) \end{array} \right. \Rightarrow \quad (2.46)$$

$$ds^2 = \frac{4r_g^2 W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2})}{1 + W_0 (\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2})} \left(\frac{(d(cT))^2 - dX^2}{((cT)^2 - X^2)} \right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) \quad (2.47)$$

Метрика Крускала-Секериса

$$ds^2 = \frac{4r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) (c^2 dT^2 - dX^2) - r^2 (\sin^2(\theta)d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.48)$$

Метричний тензор визначений:

$$\begin{pmatrix} g_{TT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Вираз метрики в такій формі ясно показує, радіальні світлоподібні геодезичні паралельні однієї із прямих

$$X = \pm cT \quad (2.50)$$

Відомо, що на границі горизонту подій крускальські координати лінійно

залежні

$$r_g = r_g \left(1 + W_0 \left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2} \right) \right) \Rightarrow W_0 \left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2} \right) = 0 \Rightarrow (ct)^2 - X^2 = 0 \quad (2.51)$$

Тому у координатах Крускала - Секереса горизонт подій визначається виразом

$$(cT)^2 - X^2 = 0 \quad (2.52)$$

Особливість кривизни

$$0 = r_g \left(1 + W_0 \left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2} \right) \right) \Rightarrow W_0 \left(\frac{(cT)^2 - X^2}{\exp(1)r_g^2} \right) = -1 \Rightarrow (ct)^2 - X^2 = r_g^2 \quad (2.53)$$

$$(cT)^2 - X^2 = r_g^2 \quad (2.54)$$

Метрика зовсім чітко визначена й несингулярна на горизонті подій.

Альтернативний спосіб задати світлоподібні геодезичні в координатах Крускала - Секереса для світлового конуса

$$\begin{cases} U = cT - X \\ V = cT + X \end{cases} \quad (2.55)$$

Якщо перейти до альтернативних крускальських координат,

$$\begin{cases} cT = \frac{1}{2}(U + V) \\ X = \frac{1}{2}(-U + V) \end{cases} \quad (2.56)$$

$$ds^2 = \frac{4r_g^2 W_0 \left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2} \right)}{1 + W_0 \left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2} \right)} \left(\frac{dU dV}{UV} \right) - r^2 (\sin^2(\theta) d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.57)$$

Метрика даного конуса задана

$$ds^2 = \frac{4r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) dU dV - r^2 (\sin^2(\theta) d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.58)$$

Де r визначається рівнянням

$$r = r_g \left(1 + W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right)\right) \quad (2.59)$$

Відомо, що на границі горизонту подій крускальські координати лінійно залежні

$$r_g = r_g \left(1 + W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right)\right) \Rightarrow W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right) = 0 \Rightarrow UV = 0 \quad (2.60)$$

Тому горизонт подій минулого й горизонт подій майбутнього задаються рівнянням

$$UV = 0 \quad (2.61)$$

$$0 = r_g \left(1 + W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right)\right) \Rightarrow W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right) = -1 \Rightarrow UV = r_g^2 \quad (2.62)$$

Особливість кривизни

$$UV = r_g^2 \quad (2.63)$$

Що тісно зв'язано з координатами Еддингтона-Фінкельштейна.

Ще однієї корисною особливістю даних координат в аналізі причинно-наслідкових зв'язків є траєкторії світлового проміння відповідні до ліній під кутом 45 градусів, точно так само, як на діаграмі Мінковського.

2.2.3.1. Компоненти 4-швидкості радіальної частинки в крускальських координатах

Щоб визначити координати Крускала-Секереса, введемо черепахову

координату r^* :

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = r + r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (2.64)$$

Перейдемо до альтернативних координат U й V :

$$\begin{cases} U = \exp\left(-\frac{ct-r^*}{r_g}\right), \\ V = \exp\left(\frac{ct+r^*}{r_g}\right). \end{cases} \quad (2.65)$$

Тепер можемо виразити метрику Шварцшильда в координатах Крускала-Секереса:

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) dU dV - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2) \quad (2.66)$$

де r визначається неявно через U й V :

$$UV = \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \left(1 - \frac{r}{r_g}\right). \quad (2.67)$$

4-швидкість радіальної геодезичної

Розглянемо радіальну геодезичну траєкторію. Радіальна геодезична припускає, що рух відбувається тільки в площині $(t; r)$ (або $(U; V)$ в координатах Крускала-Секереса), а кутові координати θ й φ залишаються постійними ($d\theta = 0$ й $d\varphi = 0$).

Компоненти 4-швидкості в цих координатах можна знайти, використовуючи зв'язок між координатами Шварцшильда і координатами Крускала-Секереса. Скористаємося визначеннями нових координат і похідними від них:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial(ct)} = -\frac{U}{r_g}, & \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U}{r_g} \frac{dr^*}{dr} = \frac{\frac{U}{r_g}}{1 - \frac{r_g}{r}}, \\ \frac{\partial V}{\partial(ct)} = \frac{V}{r_g}, & \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V}{r_g} \frac{dr^*}{dr} = \frac{\frac{V}{r_g}}{1 - \frac{r_g}{r}}. \end{cases} \quad (2.68)$$

Нормування 4-швидкості

В координатах Шварцшильда, 4-швидкість u^i радіальної частинки має

компоненти $(u^t, u^r, 0, 0)$, і вона нормована:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (u^t)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} (u^r)^2 = 1. \quad (2.69)$$

Тепер виразимо компоненти 4-швидкості в координатах Крускала-Секереса:

$$\begin{cases} u^U = \frac{\partial U}{\partial(ct)} u^t + \frac{\partial U}{\partial r} u^r = \left(-u^t + \frac{u^r}{1 - \frac{r_g}{r}}\right) \frac{U}{r_g}, \\ u^V = \frac{\partial V}{\partial(ct)} u^t + \frac{\partial V}{\partial r} u^r = \left(u^t + \frac{u^r}{1 - \frac{r_g}{r}}\right) \frac{V}{r_g}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Отримаємо

$$\begin{cases} u^U = -\frac{1 + \sqrt{\frac{r_g}{r}}}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{U}{r_g} = \frac{\frac{U}{r_g}}{\sqrt{\frac{1}{1 + W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right)} - 1}}}, \\ u^V = \frac{1 - \sqrt{\frac{r_g}{r}}}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{V}{r_g} = \frac{\frac{V}{r_g}}{\sqrt{\frac{1}{1 + W_0\left(\frac{UV}{\exp(1)r_g^2}\right)} + 1}}}. \end{cases} \quad (2.71)$$

2.3. Створення моделі руху частинки за допомогою рівняння Гамільтону-Якобі

Достатньо обмежитися псевдоримановим тривимірним простором-часом, що обумовлено центральною симетричністю простору-часу, тому орбіти частинки (під час відсутності зовнішніх сил) зафіксовані на екваторіальній площині.

$$\begin{cases} (x) = (ct \ r \ \varphi) \in \mathcal{R}_2^1 \\ \dot{\mathcal{U}} = [-\infty < t < \infty \ r_g < r < \infty \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Методом Гамільтону-Якобі для коваріантного 4-імпульсу (p) твориться заміна:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (2.74)$$

З квадратичної форми імпульсу (p) отримаємо рівняння Гамільтону-Якобі для вільної частинки у гравітаційному полі [31, 36, 37]:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = (mc)^2 \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = (mc)^2 \quad (2.76)$$

Розв'язок

Виберемо в якості натурального параметра величину $r \in (r_g; \infty)$

Для повного розв'язку цього рівняння необхідно частково лінеаризувати функціонал, що є розв'язком задачі. Уведемо функціонал, дію, в екваторіальній системі координат, радіальна частина якого не є лінійною функцією

$$S(t, r, \varphi) = -Et + S(r) + mL\varphi \quad (2.77)$$

Підставлення дії в рівняння Гамільтону-Якобі приведе до найкоротшого розв'язку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} (mL)^2 = (mc)^2 \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial S}{\partial r}(r) = \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) [(mc)^2 + \left(\frac{mL}{r}\right)^2]} \\ \Rightarrow \\ S(r) = \int \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) [(mc)^2 + \left(\frac{mL}{r}\right)^2]} dr \end{array} \right. \quad (2.78)$$

Продиференціюємо по параметрах E, L

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}(-Et + S(r) + mL\varphi), \\ \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(-Et + S(r) + mL\varphi). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - \frac{\partial S}{\partial E}(r) = t_0, \\ \varphi + \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial L}(r) = \varphi_0. \end{cases} \quad (2.79)$$

Параметричний розв'язок

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{1}{c} \int \frac{E}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{(E)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) [(mc^2)^2 + \left(\frac{mL}{r}\right)^2]}} dr - \text{час}, \\ \Delta \varphi = - \int \frac{mL}{r^2} \frac{1}{\sqrt{(E)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) [(mc^2)^2 + \left(\frac{mL}{r}\right)^2]}} dr - \text{кут}. \end{cases} \quad (2.80)$$

Тим самим було отриманими ключові рівняння аналітичний розв'язок котрих дає повний опис моделі руху тестової масивної частинки в полі Шварцшильда

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - r_g u} \frac{du}{cdt} = -u^2 \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 (1 - r_g u) \left[1 + \left(\frac{Lu}{c}\right)^2\right]} - \text{залежність } u \text{ від часу } t, \\ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_g u^3 - u^2 + \left(\frac{c}{L}\right)^2 r_g u - \frac{1 - \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2}{\left(\frac{L}{c}\right)^2} - \text{рівняння часоподібної геодезичної}. \end{cases} \quad (2.81)$$

Або

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{c^2 dt^2} = u^3 (1 - r_g u) (2 - 3r_g u) \left(1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(\frac{r_g u}{2(2 - 3r_g u)} + \frac{3}{2} \left(\frac{Lu}{c}\right)^2\right)\right), \\ \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3r_g (u)^2 + r_g \left(\frac{c}{L}\right)^2. \end{cases} \quad (2.82)$$

Де $u = \frac{1}{r}$.

2.4. Створення моделі руху світлового проміння в околиці чорної діри за допомогою рівняння Ейконалу

Орбіти світлових променів (фотонів) можуть бути описані нульовими (світлоподібними геодезичними).

Інтервал у шварцшильдських координатах має вигляд

$$\begin{cases} ds^2 = 0 \\ (1 - \frac{r_g}{r})(cdt)^2 - \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})}(dr)^2 - r^2 d\varphi^2 = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Для опису руху світлового проміння по траєкторії у фазовому просторі був уведений мінливий уздовж проміння натуральний параметр $\lambda \in (\mathcal{R} \geq 0)$.

Проілюструємо їх загальні тензорні властивості ізотропних векторів:

$$\begin{cases} k^i k_i = 0 \\ k^i = g^{ij} k_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\psi}{d\lambda} = 0 \\ \left[\frac{dx^0}{d\lambda} \quad \frac{dr}{d\lambda} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} \right] = \left[\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \quad - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right] \end{cases} \quad (2.84)$$

Компоненти хвильового ко-вектора є розв'язком системи рівнянь нульової геодезичної кривій:

$$\begin{cases} k^i_{;\lambda} + \Gamma^i_{jl} k^j k^l = 0 \\ g_{jl} k^j k^l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^0 = \frac{\frac{\omega}{c}}{(1 - \frac{r_g}{r})} \\ k^r = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{l}{r}\right)^2} - \text{Розв'язок} \\ k^\varphi = \frac{l}{r^2} \end{cases} \quad (2.85)$$

Була введена безрозмірна величина ψ "ейконал променя", така, що його похідна в точці подій відповідає хвильовому вектору

$$\kappa = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^i} dx^i = k_i dx^i \Rightarrow k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \quad (2.86)$$

Був уведений дуальний вектор $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$, що представляє дотичну до світлового променя в точці подій [31, 34, 36, 37].

Рівняння ейконалу в гравітаційному полі

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \left(\frac{\partial\psi}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 = 0 \quad (2.88)$$

Розв'язок:

Функціонал, який є аналітичним розв'язком рівняння ейконалу, який складається з лінійних кутової та часової частин та нелінійної радіальної. Ейконал у центральносиметричному просторі:

$$\psi = -\omega t + \psi(r) + l\varphi \quad (2.89)$$

Хвильовий вектор k_i визначимо через інтеграли руху

$$\begin{cases} k_0 = -\frac{\omega}{c} \\ k_r = \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \\ k_\varphi = l \end{cases} \quad (2.90)$$

Обчислимо рівняння ейконалу відносно радіальної частини $\psi(r)$

$$\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial \psi(r)}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{l}{r}\right)^2 = 0 \quad (2.91)$$

$$\psi(r) = \int \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{l}{r}\right)^2\right]} dr \quad (2.92)$$

2.4.0.1. Траєкторія орбіти та час розповсюдження фотона

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} (-\omega t + \psi(r) + l\varphi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} (-\omega t + \psi(r) + l\varphi). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - \frac{\partial \psi}{\partial \omega}(r) = t_0, \\ \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial l}(r) = \varphi_0. \end{cases} \quad (2.93)$$

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{1}{c} \int \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega)^2 - (1 - \frac{r_g}{r}) \left(\frac{lc}{r}\right)^2}} dr - \text{Час розповсюдження спалаху}, \\ \Delta \varphi = - \int \frac{l}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{l}{r}\right)^2}} dr - \text{Кут обертання фотону}. \end{cases} \quad (2.94)$$

Тим самим було отриманими ключові рівняння, аналітичний розв'язок котрих дає повний опис моделі руху тестового фотона в полі Шварцшильда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-r_g u} \frac{du}{cdt} = -u^2 \sqrt{1 - \left(\frac{lcu}{\omega}\right)^2 (1 - r_g u)} \text{— залежність } u \text{ від часу } t, \\ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_g(u)^3 - (u)^2 + \left(\frac{\omega}{lc}\right)^2 \text{— рівняння світлоподібної геодезичної.} \end{array} \right. \quad (2.95)$$

Або

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{c^2 dt^2} = u^3 (1 - r_g u) (2 - 3r_g u) \left(1 - \frac{3\left(\frac{lcu}{\omega}\right)^2}{2} (1 - r_g u)\right), \\ \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3r_g(u)^2. \end{array} \right. \quad (2.96)$$

Де $u = \frac{1}{r}$.

3. РОЗДІЛ. АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ

3.1. Тривалість світового часу наближення частинки до границі сфери Шварцшильда

Анзац

Світовий час пробної частинки витрачене на радіальне переміщення частинки в секторі $r \in [r_0; r]$.

$$(t - t_0) = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right]\right)} dr \quad (3.1)$$

Для аналітичного доведення достатньо вказати, що у точці $r \rightarrow r_g \Rightarrow$ інтеграл розбігається $t \rightarrow \infty$. Перевірка інтеграла на розбіжність спростить розрахунки світового часу на границі горизонту подій

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow r_g} \int_{r_0}^r \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right)\right)} dr, \text{ — інтеграл розбігається} \\ \lim_{r \rightarrow r_g} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = \infty \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Світовий час досягнення горизонту подій частинки нескінченний шуканий, тому інтеграл розходиться в точках що належать границі сфери Шварцшильда.

Для зовнішнього спостерігача частинка ніколи не перетне горизонт подій.

3.2. Власний час частинки біля межі горизонту подій

Перейдемо до локальної системи координат - системи відліку, початку координат якої задано близько частинки.

Час проходження частинкою інтервалу між точками подій, називається

власним часом частинки.

$$\tau = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt \Rightarrow (\tau - \tau_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right]}} dr \quad (3.3)$$

Анзац

Перевірка інтеграла на збіжність при $r \rightarrow r_g$:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow r_g} \left[\int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right]}} dr \right] - \text{інтеграл збіжний у будь-яких точках} \\ \lim_{r \rightarrow r_g} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right]}} \right] = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Частинка за кінцевий власний час проходить через горизонт подій.

3.3. Світовий час проміння на сфері Шварцшильда

Світовий час спалаху в секторі $r \in [r_1; r_2]$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2}} dr \quad (3.5)$$

Перевірка часу наближення фотона до горизонту подій оптимально можливо за допомогою перевірки інтеграла на розбіжність на зовнішній границі сфери Шварцшильда, що спростить розрахунки світового часу на границі горизонту подій

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow r_g} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2}} dr \right], - \text{інтеграл розбігається} \\ \lim_{r \rightarrow r_g} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2}} \right] = \infty \end{cases} \quad (3.6)$$

Інтеграл розбігається в точках які належать границі сфери Шварцшильда ($r \rightarrow r_g$), а значить світовий час досягнення горизонту подій спалахом нескінченний ($t \rightarrow \infty$). Для зовнішнього спостерігача промінь світла ніколи не перетне горизонт подій.

3.4. Власний час сигналу спалаху близько границі сфери Шварцшильда

Для цього необхідно уявити випадок, де два віддалені спостерігачі нерухомі у двох точках (x_1) і (x_2) та обчислити інтервал власного часу між спалахами, яку зареєструють ці спостерігачі.

Розв'язок починається зі запису світлоподібного інтервалу

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \Rightarrow 0 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(cdt)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}(dr)^2 - r^2(d\varphi)^2 \quad (3.7)$$

Де інтервал власного часу між спалахами зареєструють спостерігачі нерухомі в різних точках. Власний час був обчислено через криволінійний інтеграл

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt \Rightarrow \Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dr)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)r^2(d\varphi)^2} \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$(\tau_2 - \tau_1) = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2}} dr \quad (3.9)$$

Власний час фотона, що досягає границі сфери Шварцшильда звичайно

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow r_g} \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2\right)}} dr, \text{ — Інтеграл сходиться в точках } (r \rightarrow r_g) \\ \lim_{r \rightarrow r_g} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2}} = 1 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

3.5. Орбіти частинки на Екваторіальній площині

3.5.1. Прицільна відстань частинки

Визначимо прицільний параметр як відстань між силовим центром, що розсіює і лінією часу частинки, що розсіюється, в умовах $r_g \rightarrow 0$.

Кут обігу частинкою чорної діри на екваторіальній площині

$$\varphi(r) = \lim_{r_g \rightarrow 0} \left[- \int \frac{\frac{L}{c}}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left[1 + \left(\frac{L}{rc}\right)^2\right]}} dr \right] \quad (3.11)$$

При нульовому гравітаційному радіусі чорної діри, частка рухається по прямій, відстанню якої до силового центру є прицільний параметр.

$$r_g \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = - \int \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1\right)}{\left(\frac{L}{c}\right)^2} - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} dr \Rightarrow \rho = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}} \quad (3.12)$$

У якості підтвердження розв'язок зводиться до рівняння прямої

$$\varphi = - \int \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} dr \Rightarrow \rho = r \sin \varphi \quad (3.13)$$

Тоді r - можна уявити як гіпотенузу, φ - кут протилежного до неї катета, де сам катет фізично-прицільна відстань ρ .

Побудувати картину ілюструючи фізичну сутність прицільного параметра:

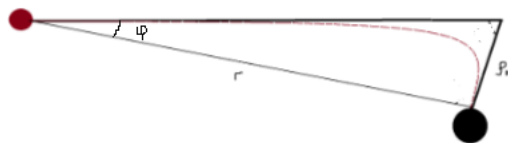


Figure 3.1. Прицільна відстань є протилежним катетом

Прицільний параметр нерелятивістської частинки, що вилетіла на нескінченності (при $E > mc^2$) [34, 38, 41]

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty, \dot{r} \rightarrow 0} \frac{mc^2 L}{E v} \quad (3.14)$$

Для незв'язної орбіти показати

$$L = \rho v_{\infty} \quad (3.15)$$

Доказ

Для доказу вище наведеного вираження для незв'язної орбіти, необхідно й досить знайти нерелятивістське наближення для радіальної швидкості частинки на нескінченності.

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} [E] = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\infty}}{c}\right)^2}} \\ \beta_{\infty} \ll 1 \end{cases} \Rightarrow E_0 \approx mc^2 \quad (3.16)$$

Кутовий момент частинки, що потрапила на незв'язну орбіту на нескінченності можна представити

$$L = \rho v_{\infty} \frac{E_0}{mc^2} \approx \rho v_{\infty} \quad (3.17)$$

Твердження Доведене

3.5.2. Кругові орбіти та визначення їх радіусів

Формулювання задача Каплана:

Дана кругова орбіта частки в поле Шварцшильда, знайти радіус і прицільний параметр. Визначити стійкість шуканих орбіт.[31, 36, 37]

Розв'язок

Залежність $r(t)$ для частинки, що рухається у шварцшильдському полі, дається формулою

$$(t - t_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right)}} dr \quad (3.18)$$

У диференціальному вигляді:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{cdt} = \frac{1}{E_0} \sqrt{(E_0)^2 - U^2(r)} \quad (3.19)$$

Де функція ефективної потенційної енергії за умови $U(r) \leq E_0$:

$$U(r) = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right)} \quad (3.20)$$

Визначити радіуси кругових орбіт і відповідні їм значення E_0 і L визначаються екстремумами функції $U(r)$, причому мінімуми відповідають стійким, а максимуми нестійким орбітам. Скласти й розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} U(R) = E_0 \\ \dot{U}(R) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left[1 + \left(\frac{L}{cR}\right)^2\right]} \\ 1 + \left(\frac{L}{cR}\right)^2 - \frac{2R}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left(\frac{L}{cR}\right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} E_0 \approx mcL \left(1 - \frac{r_g}{R_{1,2}}\right) \sqrt{\frac{2}{R_{1,2} r_g}} \\ \begin{cases} R_1 = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right], \text{ радіуси нестійких орбіт} \\ R_2 = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right], \text{ радіуси стійких орбіт} \end{cases} \end{cases} \quad (3.22)$$

Від туди області визначень для точок періастру[34, 38]:

1. Нестійких орбіт

$$\frac{3r_g}{2} \leq R_0 \leq 3r_g \quad (3.23)$$

2. Стійких орбіт

$$3r_g < R_0 < \infty \quad (3.24)$$

3.5.2.1. Головні характерні властивості для типових орбіт

1. Кругова орбіта, якщо енергія збігається мінімумом ефективного потенціалу $E_0 = U(R_{min})$;

2. Прецесія, якщо енергія трохи більше мінімуму ефективного потенціалу $E_0 \geq U(R_{min})$;

3. Тимчасовий обіг (кінцева велика кількість оборотів навколо нестійкої орбіти), якщо енергія приблизно дорівнює максимуму ефективного потенціалу $E_0 \approx U(R_{min})$;

4. Захоплення в чорну діру, якщо енергія більше максимуму ефективного потенціалу $E_0 > U(R_{min})$. [38]

3.5.3. Екстремальні значення для радіусів стійких і нестійких орбіт

Уведена функція радіуса кругової орбіти від значень кутового моменту

$$R(L) = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right] \quad (3.25)$$

Знайдемо точки екстремуму даної функції

$$\dot{R}(L) = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{3(cr_g)^2}{L^2}} = 0 \Rightarrow \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} L_1 \rightarrow \infty - \text{кутовий момент нестійкої орбіти з мінімальним радіусом} \\ L_2 = \sqrt{3}cr_g - \text{кутовий момент стійкої орбіти з мінімальним радіусом} \end{cases} \Rightarrow \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} R_{min1} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right) \right] \\ R_{min2} = \lim_{L \rightarrow \sqrt{3}cr_g} \left[\frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right) \right] \end{cases} \Rightarrow \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} R_{min1} = \frac{3r_g}{2} - \text{мінімальний радіус нестійкої орбіти} \\ R_{min2} = 3r_g - \text{мінімальний радіус стійкої орбіти} \end{cases} \quad (3.29)$$

3.5.4. Енергія мінімальної кругової орбіти

$$E_0 = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left(1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right)} \Rightarrow \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} E_1 = \infty - \text{енергія нестійкої орбіти з мінімальним радіусом} \\ E_2 = \sqrt{\frac{8}{9}} mc^2 - \text{енергія стійкої орбіти з мінімальним радіусом} \end{cases} \quad (3.31)$$

Прицільна відстань необхідна для частинки у точці $r > r_g$, яка потрапила на кругову орбіту з мінімальним радіусом:

$$\rho_0(L_0, E_0) = \frac{\frac{L_0}{c}}{\sqrt{\left|\left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 - 1\right|}} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} - \text{для того щоб частка потрапила на нестійку кругову орбіту} \\ \rho_2 = 3\sqrt{3}r_g - \text{для того щоб частка потрапила на стійку кругову орбіту} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.5.5. Диференціальний переріз гравітаційного захоплення

Диференціальний розмір поперечного перерізу являє собою елемент площі в площині прицільного параметра такого, що

$$\begin{cases} d\sigma = \rho d\rho d\varphi \\ 0 \leq \rho \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \sigma = \pi \rho^2 \quad (3.34)$$

Переріз гравітаційного захоплення нерелятивістської частинки що вийшла зі стану спокою на нескінченності

Параметри стійкої орбіти:

$$v_\infty = 0 \Rightarrow E_0 = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left(1 + \left(\frac{L}{cr}\right)^2\right)} = mc^2 \Rightarrow \begin{cases} R = 2r_g \\ L = 2cr_g - \text{його розв'язок} \end{cases} \quad (3.35)$$

[31, 36, 37] Прицільний параметр незв'язної орбіти

$$\begin{cases} \rho = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}} \\ v_\infty \ll c \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{2cr_g}{v_\infty} \quad (3.36)$$

Переріз гравітаційного захоплення нерелятивістської частинки що

вийшла зі стану спокою на нескінченності

$$\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2 \quad (3.37)$$

1) Для мінімальної нестійкої орбіти

$$\begin{cases} R_{min1} = \frac{3r_g}{2} \\ L_1 \rightarrow \infty \\ E_1 \rightarrow \infty \\ \rho_1 = \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} \end{cases} \quad (3.38)$$

Величина перерізу захоплення частинки на нестійку орбіту з мінімальним радіусом

$$\sigma = \frac{27\pi r_g^2}{4} \quad (3.39)$$

2) Для мінімальної стійкої орбіти

$$\begin{cases} R_{min2} = 3r_g \\ L_2 = \sqrt{3}cr_g \\ E_2 = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2 \\ \rho_2 = 3\sqrt{3}r_g \end{cases} \quad (3.40)$$

Величина перерізу захоплення частинки на стійку орбіту з мінімальним радіусом

$$\sigma = 27\pi r_g^2 \quad (3.41)$$

Побудувати набір потенційних кривих $U=U(r)$ [31, 36, 37]

3.6. Нерелятивістське наближення руху у гравітаційному полі

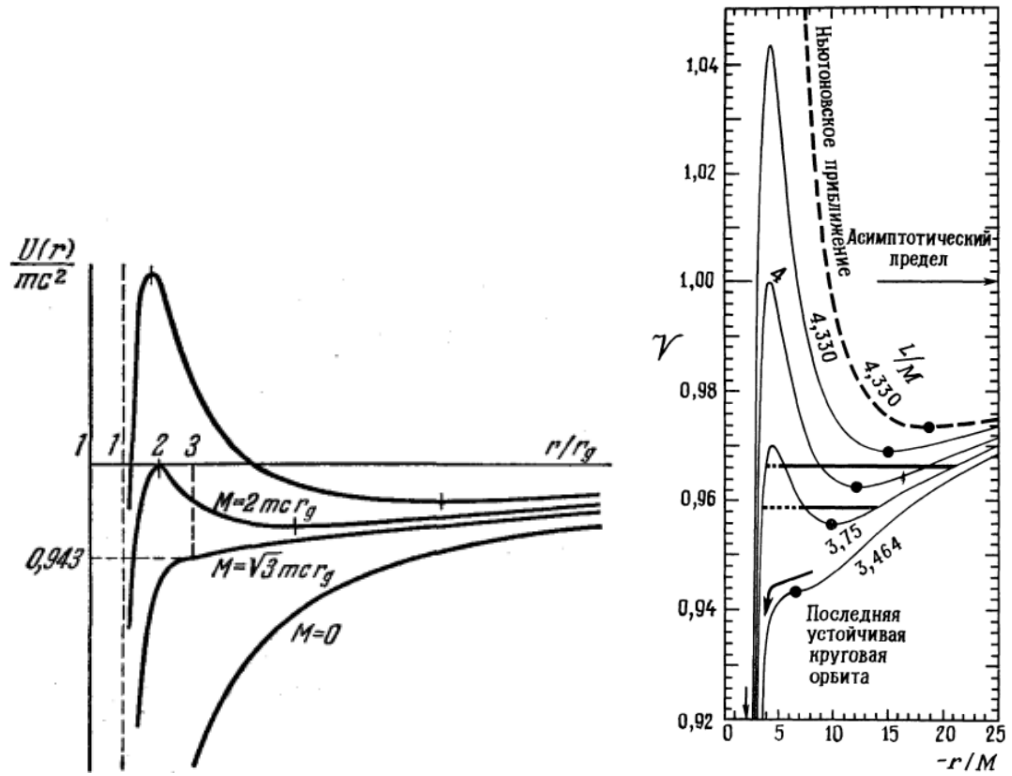


Figure 3.2. функція ефективної потенційної енергії

Головні інтеграли руху часоподібної геодезичної

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2 + (1 - \frac{r_g}{r}) \left(1 + \left(\frac{L}{cr} \right)^2 \right) = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{cd\tau} \right)^2 + \left(\left(\frac{L}{cr} \right)^2 - \frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r^3} \left(\frac{L}{c} \right)^2 \right)} = E, \text{ — енергія} \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L, \text{ — кутовий момент} \end{cases} \quad (3.43)$$

Ефективна потенційна енергія при ньютонівському наближенні Апроксимація утворюється за малою величиною гравітаційного радіуса $r_g \ll r$)

$$U(r) = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[1 + \left(\frac{L}{cr} \right)^2 \right]} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{cr} \right)^2 - \frac{r_g}{2r} - \frac{r_g}{2r^3} \left(\frac{L}{c} \right)^2 \right) \Rightarrow \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} U_{Gravitational}(r) = \frac{mGM}{r} \\ U_{Centrifugal}(r) = -\frac{mL^2}{2r^2} \\ U_{GeneralRelativityCorrectionTerm} = -\frac{G(m+M)}{r^3} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Ньютонівський ефективний потенціал

$$U(r) = mc^2 + \frac{mGM}{r} - \frac{mL^2}{2r^2} \quad (3.46)$$

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{cd\tau}\right)^2 + \left(\left(\frac{L}{cr}\right)^2 - \frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r^3} \left(\frac{L}{c}\right)^2\right)} \Rightarrow \quad (3.47)$$

$$(E - mc^2) \approx \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{mL^2}{2r^2} - \frac{mGM}{r} \quad (3.48)$$

Власний час частинки

$$\tau = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mc^2) + \left(\frac{c^2 r_g}{2L}\right)^2 - \left(\frac{L}{r} - \frac{c^2 r_g}{2L}\right)^2}} \quad (3.49)$$

З формули $d\varphi = \frac{L}{r^2}d\tau$, додержується рівняння кеплерівської орбіти, відповідне до першого закону Кеплера

$$\int d\varphi = \int \frac{L}{r^2}d\tau = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r} - \frac{c^2 r_g}{2L}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mc^2) + \left(\frac{c^2 r_g}{2L}\right)^2 - \left(\frac{L}{r} - \frac{c^2 r_g}{2L}\right)^2}} \Rightarrow \quad (3.50)$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\frac{L}{r} - \frac{c^2 r_g}{2L}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mc^2) + \left(\frac{c^2 r_g}{2L}\right)^2}} \right) \iff r = \frac{\frac{2}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{L}{c r_g}\right)^2 \left(\frac{E - mc^2}{mc^2}\right) \cos \varphi}} \quad (3.51)$$

Уведення лінійно незалежні параметри e , I .

Фокальна відстань

$$I = 2r_g \left(\frac{L}{cr_g} \right)^2, \quad (3.52)$$

Ексцентриситет

$$e = \sqrt{1 + 8 \left(\frac{L}{cr_g} \right)^2 \left(\frac{E - mc^2}{mc^2} \right)}. \quad (3.53)$$

1) Для класу обмежених у просторі орбіт ($E < mc^2$) розв'язком буде рівняння еліпса, де початок координат розташований у точці фокуса

$$\begin{cases} r = \frac{I}{1+e \cos(\varphi)}, & \text{— рівняння еліпса} \\ e < 1, & \text{— ексцентриситет еліпса} \\ E < mc^2 \end{cases} \quad (3.54)$$

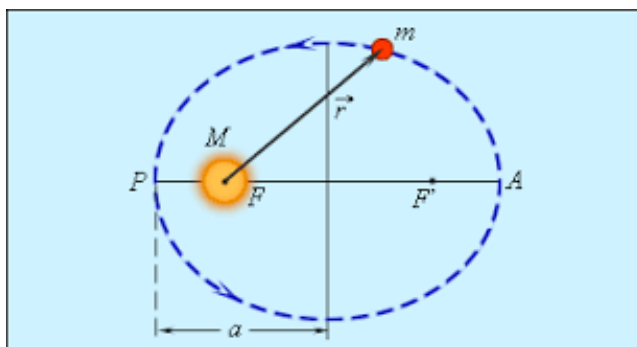


Figure 3.3. еліптична орбіта

2) Для класу необмежених у просторі орбіт ($E \geq mc^2$) розв'язком буде рівняння параболи й гіперболи, де початок координат розташований у точці фокуса

$$\begin{cases} r = \frac{I}{1+\cos(\varphi)}, & \text{— рівняння параболи} \\ e = 1, & \text{— ексцентриситет параболи} \\ E = mc^2 \\ L \neq 0, & \text{— не відноситься до класу радіальних геодезичних} \end{cases} \quad (3.55)$$

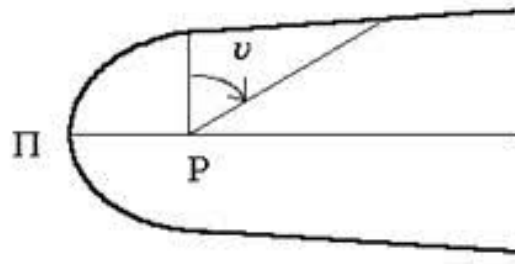


Figure 3.4. параболічна траєкторія

$$\begin{cases} r = \frac{I}{1+e \operatorname{ch}(\varphi)}, \text{— рівняння гіперболи} \\ e > 1, \text{— ексцентриситет гіперболи} \\ E > mc^2 \end{cases} \quad (3.56)$$

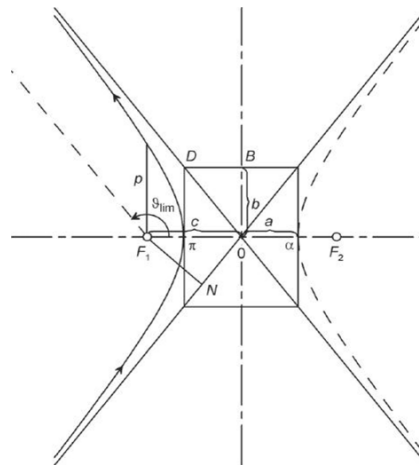


Figure 3.5. гіперболічна траєкторія

3.6.1. Прицільна відстань до орбіти фотона

Кут обігу навколо центральносиметричного сильного джерела гравітаційного поля світлового проміння на екваторіальній площині, є одним з розв'язків рівнянь ейконалу в умовах гравітації

$$\varphi = - \int \frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{l}{r}\right)^2}} dr \quad (3.57)$$

Величина відстані променя до силового центру - прицільний параметр

$$\rho = \frac{cl}{\omega} \quad (3.58)$$

При нульовому гравітаційному радіусі $r_g \rightarrow 0$, поширення проміння в порожньому просторі підкоряється рівнянню прямої

$$\varphi = \lim_{r_g \rightarrow 0} \left[- \int \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2}} dr \right] \Rightarrow \varphi = - \int \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2}} dr \quad (3.59)$$

З рівняння випливає, що фізично прицільна відстань фотона найкоротша відстань від чорної діри до проміння, що вилетів у порожнечі на нескінченності

$$\rho|_{r_g \rightarrow 0} = r \sin \varphi \quad (3.60)$$

3.6.2. Радіус періастрів світлових променів

Залежність $r(t)$ для фотона, що поширюється, у шварцшильдської геометрії, задається формулою:

$$t = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{lc}{\omega r}\right)^2\right)}} dr \quad (3.61)$$

Ця ж залежність у диференціальному вигляді:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c dt} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{c}} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \Phi^2(r)} \quad (3.62)$$

Де функція ефективного потенціалу фотона за умови $\Phi(r) \leq \frac{\omega_0}{c}$:

$$\Phi(r) = \frac{l}{r} \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (3.63)$$

Визначимо радіуси стійких кругових орбіт для фотона у шварцшильдської геометрії й відповідні їм значення ω_0 і l визначаються екстремумами функції

$\Phi(r)$. Складемо й розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi(R) = \frac{\omega_0}{c} \\ \Phi'(R) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{R}{\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}} = \frac{lc}{\omega_0} \\ (R - \frac{3r_g}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (3.64)$$

Визначити точку періастру:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = 0 - \text{локально вимірювана швидкість на круговій орбіті} \\ \rho(r) = \frac{r}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} - \text{прицільний параметр виходу на стійку орбіту} \\ R = \frac{3r_g}{2} - \text{радіус умовно стійкої орбіти фотона} \end{cases} \quad (3.65)$$

Знайти прицільний параметр гравітаційного захоплення фотона

$$\dot{\rho}(R_0) = 0 \Rightarrow R_0 = \frac{3r_g}{2} \Rightarrow \rho_{min} = \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} \quad (3.66)$$

При значеннях $\rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$ прицільної відстані промінь не зустрічає точки повороту, мінімальний переріз гравітаційного захоплення:

$$\sigma_{min} = \frac{27}{4}\pi r_g^2 \quad (3.67)$$

[31, 36, 37]

3.6.3. Локальна частота фотона поблизу горизонту подій

Розглянути поширення променів світла в постійному гравітаційному полі.

Визначимо локальну частоту сигналу як похідну ейконалу за часом, відповідно в системі відліку виберемо пов'язаною зі світовим часом частоту як $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$, оскільки t задана неявною, частота залишається постійною при поширенні проміння світла.

$$k_0 = g_{00}k_0 \quad (3.68)$$

Локальна частота у власному часі й рівна $\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$, вона помітна в

кожній точці простору

$$\omega_0 = \omega \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.69)$$

А значить фотон досягає границі сфери Шварцшильда ніколи не буде відправлений на нескінченність $\lim_{r \rightarrow r_g} [\omega_0] = 0$, що обумовлено властивостями Геометрії Шварцшильда.[31, 36, 37]

При спостереженні за тілом, що віддаляється, випускає світло частота спалахів з кожної новим спалахом падає!

3.6.4. Побудова графіку функції $\rho(r)$

Покажемо на графіку точку мінімальної прицільної відстані, необхідного для того, щоб закинути фотон на умовно стійку кругову орбіту.[31, 36, 37]

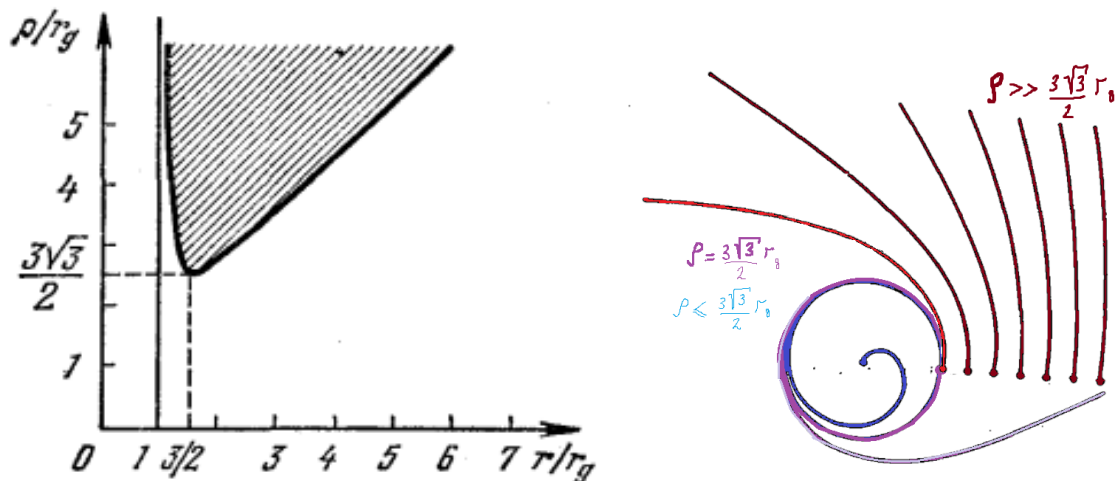


Figure 3.6. Области припустимих значень для прицільного параметра захоплення на умовно стійку орбіту

Функцію прицільної відстані ρ від радіуса точки періастру” R_p . Для збільшення масштабу графіка потрібно перенормувати за значенням гравітаційного радіуса:

$$\frac{\rho}{r_g} \left(\frac{R_p}{r_g}\right) = \frac{\frac{R_p}{r_g}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\frac{R_p}{r_g}}}} \quad (3.70)$$

На малюнку (ліворуч) функції $\rho(R)$ відповідає жирна лінія, їй відповідають

координати усіх точок періастру ($\frac{dr}{d\lambda}(R) = 0, R = R_p$).

Її асимптотична точка $R = r_g$.

Екстремальна точка на площині графіка ($R = \frac{3r_g}{2}, \rho = \frac{3\sqrt{3}}{2}$), (Фотон попадає на стійку кругову орбіту).

Поза кордоном заштрихованої області обмеженою кривій $\rho(r)$ - орбіти нестійкі.

Орбіти із прицільним параметром $\rho \gg \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$ не перетинаються з орбітами $\rho \leq \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$.

У заштрихованій частині площини графіка рух неможливий.

Зворотна функція

$$R = \rho \left(\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r_g}{2\rho}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{r_g}{2\rho}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r_g}{2\rho}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{r_g}{2\rho}} \right) \quad (3.71)$$

Де $\rho = \frac{lc}{\omega}$

4. ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ШЛЯХОМ РОЗВ'ЯЗКУ ТЕСТОВИХ ЗАДАЧ

4.1. Тестування інваріантності кутового моменту відносно перетворення координат на сфері S^2

Довести, що квадрат повного моменту кількості руху є інтеграл руху уздовж геодезичної кривій в метриці Шварцшильда[35]

$$(L)^2 = r^2 h^{ik} u_i u_k = u_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)} u_\varphi^2 \quad (4.1)$$

Доказ

Метричний тензор (h) на сфері $S^2 = \{0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ має матричний вигляд:

$$\begin{pmatrix} h_{\theta\theta} & h_{\varphi\theta} \\ h_{\theta\varphi} & h_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Знайти кутовий момент як інтеграл рухів

Враховуючи природу скалярних полів при диференційованих по параметрах, необхідно проварювати інтервал:

$$\begin{cases} \delta(ds^2) = \delta(g_{ik}) dx^i dx^k + 2g_{ik} dx^i \delta(dx^k) \\ \delta ds = 0, \text{ скаляр інваріантний до паралельного перенесення} \end{cases} \quad (4.3)$$

Вектор 4-швидкості дотичної (u) не змінюється уздовж геодезичної кривої вимірюваної інтервалом ds, знайдемо рівняння даної лінії

4.1.0.1. Розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} u^i_{,s} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = 0 \\ g_{jl} u^j u^l = 1 \end{cases} \iff \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \frac{du^0}{ds} + \frac{\frac{r_g}{r^2}}{(1-\frac{r_g}{r})} u^r u^0 = 0, \\ \frac{du^r}{ds} + \frac{r_g}{2r^2} (1 - \frac{r_g}{r}) (u^0)^2 - r(1 - \frac{r_g}{r}) ((u^\theta)^2 + (u^\varphi)^2 \sin^2(\theta)) = 0, \\ \frac{du^\theta}{ds} + \frac{2}{r} u^r u^\varphi - \sin(\theta) \cos(\theta) (u^\theta)^2 = 0, \\ \frac{du^\varphi}{ds} + \frac{2}{r} u^r u^\phi + 2 \operatorname{ctg}(\theta) u^\theta u^\phi = 0, \\ (1 - \frac{r_g}{r}) (u^0)^2 - \frac{1}{(1-\frac{r_g}{r})} (u^r)^2 - r^2 \sin^2(\theta) (u^\varphi)^2 - r^2 (u^\theta)^2 = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Інтеграл руху

$$\begin{cases} \frac{du^\theta}{ds} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial s} u^\theta - \sin(\theta) \cos(\theta) (u^\varphi)^2 = 0 \mid \otimes (2u^\theta) \\ \frac{du^\varphi}{ds} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} u^\varphi + 2 \operatorname{ctg}(\theta) u^\theta u^\varphi = 0 \mid \otimes (2u^\varphi \sin^2(\theta)) \end{cases} \Rightarrow \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} 2u^\theta \frac{du^\theta}{ds} + \frac{4}{r} \frac{\partial r}{\partial s} (u^\theta)^2 - \sin(2\theta) u^\theta (u^\varphi)^2 = 0 \\ 2 \sin^2(\theta) u^\varphi \frac{du^\varphi}{ds} + \frac{4}{r} \frac{dr}{ds} \sin^2(\theta) (u^\varphi)^2 + 2 \sin(2\theta) u^\theta (u^\varphi)^2 = 0 \mid \oplus \sin(2\theta) u^\theta (u^\varphi)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.7)$$

$$h_{ik} u^i u^k = r^2 (u^\theta)^2 + r^2 \sin^2(\theta) (u^\varphi)^2 = \left(\frac{\operatorname{Const}}{r} \right)^2 \quad (4.8)$$

Де (h) метричний тензор сфери \mathcal{S}^2

$$\begin{pmatrix} h_{\theta\theta} & h_{\varphi\theta} \\ h_{\theta\varphi} & h_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Величини $u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ і $u_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ є інтегралами руху на сфері

$$h_{ik}u^i u^k = h_{ik}h^{ij}h^{kl}u_j u_l \Rightarrow \begin{cases} h^{jl} = h_{ik}h^{ij}h^{kl} \\ (u^\theta)^2 + \left(\frac{u^\varphi}{\sin(\theta)}\right)^2 = (Const)^2 \end{cases} \Rightarrow Const = \frac{L}{c} \quad (4.10)$$

Отже, кутовий момент L зберігається в загальному випадку.

Квадрат величини інваріантної до поворотів системи координат

$$(L)^2 = \left(\frac{p_\theta}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{m \sin(\theta)}\right)^2 \quad (4.11)$$

Твердження доведене

У силу сферичної симетрії координатної системи при поворотах, усі орбіти лежать на екваторіальній площині, ми будемо мати $p_\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\Rightarrow L = \frac{p_\varphi}{m} \quad (4.12)$$

4.2. Докази обмеженості орбіт стійкою екваторіальною площиною

а) Довести, що в геометрії Шварцшильда всі орбіти є плоскими.

б) Довести, що такі орбіти є стійка плоскі.[35]

Доказ

а) Для доказу необхідно й досить

1. Урахувати сферичну симетрію шварцвальдського простору-часу;

2. Розв'язати одне з рівнянь геодезичної кривої й виявити рівність інтеграла руху $u^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ кутовому моменту.

Розв'язок

$$\frac{du^\varphi}{ds} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial s} u^\varphi + 2 \operatorname{ctg}(\theta) u^\theta u^\varphi = 0 \quad \bigotimes \quad \frac{1}{u^\varphi} \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (\ln(u^\varphi) + 2 \ln(r) + 2 \ln(\sin(\theta))) = 0 \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_\varphi = const \\ u^\varphi = \frac{const}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{cases} \quad (4.15)$$

Скориставшись сферичною симетрією метрики, припускаючи, що частинка відчуває збурювання вивідне її із площини, і параметр її орбіти $\delta\theta$ осцилює поблизу $\theta = \frac{\pi}{2}$ і не зростає згодом.

Розв'язок рівняння

$$\begin{cases} (Const)^2 = (u_\theta)^2 + \left(\frac{const}{\sin(\theta)}\right)^2 \\ u_\theta = -r^2 \frac{d\theta}{ds} \end{cases} \Rightarrow (Const)^2 = \left(r^2 \frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{const}{\sin(\theta)}\right)^2 \quad (4.16)$$

Для розв'язку необхідно орієнтувати координатні осі, так щоб орбіта лежала на площині:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = 0 \\ Const = \frac{const}{\sin(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ Const = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\varphi = \frac{L}{c} \\ \theta_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$

б) Для доказу стійкості площини необхідно й досить розглянути окремий випадок для рівняння

$$\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\left(\frac{L}{c}\right)^2 - \left(\frac{u_\varphi}{\sin(\theta)}\right)^2 \right) \quad (4.18)$$

Припустимо що незбурена орбіта має наступні параметри:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ K = u_\varphi = \frac{L}{c} \end{cases} \quad (4.19)$$

Нехай частинка випробовує збурювання, що виводить її із площини орбіти, з точністю до першого порядку для

$$\begin{cases} u_\varphi = K + \delta u_\varphi \\ L = K + \delta L \end{cases} \quad (4.20)$$

І до другого порядку для $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$

$$\left[\frac{d\theta}{d\lambda}\right]^2 = \frac{1}{r^4}[2K\delta(L - u_\varphi) - (K\delta\varphi)^2] \Rightarrow \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2(\delta\theta)}{d\lambda^2} = -\frac{K^2}{r^4}\delta\theta \Rightarrow \delta\theta \sim \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{K\lambda}{r^2}\right) \quad (4.22)$$

З цього рівняння видно, що збурювання $\delta\theta$ осцилює поблизу $\theta = \frac{\pi}{2}$ і не росте згодом, отже орбіти є стійко плоскими!

Твердження доведене

4.3. Дослідження локальної швидкості радіальної частинки біля горизонту подій

Частинка падає по радіусу на центр сфери Шварцшильда.

Чому рівна її спрямована до центру радіальна швидкість $\frac{dr}{dt}$, вимірювана за власним часом на нескінченності, при деякому значенні радіуса r (у координатах кривизни)?

Чому рівна локально вимірювана швидкість $\frac{dr}{d\tau}$ стосовно нерухомого спостерігача в точці з тим же значенням радіуса?[35]

Розв'язок

У випадку радіального падіння в нас є два інтеграли руху:

1)Кутовий момент $L = 0$.

2)Норма вектора (u):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(u^0)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}(u^r)^2 = 1 \quad (4.23)$$

3)Другий інтеграл руху можна знайти, розв'язавши один з вище наведених рівнянь геодезичної кривої:

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\frac{r_g}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \frac{\partial r}{\partial s} u^0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\ln(u^0) + \ln\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)) = 0 \Rightarrow \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} u^0 = \frac{const_0}{(1-\frac{r_g}{r})} \\ const_0 = \frac{E}{mc^2} \end{cases} \quad (4.25)$$

Нерухомий спостерігач у точці з тим же локально вимірюваним радіусом R , що й у частинки що падає радіально:

$$\frac{1}{(1-\frac{r_g}{r})} \left(\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - (u_r)^2 \right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} dr = dR \\ dt = \frac{d\tau}{(1-\frac{r_g}{r})} \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{cdt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1} + \frac{r_g}{r} \\ \frac{dr}{cd\tau} = \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1} + \frac{r_g}{r} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.27)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \frac{dr}{dt} \quad (4.28)$$

Звідси випливає, що локально вимірювана швидкість частки, що радіально рухається, на границі сфери Шварцшильда прямо пропорційна енергії частинки

$$\lim_{r \rightarrow r_g} \frac{dR}{d\tau} = \frac{E}{mc} \quad (4.29)$$

4.4. Дослідження радіального руху частинки

Вивести рівняння руху (рівняння єднальні t , r і τ) для частинки що падає по радіусу в геометрії Шварцшильда. (Радіальні часоподібні геодезичні)

Розглянути три випадки:

- 1) Частинка вивільняється зі стану спокою при $r=R$, де енергія $E_0 < mc^2$;
- 2) Частинка вивільняється зі стану спокою на нескінченності $R = \infty$, де енергія $E_0 = mc^2$;
- 3) Частинка випускається з нескінченності на центр зі швидкістю $v_\infty \neq 0$ і як наслідок, енергією $E_0 > mc^2$. [35]

Розв'язок

4.4.0.1. Випадок перший

Уведена точка з нульовою швидкістю (точка апоастру), у якій частинка вийшла зі стану спокою

$$\begin{cases} u^r = 0 \\ R = \frac{r_g}{1 - \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2}, \text{ — точка апоастру} \\ E_0 < mc^2 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.30)$$

Розв'язок

$$\frac{dr}{cd\tau} = \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{R}}} dr \quad (4.31)$$

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} \left(-\sqrt{\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R}{r} - 1} \right) \\ R \geq r \end{cases} \quad (4.32)$$

Був уведений параметр циклоїди $\eta = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R}{r} - 1}$, і записаний розв'язок у параметричному виді:

$$\begin{cases} r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta) \\ \tau = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} (\eta + \sin \eta) \end{cases} \quad (4.33)$$

Розв'язок

$$t = \frac{r_g}{2c} \left(\sqrt{\frac{R}{r_g} - 1} \left[\eta + \frac{R}{2r_g} (\sin \eta + \eta) \right] + \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} - 1\right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\eta}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} - 1\right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\eta}{2}\right)}} \right) \quad (4.34)$$

Одержимо параметричний розв'язок сполучні параметри t, r, τ :

$$\begin{cases} t = \frac{r_g}{2} \frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{R}{r_g} - 1} \left[\eta + \frac{R}{2r_g} (\sin \eta + \eta) \right] \right) + \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} - 1\right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\eta}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} - 1\right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\eta}{2}\right)}} \\ r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta) \\ \tau = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} (\eta + \sin \eta) \\ \forall \eta \in [0; 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R}{r_g} - 1}) \end{cases} \quad (4.35)$$

4.4.0.2. Випадок другий

Вибрати значення енергії частинки на нескінченності, у стані спокою рівним $E_0 = mc^2$, тоді рівняння:

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ R = \infty \\ E_0 = mc^2 \end{cases} \Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r}}} \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{r}}} dr \\ t = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r}}} dr \end{cases} \Rightarrow \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \tau = -\frac{3}{2c} \sqrt{\frac{r^3}{r_g}} \\ t = -\frac{3}{2c} \sqrt{\frac{r^3}{r_g}} - \frac{2}{c} \sqrt{rr_g} + \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r}{r_g} + 1}}{\sqrt{\frac{r}{r_g} - 1}} \right| \end{cases} \quad (4.38)$$

Випадок третій

Частинка вивільняється зі стану спокою на нескінченності. При $E_0 > mc^2$ обрати значення радіуса кривизни періастру таким

$$R = \frac{r_g}{\left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 - 1} \quad (4.39)$$

Щоб його заміна його знака ”+ \rightarrow -” привела до рівняння:

$$\tau = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{r} + \frac{r_g}{R}}} dr \quad (4.40)$$

Розв’язок

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} \left(-\sqrt{\frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2} + \operatorname{arth} \sqrt{\frac{R}{r} + 1} \right) \\ r \geq R \end{cases} \quad (4.41)$$

Увести змінну $\eta = 2\operatorname{arth} \sqrt{\frac{R}{r} + 1}$, і переписати розв’язок у параметричному виді:

$$\begin{cases} r = \frac{R}{2} (\operatorname{ch}(\eta) - 1) \\ \tau = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} (\eta - \operatorname{sh}(\eta)) \end{cases} \quad (4.42)$$

Розв’язок сполучив параметри t, r, τ :

$$\begin{cases} t = \frac{r_g}{2c} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} + 1\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\eta}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{r_g} + 1\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\eta}{2}\right)}} \right| - \sqrt{\frac{R}{2r_g} + 1} \left(\eta + \frac{R}{2r_g} (\operatorname{sh}(\eta) - \eta) \right) \right) \\ r = \frac{R}{2} (\operatorname{ch}(\eta) - 1) \\ \tau = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{R^3}{r_g}} (\eta - \operatorname{sh}(\eta)) \\ \forall \eta \in [2\operatorname{arth}(2); 2\operatorname{arth} \sqrt{\frac{R}{r_g} + 1}] \end{cases} \quad (4.43)$$

4.4.1. Побудова ключового рівняння часоподібної геодезичної

Вивести диференціальне рівняння першого порядку, що описує траєкторію для екваторіальних орбіт геометрії Шварцшильда.

Розв’язок

Вибрати екваторіальну площину орієнтовану в такий спосіб $\theta = \frac{\pi}{2}$, тоді один з інтегралів руху має такий вигляд

$$u^\theta = 0 \Rightarrow u_\theta = 0 \quad (4.44)$$

Розглянемо інтеграл руху

$$\frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} (u_0)^2 - (1 - \frac{r_g}{r}) (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_\varphi)^2 = 1 \Rightarrow \quad (4.45)$$

$$u_r = \frac{1}{(1 - \frac{r_g}{r})} \sqrt{(u_0)^2 - (1 - \frac{r_g}{r}) (1 + (\frac{u_\varphi}{r})^2)} \quad (4.46)$$

Перелічити інтеграли, що залишилися, руху такі, які дають наступні вектори Кілінгу $\frac{\partial}{\partial x^0}$ і $\frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{E}{mc^2} - \text{закон збереження енергії} \\ u_\varphi = \frac{L}{c} - \text{закон збереження кутового моменту} \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\begin{cases} u^r = -(1 - \frac{r_g}{r}) u_r \\ u^\varphi = -\frac{1}{r^2} u_\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = r^2 (1 - \frac{r_g}{r}) \frac{u_r}{u_\varphi} \Rightarrow \quad (4.48)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{cr^2}{L} \sqrt{(\frac{E}{mc^2})^2 - (1 - \frac{r_g}{r}) (1 + (\frac{L}{cr})^2)} \Rightarrow \quad (4.49)$$

$$(\frac{d(\frac{L}{cr})}{d\varphi})^2 = (\frac{E}{mc^2})^2 - (1 - \frac{r_g}{r}) (1 + (\frac{L}{cr})^2) \quad (4.50)$$

Отримаємо рівняння часоподібної геодезичної

$$(\frac{d(\frac{1}{r})}{d\varphi})^2 = \frac{r_g}{r^3} - \frac{1}{r^2} + (\frac{c}{L})^2 \frac{r_g}{r} - \frac{1 - (\frac{E}{mc^2})^2}{(\frac{L}{c})^2} \quad (4.51)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_g u^3 - u^2 + \left(\frac{cr_g}{L}\right)^2 \frac{u}{r_g} - \frac{1 - \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2}{\left(\frac{L}{c}\right)^2} \quad (4.52)$$

4.5. Визначення рівняння руху проміння та умов його гравітаційного відбиття

Показати, що траєкторії світлових променів у метриці Шварцшильда підкоряються рівнянню

$$\frac{d^2 u'}{d\varphi^2} + u' = 3(u')^2 \quad (4.53)$$

Позначити прицільну відстань ρ як мінімальне значення r уздовж траєкторії.

Яке відхилення фотона, що пролітає повз сферичного гравітуючого тіла, у випадку $\left(\frac{r_g}{2} \leq \rho\right)$?

Вивести формулу для кута відхилення в першому неznикаючому порядку по $\frac{r_g}{2\rho}$. [35]

Розв'язок

Вибрати екваторіальну площину так, щоб $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Тоді $u_\theta = 0$.

Скористатися рівнянням траєкторії фотона отримане з розв'язку рівняння ейконалу в умовах гравітації:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2}} \quad (4.54)$$

Виразити оператор диференціювання $\frac{d}{d\varphi}$ через $\frac{d}{dr}$.

$$\frac{d}{d\varphi} = r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{d}{dr} \quad (4.55)$$

Звести обидві частини рівняння у квадрат:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} = r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{d}{dr} \right) \quad (4.56)$$

Увести змінну $u' = \frac{r_g}{2r}$ і продиференціювати

$$\frac{d^2 u'}{d\varphi^2} = r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2} \frac{d}{dr} \frac{r_g}{2r} \right) \Rightarrow \quad (4.57)$$

$$\frac{d^2 u'}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r^2}{2} \frac{d}{dr} \left(\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2 \right) \Rightarrow \quad (4.58)$$

$$\frac{d^2 u'}{d\varphi^2} + u' = 3(u')^2 \quad (4.59)$$

Розв'язок рівняння методом Ван Дер Поля:

У граничному наближенні $0 < \frac{r_g}{2\rho} \ll 1$, за нульове наближення до розв'язку можна вибрати розв'язок типу "прямої лінії" ($\rho = r \sin(\varphi)$ або $u'_0 = \frac{r_g}{2\rho} \sin(\varphi)$).

Розв'язок у першому наближенні

$$\begin{cases} u' \approx u'_0 + u'_1, \\ u'_1 \ll 1. \end{cases} \quad (4.60)$$

Підставлення в рівняння

$$\frac{d^2 u'_1}{d\varphi^2} + u'_1 \approx 3(u'_0)^2 \quad (4.61)$$

$$\frac{d^2 u'_1}{d\varphi^2} + u'_1 \approx 3\left(\frac{r_g}{2\rho} \sin(\varphi)\right)^2 \quad (4.62)$$

$$\frac{r_g}{2\rho} \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_g}{2\rho}\right)^2 (3 + \cos(2\varphi)) = 0 \Rightarrow \quad (4.63)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 \approx -\frac{r_g}{\rho}, \\ \varphi_2 \approx \pi + \frac{r_g}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.64)$$

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho} \quad (4.65)$$

Де відхиленню проміння в початку системи координат при відсутності гравітації ($r_g \rightarrow 0$) відповідає кут $\Delta\varphi = \pi$.

4.6. Дослідження граничних ефектів руху частинок в гравітаційному полі шляхом доведення тверджень щодо властивостей часоподібних геодезичних

1) Довести твердження: орбіти з періастрами при $R \gg \frac{r_g}{2}$ є кеплерівськими за формою, за винятком зрушення періастр.[38]

Доведення твердження

Відомо що кеплерівські орбіти належить до сімейства обмежених у просторі орбіт першого роду.

Рівняння, що описує орбіту частинки

$$f(u) = r_g u^3 - u^2 + \left(\frac{c}{L}\right)^2 r_g u + \left(\frac{c}{L}\right)^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1\right], u = \frac{1}{r} \quad (4.66)$$

має три позитивні дійсні корені ($u_1 \leq u_2 \leq u_3$), що мають вигляд:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1-e}{I}, \text{точка апоастр} \\ u_2 = \frac{1+e}{I}, \text{точка періастр} \\ u_3 = \frac{1}{r_g} - \frac{2}{I} \end{cases} \quad (4.67)$$

Де фокальний параметр I - деяка позитивна постійна величина. Ексцентриситет e менше одиниці, як впливає з умови ($E < mc^2$).

$$0 \leq e < 1 \quad (4.68)$$

Дана орбіта осцилює між двома екстремальними значеннями $R_{\Pi} = (u_1)^{-1}$, $R_A = (u_2)^{-1}$, і в ньютонівській межі переходить в орбіти Кеплера.

1. Фокальний параметр кеплерівської за формою орбіти $R \gg \frac{r_g}{2}$ має обмеження:

$$R \gg \frac{r_g}{2} \Rightarrow I \gg \frac{r_g}{2}(1 + e) \quad (4.69)$$

2. З умови $(u_1 \leq u_2 \leq u_3)$ випливає $I \geq r_g(3 + e)$.

Твердження доведене

2) Довести твердження: орбіти з періастрами при $R \leq 5r_g$ помітно відрізняються від кеплерівських.[38]

Доказ від протилежного.

Знайти фокальний параметр використовуючи властивість корінь рівняння $f(u)=0$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{r_g} \\ u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 = \left(\frac{c}{L}\right)^2 \\ u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{r_g} \left(\frac{c}{L}\right)^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{c}{L}\right)^2 = \frac{2}{I} \left[\frac{1}{r_g} - \frac{2}{I}\right] + \frac{(1-e^2)}{I^2} \\ \left(\frac{c}{L}\right)^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1\right] = \frac{(1-e^2)}{I^2} \left[\frac{2r_g}{I} - 1\right] \end{cases} \Rightarrow \quad (4.70)$$

$$I = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - (3 + e^2) \left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right) \quad (4.71)$$

Радіус у точці періастру $R \leq 5r_g$

$$R = \frac{I}{1 + e} \Rightarrow R = \frac{1}{1 + e} \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - (3 + e^2) \left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right) \quad (4.72)$$

Ексцентриситет $e \geq 1$, що явно не відповідає параметрам необмеженої в просторі орбіти. А значить орбіти помітно відрізняються від кеплерівських.

Твердження доведене

3. Довести твердження: Якщо $\rho \leq \sqrt{3}r_g$, то точка періастру відсутня і будь-яка частинка що падає з необхідністю затягається в $r = r_g$.[38]

Доведення від протилежного.

Кругові орбіти неможливі при $L < \sqrt{3}cr_g$, отже розглянута орбіта належати до сімейства обмежених у просторі орбіт другого роду.

Точка апоастру $R_A = (u_3)^{-1}$ - початок даної орбіти, границя обрїю подій чорної діри $r = r_g$ - кінець.

А отже, періастр відсутній і будь-яка частинка що падає з необхідністю зтягається в $r = r_g$.

4. Довести твердження: Якщо $\sqrt{3}r_g < \rho < 2r_g$, то є зв'язані орбіти, по яких рухається усередину й назовні між періастром і апоастром, однак будь-яка частинка, що приходить із $r = \infty$, з необхідністю зтягається в $r = r_g$ ($E \geq mc^2$ - Орбіта незв'язна).[38]

Доведення

Дана орбіта належить до класу необмежених у просторі орбіт першого роду, частинка "приходить" з нескінченності. Ексцентриситет e більше одиниці, як випливає з умови ($E \geq mc^2$).

$$3 > e \geq 1 \quad (4.73)$$

У рівняння $f(u)=0$ необмежених орбіт мають хоча б один негативний корінь.

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{(e-1)}{I}, \\ u_2 = \frac{(1+e)}{I}, \\ u_3 = \frac{1}{r_g} - \frac{2}{I} \end{cases} \quad u_1 < u_2 \leq u_3 \quad (4.74)$$

Була введена прицільна відстань для частки, що летить із нескінченності й впаде на обрій подій

$$\rho = \frac{\frac{L}{c}}{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}, E \geq mc^2 \Rightarrow \quad (4.75)$$

$$\rho = \frac{I}{\sqrt{(e^2 - 1)\left[1 - \frac{2r_g}{I}\right]}}, \begin{cases} 1 \leq e < 3 \\ I \leq 2r_g \end{cases} \quad (4.76)$$

Точка переастру встановлена на границі сфери Шварцшильда $R = r_g$, тому фокальний параметр $I = (1 + e)r_g$, отже

$$\rho = \frac{(e + 1)}{(e - 1)} r_g \quad (4.77)$$

При $e < 3$ прицільний параметр $\rho < 2r_g$, а значить є зв'язані орбіти, по яких рухається усередину й назовні між переастром і апоастром, однак будь-яка

частка, що приходить із $r = \infty$, з необхідністю зтягається в $r = r_g$.

Твердження доведене

5. Довести твердження: Якщо $\rho > 2r_g$, то є зв'язані орбіти; частинки прихожі від $r = \infty$ з $E < U_{max}$ досягають периастру і вертається потім до $r = \infty$; однак частинки, що прийшли від $r = \infty$ з $E > U_{max}$, зтягаються до $r = r_g$. [38]

Доведення твердження

Відомо що екстремальні точки функції $U(R) = mc^2 \sqrt{(1 - \frac{r_g}{r}) [1 + (\frac{L}{cr})^2]}$ мають вигляд

$$\begin{cases} u_A = \frac{1}{3r_g} (1 - \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}cr_g}{L})^2}) = \frac{1-e}{I}, \text{— Точка апоастру} \\ u_{\Pi} = \frac{1}{3r_g} (1 + \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}cr_g}{L})^2}) = \frac{1+e}{I}, \text{— Точка периастру} \\ u = 0, \text{— Початок орбіти на нескінченності} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.78)$$

$$\begin{cases} I = 3r_g \\ e = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}cr_g}{L})^2} \end{cases} \quad (4.79)$$

Критичні значення ефективної потенційної енергії

$$U(R_{A,\Pi}) = \frac{\sqrt{2}(2 \pm e)mc^2}{3\sqrt{(1 \pm e)}} \quad (4.80)$$

Кутовий момент виразимо через ексцентриситет:

$$L = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}cr_g}{\sqrt{(1-e^2)}}, 0 \leq e < 1, \text{— обмежені в просторі орбіти} \\ \frac{\sqrt{3}cr_g}{\sqrt{(e^2-1)}}, 1 \leq e, \text{— необмежені в просторі орбіти} \end{cases} \quad (4.81)$$

Так само відомо що при енергіях частки ($E < mc^2$)- орбіти в просторі обмежені, тоді як при ($E \geq mc^2$)- орбіти не обмежені в просторі.

При $\rho > 2r_g$ - орбіти відносяться до класу необмежених у просторі орбіт, тому виберемо ексцентриситет таким $e \rightarrow 1$, щоб знайти асимптотичне

наближення для ефективної потенційної енергії:

$$U_{max} = \lim_{e \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{2}(2+e)mc^2}{3\sqrt{(1+e)}} \right] = mc^2 \quad (4.82)$$

При енергії $E > U_{max} = mc^2$ при прицільному параметрі $\rho \geq 2r_g$ орбіта належить сімейству орбіт другого роду, а значить на нескінченності частинка попадає на силовий центр (чорну діру).

Коли при енергії $E < U_{max} = mc^2$ при прицільному параметрі $\rho \geq 2r_g$ орбіта належить сімейству орбіт першого роду, і при ньютонівському наближенні відноситься до класу Гіперболічних орбіт, де частка, що летить із нескінченності відбивається в точці переастроу назад на нескінченність.

Твердження доведене

6. Довести твердження: У мінімумі ефективного потенціалу є стійкі кругові орбіти; мінімум рухається усередину від $r = \infty$ для $L = \infty$ до $r = 3r_g$ для $L = \sqrt{3}cr_g$. Найбільше сильно зв'язана стійка кругова орбіта ($L = \sqrt{3}cr_g, r = 3r_g$) має відносну енергію зв'язку $E_0 = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2$. [38]

Доведення твердження

Розглянути розв'язок задачі Каплана для мінімальних кругових орбіт ($e=0$)

У цьому випадку орбіта представляє окружність зі періастром $R_{II} = I$, радіус якого є коренем рівняння

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = \left(\frac{c}{L}\right)^2 \Rightarrow R^2 - \frac{2}{r_g}\left(\frac{L}{c}\right)^2R + 3\left(\frac{L}{c}\right)^2 = 0 \quad (4.83)$$

Більший із двох корінь рівняння (при $L > \sqrt{3}r_g$) відповідає точці мінімуму кривої ефективної потенційної енергії $U_{min} = U(R_1)$, а менший корінь відповідає максимуму цієї кривої $U_{max} = U(R_2)$, таким чином, кругова орбіта з більшим радіусом стійка, а кругова орбіта з меншим радіусом нестійка.

При можливому мінімальному значенні кутового моменту $L = \sqrt{3}cr_g$ значення енергії $E = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2$.

Радіус кругової орбіти

$$R = \sqrt{3}r_g \left(\frac{L}{\sqrt{3}cr_g}\right)^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}cr_g}{L}\right)^2}\right] \Rightarrow R = I = 3r_g \quad (4.84)$$

Дана орбіта мінімальна зв'язана(стійка).

Кутовий момент $L = \infty$ і енергія нестійкої орбіти $E = \infty$, а значить найбільший корінь

$$R = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c} \right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - 3 \left(\frac{cr_g}{L} \right)^2} \right) \right] = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c} \right)^2 \left(1 - \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{cr_g}{L} \right)^2 + o(1) \right) \right) \right] \Rightarrow \quad (4.85)$$

$$R = \frac{3r_g}{2} \quad (4.86)$$

Дана орбіта нестійка(мінімум рухається усередину)

Твердження доведені

7. Довести твердження: У максимумі ефективного потенціалу є нестійкі кругові орбіти; максимум рухається назовні від $r = \frac{3r_g}{2}$ для $L = \infty$ до $r = 3r_g$ для $L = \sqrt{3}cr_g$. Якщо частинку, що рухається по такій круговій орбіті, підштовхнути усередину, то вона буде падати по спіралі до $r = r_g$.

Якщо частку підштовхнути назовні й вона має $E_0 > mc^2$, то вона піде до $r = \infty$, а якщо частинка має $E_0 < mc^2$, то вона або досягне апоастроу й потім перейде на спіральну орбіту, упавши, в остаточному підсумку, на зірку (наприклад, при $\delta E > 0$), з незмінним моментом імпульсу, або буде рухатися назовні й усередину між апоастром і періастром по стійкій зв'язаній орбіті (наприклад, при $\delta E < 0$ знову з незмінним моментом імпульсу).

Якщо частинку, що рухається по мінімальній стійкій круговій орбіті "підштовхнути усередину", то її кутовий момент $L < \sqrt{3}cr_g$, отже перетворена орбіта належить до сімейства орбіт другого роду із класу обмежених у просторі орбіт $mc^2 > E - \delta E$, де $E = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2$. Частка буде падати по спіралі до $r = r_g$. [38]

Доведення твердження

Якщо ж частку "підштовхнути назовні" з нестійкої орбіти при $L = \infty$, то нова орбіта належить до сімейства орбіт другого роду із класу необмежених у просторі орбіт $mc^2 < E + \delta E$, де $E = \infty$. Частинка "іде" на нескінченність $r = \infty$.

Твердження доведені

4.7. Дослідження граничних ефектів руху світлових променів в гравітаційному полі шляхом доведення тверджень щодо властивостей світлоподібних геодезичних

Довести твердження:

1. Довести твердження: **Частинка з нульовою масою спокою** $m_\lambda = 0$ із прицільним параметром $\rho > \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$ виходить зі стану спокою в точці $r = \infty$, потім падає й ” відбивається від потенційного бар’єра”, вертаючись назад до на нескінченність. Точка переастроу ($\frac{dr}{d\lambda}(R) = 0$; $\rho(R) = \frac{R}{\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}}$).

а) Для спалаху із прицільним параметром $\rho \gg \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$ орбіта представляє майже пряму лінію зі слабким відхиленням на кут $\Theta = \frac{2r_g}{\rho}$.

б) Фотон із прицільним параметром $\frac{3\sqrt{3}r_g}{2} < \rho \ll \frac{r_g}{2} + \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$, перш ніж полетіти назад до $r = \infty$, робить багато обертів навколо зірки на $r \approx \frac{3r_g}{2}$ ”нестійка орбіта”. Доказ твердження а й б

Світлоподібна орбіта із прицільним параметром $\frac{3\sqrt{3}r_g}{2} < \rho$ відноситься до класу геодезичних кривих першого роду, тому коріння кубічного рівняння $f(u)=0$ дійсні й мають такий вигляд

$$u_1 < u_3 < u_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{(R-r_g-s)}{2r_gR} \\ u_2 = \frac{(R-r_g+S)}{2r_gR} \\ u_3 = \frac{1}{R} \end{cases} \quad (4.87)$$

Згідно за теоремою Вієта, зі співвідношення корінь кубічного рівняння

$$f(u) = r_g(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (4.88)$$

Розв’язок

$$\begin{cases} (S)^2 = (R - r_g)(R + 3r_g) \\ (\rho)^2 = \frac{R^3}{(R-r_g)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R > \frac{3r_g}{2} \\ \rho > \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} \end{cases} \quad (4.89)$$

Розглянута орбіта лежить поза окружністю переастроєвих точок $R > \frac{3r_g}{2}$

Підстановка рівняння

$$u = -\frac{(S - R + r_g)}{2r_gR} + \frac{(S - R + 3r_g)}{2r_gR} \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (4.90)$$

$$\begin{cases} (r \rightarrow \infty | u = 0), \sin^2\left(\frac{\xi_\infty}{2}\right) = \frac{S-R+r_g}{S-R+3r_g} \\ (r \rightarrow R | u = u_3), \xi = \pi \end{cases} \quad (4.91)$$

Розв'язок записаний через еліптичний інтеграл Якобі

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{S}{R}\right)[1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)] \Rightarrow \varphi = 2\sqrt{\frac{R}{S}}[K(k) - F\left(\frac{\xi}{2}, k\right)] \quad (4.92)$$

Де

$$k^2 = \frac{S - R + 3r_g}{2S} \quad (4.93)$$

φ_∞ у точці периастру $R \rightarrow \frac{3r_g}{2}$

$$R \rightarrow \frac{3r_g}{2} \Rightarrow \begin{cases} S \rightarrow \frac{3r_g}{2} \\ \rho \rightarrow \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} \\ k^2 \rightarrow 1 \\ \sin^2\left(\frac{\xi_\infty}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \xi_\infty = \pi + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4.94)$$

$$F\left(\frac{\xi_\infty}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} \frac{\ln \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \quad (4.95)$$

$$R = (3 + \delta)\frac{r_g}{2} \Rightarrow \begin{cases} S \approx (3 + \frac{5}{3}\delta)\frac{r_g}{2} \\ \rho \approx \rho_c + \delta\rho, \delta\rho = \sqrt{3}r_g\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \\ k^2 = 1 - \frac{4}{9}\delta \end{cases} \Rightarrow K(k) \rightarrow \ln 6 - \frac{1}{2} \ln(\delta) \quad (4.96)$$

$$\Rightarrow \varphi_\infty = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{64\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{2(\sqrt{3}+1)^2} \right] - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\delta\rho}{r_g} \right) \Rightarrow \quad (4.97)$$

$$\frac{2\delta\rho}{r_g} = 648\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right)^2 \exp(-\pi - \Theta) \quad (4.98)$$

Прицільний параметр усіх світлоподібних геодезичних при $R \gg \frac{3r_g}{2}$ і

$$\begin{cases} \Theta \rightarrow \frac{2r_g}{\rho} \\ \rho \rightarrow (R + \frac{r_g}{2}) \end{cases} \quad (4.99)$$

які відхиляються на кут $\Theta + 2\pi n$

$$\rho_n = \rho_c + 1,74115r_g \exp(-\Theta - 2\pi n) \quad (4.100)$$

Твердження доведене

2. Довести твердження: Без масова частинка із прицільним параметром $\rho < \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$, вилітає на нескінченності при відсутніх точках періастр, і досягає точки $r = r_g$. [38]

Доказ від протилежного

Умови, при яких розсіяна на силовий центр, без масова частинка зробить кілька обертів.

Кут відхилення спалаху обертової на орбіті лежачої в екваторіальній площині в секторі $r \in (\infty; r_g)$:

$$\varphi_\infty = - \int_{r_g}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{(\frac{1}{\rho})^2 - (1 - \frac{r_g}{r})(\frac{1}{r})^2}} \Rightarrow \quad (4.101)$$

Виконана заміна:

1. Уведена змінна $u = \frac{2r_g}{r}$ де $u \in (0; 2)$
2. Уведена константа $\Theta = \frac{2r_g}{\rho}$

$$\varphi_\infty = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{(\Theta)^2 - (1 - \frac{u}{2})(u)^2}} \Rightarrow \quad (4.102)$$

Підінтегральної функція $\frac{1}{\sqrt{1-f(u)}}$ - аналітична та не має дійсних лишиків.

$$f(u) = (1 - \frac{u}{2})(\frac{u}{\Theta})^2 \quad (4.103)$$

Функція $f(u) \ll 1$ на проміжку $u \in (0; 2)$, розкладена в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{\sqrt{1-f(u)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (f(u))^n \Rightarrow \quad (4.104)$$

$$\int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1-f(u)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_0^2 f^n(u) du \Rightarrow \quad (4.105)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\Theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_0^2 \left[\left(1 - \frac{u}{2}\right) \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]^n du \Rightarrow \quad (4.106)$$

Була введена змінна $\gamma = \frac{u}{2}$ на $\gamma \in (0; 1)$

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\Theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{\Theta}\right)^{2n} \int_0^1 [(1-\gamma)(\gamma)^2]^n d\gamma \Rightarrow \quad (4.107)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\Theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{\Theta}\right)^{2n} B(n+1, 2n+1) \Rightarrow \quad (4.108)$$

Враховуючи симетричні властивості бета функції

$$B(u, v) = \int_0^1 (1-\gamma)^{u-1} \gamma^{v-1} d\gamma \quad (4.109)$$

$$B(u, v) = B(v, u) \Rightarrow \quad (4.110)$$

$$B(n+1, 2n+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+1)}{\Gamma(3n+2)} = \frac{n!(2n)!}{(3n+1)!} \quad (4.111)$$

Остаточний розв'язок

$$\varphi_{\infty}(\Theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} \frac{((2n)!)^2}{(3n+1)!} \left(\frac{1}{\Theta}\right)^{2n+1}, & (\Theta^2 > \frac{16}{27}) \\ \infty, & (\Theta^2 \leq \frac{16}{27}) \end{cases} \quad (4.112)$$

Дана функція спеціального типу являє собою ряд, який сходиться за умови

$$\Theta^2 > \frac{16}{27} \Rightarrow \rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2} \quad (4.113)$$

Із цього випливає головне:

1. Прицільний параметр фотона, що летить із нескінченності, що й розсіюється на чорну діру не містить точок переастроу, а так само $\rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
2. А якщо ні, то порушення цієї умови фотон робить велику кількість обертів перед приземленням на силовий центр.

Твердження доведене

3. **Довести твердження: Частинка з нульовою масою спокою, пропущена поблизу $r = r_g$ іде на нескінченність, тільки якщо вона має прицільний параметр $\rho < \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$;**

А якщо ні, то вона досягає апоастроу й потім назад затягається до границі сфери Шварцшильда.[38]

Доведення твердження

Рівняння світлоподібної геодезичної з уявним ексцентриситетом, що описує орбіту фотона в геометрії Шварцшильда

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_g(u)^3 - (u)^2 + \frac{1}{\rho^2}, u = \frac{1}{r} \quad (4.114)$$

Розглянутий окремий випадок, коли прицільна відстань менше мінімального переастроного $\rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$, тоді коріння функції

$$f(u) = r_g(u)^3 - (u)^2 + \frac{1}{\rho^2} \quad (4.115)$$

мають вигляд

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{r_g} - \frac{2}{I} \\ u_{2,3} = \frac{1}{I} \pm i\frac{e}{I} \end{cases} \quad (4.116)$$

I -фокальний параметр і e - ексцентриситет відповідно. Для необмеженої в просторі орбіти дані параметри не є лінійно залежними.

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{r_g} \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0 \\ u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{r_g} \frac{1}{\rho^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{r_g}{2}(3 - e^2) \\ \rho = \frac{r_g}{2} \sqrt{\frac{(3-e^2)^3}{(1+e^2)^2}} \end{cases} \quad (4.117)$$

Був уведений параметр

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{e}{3 - \frac{I}{r_g}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2e}{3 + e^2} \right) \quad (4.118)$$

Розв'язок рівняння світлоподібної орбіти

$$u = \frac{1}{I} + \frac{e}{I} \operatorname{tg} \left(\frac{\xi - \alpha}{2} \right) \quad (4.119)$$

Де

$$\begin{cases} (r \rightarrow \infty | u = 0), \operatorname{tg} \left(\frac{\xi - \alpha}{2} \right) = -e^{-1} \\ (r \rightarrow 0 | u = \infty), \xi = \alpha + \pi \end{cases} \Rightarrow \xi_\infty = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{e} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2e}{3 + e^2} \right) \quad (4.120)$$

Підстановка

$$f(u) = r_g \left(u + \frac{2}{I} - \frac{1}{r_g} \right) \left[\left(u - \frac{1}{I} \right)^2 + \left(\frac{e}{I} \right)^2 \right] \Rightarrow \quad (4.121)$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 = 2 \left[\frac{3r_g}{I} - 1 + \left(\frac{3r_g}{I} - 1 \right) \cos(\xi - \alpha) + \frac{er_g}{I} \sin(\xi - \alpha) \right] \quad (4.122)$$

Розв'язок для $\varphi(\xi)$ має вигляд еліптичного інтеграла першого роду

$$\frac{d\frac{d\xi}{2}}{\varphi} = \frac{\sqrt{1+e^2} \sqrt{\sqrt{1+e^2} + \sqrt{9+e^2}}}{\sqrt{2(3-e^2)}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)} \quad (4.123)$$

Еліптичного інтеграла першого роду

$$F(s, k) = \int_0^s \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} \quad (4.124)$$

Повний еліптичний інтеграл

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} \quad (4.125)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{2(3 - e^2)}}{\sqrt[4]{1 + e^2} \sqrt{\sqrt{1 + e^2} + \sqrt{9 + e^2}}} [K(k) - F\left(\frac{\xi}{2}, k\right)] \quad (4.126)$$

Де

$$k^2 = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1+e^2}{9+e^2}}} \quad (4.127)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{2e}{3 + e^2} \right) \quad (4.128)$$

Точне значення ексцентриситету можна одержати як зворотну функцію прицільного параметра з рівняння:

$$\rho(e) = \frac{r_g}{2} \sqrt{\frac{(3 - e^2)^3}{(1 + e^2)^2}} \Rightarrow e = e(\rho) \quad (4.129)$$

Де при $\rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$ значення ексцентриситету $0 < e < 3$.

Доказ від протилежного

Припущене що фотон досягає апоастра й повертається назад.

Знайти значення ξ_g точці $r = r_g$

$$u_g = \frac{1}{I} [1 + e \operatorname{tg}(\frac{\xi - \alpha}{2})] \Rightarrow 1 + e \operatorname{tg}(\frac{\xi_g - \alpha}{2}) = \frac{(3 - e^2)}{2} \quad (4.130)$$

$$\xi_g = 2 \operatorname{arctg}(\frac{1 - e^2}{2e}) + \operatorname{arctg}(\frac{2e}{3 + e^2}) \quad (4.131)$$

$$\begin{cases} \varphi(\xi_g) = \frac{\sqrt{2(3-e^2)}}{\sqrt[4]{1+e^2} \sqrt{\sqrt{1+e^2} + \sqrt{9+e^2}}} [K(k) - F(\frac{\xi_g}{2}, k)] \\ k = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1+e^2}{9+e^2}}}} \end{cases} \quad (4.132)$$

Розв'язок для світлоподібної геодезичної з уявним ексцентриситетом
Радіус у точці апоастра дорівнює фокальному параметру $R_A = I$ для орбіт з уявним ексцентриситетом, отже $\xi = \alpha$

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{2(3 - e^2)}}{\sqrt[4]{1 + e^2} \sqrt{\sqrt{1 + e^2} + \sqrt{9 + e^2}}} [K(k) - F(\frac{\alpha}{2}, k)] \quad (4.133)$$

Виявимо асимптотичні властивості

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow (e \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0) \Rightarrow \begin{cases} \varphi(\alpha) \rightarrow F(\frac{\pi}{2}, 1) - F(0, 1) = 1 \\ k \rightarrow 1 \end{cases} \quad (4.134)$$

Розглянути виключення, де прицільний параметр не менше мінімального переастрового значення $\rho \geq \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$, тоді фотон близько обрїю подій рухається по критичній орбіті другого роду, яку описує рівняння

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_g(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (4.135)$$

Корені даного полінома мають вигляд

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{3r_g} \\ u_{2,3} = \frac{2}{3r_g} \end{cases} \quad (4.136)$$

Тоді розв'язок має вигляд

$$u = \frac{2}{3r_g} + \frac{1}{r_g} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (4.137)$$

Підстановка

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = 2 \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{4}\right)\right) \quad (4.138)$$

Від туди траєкторія фотона має вигляд

$$u = -\frac{1}{3r_g} + \frac{1}{r_g} \operatorname{cth}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.139)$$

Світловий промінь іде на нескінченність

$$\begin{cases} (r \rightarrow r_g | u = \frac{1}{r_g}), \operatorname{th}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (r \rightarrow \infty | u = 0), \varphi_\infty = \infty \end{cases} \quad (4.140)$$

зробивши велику кількість обертів.

Твердження доведене

5. ВИСНОВКИ

1. Був детально пророблений математичний апарат для вистави стаціонарної чорної діри, в околиці якої частинка вільно рухається по плоскій орбіті: Елементи терії ріманової геометрії та теорії фазового простіру зі сферично-симетричною метрікою, та теорія варіативного диференціювання тезорів.

2. Показані переваги координатних систем: Еддінгтона-Фінкельштейна, Леметра, Крускала-Секеріса-Новікова. Які полягають в усуненні особливості точок обрїю подій, на відміну від шварцшильдських координат. Найбільшою гідністю перехід до вище перерахованих координат полягає в описі світових ліній рівняннями виду $X = \pm ct + const$, через незалежність кута розтвору світлових конусів у кожній точці.

3. Складені й вирішені в загальному виді рівняння Гамільтона-Якобі й рівняння ейконалу у гравітаційному полі. Отримані ключові формули:

$$\begin{cases} \Delta t = \frac{1}{c} \int \frac{E}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{(E)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[(mc^2)^2 + \left(\frac{m c L}{r}\right)^2]}} dr, \text{ час} \\ \Delta \varphi = - \int \frac{m c L}{r^2} \frac{1}{\sqrt{(E)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[(mc^2)^2 + \left(\frac{m c L}{r}\right)^2]}} dr, \text{ кут.} \end{cases} \quad (5.1)$$

4. Показаний приріст світового часу при зближенні частинки з поверхнею сфери Шварцшильда, а так само скінченність власного часу частинки, що доведене перевіркою збіжності інтегралів:

$$\begin{cases} c \Delta t = \lim_{r \rightarrow r_g} \int_{r_0}^r \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{m c^2}{E}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{L}{c r}\right)^2\right)}} dr, \text{ — інтеграл розходиться} \\ c \Delta \tau = \lim_{r \rightarrow r_g} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{m c^2}{E}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{L}{c r}\right)^2\right)}} dr, \text{ — інтеграл сходиться} \end{cases} \quad (5.2)$$

5. Визначені зміни локальної частоти спалахів випромінюваних частинкою поблизу границі сфери Шварцшильда $\omega_0 = \lim_{r \rightarrow r_g} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \omega = 0$.

Установлене, що сигнал на поверхні горизонту подій, та за його границею за ніколи не покине чорну діру та не розсіється на нескінченність, через геометричні властивості сітки простору-часу чорної діри.

У міру наближення випромінюючого тіла до чорної діри, довжинаа хвилі потоку випромінюваних фотонів зростає.

6. Розраховані формули прицільної відстані як релятивістських частинок $\rho = \frac{\frac{L}{c}}{\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}}$ так і нерелятивістських частинок $\rho = \frac{L}{v_\infty}$, а так само для фотонів $\rho = \frac{cl}{\omega}$.

7. Аналітично обчислені радіуси кругових орбіт частинок із вирішення задачі Каплана:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right], \text{ радіуси нестійких орбіт} \\ R_2 = \frac{1}{r_g} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{cr_g}{L}\right)^2}\right], \text{ радіуси стійких орбіт} \end{cases} \quad (5.3)$$

Так само був обчислений радіус умовно стійкої кругової орбіти фотона:

$$R = \frac{lc}{\omega} \left(\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\omega r_g}{2cl}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{\omega r_g}{2cl}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{\omega r_g}{2cl}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{\omega r_g}{2cl}} \right) \quad (5.4)$$

8. Розрахований ефективний переріз гравітаційного захоплення: нерелятивістської частинки $\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2$ і фотона $\sigma = \frac{27\pi r_g^2}{4}$.

9. Знайдена нерелятивістська межа для обмежених у просторі орбіт. У ньютонівському наближенні можна знехтувати релятивістським членом пропорційним третьої ступені для потенційної енергії $U(r) = mc^2 + \frac{mGM}{r} - \frac{mL^2}{2r^2}$, та отримати у разрохунках траєкторії частинки кеплеровські криві другого роду:

$$\begin{cases} r = \frac{I}{1+e \cos(\varphi)}, e < 1, \text{Еліптична,} \\ r = \frac{I}{1+\cos(\varphi)}, e = 1, \text{параболічна,} \\ r = \frac{I}{1+e \operatorname{ch}(\varphi)}, e > 1, \text{гіперболічна.} \end{cases} \quad (5.5)$$

10. Доведене що енергія й кутовий момент є інтегралами руху частинки, інваріантними до перетворення часу та відповідно кутових координат, що обумовлено однорідністю часу та ізотропністю простору.

$$\begin{cases} u_0 = \frac{E}{mc^2} - \text{закон збереження енергії} \\ u_\varphi = \frac{L}{c} - \text{закон збереження кутового моменту} \end{cases} \quad (5.6)$$

11. Доведено що усі орбіти лежать на площині. Доведена стійкість екваторіальної площини, на якій лежать орбіти частинок за допомогою метода

малих осциляцій кута азимутальної осі.

$$\delta\theta \sim \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{K\lambda}{r^2}\right) \quad (5.7)$$

Із цього рівняння показово, що збурювання $\delta\theta$ осцилює поблизу $\theta = \frac{\pi}{2}$ і не росте згодом.

12. Розглянуті властивості радіальних геодезичних кривих для енергій не обмежених та обмежених у проторі орбіт: $E < mc^2$, $E = mc^2$, $E > mc^2$.

13. Визначена локально вимірювана швидкість радіально збуреної частинки $\frac{dr}{d\tau}$ у крапці з тим же значенням радіуса, що й радіуса точки, де знаходиться спостерігач. На горизонті подій локальна швидкість прямо пропорційна енергії $\frac{dr}{d\tau} = \frac{E}{mc}$.

14. Теоретично показані якісні особливості часоподібних геодезичних частинки, так само і продемонстровані властивості та їх наслідки для світлоподібних геодезичних промінів світла. Розглянутий і вирішений набір завдань, розділений на дві категорії:

1) Для пробної релятивістської частки, рух якої описано часоподібною геодезичною ($m > 0$):

$$p^i_{,s} + \Gamma^i_{jk} p^j p^k = 0 \quad (5.8)$$

Норма 4-імпульсу $g_{ik} p^i p^k = (mc)^2$

У ході обчислень категорії орбіт часоподібних геодезичних ($m > 0$) минулого розділені на 2 класу за параметром енергії:

1. $E < mc^2$ - орбіти обмежені в просторі.

$$0 \leq e < 1 \quad (5.9)$$

2. $E \geq mc^2$ - орбіти необмежені в просторі.

$$e \geq 1 \quad (5.10)$$

Кожен клас орбіт додатково був розбитий на чотири сімейства, обумовлених коренями рівняння геодезичної:

1. Радіальні геодезичні ($L = 0$).
2. Орбіти першого роду (Релятивістські аналоги кеплеровських орбіт)- мають дві критичні точки.
3. Орбіти другого роду, мають одну критичну точку (точку апоастроу).
4. Орбіти з уявним ексцентриситетом- частка виходить зі стану спокою

(у точці апоастро), робить кілька обертів до ”приземлення на силовий центр”. Ексцентриситет і фокальна відстань даного типу орбіт лінійно залежні величини.

2) Для світлового проміння, рух якого описано світлоподібної геодезичної

$$k^i{}_{,\lambda} + \Gamma^i_{jl}k^jk^l = 0 \quad (5.11)$$

Де $g_{ik}k^ik^k = 0$

Категорія світлоподібних геодезичних ($m=0$) була розділена на сімейства за єдиним параметром - прицільною відстанню, величиною відстані проміння до чорної діри, заданої співвідношенням адиабатичного інваріанта до частоти

$$\rho = \frac{l}{\left(\frac{\omega}{c}\right)} \quad (5.12)$$

Сімейства світлоподібних геодезичних були розділені по параметру ρ на:

1. Радіальні $\rho \ll \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
2. Орбіти з уявним ексцентриситетом $\rho < \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
3. Критичні орбіти першого роду $\rho = \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
4. Критичні орбіти другого роду $\rho \geq \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
5. Геодезичні орбіти першого роду $\rho > \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$;
6. Геодезичні орбіти другого роду $\rho \gg \frac{3\sqrt{3}r_g}{2}$.

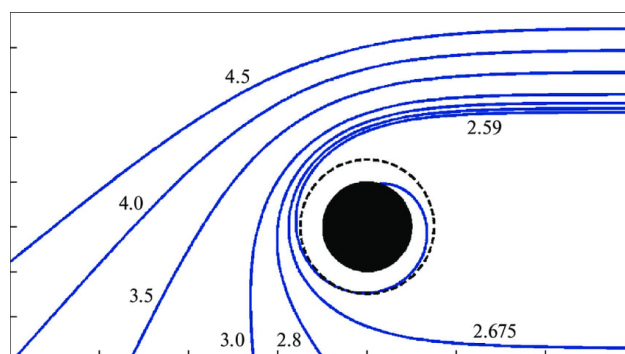


Figure 5.1. Світлоподібні геодезичні

6. ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. (1973). **Gravitation**. W.H. Freeman and Company.
2. Schutz, B. F. (1985). **A First Course in General Relativity**. Cambridge University Press.
3. Wald, R. M. (1984). **General Relativity**. University of Chicago Press.
4. Carroll, S. M. (2004). **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison-Wesley.
5. Hartle, J. B. (2003). **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. Addison-Wesley.
6. Chandrasekhar, S. (1983). **The Mathematical Theory of Black Holes**. Oxford University Press.
7. Ohanian, H. C., Ruffini, R. (2013). **Gravitation and Spacetime** (3rd ed.). Cambridge University Press.
8. Straumann, N. (2013). *General Relativity*. Springer.
9. Weinberg, S. (1972). **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. Wiley.
10. Frolov, V. P., Novikov, I. D. (1998). **Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments**. Springer.
11. Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. (1973). **The Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge University Press.
12. Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., Herlt, E. (2003). **Exact Solutions of Einstein's Field Equations** (2nd ed.). Cambridge University Press.
13. Poisson, E. (2004). **A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics**. Cambridge University Press.
14. D'Inverno, R. (1992). **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press.
15. Schutz, B. F. (2009). **A First Course in General Relativity** (2nd ed.). Cambridge University Press.
16. Baez, J., Muniain, J. P. (1994). **Gauge Fields, Knots and Gravity**. World Scientific.
17. Hawking, S. W., Penrose, R. (1996). **The Nature of Space and Time**. Princeton University Press.
18. Israel, W. (1987). Dark Stars: The Evolution of an Idea. In **300 Years of Gravitation** (eds. S. W. Hawking W. Israel). Cambridge University Press.
19. Misner, C. W. (1963). The Method of Images in Geometrostatics. **Annals of Physics**, 24, 102-117.

20. Bardeen, J. M., Press, W. H., Teukolsky, S. A. (1972). Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. **Astrophysical Journal**, 178, 347-370.
21. Chandrasekhar, S. (1983). The Chandrasekhar-Friedman-Schutz instability. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, 386(1791), 1-26.
22. Feynman, R. P., Morinigo, F. B., Wagner, W. G., Hatfield, B. (1995). **Feynman Lectures on Gravitation**. Addison-Wesley.
23. Thorne, K. S., Price, R. H., Macdonald, D. A. (1986). **Black Holes: The Membrane Paradigm**. Yale University Press.
24. Wald, R. M. (1978). **General Relativity and Cosmology**. University of Chicago Press.
25. Eddington, A. S. (1920). **Space, Time and Gravitation**. Cambridge University Press.
26. Hawking, S. W. (1976). Black holes and thermodynamics. **Physical Review D**, 13(2), 191-197.
27. Novikov, I. D., Frolov, V. P. (1989). **Physics of Black Holes**. Kluwer Academic Publishers.
28. Bekenstein, J. D. (1973). Black Holes and Entropy. **Physical Review D**, 7(8), 2333-2346.
29. Shapiro, S. L., Teukolsky, S. A. (1983). **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. Wiley.
30. Thorne, K. S. (1994). **Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy**. W. W. Norton Company.
31. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1975). **The Classical Theory of Fields** (4th ed.). Butterworth-Heinemann.
32. Zel'dovich, Ya. B., Novikov, I. D. (1971). **Relativistic Astrophysics, Vol. 1: Stars and Relativity**. University of Chicago Press.
33. Zel'dovich, Ya. B., Novikov, I. D. (1974). **Relativistic Astrophysics, Vol. 2: The Structure and Evolution of the Universe**. University of Chicago Press.
34. Чандросекар Математическая Теория Черных Дыр.
35. Лайтман, Пресс Збірник Завдань по теорії відносності й Гравітації.
36. L.D.Landau, E.M.Lifshitz. The Classical Theory of Field. Course of Theoretical Physics. V. 2. Butterworth Heinemann, 1994. – 428 p.
37. L.D.Landau, E.M.Lifshitz. Electrodynamics of Continuous Media. Course of Theoretical Physics. V. 8. Pergamon press, 1960. – 417 p.
38. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер Гравитация Том 2.
39. Б. Дубровин. А. Фоменко Современная Геометрия Методы и Приложения.
40. Astrometry in the 21st century. From Hipparchus to Einstein Mariateresa Crosta INAF, Astrophysical Observatory of Turin - Turin, Italy received 5 July 2019.
41. Eric Poisson Relativist's Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics