МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В.Н. КАРАЗІНА

О. А. МАКАРОВ
І. Г. НІКОЛЕНКО

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Навчально-методичний посібник з вищої математики

Електронний ресурс

Харків – 2025

УДК 517.31
М 15

Рецензенти:

С. Л. Гефтер – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

О. Л. Вишневецький – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (протокол № 1 від 23 жовтня 2025 року)

Макаров О. А.

М 15 Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли : навчально-методичний посібник з вищої математики [Електронний ресурс] / О. А. Макаров, І. Г. Ніколенко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – 88 с.

Навчально-методичний посібник з курсу «Вища математика» навчально-наукового інституту комп'ютерних наук та штучного інтелекту (спеціальності F2 – «Інженерія програмного забезпечення», F3 – «Комп'ютерні науки», F4 – «Системний аналіз та наука про дані», F5 – «Кібербезпека та захист інформації», F6 – «Інформаційні системи і технології», F7 – «Комп'ютерна інженерія») розроблений для студентів 1-го та 2-го курсів першого бакалаврського рівня освіти денної та заочної форм навчання. Наведені матеріали надають допомогу студентам при засвоєнні та самостійному вивченні таких складних тем як кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.

УДК 517.31

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Макаров Олександр Анатолійович
Ніколенко Ірина Геннадіївна

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Навчально-методичний посібник з вищої математики

В авторській редакції

Підписано до розміщення 23.10.2025. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 2,141. Обсяг 5,72 Зам. № 486/25.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Зміст

Вступ

Мета даного навчально-методичного посібника — надати допомогу студентам 1 та 2 курсів Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна при засвоєнні та самостійному вивченні тем «Кратні інтеграли», «Криволінійні інтеграли» та «Поверхневі інтеграли».

Посібник складається з таких розділів:

1. *Кратні інтеграли,* де розглянуті основні теоретичні факти відносно подвійних та потрійних інтегралів, наведені приклади обчислення цих інтегралів та їхні застосування у геометрії та механіці.

2. *Криволінійні інтеграли,* де розглянуті основні формули для обчислення криволінійних інтегралів першого та другого роду, наведені приклади знаходження цих інтегралів та їхні застосування.

3. *Поверхневі інтеграли,* де розглянуті основні теоретичні факти відносно поверхневих інтегралів першого та другого роду та наведені приклади їх обчислення.

4. *Елементи теорії поля,* де наведені теорема Гауса-Остроградського та теорема Стокса, які розглядають зв'язки між криволінійними, поверхневими та кратними інтегралами; також визначаються поняття потенційного і соленоїдального полів, наводяться їхні приклади.

Наприкінці посібника наведені контрольні питання по цим темам.

Розділ I. Кратні інтеграли.

1.1. Подвійні інтеграли

Подвійний інтеграл за прямокутником

Розглянемо функцію $f(x,y)$, визначену на замкнутій прямокутній множині

$$P=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\quad c\le y\le d\right\}=\left[a,b\right]\times\left[c,d\right].$$

Нехай $\left\{x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\right\}$, $\left\{y_0=c<y_1<y_2<\ldots<y_m=d\right\}$ − довільні розбиття відрізків $\left[a,b\right]$ та $\left[c,d\right]$ відповідно.

Розглянемо прямокутники

$$P_{kl}=\left[x_k,x_{k+1}\right]\times\left[y_l,y_{l+1}\right],\quad k=0,\ldots,n-1;\quad l=0,\ldots,m-1.$$

Тоді $P=\bigcup\limits_{k,\,l}P_{kl}$.

<u>**Означення.**</u> ***Множина таких прямокутників*** $\left\{P_{kl}\right\}$ ***називається розбиттям прямокутника*** P ***і позначається*** T.

Через Δx_k, Δy_l позначимо довжини сторін прямокутника P_{kl}, а його діаметр (діагональ) дорівнює

$$d_{kl} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_l^2} \ ,$$

де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_l = y_{l+1} - y_l$.

Діаметр розбиття T визначимо як

$$d(T) = \max_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ 0 \le l \le m-1}} d_{kl} = \max_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ 0 \le l \le m-1}} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_l^2} \, .$$

Виберемо довільним чином точки (ξ_k, η_l) на кожному з прямокутників P_{kl}.

Таким чином задається розбиття T ***прямокутника*** P ***з проміжними точками*** (ξ_k, η_l).

<u>Означення.</u> ***Сума*** $\sigma_f(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} f(\xi_k, \eta_l)\Delta x_k \, \Delta y_l$ ***називається інтегральною сумою***.

<u>Означення.</u> ***Число*** I ***називається подвійним інтегралом Рімана від функції*** $f(x,y)$ ***за прямокутником*** P***, якщо***

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T : \ d(T) < \delta \ \forall (\xi_k, \eta_l) \in P_{kl} \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} f(\xi_k, \eta_l) \, \Delta x_k \, \Delta y_l - I \right| < \varepsilon$$

У цьому випадку пишуть, що $\lim\limits_{d(T) \to 0} \sigma(T) = I$ та позначають

$$I = \iint_P f(x,y)\,dxdy \, .$$

<u>Означення.</u> ***Якщо існує подвійний інтеграл від функції*** $f(x,y)$ ***за прямокутником*** $P = [a,b] \times [c,d]$, ***то функція*** $f(x,y)$ ***називається інтегровною на прямокутнику*** P ***і пишуть***

$$f(x,y) \in R(P)$$

$$\left(f(x,y) \in R_{[a,b]\times[c,d]} \right).$$

Таким чином,

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sigma(T) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} f(\xi_k, \eta_l)\Delta x_k \, \Delta y_l \quad -$$

подвійний інтеграл Рімана від функції $f(x,y)$ ***за прямокутником*** P.

Необхідна умова інтегровності функції на прямокутнику

Теорема. ***Якщо функція*** $f(x,y)$ ***інтегровна на прямокутнику*** P $\left(f(x,y)\in R(P)\right)$, ***то вона обмежена на*** P.

Приклад 1.1. Якщо $f(x,y)\equiv C$ на $P=[a,b]\times[c,d]$, то

$$\iint\limits_P C\,dxdy = C(b-a)(d-c) = C\cdot S(P).$$

Якщо $C>0$, то отримуємо **об'єм прямокутного паралелепіпеду** з основою P і висотою C.

Розв'язання. Це витікає із того, що для будь-якого розбиття T прямокутника P з проміжними точками $\left(\xi_k,\eta_l\right)$ інтегральна сума дорівнює

$$\sigma_f(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} f\left(\xi_k,\eta_l\right)\Delta x_k\,\Delta y_l = C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k\sum_{l=0}^{m-1}\Delta y_l =$$

$$= C(b-a)(d-c) = C\cdot S(P).$$

Границя від сталої величини дорівнює цій величині, тому

$$\lim_{d(T)\to 0}\sigma(T) = I = C(b-a)(d-c) = C\cdot S(P).$$

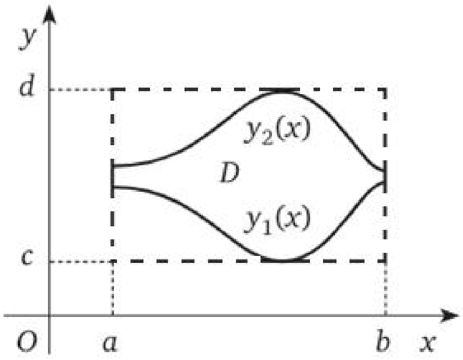
Якщо $C=1$, то маємо, що

$$\iint\limits_P dxdy = (b-a)(d-c) = S(P)$$ – **площа прямокутника** P.

Подвійний інтеграл за довільною обмеженою множиною

Нехай D – обмежена множина, $D\subset\mathbb{R}^2$.
Розглянемо прямокутник $P=[a,b]\times[c,d]$ такий, що $D\subset P$.
Визначимо функцію:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in P\setminus D.\end{cases}$$



Означення. ***Функція*** $f(x,y)$ ***називається інтегровною на множині*** D $\left(f(x,y)\in R(D)\right)$***, якщо функція*** $F(x,y)$ ***інтегровна за прямокутником*** P***.***

Тоді

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_P F(x,y)\,dxdy\,.$$

Теорема ***(необхідна умова інтегровності функції):***

Якщо функція $f(x,y)$ ***інтегровна на множині*** D $\left(f(x,y)\in R(D)\right)$, ***то вона обмежена на цій множині.***

Теорема ***(достатня умова інтегрованості функції):***

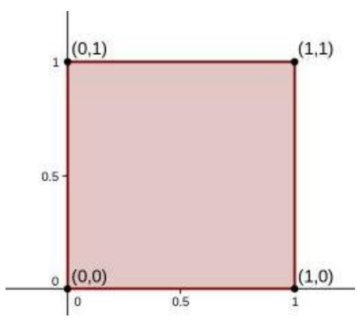
Якщо функція $f(x,y)$ ***неперервна на обмеженій множині*** D***, то вона інтегровна на цій множині*** $\left(f(x,y)\in R(D)\right)$***.***

Приклад 1.2. Обчислити за означенням

$$\iint_P y\,dxdy\,, \quad \text{де} \quad P=[0,1]\times[0,1]\,.$$

Розв'язання. Оскільки $f(x,y)=y\in C_{[0,1]\times[0,1]}$, то за достатньою умовою інтегрованості функції $f(x,y)\in R_{[0,1]\times[0,1]}$.

Отже, при обчисленні подвійного інтеграла за означенням ми можемо вибрати розбиття квадрата $P=[0,1]\times[0,1]$ і набір проміжних точок (ξ_k,η_l) як зручно нам, при цьому ми отримаємо число, яке не залежить від нашого вибору.



Розіб'ємо квадрат $P=[0,1]\times[0,1]$ прямими, паралельними осям Ox та Oy на n^2 рівних квадратів із сторонами довжиною $\frac{1}{n}$ та з площами $\frac{1}{n^2}$.

Виберемо в кожному квадраті розбиття проміжні точки – праві верхні вершини цього квадрату. Тоді

$$\sigma_f(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\underbrace{f(\xi_k,\eta_l)}_{\eta_l=\frac{l+1}{n}}\underbrace{\Delta x_k\ \Delta y_l}_{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{l+1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot(1+2+\ldots+n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}.$$

$$\text{Таким чином,}\quad \iint\limits_P y\,dxdy=\frac{1}{2}.$$

Обчислення подвійних інтегралів

Теорема Фубіні (***про зведення подвійного інтеграла за прямокутником до повторного***):

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на прямокутнику

$$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}.$$

Тоді

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Змінюючи x та y місцями, отримаємо

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\ .$$

Доведення. $f(x,y)\in C_{[a,b]\times[c,d]}\underset{\text{дост. умова}}{\Rightarrow} f(x,y)\in R_{[a,b]\times[c,d]}$.

Розглянемо

$$\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}f(\xi_k,\eta_l)\Delta x_k\ \Delta y_l=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k\sum_{l=0}^{m-1}f(\xi_k,\eta_l)\Delta y_l\ ,$$

$$d(T)=\max_{\substack{0\le k\le n-1\\0\le l\le m-1}}\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_l^2}\to 0\ \Rightarrow\ \|\Delta x\|=\max_{0\le k\le n-1}|\Delta x_k|\to 0\ \wedge\ \|\Delta y\|=\max_{0\le l\le m-1}|\Delta y_l|\to 0,$$

$$\lim_{d(T)\to 0}\sigma(T)=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k\sum_{l=0}^{m-1}f\left(\xi_k,\eta_l\right)\Delta y_l=$$

$$=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k\lim_{\|\Delta y\|\to 0}\sum_{l=0}^{m-1}f\left(\xi_k,\eta_l\right)\Delta y_l=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k\int_c^d f(\xi_k,y)dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

Теорему доведено.

Інтеграл $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ ***називається повторним інтегралом.***

<u>**Зауваження.**</u> Обчислюють повторний інтеграл **наступним чином**: спочатку слід брати внутрішній інтеграл $\int_c^d f(x,y)\,dy$, вважаючи змінну x сталою, а потім інтегрують одержану функцію за x.

На випадок інтегрування функції за криволінійною трапецією маємо таку теорему.

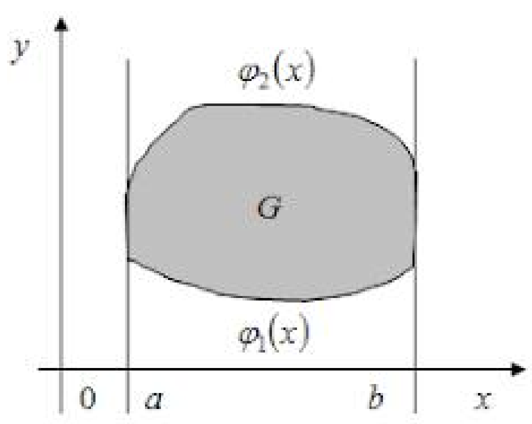
<u>**Теорема Фубіні**</u> **(*про зведення подвійного інтеграла за криволінійною трапецією до повторного*):**

Нехай функція $f(x,y)$ ***неперервна на криволінійній трапеції***

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\quad \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\right\}.$$

Тоді

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

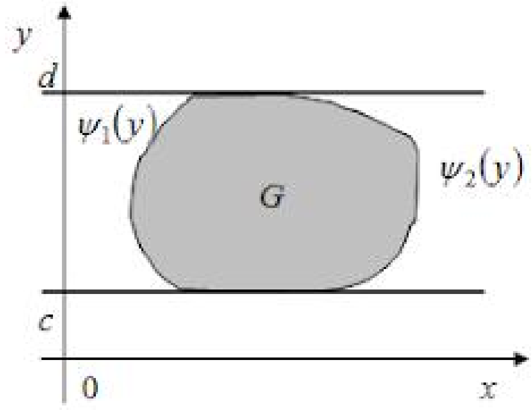


Теорема Фубіні. ***Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на криволінійній трапеції***

$$G=\{(x,y)\in R^2 : c\le y\le d,\quad \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}.$$

Тоді

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx .$$



Приклад 1.3. Обчислити

$$\iint_P y\,dxdy\,,\quad \text{де}\quad P=[0,1]\times[0,1]\,.$$

Розв'язання. Вище ми обчислювали цей інтеграл за означенням. Нижче обчислимо його за теоремою Фубіні.

$$\iint_P y\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 y\,dy=\int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}.$$

Приклад 1.4. Обчислити інтеграл від функції $f(x,y)=xy$ на множині

$$G=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}.$$

Розв'язання.

$$\iint_G xy\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy\,dy=\int_0^1 \frac{x}{2}\cdot\left(y^2\right)\bigg|_{x^2}^{x} dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2-x^4\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Змінюючи порядок інтегрування, одержимо:

$$\iint_G xy\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{y}^{\sqrt{y}} xy\,dx=\int_0^1 \frac{y}{2}\cdot\left(x^2\right)\bigg|_{y}^{\sqrt{y}} dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{24}.$$

<u>Висновок.</u>

$$\iint\limits_G xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} xy\,dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_{y}^{\sqrt{y}} xy\,dx = \frac{1}{24}.$$

Властивості подвійних інтегралів

1. Лінійність.

Нехай функції $f(x,y)$ *і* $g(x,y)$ *інтегровні на області* D. *Тоді для будь-яких чисел* α, β *лінійна комбінація* $f(x,y)$ *і* $g(x,y)$ *інтегровна на області* D *та*

$$\iint\limits_D \left(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right)dxdy = \alpha\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy .$$

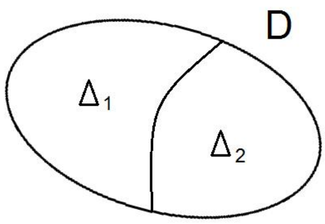
2. Адитивність за множиною.

Нехай функція $f(x,y)$ *інтегрована на множині* D.

Розглянемо розбиття $D=\Delta_1\bigcup\Delta_2:\quad \mathring{\Delta}_1\bigcap\mathring{\Delta}_2=\varnothing,\quad \Delta_1\neq\varnothing, \Delta_2\neq\varnothing$.

Тоді справедлива така рівність:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)\,dxdy .$$



3. Інтегровність нерівностей.

Нехай функції $f(x,y)$ *і* $g(x,y)$ *інтегровні на* D, *при цьому* $f(x,y)\le g(x,y)$ *для будь-яких* $(x,y)\in D$. *Тоді*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy .$$

<u>Означення.</u> ***Площа криволінійної трапеції*** D ***визначається як***

$$S=\iint\limits_D dxdy .$$

4. ***Якщо функція*** $f(x,y)$ ***інтегровна в замкнутій області*** D, ***що має площу*** S, ***то***

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le MS,$$

де $$m = \min_D f(x,y),\ M = \max_D f(x,y).$$

5. ***Якщо функція*** $f(x,y)$ ***неперервна в замкнутій області*** D***, що має площу*** S***, то існує точка*** $(x_0, y_0) \in D$***:***

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy .$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Теорема (***про заміну змінних у подвійному інтегралі***)**:**
Нехай

1) дві неперервно-диференційовані функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ***взаємно-однозначно відображають обмежену область*** D ***площини*** (u,v) ***на обмежену область*** G ***площини*** (x,y)***;***

2) всі частинні похідні x'_u, x'_v, y'_u, y'_v ***обмежені в*** D***;***

3) функція $f(x,y)$ ***неперервна та обмежена в*** G***.***

Тоді

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right| dudv ,$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ ***– якобіан відображення*** $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$

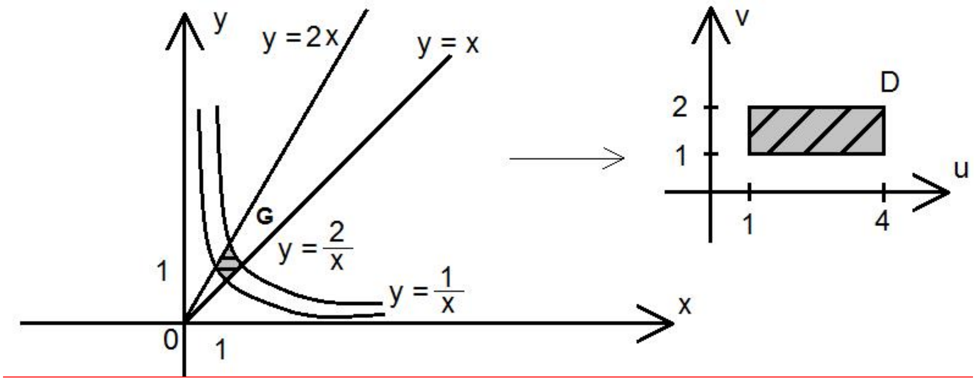
Приклад 1.5. Використовуючи заміну змінних, знайти площу області, обмежену кривими:

$$\begin{cases} xy = 1; \\ xy = 4, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} y = x; \\ y = 2x, \end{cases} \quad \text{де} \quad x, y > 0.$$

Розв'язання. Скористаємося заміною змінних

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Тоді $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 2$:



Якщо розглянути відображення

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \quad 1 \le u \le 4, \quad 1 \le v \le 2,$$

то якобіан цього відображення за теоремою про дифеоморфізм $\left(\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \right)$ дорівнює

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}.$$

Або

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{v} = x^2, \\ uv = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{u}{uv^2}} + \sqrt{\frac{uv}{uv^3}} \right) = \frac{1}{2v}.$$

Оскільки $S = \iint\limits_G dxdy$, то за теоремою про заміну змінних:

$$S = \iint\limits_G dxdy = \iint\limits_D |J(u,v)|dudv = \int_1^4 du \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2}\int_1^4 du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{1}{2}\int_1^4 \ln 2 du = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Окремим випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є заміна змінних при переході від декартової до полярної системи координат.

У цьому випадку слід робити заміну

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

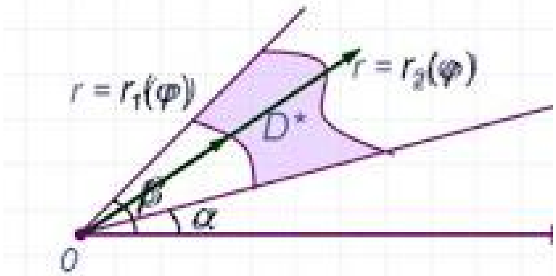
Нагадаємо, що якобіан даного відображення дорівнює

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\,.$$

Тоді

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,drd\varphi\ .$$

У випадку, якщо область D обмежена двома променями α, β , $\alpha < \beta$, що виходять зі спільної точки, та двома кривими $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$,



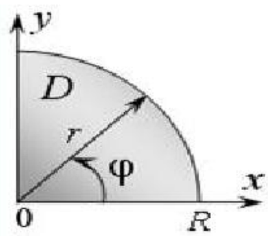
то для обчислення подвійного інтегралу використовують формулу

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r drd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

<u>Приклад 1.6.</u> Використовуючи полярну систему координат, обчислити інтеграл:

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2 \\ x,y\ge 0}} xy\,dxdy.$$

Розв'язання.



$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x,y\ge 0}} xy\,dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{vmatrix} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^3 \cos\varphi \sin\varphi\, dr = \int_0^a r^3\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{a^4}{16}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^4}{16}(-1-1) = \frac{a^4}{8}.$$

<u>Зауваження.</u> ***Якщо областю інтегрування є еліпс або його частина, тоді для обчислення подвійного інтеграла доцільно використовувати узагальнені полярні координати***:

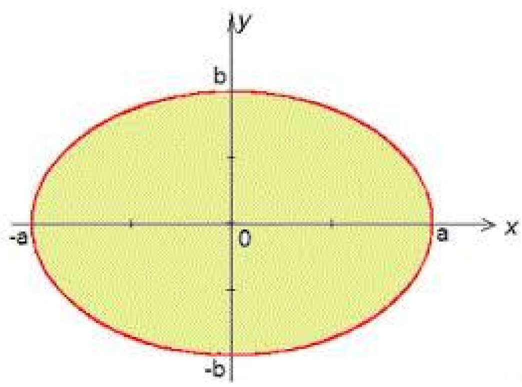
$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi. \end{cases}$$

Якобіан відображення

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr.$$

<u>Приклад 1.7.</u> Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} (x^2 - y^2)\,dxdy$.

Розв'язання.



Скористаємося узагальненими полярними координатами

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi. \end{cases}$$

Якобіан дорівнює

$$J = abr.$$

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} (x^2 - y^2)\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 abr\left(a^2r^2\cos^2\varphi - b^2r^2\sin^2\varphi\right)dr =$$

$$= ab\int\limits_0^1 r^3\,dr \int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{ab}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\left(1+\cos 2\varphi\right) - b^2\left(1-\cos 2\varphi\right)\right)d\varphi = \frac{\pi ab}{4}\left(a^2 - b^2\right).$$

Геометричне застосування подвійних інтегралів

1. ***Обчислення площі області інтегрування***.

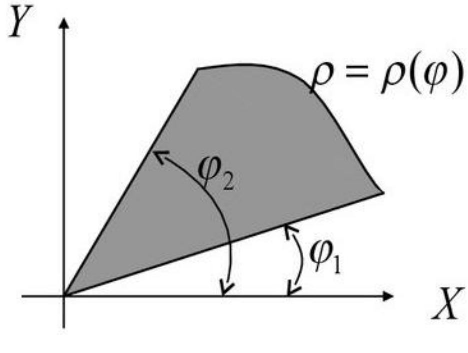
Площа області $D \subseteq R^2$ обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

При переході до **полярної системи** координат ***площа області*** дорівнює

$$S = \iint\limits_D r\,drd\varphi.$$

У випадку, якщо область D обмежена двома променями φ_1, φ_2 : $\varphi_1 < \varphi_2$, що виходять зі спільної точки, та кривою $r(\varphi)$,

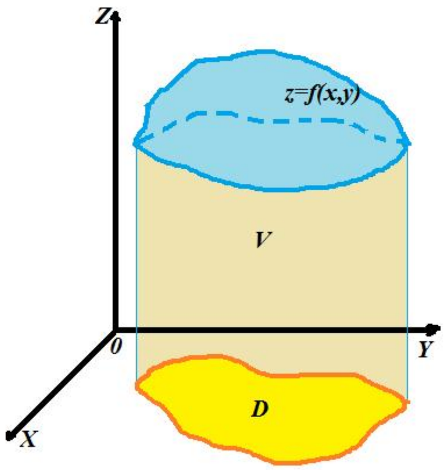


то для обчислення подвійного інтегралу використовують формулу

$$S = \iint\limits_D r\,drd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

2. ***Обчислення об'єму***.

Нехай маємо неперервну невід'ємну функцію $f(x,y)$ на множині D.



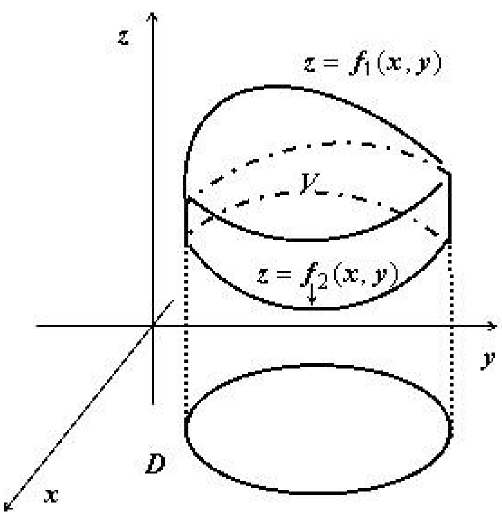
Геометричний зміст подвійного інтегралу :

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ – ***це об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею*** $z=f(x,y)$ ***, а знизу – областю*** D ***у площині*** Oxy ***, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігаються з межею області*** D ***, а твірні паралельні осі*** Oz ***.***

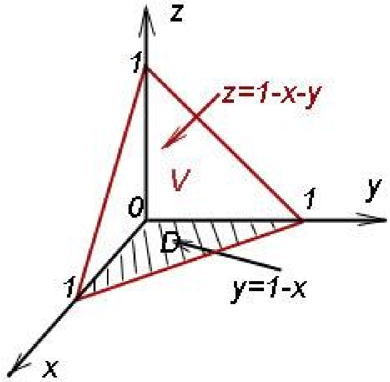
Об'єм області

$D=\left\{(x,y,z)\in R^3 : f_2(x,y)\le z\le f_1(x,y),\ (x,y)\in D\right\}$:

$$V=\iint\limits_D\left(f_1(x,y)-f_2(x,y)\right)dxdy.$$



<u>Приклад 1.8.</u> Знайти об'єм піраміди через подвійний інтеграл:



.

Розв'язання. Маємо $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ або

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \int_0^1 \left((1-x)\cdot y\Big|_0^{1-x} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx = -\frac{(1-x)^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Механічне застосування подвійних інтегралів

Маса області D з щільністю $\rho(x,y)$ обчислюється за формулою

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy\ .$$

Статичні моменти відносно осі Ox та Oy області D з щільністю $\rho(x,y)$ обчислюються за формулами

$$S_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy\ , \quad S_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy\ .$$

Центр мас області D з щільністю $\rho(x,y)$ дорівнює

$$x_c = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy\ , \quad y_c = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x,y)\,dxdy\ .$$

<u>Зауваження.</u> ***Якщо область є однорідною, тобто*** $\rho(x,y) \equiv \text{const}$ ***, то центр мас однорідної фігури знаходиться за формулою***

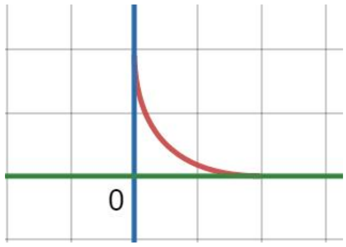
$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{S}.$$

У випадку центрально-симетричної фігури, центр фігури збігається з центром симетрії.

Приклад 1.9. *Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ *та осями* $x = 0, \quad y = 0$.

Розв'язання. Оскільки фігура симетрична відносно прямої $y = x$, то

$$x_c = y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D xdxdy.$$



Спочатку знайдемо масу (площу) **однорідної** пластини, вважаючи густину розподілу мас в пластині рівною 1:

$$m = \int_0^a dx \int_0^{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2} dy = \int_0^a \left(a - 2\sqrt{ax} + x\right)dx = \left(ax - \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = a^2\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{6}.$$

Звідки

$$x_c = y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D xdxdy = \frac{6}{a^2}\int_0^a dx \int_0^{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2} xdy = \frac{6}{a^2}\int_0^a \left(ax - 2\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}} + x^2\right)dx =$$

$$= \frac{6}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} - 4\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = 6a\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{a}{5}.$$

Отже, центром мас пластини маємо точку $\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.

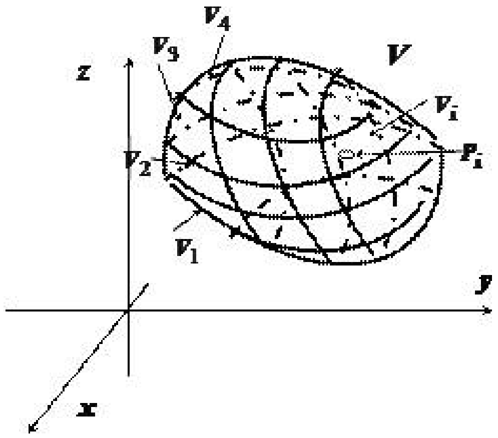
1.2. Потрійні інтеграли

Раніше ми розглянули поняття подвійного інтеграла Рімана від обмеженої функції двох змінних. Визначимо потрійний інтеграл Рімана від функції трьох змінних.

Задача про обчислення маси тіла

Нехай задане деяке тіло $T \subset \mathbb{R}^3$, яке заповнене масами, та в кожній точці $P(x,y,z)$ відома щільність розподілу цих мас $\rho(x,y,z)$. Треба знайти масу m тіла T.

Для **розв'язання** цієї задачі розіб'ємо тіло T на частини $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$, для яких обчислимо об'єми $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n$, де V_i – об'єм відповідної частини T_i. Виберемо в кожній з частин T_i точки $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \in T_i$.



Будемо вважати, що в межах частини T_i щільність постійна і дорівнює $\rho(P_i) = \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Тоді маса m_i частини T_i приблизно дорівнює

$$m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i,$$

а маса m всього тіла T

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i .$$

Спрямовуючи найбільший із діаметрів частин T_i до нуля отримуємо точну рівність

$$m = \lim_{\max d(T_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i ,$$

де діаметр $d(T_i)$ – найбільша відстань між будь-якими двома точками частини T_i.

Якщо така границя існує та не залежить від способу розбиття тіла T на частини T_i, то вона називається ***потрійним інтегралом*** від функції $\rho(x,y,z)$ за тілом T і позначається

$$\iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max d(T_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V_i$$

або

$$\iiint\limits_T \rho(x,y,z)dV .$$

Таким чином, ми отримали ***механічний зміст потрійного інтеграла***:

$$m = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz .$$

Зауваження 1. ***Схема побудови потрійного інтеграла така ж сама, як і для визначеного інтеграла Рімана та для подвійного інтеграла.***

Потрійний інтеграл за прямокутним паралелепіпедом

У просторі $\mathbb{R}^3$ розглянемо прямокутний паралелепіпед

$$P = \{(x,y,z):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ p \le z \le q\},$$

який будемо позначати таким чином:

$$P = [a,b]\times[c,d]\times[p,q].$$

Нехай

$$\{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\},\ \ \{y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d\},$$

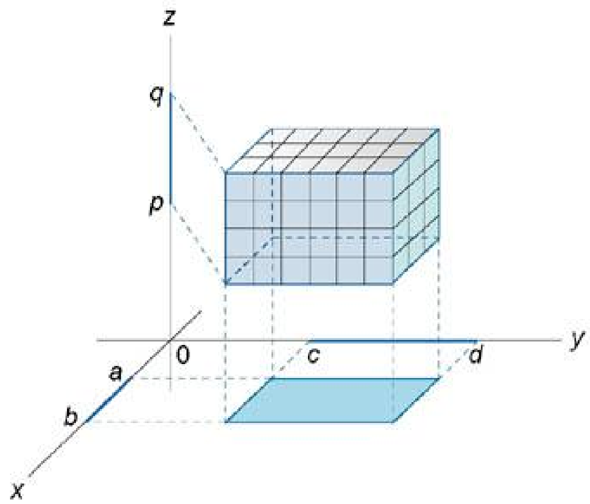
$$\{z_0 = p < z_1 < z_2 < \ldots < z_l = q\}\ -$$

довільні розбиття відрізків $[a,b]$, $[c,d]$ та $[p,q]$ відповідно.

Розглянемо паралелепіпеди

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]\times[z_k, z_{k+1}],$$

$$i = 0,\ldots,n-1;\quad j = 0,\ldots,m-1;\ k = 0,\ldots,l-1.$$



Означення. ***Множина таких паралелепіпедів*** $\{P_{ijk}\}$ ***називається розбиттям паралелепіпеду*** P ***і позначається*** T.

Через Δx_i, Δy_j, Δz_k позначимо довжини сторін паралелепіпеда P_{ijk}, а його ***діаметр*** **(*діагональ*)** дорівнює

$$d_{ijk} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2} ,$$

де

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad z_k = z_{k+1} - z_k .$$

Діаметр розбиття T визначимо як

$$d(T) = \max_{\substack{0\le i\le n-1\\ 0\le j\le m-1\\ 0\le k\le l-1}} d_{ijk} = \max_{\substack{0\le i\le n-1\\ 0\le j\le m-1\\ 0\le k\le l-1}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2} \cdot$$

Виберемо довільним чином точки (ξ_i, η_j, ζ_k) на кожному з паралелепіпедів P_{ijk}.

Таким чином задано розбиття T ***паралелепіпеду*** P ***із проміжними точками*** (ξ_i, η_j, ζ_k).

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена на паралелепіпеді $P \subset \mathbb{R}^3$.

Означення. ***Сума*** $\sigma_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \,\Delta y_j \,\Delta z_k$ ***називається інтегральною сумою***.

<u>Означення.</u> ***Число*** I ***називається потрійним інтегралом Рімана від функції*** $f(x,y,z)$ ***за паралелепіпедом*** P***, якщо***

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T:\ d(T) < \delta\ \forall \left(\xi_i, \eta_j, \zeta_k\right) \in P_{ijk} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_k\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - I \right| < \varepsilon.$$

У цьому випадку пишуть, що $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma(T) = I$ та позначають

$$I = \iiint\limits_P f(x,y,z)\, dxdydz\,.$$

<u>Означення.</u> ***Якщо існує потрійний інтеграл від функції*** $f(x,y,z)$ ***за паралелепіпедом*** $P = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, ***то функція*** $f(x,y,z)$ ***називається інтегровною за Ріманом на паралелепіпеді*** P ***і пишуть***

$$f(x,y,z) \in R(P)$$
$$\left(f(x,y,z) \in R_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]}\right).$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\, dxdydz = \lim_{d(T)\to 0} \sigma(T) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_k\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k -$$

потрійний інтеграл Рімана від функції $f(x,y,z)$ ***за паралелепіпедом*** P.

Пишуть також

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\, dV,$$

де $f(x,y,z)$ – ***підінтегральна функція***, $f(x,y,z)\,dV$ $\left(f(x,y,z)\,dxdydz\right)$ – ***підінтегральний вираз***, паралелепіпед P – ***область інтегрування***, x, y, z – ***змінні інтегрування***, dV або $dxdydz$ – ***елемент об'єму***.

<u>Зауваження 2.</u> ***За формулою обчислення інтегралів через повторні (теорема Фубіні), яку ми розглянемо далі у загальному вигляді, для прямокутного паралелепіпеда*** $P = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ ***маємо***

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy\int\limits_p^q dz\int\limits_a^b f(x,y,z)dx = \int\limits_p^q dz\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y,z)dy.$$

Необхідна умова інтегровності функції за паралелепіпедом

Теорема ***(необхідна умова інтегровності функції):***
якщо функція $f(x,y,z)$ ***інтегровна за Ріманом за паралелепіпедом*** P $\left(f(x,y,z)\in R(P)\right)$***, то вона обмежена на*** P

$$\left(\exists M>0: \left|f(x,y,z)\right|\le M\ \forall (x,y,z)\in P\right).$$

Приклад 1.10. Якщо $f(x,y,z)\equiv 1$ на $P=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, то

$$\iiint\limits_P dxdydz = (b-a)(d-c)(q-p) = V(P)$$

(отримуємо **об'єм прямокутного паралелепіпеду** P).

Розв'язання. Для будь-якого розбиття T паралелепіпеда P з проміжними точками $\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_k\right)$ інтегральна сума

$$\sigma_f(T) = \sigma_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\underbrace{f\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_k\right)}_{\equiv 1}\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\sum_{j=0}^{m-1}\Delta y_j\sum_{k=0}^{l-1}\Delta z_k =$$

$$= (b-a)(d-c)(q-p) = V(P).$$

Границя від сталої величини дорівнює цій величині, тому

$$\lim_{d(T)\to 0}\sigma(T) = I = (b-a)(d-c)(q-p) = V(P).$$

З іншого боку, згідно з **зауваженням 2** при $f(x,y,z)\equiv 1$ маємо:

$$\iiint\limits_P dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q dz = (q-p)\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy =$$

$$= (d-c)(q-p)\int\limits_a^b dx = (b-a)(d-c)(q-p) = V(P).$$

Далі знайдемо ***умови інтегровності функції***.

Нехай функція $f(x,y,z)$ обмежена на прямокутному паралелепіпеді $P\subset\mathbb{R}^3$. Покладемо

$$M_{ijk}=\sup_{P_{ijk}} f(x,y,z),\qquad m_{ijk}=\inf_{P_{ijk}} f(x,y,z).$$

Суми

$$S_f(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} M_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

та

$$s_f(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} m_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

називаються відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу.

Теорема (***критерій Рімана***). ***Для того щоб обмежена на паралелепіпеді P функція $f(x,y,z)$ була інтегровною за Ріманом $\left(f(x,y,z)\in R(P)\right)$, необхідно і достатньо, щоб***

для будь-якого $\varepsilon>0$ можна було б знайти таке розбиття T паралелепіпеда P, щоб

$$S_f(T)-s_f(T)<\varepsilon. \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left(f(x,y,z)\in R(P)\quad\Leftrightarrow\quad\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists T\quad\Rightarrow\quad S_f(T)-s_f(T)<\varepsilon\right).$$

Нерівність **(1)** можна записати у вигляді

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\omega_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k<\varepsilon,$$

де $\omega_{ijk}=M_{ijk}-m_{ijk}$ – ***коливання функції*** на паралелепіпеді P_{ijk}.

Потрійний інтеграл за довільною обмеженою множиною

Нехай Q – обмежена множина, $Q\subset\mathbb{R}^3$. Виберемо паралелепіпед $P=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ такий, щоб $Q\subset P$. Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена на множині Q. Покладемо

$$F(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z)\in Q,\\ 0, & (x,y,z)\in P\setminus Q.\end{cases}$$

Означення. ***Функція*** $f(x,y,z)$ ***називається інтегровною за Ріманом на множині*** Q $\left(f(x,y,z)\in R(Q)\right)$***, якщо функція*** $F(x,y,z)$ ***інтегровна за Ріманом на паралелепіпеді*** P***.***

Інтеграл Рімана від функції $f(x,y,z)$ ***за множиною*** Q ***визначається рівністю***

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_P F(x,y,z)\,dxdydz.$$

Просторова міра Жордана

Означення. ***Обмежена множина*** $Q\subset\mathbb{R}^3$ ***називається вимірною за Жорданом, якщо існує потрійний інтеграл***

$$\iiint\limits_Q dxdydz = \mu(Q),$$

(тобто функція $f(x,y,z)\equiv 1$ ***інтегровна на множині*** Q ***).***

Величина $\mu(Q)$ ***називається просторовою мірою Жордана або об'ємом множини*** Q

$$\left(\iiint\limits_Q dxdydz = V(Q)\right).$$

Очевидно, що $\mu(Q)\geq 0$.

Нехай Γ − межа множини Q.

Теорема 1. ***Для того щоб обмежена множина*** Q ***була вимірною за Жорданом, необхідно і достатньо, щоб*** $\mu(\Gamma)=0$.

Далі розглянемо теореми, які часто використовують при доведенні вимірності деяких множин.

Теорема 2. ***Якщо множини*** Q_1 ***і*** Q_2 ***вимірні за Жорданом, причому***

$$\mu(Q_1\cap Q_2)=0,$$

то $\mu(Q_1\cup Q_2)=\mu(Q_1)+\mu(Q_2)$.

Зокрема, остання рівність виконується, якщо $Q_1\cap Q_2=\varnothing$.

Теорема 3. ***Графік неперервної на прямокутнику функції*** $z = g(x,y)$ ***має просторову міру нуль.***

Означення. ***Поверхня*** S***, яка задана параметрично трьома рівняннями***

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

називається гладкою регулярною поверхнею, якщо

- ***система встановлює взаємно однозначну відповідність між образом та прообразом*** Δ***;***
- ***функції*** $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ ***неперервно диференційовані в*** Δ***;***
- ***виконана умова невиродженості:***

$$\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \\ z'_u(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u(u,v) & z'_v(u,v) \\ x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Означення. ***Якщо поверхня*** S ***визначена явно як графік функції*** $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$ ***, то*** S ***є гладкою регулярною поверхнею, якщо функція*** $f(x,y)$ ***диференційовна в*** D.

Цей варіант можна розглядати як окремий випадок параметричного задання:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \qquad (u,v) \in D. \\ z = f(u,v), \end{cases}$$

Теорема 4. ***Обмежена гладка регулярна поверхня без самоперетинів, межа якої складається із скінченної кількості простих замкнених кривих має міру нуль.***

Теорема 5. ***Будь-яка обмежена множина, межа якої складається із скінченної кількості точок, гладких кривих та поверхонь, описаних в теоремі 4, вимірна за Жорданом.***

Достатня умова інтегровності функції

Теорема ***(достатня умова інтегрованості функції):***

Якщо функція $f(x,y,z)$ обмежена на вимірній множині Q, при цьому множина точок розриву цієї функції має міру нуль, то вона інтегровна на цій множині $\left(f(x,y,z) \in R(Q)\right)$.

Зокрема, якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на замкненій обмеженій множині Q, то вона інтегровна на ній $\left(f(x,y,z) \in R(Q)\right)$.

Властивості потрійних інтегралів

1. *Лінійність*.

Нехай функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ інтегровні на області D. Тоді для будь-яких чисел α, β лінійна комбінація функцій $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ інтегровна на області D та виконується рівність

$$\iiint_D \left(\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\right) dxdydz =$$

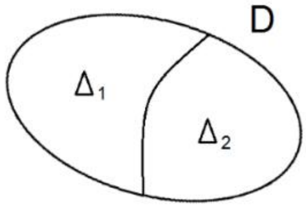
$$= \alpha \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

2. *Адитивність за множиною*.

Нехай функція $f(x,y,z)$ інтегровна на множині D.

Розглянемо розбиття $D = \Delta_1 \bigcup \Delta_2$: $\overset{\circ}{\Delta}_1 \bigcap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \varnothing$, $\Delta_1 \neq \varnothing, \Delta_2 \neq \varnothing$. Тоді виконується рівність

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Delta_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{\Delta_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$



3. *Інтегровність нерівностей.*

Нехай функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ інтегровні на D, причому $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ для будь-яких $(x,y,z) \in D$. Тоді

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint\limits_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

4. ***Якщо функція*** $f(x,y,z)$ ***інтегровна в замкнутій області*** D***, що має об'єм*** V***, тоді***

$$mV \le \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz \le MV,$$

де

$$m = \min_D f(x,y,z), \;\; M = \max_D f(x,y,z).$$

5. ***Якщо функція*** $f(x,y,z)$ ***неперервна в замкнутій області*** D***, що має об'єм*** V***, тоді існує точка*** $(x_0, y_0, z_0) \in D$**:**

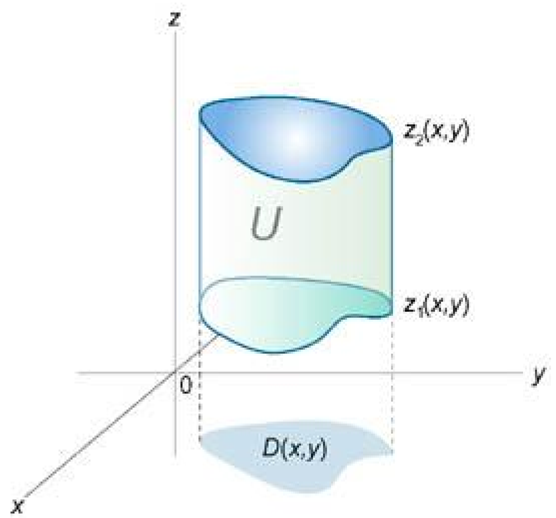
$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Величина $f(x_0, y_0, z_0)$ ***називається середнім значенням функції*** $f(x,y,z)$ ***в області*** D**.**

Обчислення потрійних інтегралів

Обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування за кожною змінною окремо.

Нехай область U обмежена знизу і зверху поверхнями $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ відповідно, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.



Теорема Фубіні (***про зведення потрійного інтеграла до повторного***):

Нехай функція $f(x,y,z)$ ***інтегровна на множині***

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ \ (x,y)\in D\},$$

де D – ***проекція множини*** U ***на площину*** xOy , ***функції*** $z_1(x,y),\ z_2(x,y)$ ***визначені на*** D. ***Нехай для кожної точки*** $(x,y)\in D$ ***існує інтеграл Рімана***

$$I(x,y)=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Тоді існує повторний інтеграл Рімана

$$\iint\limits_D I(x,y)\,dxdy\ =\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

і виконується рівність

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

Інтеграл $\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$ ***називається повторним інтегралом.***

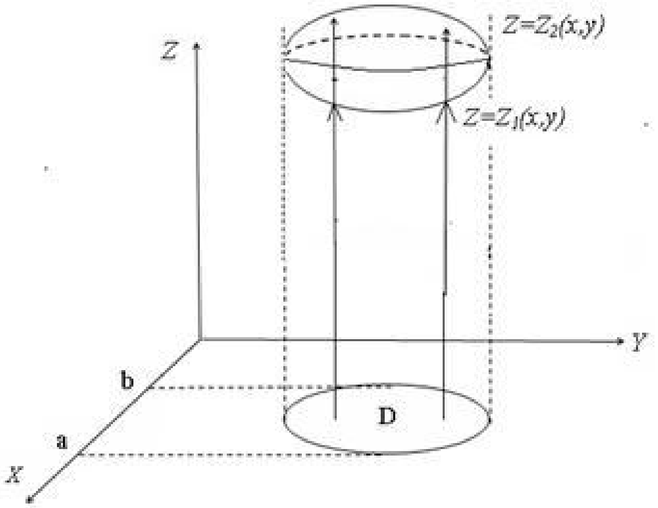
Його записують у вигляді

$$\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Зауваження 3. Обчислюють повторний інтеграл наступним чином: ***спочатку слід брати внутрішній інтеграл*** $I(x,y)=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, ***вважаючи змінні*** $x,\ y$ ***сталими, а потім знаходять подвійний інтеграл*** $\iint\limits_D I(x,y)\,dxdy$.

Зауваження 4. У випадку, якщо множина D обмежена кривими $y_1(x)$ та $y_2(x)$, $x\in[a,b]$, тобто множину U можна представити у вигляді

$$U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z_1\left(x,y\right)\le z\le z_2\left(x,y\right),\ y_1\left(x\right)\le y\le y_2\left(x\right),\ x\in\left[a,b\right]\right\},$$



то переходячи від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо формулу

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів, починаючи з правого (внутрішнього). Або

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)dydz,$$

де

$$G(x)=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : z_1\left(x,y\right)\le z\le z_2\left(x,y\right),\ y_1\left(x\right)\le y\le y_2\left(x\right)\right\}-$$

поперечний перетин тіла U площиною, яка перетинає вісь абсцис у фіксованій точці $x\in\left[a,b\right]$.

Слово «поперечне» означає, що ця площина перпендикулярна до осі Ox. Тіло U у цьому випадку можна переписати у вигляді

$$U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in\left[a,b\right],\ (y,z)\in G(x)\right\}.$$

Зокрема, при $f(x,y,z)\equiv 1$ маємо формулу, яку ми отримували раніше для знаходження об'єму тіла через площу поперечного перетину:

$$V=\iiint\limits_U dxdydz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{G(x)} dydz=\int\limits_a^b S(x)dx,$$

де $S(x)-$ площа поперечного перетину $G(x)$.

<u>Зауваження</u> 5. ***Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто змінні*** x, y ***і*** z ***у правій частині формули через повторний інтеграл за певних умов можна міняти місцями.***

Наприклад, якщо множину U можна представити у вигляді

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ x_1(y) \le x \le x_2(y),\ y \in [c,d]\right\},$$

то отримаємо формулу

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \ ,$$

або якщо

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z),\ z_1(y) \le z \le z_2(y),\ y \in [c,d]\right\},$$

то

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx.$$

Аналогічно якщо

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z),\ y_1(z) \le y \le y_2(z),\ z \in [p,q]\right\} =$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \in [p,q],\ (x,y) \in D(z)\right\},$$

то

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_p^q dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx = \int_p^q dz \iint_D f(x,y,z)dxdy.$$

<u>Приклад 1.11</u>. Знайти об’єм множини

$$U = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\}.$$

Розв’язання. Маємо кулю

$$U = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z):\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D\right\}$$

де $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le R^2\right\}.$

Беручи до уваги формулу знаходження об'єму тіла та за теоремою Фубіні, маємо

$$V(U)=\iiint\limits_U dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz=\iint\limits_D\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz\right)dxdy=$$

$$=2\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Далі перейдемо до **полярної системи** координат:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi.\end{cases}$$

Нагадаємо, що якобіан цього відображення дорівнює r і

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,drd\varphi\ .$$

У нашому випадку маємо

$$V(U)=2\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy\underset{ПСК}{=}\left|\begin{array}{c}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ J=r\end{array}\right|=2\iint\limits_D r\sqrt{R^2-r^2}\,d\varphi dr=$$

$$=8\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,\frac{1}{2}\,d\left(r^2\right)=-2\pi\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,d\left(R^2-r^2\right)=$$

$$=-\frac{4}{3}\pi\left(R^2-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

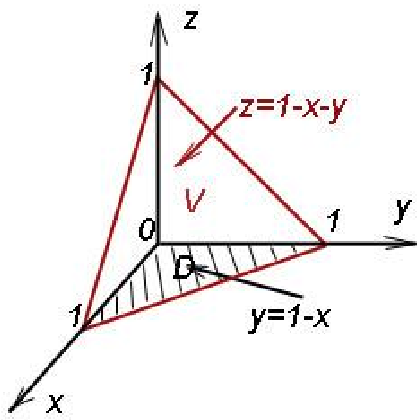
Або згідно із **зауваженням 4**

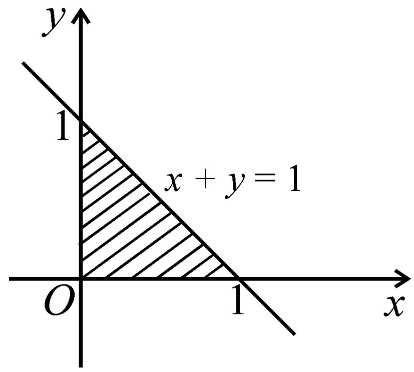
$$V=\iiint\limits_U dxdydz=\int\limits_{-R}^{R}S(x)dx=\int\limits_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Приклад 1.12. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_U z\,dxdydz$, якщо область інтегрування U обмежена площинами

$$x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=1.$$

Розв'язання.





Для даного прикладу маємо

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - x - y,\ 0 \le y \le 1 - x,\ x \in [0,1]\right\}.$$

Переходячи від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо

$$\iiint\limits_U z\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(z^2\right)\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x - y)^3\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3\, dx = -\frac{1}{24}(1 - x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Теорема (***про заміну змінних у потрійному інтегралі***)**:**
Нехай

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta), \\ y = y(\xi,\eta,\zeta), \\ z = z(\xi,\eta,\zeta), \end{cases} \quad - \qquad \textbf{(2)}$$

неперервно-диференційоване взаємно-однозначне відображення обмеженої області G' ***площини*** (ξ,η,ζ) ***на обмежену область*** G ***площини*** (x, y, z)***, якобіан якого не дорівнює нулю:***

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\zeta \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\zeta \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\zeta \end{vmatrix} \ne 0,$$

$\overline{D'}$ $\left(\overline{D'} \subset G'\right)$ – ***замкнена область, вимірна за Жорданом, а*** $\overline{D}$ – ***її образ при відображенні*** **(2).** ***Тоді має місце наступна формула заміни змінних у потрійному інтегралі:***

$$\iiint\limits_{\overline{D}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\overline{D'}} f(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta))\left|J(\xi,\eta,\zeta)\right| d\xi d\eta d\zeta,$$

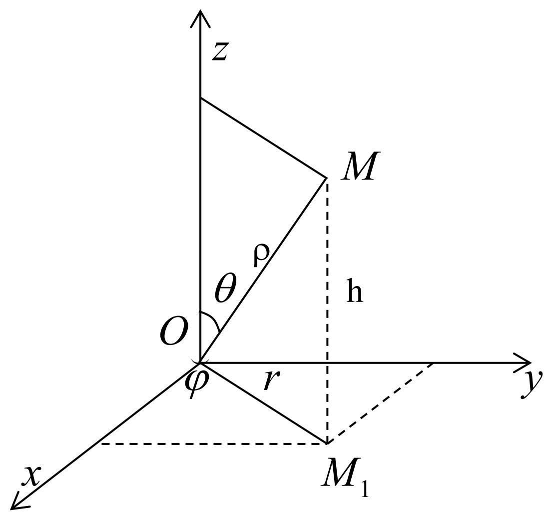
де $f(x,y,z)$ – ***неперервна на множині*** $\overline{D}$ ***функція.***

Циліндричні та сферичні координати

На практиці найпоширенішими є ***циліндричні*** та ***сферичні координати***.

Розглянемо **тривимірну систему координат**. У просторі зафіксуємо точку O і промінь l, а також вектор $\vec{n} \perp l, \left|\vec{n}\right| = 1$. Через точку O можна провести єдину площину, перпендикулярну вектору нормалі $\vec{n}$.

Для запровадження відповідності між **сферичною** і **декартовою прямокутною** системами координат точку O поєднують з початком декартової прямокутної системи координат, промінь l – із додатним напрямком осі Ox, вектор нормалі – з віссю Oz.



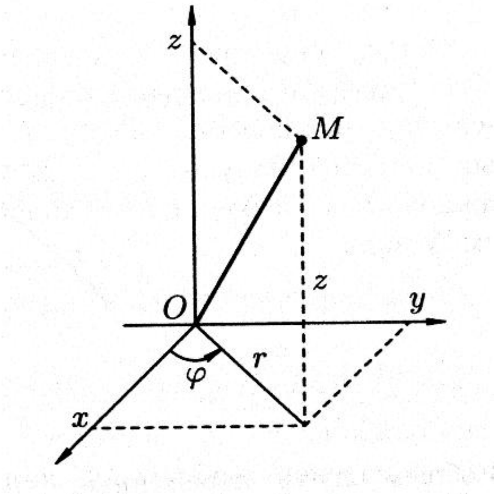
$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho,\ \left|\overrightarrow{OM_1}\right| = r,\ MM_1 = h.$$

Якщо із точки M опустити перпендикуляр MM_1 на побудовану площину, то точка M_1 матиме на площині полярні координати (r,φ).

Означення. ***Циліндричними координатами** точки M називаються числа (r,φ,h), які визначають положення точки M у тривимірному просторі.*

Означення. ***Сферичними координатами** точки M називаються числа (ρ,φ,θ), де $\theta -$ кут між $\overrightarrow{OM}$ та нормаллю $\vec{n}$.*

Циліндричні координати



Маємо наступний зв'язок між циліндричною та декартовою прямокутною системами координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi). \\ z = h, \end{cases}$$

Знайдемо якобіан вписаного відображення:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_h \\ y'_r & y'_\varphi & y'_h \\ z'_r & z'_\varphi & z'_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Сферичні координати

У випадку сферичної системи координат маємо:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \ \theta \in [0, \pi]. \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

Розглянемо кут $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки M і проекцією $\overrightarrow{OM_1}$ радіус-вектора цієї точки на площину xOy).

Тоді маємо наступний зв'язок між сферичною та декартовою прямокутною системами координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \quad \rho \geq 0, \ 0 \leq \varphi < 2\pi, \ -\dfrac{\pi}{2} \leq \psi \leq \dfrac{\pi}{2}. \\ z = \rho\sin\psi, \end{cases}$$

Знайдемо якобіан останнього відображення:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\psi \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\psi \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\cos\psi & -\rho\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \rho\cos\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \rho\cos\psi \end{vmatrix} =$$

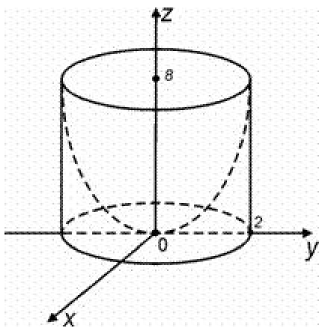
$$= \sin\psi\,(\underbrace{\rho^2\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + \rho^2\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi}_{=\rho^2\cos\psi\sin\psi}) + \rho^2\cos\psi\,(\underbrace{\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi}_{=\cos^2\psi}) =$$

$$= \rho^2\cos\psi\sin^2\psi + \rho^2\cos\psi\cos^2\psi = \rho^2\cos\psi \geq 0.$$

<u>Приклад 1.13.</u> Знайти об'єм тіла Q, обмеженого поверхнями

$$z = \left(x^2 + y^2\right)^{3/2} \quad \text{та} \quad z = 8.$$

Розв'язання.



Оскільки $V(Q)=\iiint\limits_{Q} dxdydz$, то, переходячи до циліндричних координат, маємо:

$$V(Q)=\iiint\limits_{Q} dxdydz=\iiint\limits_{Q} r\,drd\varphi dh = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} dr \int\limits_{r^3}^{8} r dh = 2\pi\int\limits_{0}^{2} r\left(8-r^3\right)dr =$$

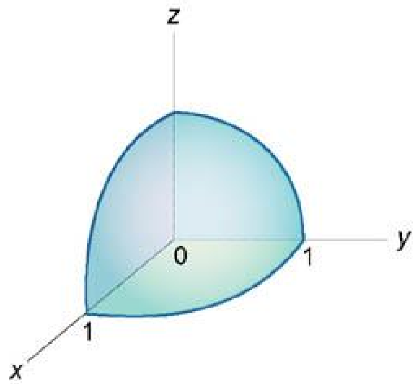
$$=2\pi\left(4r^2-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{96\pi}{5}.$$

<u>Приклад 1.14.</u> Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{Q} xyz\,dxdydz$,

де тіло Q обмежене поверхнями

$$x^2+y^2+z^2=1,\;\; x=0,\;\; y=0,\;\; z=0\;\;\left(x,\; y,\; z\geq 0\right).$$

Розв’язання.



Обчислимо даний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_{Q} xyz\,dxdydz=\iiint\limits_{Q} \rho\cos\varphi\cos\psi\cdot\rho\sin\varphi\cos\psi\cdot\rho\sin\psi\left|\rho^2\cos\psi\right|d\rho d\varphi d\psi=$$

$$=\iiint\limits_{Q} \rho^5\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi\left|\cos\psi\right|d\rho\, d\varphi\, d\psi=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\sin\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho^5 d\rho\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi d\cos\psi=\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1\cdot\frac{\cos^4\psi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{48}$$

<u>Зауваження.</u> ***Якщо областю інтегрування є еліпсоїд або його частина, то для обчислення потрійного інтеграла доцільно використовувати узагальнені сферичні координати***:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \; \theta \in [0, \pi]. \\ z = c\rho\cos\theta, \end{cases}$$

Тоді якобіан такого відображення дорівнює

$$J = abc\rho^2\sin\theta.$$

Якщо розглянути $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, то

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = b\rho\sin\varphi\cos\psi, \quad\quad 0 \le \varphi < 2\pi, \; -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ z = c\rho\sin\psi, \end{cases}$$

$$J = abc\rho^2\cos\psi.$$

Механічне застосування потрійних інтегралів

Маса тіла $T \subset \mathbb{R}^3$ з щільністю $\rho(x, y, z)$ обчислюється за формулою

$$m = \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\,dxdydz.$$

Статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла T відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюється за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\,\rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_T y\,\rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\,\rho(x, y, z)\,dxdydz.$$

Координати x_c, y_c, z_c ***центра мас*** тіла T знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Якщо тіло ***однорідне*** $\left(\rho(x, y, z) = 1\right)$, то

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dxdydz, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dxdydz,$$

де V – об'єм даного тіла T.

Сила тяжіння матеріальним тілом T з щільністю $\rho(x,y,z)$ матеріальної точки з координатами (a,b,c) і масою m ***є вектором, координати якого знаходяться за формулами***

$$F_x = mG\iiint\limits_T \frac{(x-a)\rho(x,y,z)dxdydz}{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)^{3/2}},$$

$$F_y = mG\iiint\limits_T \frac{(y-b)\rho(x,y,z)dxdydz}{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)^{3/2}},$$

$$F_z = mG\iiint\limits_T \frac{(z-c)\rho(x,y,z)dxdydz}{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)^{3/2}},$$

де G – гравітаційна стала

$$G = 6,67430(15)\cdot 10^{-11}\,м^3\,c^{-2}\,кг^{-1} \quad \left(або\ Н\cdot м^2\cdot кг^{-2}\right)$$

<u>Зауваження.</u> ***Якщо тіло є однорідною кулею, то силу тяжіння можна обчислити, помістивши всю масу цієї кулі до її центру.***

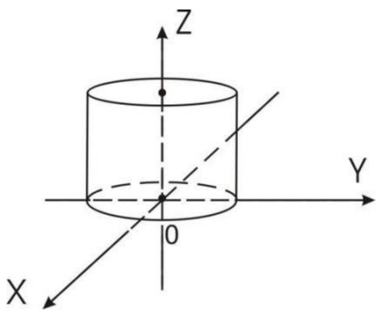
Для тіл більш складної форми це неправильно. У цьому випадку треба застосовувати наведені вище формули.

<u>Приклад 1.15</u>. Знайти силу тяжіння однорідним циліндром

$$x^2+y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h,$$

густиною μ_0 точки $P(0;0;c)$ $(c>h)$ з масою m.

<u>Розв'язання.</u>



За симетрією тіла відносно осі Oz, маємо

$$F_x = F_y = 0,$$

$$F_z = m\mu_0 G\iiint\limits_T \frac{(z-c)dxdydz}{\left(x^2+y^2+(z-c)^2\right)^{3/2}},$$

де G – гравітаційна стала. Обчислимо останній інтеграл у циліндричних координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \qquad \text{з якобіаном} \quad J = r,$$

$$F_z = m\mu_0 G\iiint\limits_T \frac{(z-c)dxdydz}{\left(x^2+y^2+(z-c)^2\right)^{3/2}} = m\mu_0 G\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a dr\int_0^h r\,\frac{(z-c)dz}{\left(r^2+(z-c)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi\cdot m\mu_0 G\frac{1}{2}\int_0^a dr\int_0^h r\,\frac{d\left((z-c)^2+r^2\right)}{\left(r^2+(z-c)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\pi m\mu_0 G\int_0^a r\left(r^2+(z-c)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^h dr =$$

$$= 2\pi m\mu_0 G\int_0^a\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2+(h-c)^2}}\right)dr =$$

$$= \pi m\mu_0 G\int_0^a\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(h-c)^2}}\right)d\left(r^2\right) =$$

$$= 2\pi m\mu_0 G\left(\sqrt{r^2+c^2} - \sqrt{r^2+(h-c)^2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi m\mu_0 G\left(\sqrt{a^2+c^2} - c - \sqrt{a^2+(h-c)^2} + |h-c|\right) =$$

$$= 2\pi\mu_0 mG\left(\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+(h-c)^2} - h\right).$$

Розділ ІІ. Криволінійні інтеграли.

2.1. Криволінійні інтеграли першого роду.

Нехай крива $K \subset \mathbb{R}^n$ задана в параметричній формі за допомогою рівнянь

$$x = x_i(t),\ i = 1,\ldots,n,\ t \in [a,\ b]. \qquad (1)$$

Нагадаємо декілька означень, які ми розглядали раніше.

Множина $\{M\}$ ***усіх точок, координати*** x_i ***яких задовольняють рівнянням (1), називається простою кривою, якщо різним значенням параметра*** t ***із сегмента*** $[a,\ b]$ ***відповідають різні точки цієї множини.***

Точки, які відповідають межовим значенням a ***і*** b ***параметра*** t***, називаються межовими точками кривої*** K***.***

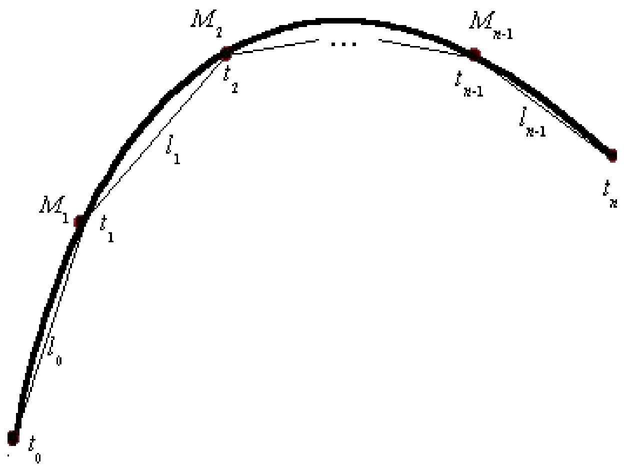
Проста замкнена крива визначається наступним чином.

Нехай K_1 ***і*** K_2 ***– дві прості криві, причому***

1) ***межові точки кривої*** K_1 ***співпадають з межовими точками кривої*** K_2***;***
2) ***будь-які не межові точки кривих*** K_1 ***і*** K_2 ***різні.***

   (тобто це крива у якої початкова точка одночасно є і кінцевою точкою і яка не має інших самоперетинів).

Крива K***, отримана об'єднанням кривих*** K_1 ***і*** K_2***, називається простою замкненою кривою.***



Нехай π – довільне розбиття відрізка $[a,\ b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b.$$

Позначимо $M_0,\ M_1,\ M_2,...,M_m$ відповідні точки кривої K. Отриману при цьому ламану $L = M_0M_1M_2...M_m$ будемо називати ламаною, ***вписаною*** в криву K , яка відповідає даному розбиттю π відрізка $\left[a,\ b\right]$.

Оскільки довжина l_i ланки цієї ламаної дорівнює $l_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})\right)^2}$,

то довжина $l(L)$ всієї ламаної $L = M_0M_1M_2...M_m$ дорівнює

$$l(L) = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})\right)^2}\ .$$

__Означення.__ ***Якщо множина $\left\{l(L)\right\}$ довжин вписаних у криву ламаних, які відповідають розбиттям π відрізка $\left[a,\ b\right]$, обмежена, то крива K називається спрямлюваною кривою, а точна верхня грань (межа) $l(K)$ множини $\left\{l(L)\right\}$ називається довжиною кривої K :***

$$l(K) = \sup_{L}\left\{l(L)\right\}.$$

Властивості спрямлюваних кривих

1. ***Якщо K – спрямлювана крива, то довжина цієї кривої $l(K) > 0$.***
2. ***Якщо K – спрямлювана крива, то довжина цієї кривої $l(K)$ не залежить від параметризації кривої K .***
3. ***Якщо спрямлювана крива K розбита за допомогою скінченної кількості точок $M_0,\ M_1,\ M_2,\ ...\ ,\ M_n$ на скінченну кількість кривих K_i, то***

   $\forall i\ K_i$ ***– спрямлювані криві та*** $l(K) = \sum_{i=1}^{n} l(K_i)$ ***(адитивність).***

__Означення.__ ***Крива $K \subset \mathbb{R}^n$, яка задана в параметричній формі за допомогою рівнянь $x = x_i(t)$, $i = 1,...,n$, $t \in \left[a,\ b\right]$, називається гладкою, якщо***

$$\forall i = 1,...,n \quad x_i(t) \in C^1\left[a,\ b\right]:\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i'(t)\right)^2 \neq 0,$$

тобто в кожній точці кривої K існує ненульовий дотичний вектор.

Замкнена кусково-гладка крива називається замкненим контуром.

Замкнений контур без самоперетинів називається простим замкненим контуром.

Теорема. ***Якщо крива*** $K \subset \mathbb{R}^n$ ***задана в параметричній формі за допомогою рівнянь*** $x = x_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, $t \in [a,\ b]$, ***і*** $x_i(t) \in C^1[a,\ b]$, ***то***

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i'(t)\right)^2}\, dt\,.$$

Кажуть, що в усьому просторі або його частині визначено (задано) скалярне поле **u**, ***якщо кожній точці М простору або його частини поставлено в однозначну відповідність деяке число (скаляр)*** **u(*M*).**

Наприклад, у тривимірній ДСК визначення скалярного поля ***u*** еквівалентно визначенню функції ***u(****x, y, z****)***.

Кажуть, що в усьому просторі або його частині визначено (задано) векторне поле $\vec{a}$ ***, якщо кожній точці М простору або його частини поставлено в однозначну відповідність деякий вектор*** $\vec{a}(M)$.

Наприклад, у тривимірній ДСК визначення векторного поля $\vec{a}$ еквівалентно визначенню 3-х функцій $a_1(M),\ a_2(M),\ a_3(M)$:

$$\vec{a}(M) = a_1(M)\vec{i} + a_2(M)\vec{j} + a_3(M)\vec{k}\,.$$

Означення 1. ***Нехай на спрямлюваній кривій*** $K \subset \mathbb{R}^n$ ***задана скалярна функція*** $f(x)$. ***Тоді криволінійним інтегралом І роду*** **(КІ І)** ***від функції*** $f(x)$ ***вздовж кривої*** K ***називається***

$$\int_K f(x)dl = \int_a^b f(x(t))dl(t),$$

де $l(t)$ ***– довжина дуги кривої від*** **0** ***до*** t, ***тобто***

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i'(\tau)\right)^2}\, d\tau\,.$$

Означення 2. ***Криволінійним інтегралом І роду (*****КІ І*****) від функції*** $f(x)$ ***вздовж кривої*** K ***називається***

$$\int_K f(x)dl = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\Delta l_j\,,$$

де ξ_j ***– проміжні точки на елементарній дузі*** $M_{j-1}M_j$, Δl_j ***– довжини дуг*** $M_{j-1}M_j$***, отримані при розбитті кривої*** K***.***

Сума

$$\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\Delta l_j$$

називається інтегральною сумою,

$d(\pi)\to 0$ ***еквівалентно тому, що максимальна довжина елементарних дуг прямує до нуля.***

Означення 1 і 2 еквівалентні.

Якщо існує $\int_K f(x)dl$ $\left(\exists\int_K f(x)dl\right)$***, то функція*** $f(x)$ ***називається інтегровною вздовж кривої*** $K\subset\mathbb{R}^n$ ***, крива*** $K = AB$ ***називається дугою інтегрування, A – початкова, а B – кінцева точки інтегрування.***

Теорема 1. ***Якщо крива*** $K\subset\mathbb{R}^n$ ***задана в параметричній формі за допомогою рівнянь***

$$x = x_i(t),\ \ i = 1,\dots,n,\ \ t\in[a,\ b],$$

і K ***– кусково-гладка крива (тобто її можна розбити на скінченну кількість гладких кривих), а функція*** $f(x)$ ***кусково-неперервна на*** K***, то***

$$\exists\int_K f(x)dl = \int_a^b f(x_1(t),\dots,x_n(t))\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'(t)\right)^2}\,dt.$$

У просторі $\mathbb{R}^2$ ***маємо***

$$\int_{K\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

У просторі $\mathbb{R}^3$ ***маємо***

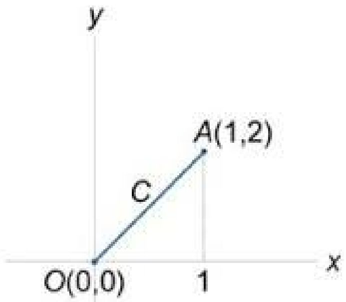
$$\int_{K\subset\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt\ .$$

<u>Приклад 2.1</u>. ***Знайти*** $\int\limits_{OA} xydl$ ***вздовж прямої*** $OA \subset \mathbb{R}^2$***,***

де $O(0;0)$***,*** $A(1;2)$***.***

Розв'язання. Маємо

$$f(x,y) = xy\,, \qquad OA : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in [0,1],$$



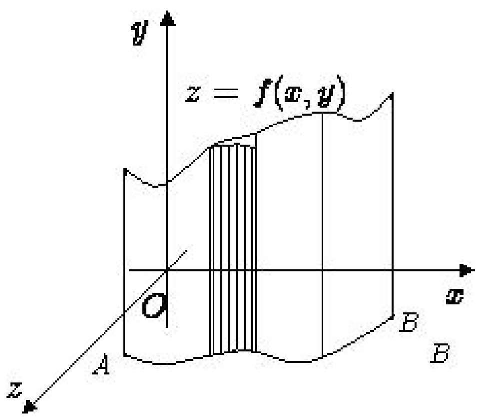
$$\int\limits_{OA} xydl = \int\limits_0^1 t \cdot 2t \cdot \sqrt{1+2^2}\; dt = 2\sqrt{5}\int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

***Фізичний зміст* КІ І *роду* :**

$\int\limits_K f(x)dl$ ***– це маса кривої*** K ***з лінійною густиною*** $\rho = f(x)$***.***

***Геометричний зміст* КІ І *роду* :**

при $f(x,y) \geq 0$ $\int\limits_{K \subset \mathbb{R}^2} f(x,y)dl$ ***чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, яка складена із перпендикулярів до площини Oxy, поставлених у точках дуги кривої*** $K = AB$ ***, і які мають змінну довжину*** $f(x,y)$.



В окремому випадку, якщо $K = AB$ – відрізок прямої $[a,b]$, розміщений на осі Ox, то $f(x,y) = f(x)$ (функція однієї змінної), $\Delta l_i = \Delta x_i$ і криволінійний інтеграл буде звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то одержимо криволінійний інтеграл $\int\limits_K dl$, значення якого дорівнює ***довжині дуги кривої*** $K = AB$ **:**

$$L = \int\limits_K dl.$$

Властивості КІ І роду

1. ***Лінійність по функції:***

$$\int\limits_K \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dl = \alpha \int\limits_K f(x) dl + \beta \int\limits_K g(x) dl.$$

2. ***Адитивність за кривою:***

$$\int\limits_{K_1 \cup K_2} f(x) dl = \int\limits_{K_1} f(x) dl + \int\limits_{K_2} f(x) dl.$$

3. ***Незалежність від напрямку обходу кривої (за означенням):***

$$\int\limits_{AB} f(x) dl = \int\limits_{BA} f(x) dl.$$

4. ***Незалежність від параметризації кривої (за означенням).***

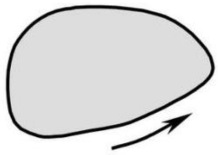
5. **Теорема** ***(про середнє). Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна на кривій*** K ***, то на цій кривій існує точка*** x_0 ***така, що***

$$\int\limits_K f(x) dl = f(x_0) \cdot L, \quad \textit{де } L - \textit{ довжина кривої } K.$$

2.2. Криволінійні інтеграли другого роду.

Означення. ***Крива, на якій обрано один з двох можливих напрямків, називається орієнтованою кривою.***

Якщо контур інтегрування замкнений, то будемо вважати, що замкнений контур обходиться в додатному напрямку, якщо область, яка лежить всередині цього контура, залишається ліворуч від точки обходу.



Протилежний напрямок обходу називається від'ємним.

Означення. ***Нехай на спрямлюваній орієнтованій кривій***

$$K = \{x_i(t),\ i = 1,...,n,\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$$

задана вектор-функція $F(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x)),\ x \in \mathbb{R}^n$.

Тоді криволінійний інтеграл II роду визначається наступним чином:

$$\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \int_a^b f_1(x(t))dx_1(t) + \int_a^b f_2(x(t))dx_2(t) + \ldots + \int_a^b f_n(x(t))dx_n(t)$$

$$\left(\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x(t))dx_k(t)\right).$$

В окремому випадку, якщо на кривій $K \subset \mathbb{R}^2$, заданій параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b],$$

задана вектор-функція $F(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y))$, криволінійний інтеграл II роду визначається наступним чином:

$$\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(t),y(t))dx(t) + \int_a^b Q(x(t),y(t))dy(t).$$

Теорема 2. ***Якщо*** $K = \{x_i(t),\ i = 1,...,n,\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ ***– кусково-гладка крива, а*** $F(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ ***– кусково-неперервна вектор-функція*** $(x \in \mathbb{R}^n)$, ***то***

$$\exists\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \int_a^b \left(f_1(x(t))x_1'(t) + \ldots + f_n(x(t))x_n'(t) \right) dt$$

$$\left(\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x(t))x_k'(t)dt \right).$$

<u>**Зауваження.**</u> ***Якщо*** $K \subset \mathbb{R}^3$ ***– кусково-гладка крива, а*** $F(x,y,z) = \left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \right)$ ***– неперервна вектор-функція, то***

$$\int_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Зв'язок між КІ І роду та КІ ІІ роду

Якщо виконані умови попередньої Теореми 2 і $\left| x'(t) \right| \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$***, то***

$$\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n \overset{\text{теорема 2}}{=} \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n f_k(x(t)) \cdot x_k'(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(x_k'(t) \right)^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(x_k'(t) \right)^2}\, dt = \int_K \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl,$$

тобто

$$\int_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \int_K \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl$$

де $\vec{\tau}$ ***– орт дотичної до кривої*** K***,*** $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$ ***– скалярний добуток відповідних векторів.***

Властивості КІ ІІ роду

1. ***Лінійність по функції.***
2. ***Адитивність за кривою.***
3. ***Змінюється знак на протилежний при змінюванні напрямку обходу кривої (тобто зміни місцями початкової й кінцевої її точок).***
4. ***Не залежить від параметризації, якщо вона зберігає напрямок обходу або орієнтацію.***

<u>**Зауваження.**</u> ***Означення криволінійного інтегралу другого роду зпереносится на випадок, коли крива інтегрування замкнена. Для позначення***

криволінійного інтегралу другого роду за замкненим контуром K використовують символ

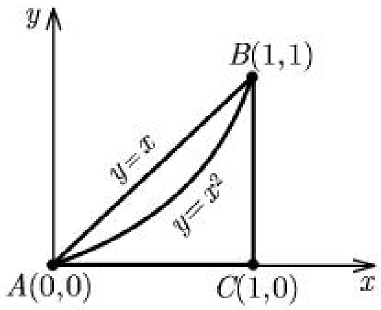
$$\oint_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n$$

$$\left(\oint_K \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx_k \right).$$

Фізичний зміст КІ II роду для $n = 3$:

$$\int_K Pdx + Qdy + Rdz$$ ***– робота сили*** $\vec{F} = (P,\ Q,\ R)$ ***на криволінійному шляху*** $K \subset \mathbb{R}^3$.

Приклад 2.2. ***Знайти*** $\int_{AB} ydx - xdy$ ***, де A(0,0), B(1,1),***



а) вздовж прямої AB.

Розв'язання. Маємо параметричне рівняння прямої AB:

$$AB: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in [0,1], \quad F(x,y) = (y, -x),$$

$$\int_{AB} ydx - xdy = \int_0^1 (t \cdot 1 - t \cdot 1)dt = 0.$$

б) вздовж параболи AB: $y = x^2$.

Розв'язання. Маємо

$$AB: \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in [0,1],$$

$$\int_{AB} ydx - xdy = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 - t \cdot 2t)dt = -\int_0^1 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

<u>Приклад 2.2'.</u> ***Показати, що інтеграл*** $\int_{AB} ydx + xdy$ ***не залежить від вибору кривої*** AB**.**

Розв'язання. Нехай

$$AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b],$$

$$x(a) = y(a) = 0, \;\; x(b) = y(b) = 1.$$

$$\int_{AB} ydx + xdy = \int_a^b (y(t)x'(t) + x(t)y'(t))dt = \int_a^b d(x(t)y(t)) = x(t)y(t)\Big|_a^b =$$

$$= x(b)y(b) - x(a)y(a) = 1.$$

Або

$$\int_{AB} ydx + xdy = \int_{AB} d(xy) = \varphi(B) - \varphi(A) = 1,$$

де $\varphi(x,y) = xy,\ \vec{F} = grad\ \varphi(x,y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (y,x)$.

Незалежність КІ ІІ роду від кривої, яка з'єднує 2 точки

<u>Означення.</u> ***Нехай*** $\vec{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ ***– векторне поле, визначене в деякій області*** $D \subset \mathbb{R}^n$***, і нехай існує скалярне поле*** $\varphi(x)$ ***,*** $\varphi \in C^1(D)$***, таке що***

$$f_k(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k},\ k = 1, \ldots, n,$$

тобто $\vec{F} = grad\, \varphi$**.**

Таке векторне поле $\vec{F}$ ***називається потенціальним, а*** $\varphi(x)$ ***– потенціалом векторного поля*** $\vec{F}$**.**

Теорема (***Критерій потенціальності поля***):

Для того, щоб векторне поле $\vec{F} = \left(f_1, \ldots, f_n \right)$, задане в деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$, було потенціальним, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

1) ***криволінійний інтеграл від векторного поля $\vec{F}$ за будь-якою замкненою кусково-гладкою кривою $C \subset D$ дорівнює нулю:***

для будь-якої замкненої кривої $C \subset D$ $\oint\limits_K f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = 0$;

2) ***криволінійний інтеграл від векторного поля $\vec{F}$ за будь-якою кусково-гладкою кривою $K \subset D$, яка з'єднує будь-які дві точки області D, не залежить від шляху інтегрування:***

$$\int\limits_{K=AB} f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \varphi(B) - \varphi(A)$$

для будь-якої кусково-гладкої кривої $K \subset D$.

Таким чином, ми отримали, що

КІ ІІ роду не залежить від кривої інтегрування тоді і тільки тоді, коли для будь-якої замкненої кривої $C \subset D$ можна записати

$$\oint\limits_C f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = 0$$

$$\left(\oint\limits_C \sum_{k=1}^{n} f_k dx_k = 0 \right),$$

тобто циркуляція векторного поля $\vec{F} = \left(f_1, \ldots, f_n \right)$ (криволінійний інтеграл від вектор-функції $\vec{F}$, взятий вздовж замкненої орієнтованої кривої) дорівнює нулю.

Приклад ***потенціального поля.*** Розглянемо векторне поле

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}; \frac{y}{r^3}; \frac{z}{r^3} \right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0 .$$

Це векторне поле є потенціальним, при цьому його потенціал дорівнює

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

оскільки $\vec{F} = -grad\,\frac{1}{r} = \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}r^3}; \frac{y}{r^3}; \frac{z}{r^3}\right)$.

Формула Гріна

Теорема (***формула Гріна***):

Нехай C ***– кусково-гладка замкнена проста (без точок самоперетинів) крива, яка обмежує область*** $D \subset \mathbb{R}^2$***, і нехай***

функції $P(x,y),\ Q(x,y),\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ ***неперервні в*** $\overline{D}$***. Тоді***

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

де напрямок обходу за контуром C ***здійснюється проти ходу годинникової стрілки (тобто*** C ***– додатно орієнтована замкнута крива).***

Наслідок (***обчислення площі множини***):

Оскільки за формулою Гріна

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \text{ , то}$$

1) *якщо* $P(x,y) = -y,\quad Q(x,y) \equiv 0$ ***, то***

$$S(D) = \iint_D dxdy = -\oint_C ydx. \qquad \textbf{(I)}$$

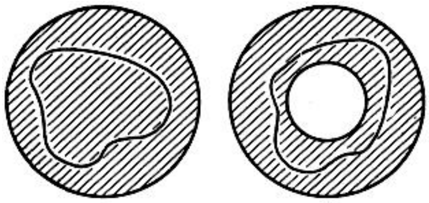
2) *якщо* $P(x,y) \equiv 0,\quad Q(x,y) = x$ ***, то***

$$S(D) = \iint_D dxdy = \oint_C xdy. \qquad \textbf{(II)}$$

3) (I) + (II): $$S(D)=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx\,. \qquad \textbf{(III)}$$

Означення. ***Область*** D ***називається однозв'язною, якщо всередині будь-якого простого замкненого контуру*** C ***виконується умова:***

$$C\subset D \quad\Rightarrow\quad G=\operatorname{int}C\subset D.$$



а б

На рис. а) зображена однозв'язна область,
на рис. б) область не є однозв'язною.

Критерій потенціального поля (на площині).

Для того щоб неперервно диференційовне векторне поле $\vec{F}=(P,Q)$ ***було потенціальним в однозв'язній області*** D ***, необхідно і достатньо виконання умови***

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad \forall(x,y)\in D.$$

Необхідна умова ***потенціальності поля*** випливає з рівності мішаних похідних потенціалу даного поля:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \text{оскільки}\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достатня умова. Для будь-якого простого замкненого контуру $C\subset D$ застосуємо формулу Гріна:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\equiv 0}dxdy=0\,.$$

Зауваження. ***Вимога однозв'язності області є суттєвою.***

Розділ III. Поверхневі інтеграли.

3.1. Поверхневі інтеграли першого роду.

Двосторонні поверхні

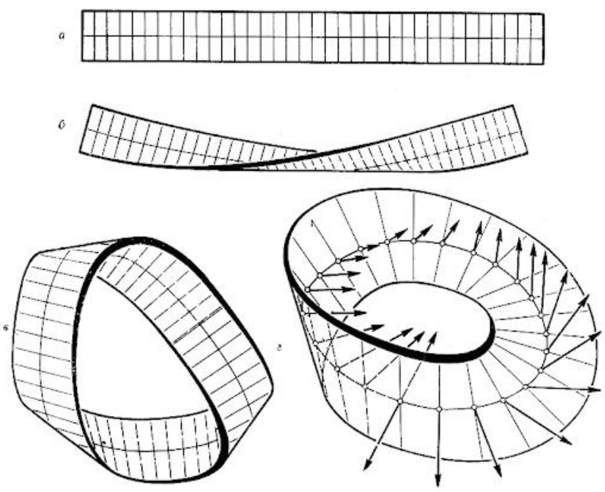
Нехай (S) – деяка поверхня (замкнена або ні), у кожній точці якої існує дотична площина, розташування якої неперервно змінюється з точкою дотику. Нехай M – поточна точка поверхні (S). У цій точці можемо розглянути вектор нормалі $\vec{n}$, якому дамо одне із двох можливих напрямків.

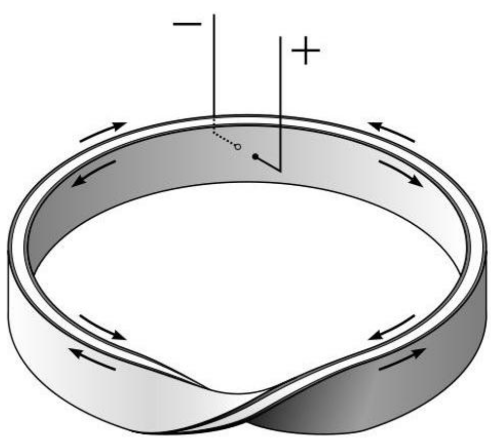
Нехай M_0 – фіксована точка поверхні (S). Проведемо через точку M_0 простий замкнений контур $M_0\ AM_0$, який не перетинає межу поверхні (S). Змусимо точку M обійти даний замкнений контур $M_0\ AM_0$, задавши від самого початку в точці M_0 певний напрямок вектору нормалі. Будемо обходити даний контур та приписувати кожній точці нормалі той напрямок, в який **неперервно** переходить від самого початку заданий напрямок в точці M_0. При поверненні в точку M_0 можлива одна із двох ситуацій:

1) напрямок вектору нормалі збігся із напрямком, який ми вибрали від самого початку (вихідним напрямком);

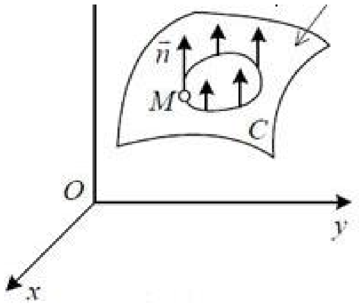
2) цей напрямок протилежний до напрямку від самого початку обходу.

Розглянемо ситуацію **2)**: для будь-якої іншої точки поверхні завжди можна побудувати замкнений контур (наприклад, $M_1M_0AM_0M_1$), після обходу якого ми повертаємося в точку із протилежним напрямком вектору нормалі. Такі поверхні називаються ***односторонніми***. Класичний приклад односторонньої поверхні – це ***стрічка Мебіуса***.





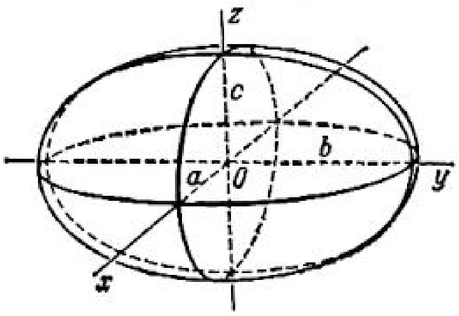
<u>Означення.</u> ***Якщо якою би не була точка М поверхні, і яким би не був замкнений контур, який проходить через точку М та який не перетинає межі даної поверхні, при обході даного контуру ми незмінно повертаємося у вихідну точку з вихідним напрямком нормалі в цій точці, то такі поверхні мають назву двосторонніх поверхонь.***



Сукупність всіх точок поверхні з приписаними за вказаним правилом в них векторами нормалі утворюють сторону поверхні.

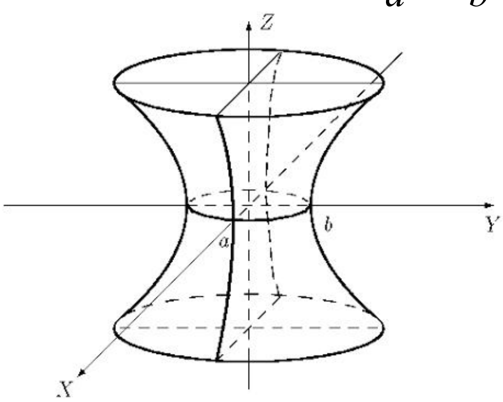
<u>Приклади</u> ***двосторонніх поверхонь*:**

Еліпсоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$



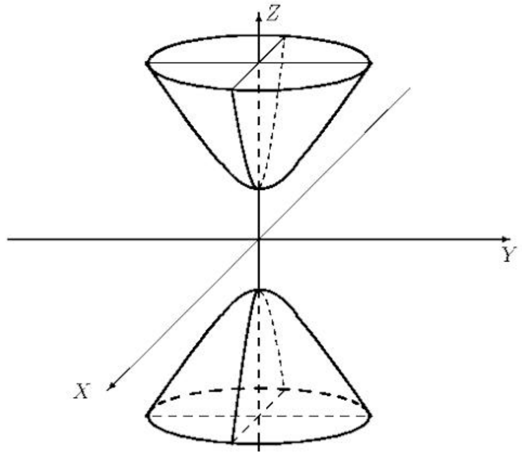
При $a=b=c=R$ отримаємо ***сферу*** із центром на початку координат радіуса R.

Однопорожнинний гіперболоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

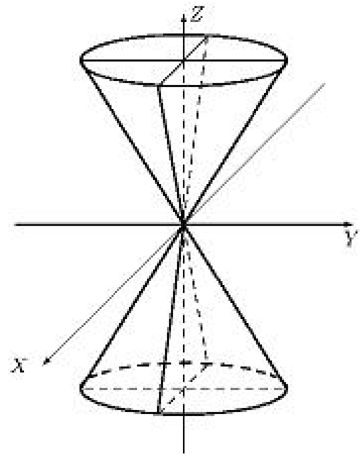


При $a=b=R$ отримаємо ***однопорожнинний гіперболоїд обертання***.

Двопорожнинний гіперболоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

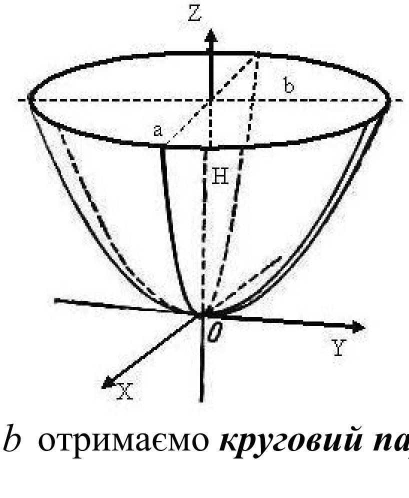


***Еліптичний конус*:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ **.**



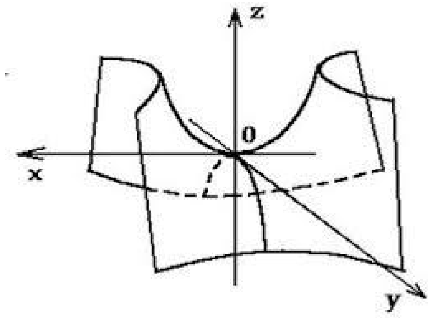
При $a=b$ отримаємо ***круговий конус*** і ***двопорожнинний гіперболоїд обертання***.

Еліптичний параболоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ **.**

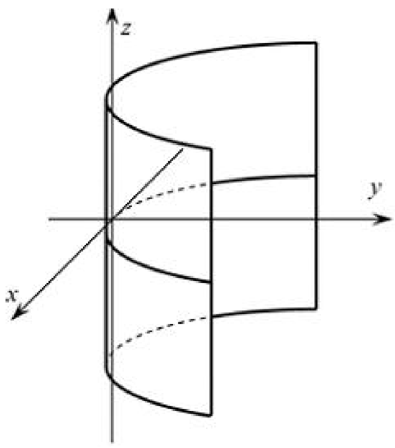
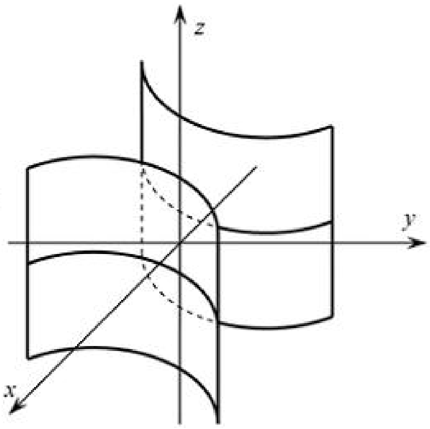
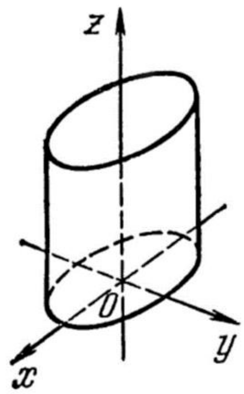


При $a=b$ отримаємо ***круговий параболоїд.***

Гіперболічний параболоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$.



Циліндри

Параболічний	***Гіперболічний***	***Еліптичний***
		
$y=ax^2$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

<u>**Зауваження:**</u> ***для того, щоб задати сторону двосторонньої поверхні, достатньо задати напрямок нормалі хоча б в одній точці поверхні.***

1. Нехай поверхня (S) задана явно функцією

$$z=z(x,y),\quad \text{де}\ \ (x,y)\in D\ \ \text{і}\ \ z(x,y)\in C^1(D).$$

Нехай $\vec{n}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\gamma)$ − вектор нормалі до поверхні (S).

Якщо позначити через $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Якщо в виписаних вище рівняннях всюди перед радикалами вибрати знак «+», то буде обрана верхня сторона поверхні, оскільки $\cos\gamma > 0$ ***(*** γ ***− кут до додатного напрямку осі*** Oz***).***

Площа поверхні знаходиться за формулою

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy\,.$$

<u>Зауваження.</u> Раніше при розгляданні застосувань визначених інтегралів було дано інше визначення площі поверхні обертання.

Покажемо, що нове визначення збігається з попереднім.

Якщо поверхня отримана обертанням графіка функції $y = f(x)$ навколо осі OX , то її параметричне завдання буде таким:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x)\cos\varphi, \qquad x \in [a; b], \qquad \varphi \in [0; 2\pi]. \\ z = f(x)\sin\varphi, \end{cases}$$

Матриця Якобі цього відображення має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(x)\cos\varphi & f(x)\sin\varphi \\ f(x)\sin\varphi & f(x)\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$$A = f'(x)f(x)\cos^2\varphi + f'(x)f(x)\sin^2\varphi = f'(x)f(x),$$
$$B = f(x)\cos\varphi,$$
$$C = -f(x)\sin\varphi.$$

Тоді

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |f(x)| \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\,.$$

А площа поверхні обертання

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx.$$

Що й було потрібно довести.

2. Поверхня (S) задана в параметричній формі за допомогою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$$x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \in C^1(\Delta).$$

Нехай $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\gamma)$ – вектор нормалі до поверхні (S).

Розглянемо

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\cos\lambda = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Означення. ***Поверхня називається простою, якщо кожній точці поверхні відповідає тільки одна пара параметрів (u,v). Параметри (u,v) називаються криволінійними координатами поверхні (S).***

Розглянемо матрицю $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$.

Якщо усі три із можливих визначників 2-го порядку даної матриці в точці M дорівнюють 0, то точка M називається особливою точкою поверхні (S).

Поверхня (S), яка задана в параметричній формі, називається гладкою, якщо $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \in C^1(D)$ (неперервно-диференційовані на D), і на даній поверхні не має особливих точок (тобто ранг записаної вище матриці дорівнює 2).

Площа поверхні знаходиться за формулою

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \quad \text{де}$$

$E=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2$, $G=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2$, $F=x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v$ – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (S).

Приклад 3.1. ***Знайти площу напівсфери*** $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$.

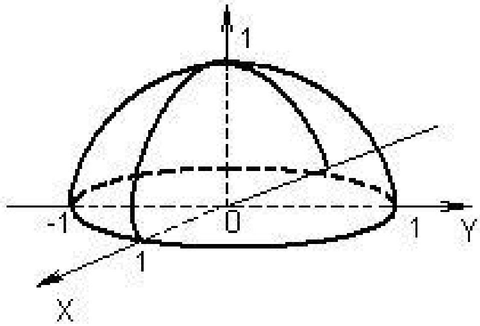
Розв'язання.

1-й спосіб: при ***явному*** заданні напівсфери рівнянням $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy\ =$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=a2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^a\frac{d\left(a^2-r^2\right)}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a^2.$$

2-й спосіб: параметричне задання напівсфери



$$\begin{cases}x=a\cos\varphi\cos\psi,\\ y=a\sin\varphi\cos\psi,\\ z=a\sin\psi,\end{cases}\qquad \begin{matrix}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\psi\le\pi/2,\end{matrix}$$

$$\begin{cases}x'_\varphi=-a\sin\varphi\cos\psi,\\ y'_\varphi=a\cos\varphi\cos\psi,\\ z'_\varphi=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x'_\psi=-a\cos\varphi\sin\psi,\\ y'_\psi=-a\sin\varphi\sin\psi,\\ z'_\psi=a\cos\psi,\end{cases}$$

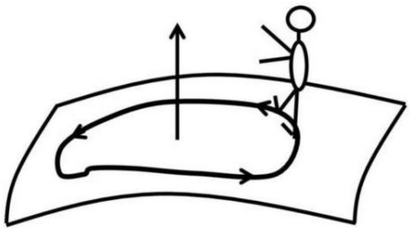
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{a^2\cos^2\psi\, a^2-0}=a^2\cos\psi,$$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}a^2\cos\psi\ d\psi=2\pi a^2.$$

Нехай (S) – проста гладка поверхня (або кусково-гладка, тобто складається із скінченної кількості гладких поверхонь, обмежена простим замкненим контуром L.

Правило узгодження орієнтованої поверхні і контуру
(правило гвинта)

Припишемо контуру L додатний напрямок обходу L_+, якщо обрана певна сторона поверхні, тобто зафіксовано певний напрямок вектору нормалі, і обхід вздовж контуру повинен здійснюватися проти ходу годинникової стрілки так, щоб обмежена їм сторона поверхні залишалася ліворуч. При цьому спостерігач рухається в даному напрямку так, щоб фіксований вектор нормалі «пронизував» його з ніг до голови. В іншому випадку напрямок обходу вважається від'ємним: L_-.



Таким чином визначається додатний напрям обходу будь-якого замкненого контуру, що належить даній поверхні, і що обмежує якусь частину цієї поверхні. Якщо поверхня кусково-гладка, тобто складається із скінченної кількості гладких поверхонь, що межують між собою по гладким кривим, то орієнтацію кожного шматка поверхні вибираємо так, щоб загальні шматки контурів мали протилежну орієнтацію.

Все це в сукупності визначає ***орієнтацію поверхні.*** Якщо на поверхні задана орієнтація, то поверхня називається ***орієнтованою.***

Таким чином,

якщо обрана сторона поверхні, то задано додатний напрямок обходу будь-якого замкненого контуру на цій стороні поверхні.

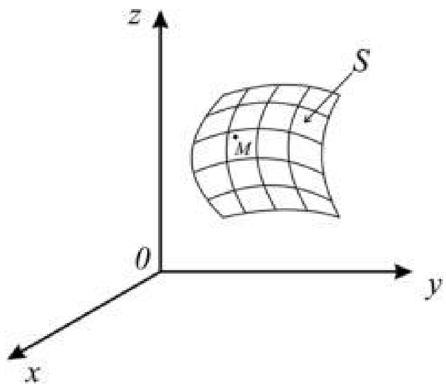
І навпаки:

вибір орієнтації поверхні визначає однозначно сторону поверхні.

Поверхневі інтеграли 1-го роду (ПІ 1).

Нехай (S) – проста гладка поверхня, у точках якої визначена функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо дану поверхню (S) кусково-гладкими кривими на частини

$(S_1),\dots,(S_n)$, які мають площі $S_1,\dots,S_n$. Довільним чином на кожній із частин (S_i) виберемо точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,\dots,n$. Обчислимо значення функції $f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$ в цих точках.



<u>**Означення.**</u> ***Сума*** $\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i$

називається інтегральною сумою для поверхневого інтеграла 1-го роду.

<u>**Означення.**</u> ***Скінченна границя цієї суми при*** $\max\limits_{1\le i\le n} d(S_i)\to 0$ ***називається поверхневим інтегралом 1-го роду і позначається***

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS=\lim_{\max\limits_{1\le i\le n} d(S_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i.$$

<u>**Зауваження.**</u> ***При побудові поверхневого інтегралу 1-го роду* (ПІ 1) *не має значення вибір певної сторони поверхні, тому***

поверхневий інтеграл 1-го роду* (ПІ 1) *не залежить від вибору сторони поверхні.

<u>**Теорема**</u> ***(про зв'язок* ПІ 1*-го роду с подвійним інтегралом):***

Нехай (S) ***– двостороння гладка поверхня, задана рівняннями***

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \qquad (u,v)\in D, \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

функція $f(x, y, z)$ ***– неперервна в точках поверхні*** (S)***. Тоді***

$$\exists \iint_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

де $E,\ G,\ F$ ***– коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні*** (S)***.***

Наслідки.

1. ***Якщо*** $f(x,y,z)\equiv 1$ ***на поверхні*** (S)***, то***

$$\iint_{(S)} dS = \iint_{D} \sqrt{EG-F^2}\, dudv = S \text{ – площа поверхні } (S).$$

2. ***Якщо поверхня*** (S) ***задана явно функцією*** $z = z(x,y)$, ***де*** $(x,y)\in D$ ***і*** $z(x,y)\in C^1(D)$***, то***

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy.$$

3. ***Із зв'язку між поверхневим інтегралом 1 роду і подвійним інтегралом випливає, що для поверхневого інтегралу виконуються всі властовості подвійних інтегралів.***

Властивості ПІ 1 роду

1. Лінійність по функції:

$$\iint_{(S)} \left(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)\right)dS = \alpha\iint_{(S)} f(x,y,z)dS + \beta\iint_{(S)} g(x,y,z)dS\ .$$

2. Адитивність за областю інтегрування:

$$\iint_{(S)_1\cup(S)_2} f(x,y,z)dS = \iint_{(S)_1} f(x,y,z)dS + \iint_{(S)_2} f(x,y,z)dS,$$

де $S\left((S_1)\cap(S)_2\right)=0$.

3. Незалежність від параметризації.

Механічний зміст **ПІ 1 роду**

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS$$ – ***маса поверхні*** (S) ***с заданою густиною*** $f(x,y,z)$.

ПІ 1 роду використовують також для знаходження ***центра мас поверхні, поверхневого потенціалу*** і знаходження ***сили тяжіння*** поверхнею матеріальної точки.

Приклад 3.2. ***Обчислити*** $I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} zdS$.

Розв'язання. Розглянемо параметризацію заданої сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi, \\ y = R\sin\varphi\cos\psi, \\ z = R\sin\psi, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ -\pi/2 \le \psi \le \pi/2, \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = -R\sin\varphi\cos\psi, \\ y'_\varphi = R\cos\varphi\cos\psi, \\ z'_\varphi = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_\psi = -R\cos\varphi\sin\psi, \\ y'_\psi = -R\sin\varphi\sin\psi, \\ z'_\psi = R\cos\psi, \end{cases}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{R^2\cos^2\psi \cdot R^2 - 0} = R^2\cos\psi,$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} zdS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\psi \cdot R^2\cos\psi d\psi = R^3 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi d\sin\psi = 0.$$

3.2. Поверхневі інтеграли другого роду.

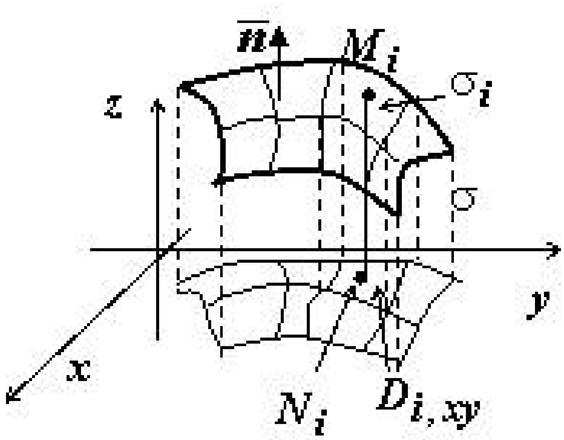
Нехай (S) – двостороння гладка (або кусково-гладка) орієнтована поверхня, у точках якої визначена функція $f(x,y,z)$ і $(S)^*$ – фіксована сторона поверхні. Розіб'ємо поверхню (S) кусково-гладкими кривими на частини $(S_1),...,(S_n)$. Довільним чином на кожній із частин (S_i) виберемо точку

$M_i\left(x_i, y_i, z_i\right)$, $i=1,\ldots,n$. Обчислимо значення функції $f\left(M_i\right)=f\left(x_i, y_i, z_i\right)$ в цих точках.

Розглянемо проекцію кожної із частин $\left(S_i\right)$ на площину Oxy і позначимо її через $\left(D_i\right)$. Обчислимо площу кожної проекції $\left(D_i\right)$, $i=1,\ldots,n$, і позначимо через D_i площі цих проекцій, забезпечені певним знаком за таким правилом:

беремо «+», якщо вибрана верхня сторона поверхні та обхід вздовж границі області $\left(D_i\right)$ здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Oz;

беремо «-» – у протилежному випадку.



Означення. ***Сума*** $\sigma_1=\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) D_i$

називається інтегральною сумою для поверхневого інтеграла 2-го роду.

Означення. ***Скінченна границя цієї суми при*** $\max\limits_{1\le i\le n} d(S_i)\to 0$ ***називається поверхневим інтегралом 2-го роду від виразу*** $f(x,y,z)dxdy$ ***по стороні*** $(S)^*$ ***поверхні*** (S) ***і позначається***

$$\iint\limits_{(S)^*} f(x,y,z)dxdy=\lim_{\substack{\max d(S_i)\to 0\\ 1\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) D_i .$$

Зауваження: ***Якщо аналогічним чином проектувати частини*** $\left(S_i\right)$ ***на площини*** Oxz ***і*** Oyz***, то отримаємо поверхневі інтеграли 2-го роду***

$$\iint\limits_{(S)^*} f(x,y,z)dzdx \quad \boldsymbol{i} \quad \iint\limits_{(S)^*} f(x,y,z)dydz .$$

Розглянемо **загальний** випадок.

Якщо вектор-функція $\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ задана в точках поверхні (S) і зафіксована сторона $(S)^*$ цієї поверхні, то ***поверхневий інтеграл 2-го роду від вектор-функції*** $\vec{a}$ ***за стороною*** $(S)^*$ позначається як

$$\iint\limits_{(S)^*} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(S)^*} \vec{a}dS .$$

Зв'язок між поверхневими інтегралами 1-го та 2-го роду

Нехай двостороння гладка (або кусково-гладка) поверхня (S) задана явно функцією

$$z = z(x,y), \text{ де } (x,y) \in D,$$

$(S)^*$ – верхня сторона поверхні, яка орієнтована за допомогою вектору нормалі $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\gamma)$. Тоді інтегральна сума

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) S(D_i)$$

і

$$\iint\limits_{(S)^*} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{f(x,y,z(x,y))}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y)) \cos\gamma \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\cos\gamma dS .$$

Таким чином, $\iint\limits_{(S)^*} f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\cos\gamma dS.$

У загальному випадку, ***для вектор-функції***

$\vec{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ маємо, що

$$\iint\limits_{(S)^*} \vec{a}dS = \iint\limits_{(S)} (\vec{a},\vec{n})dS$$

або

$$\iint\limits_{(S)^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} \left(P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\gamma\right)dS.$$

Теорема ***(про залежність поверхневого інтегралу 2-го роду від сторони поверхні):***

Нехай (S) ***– двостороння гладка поверхня,*** $\vec{n}$ ***– вектор нормалі до сторони*** $(S)^+$ ***поверхні*** (S), $-\vec{n}$ ***– вектор нормалі до сторони*** $(S)^-$ ***поверхні*** (S), $\vec{a} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ ***– неперервна вектор-функція в точках поверхні*** (S). ***Тоді***

$$\exists \iint\limits_{(S)^+} \vec{a}dS = -\iint\limits_{(S)^-} \vec{a}dS.$$

Доведення. $$\iint\limits_{(S)^-} \vec{a}dS = \iint\limits_{(S)} \left(\vec{a},-\vec{n}\right)dS = -\iint\limits_{(S)} \left(\vec{a},\vec{n}\right)dS = -\iint\limits_{(S)^+} \vec{a}dS.$$

Зв'язок між поверхневими інтегралами 2-го роду і подвійними інтегралами

Теорема. ***Нехай*** (S) ***– двостороння гладка поверхня, задана рівняннями***

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v)\in\Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$(S)^*$ ***– сторона поверхні, яка орієнтована за допомогою вектору нормалі***

$$\vec{n} = \frac{\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]}{\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|},$$

$\vec{a} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ ***– неперервна вектор-функція, яка визначена в точках поверхні*** (S). ***Тоді*** $\exists \iint\limits_{(S)^*} \vec{a}dS$ ***і***

$$\iint\limits_{(S)^*} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Delta} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$$

<u>**Доведення.**</u> Оскільки елемент площі дорівнює

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| dudv,$$

то

$$\iint\limits_{(S)^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Delta} \left(\vec{a}, \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\|} \right) \sqrt{EG - F^2}\,dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\vec{a}, \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\|} \right) \left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| dudv = \iint\limits_{\Delta} \left(\vec{a}, [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right) dudv = \iint\limits_{\Delta} \left(\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$$

Теорему доведено.

<u>**Зауваження.**</u> Оскільки

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

то $\vec{n} = \left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$

і маємо наступний ***зв'язок між поверхневими інтегралами 2 роду і подвійними інтегралами***:

$$\iint\limits_{(S)^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Delta} (\vec{a}, \vec{n}) \left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| dudv = \iint\limits_{\Delta} (PA + QB + RC)\, dudv$$

тобто

$$\iint\limits_{(S)^*} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Delta} \left(PA + QB + RC\right) dudv.$$

Приклад 3.3. ***Обчислити*** $I = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} xdydz + ydzdx + zdxdy.$

Розв'язання. Нехай еліпсоїд задано за допомогою параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\psi, \\ y = b\sin\varphi\cos\psi, \\ z = c\sin\psi, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \le \varphi \le 2\pi, \\ &-\pi/2 \le \psi \le \pi/2. \end{aligned}$$

Обчислимо відповідні похідні

$$\begin{cases} x'_\varphi = -a\sin\varphi\cos\psi, \\ y'_\varphi = b\cos\varphi\cos\psi, \\ z'_\varphi = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_\psi = -a\cos\varphi\sin\psi, \\ y'_\psi = -b\sin\varphi\sin\psi, \\ z'_\psi = c\cos\psi. \end{cases}$$

Тоді за теоремою про зв'язок між поверхневими інтегралами 2 роду і подвійними інтегралами маємо:

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{\Delta} \begin{vmatrix} x(\varphi,\psi) & y(\varphi,\psi) & z(\varphi,\psi) \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{vmatrix} d\varphi d\psi =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le2\pi, \\ -\pi/2\le\psi\le\pi/2}} \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & b\sin\varphi\cos\psi & c\sin\psi \\ -a\sin\varphi\cos\psi & b\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -a\cos\varphi\sin\psi & -b\sin\varphi\sin\psi & c\cos\psi \end{vmatrix} d\varphi d\psi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(c\sin\psi \cdot ab\sin\psi\cos\psi + c\cos\psi \cdot ab\cos^2\psi\right) d\psi =$$

$$= abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\psi\sin^2\psi + \cos\psi\cos^2\psi\right) d\psi = 2\pi abc \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi = 4\pi abc.$$

Розділ IV. Елементи теорії поля

4.1. Формула Гауса-Остроградського

Теорема (Формула Гауса-Остроградського):

Нехай (S) ***– кусково-гладка замкнена поверхня в просторі*** $\mathbb{R}^3$ ***, яка обмежує деяку множину*** $U \subset \mathbb{R}^3$***, а в точках множини*** U ***задана неперервна вектор-функція*** $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$**.**

Тоді

$$\iint\limits_{(S)} \left(\vec{F},\vec{n}\right) dS = \iint\limits_{(S)^*} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_{U} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

де $\vec{n}$ ***– нормаль до зовнішньої сторони*** $(S)^*$ ***поверхні*** (S)**.**

Гідромеханічна інтерпретація **формули Гауса-Остроградського**

Нехай $\vec{F}$ – вектор швидкості рідини (стаціонарний потік).

Тоді ***поверхневий інтеграл*** $\iint\limits_{(S)} \left(\vec{F},\vec{n}\right) dS$ ***дорівнює кількості рідини, що пройшла через поверхню*** (S) ***в зазначеному напрямку за одиницю часу.***

Тому ***поверхневим інтегралом*** $\iint\limits_{(S)} \left(\vec{F},\vec{n}\right) dS$ ***називається потік вектору*** $\vec{F}$ ***через сторону поверхні*** (S) ***з вектором нормалі*** $\vec{n}$**.**

Означення. ***Дивергенцією векторного поля*** $\vec{F}$ $\left(\vec{F} \in C^1(U)\right)$ ***в точці*** M ***називається***

$$div\,\vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

або

$$div\,\vec{F} = \left(\nabla, \vec{F}\right),$$

де $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ***– символічний вектор «набла» або оператор Гамільтона.***

Фізичний зміст дивергенції **– потужність джерела в точці** M.

Дивергенцію векторного поля також називають ***інтенсивністю*** векторного поля. Точки, в яких дивергенція строго більше за 0, називають ***джерелами*** даного векторного поля, а точки в яких дивергенція строго менше нуля, називають ***стоками*** векторного поля.

Формула Гауса-Остроградського означає в даному випадку, що ***потік рідини через замкнену поверхню дорівнює сумарній потужності джерел, що знаходяться всередині неї.***

Наслідок формули Гауса-Остроградського:

$$V(U)=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)^*} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{(S)^*} xdydz=\iint\limits_{(S)^*} ydzdx=\iint\limits_{(S)^*} zdxdy.$$

Означення.

Нехай вектор-функція $\vec{F}=(P,Q,R)\in C^1(U),\ U\subset\mathbb{R}^3$.

Ротором (вихровим потоком, ротацією, вихором) векторного поля $\vec{F}$ ***називається***

$$rot\ \vec{F}=\left[\nabla,\vec{F}\right]$$

або

$$rot\ \vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

4.2. Теорема Стокса.

Теорема Стокса.

Нехай (S) ***– гладка орієнтована поверхня, яка обмежена кусково-гладким контуром*** $L=\partial(S)$ ***, орієнтація якого узгоджена з орієнтацією поверхні*** (S) ***за допомогою вектору нормалі*** $\vec{n}$***, вектор-функція*** $\vec{F}=(P,Q,R)$ ***неперервно диференційована на поверхні*** (S)***. Тоді***

$$\oint\limits_L \underbrace{Pdx+Qdy+Rdz}_{\text{циркуляція } \vec{F} \text{ вздовж } L}=\iint\limits_{(S)}\underbrace{\left(rot\ \vec{F},\vec{n}\right)dS}_{\text{потік } rot\ \vec{F}}.$$

<u>**Зауваження:**</u>

1. ***Формула Стокса виконується і для кусково-гладкої функції, і для кусково-гладкої поверхні.***

2. ***Циркуляція даного неперервно-диференційованого векторного поля, заданого вздовж орієнтованого контуру, дорівнює потоку ротації заданого векторного поля через сторону поверхні, натягнутої на даний замкнений контур, при цьому орієнтація контуру і сторони поверхні вважаються узгодженими.***

3. ***Нехай виконуються умови теореми Стокса. Тоді***

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

або

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)^*} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \ ,$$

$(S)^*$ – ***сторона поверхні, орієнтована за допомогою вектору нормалі*** $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\gamma)$.

4.3. Потенціальні та соленоїдальні поля.

Нагадаємо, що ***векторне поле*** $\vec{F}$ ***називається потенціальним, якщо для нього існує потенціальна функція*** $\varphi(x, y, z)$ ***(***$\vec{F} = grad\,\varphi$***).***

При вивченні криволінійних інтегралів 2 роду, ми отримали, що

неперервно диференційоване векторне поле $\vec{F}$ ***, визначене в деякій області*** $U \subset \mathbb{R}^3$ ***, буде потенціальним тоді і тільки тоді, коли циркуляція векторного поля*** $\vec{F}$ ***(тобто криволінійний інтеграл від*** $\vec{F}$ ***, взятий вздовж замкненої орієнтованої кривої) дорівнює нулю***.

Звідси та із теореми Стокса отримуємо наступну теорему.

Теорема (***критерій потенціального поля***).

Неперервно диференційоване векторне поле $\vec{F}$ на однозв'язній області $U \subset \mathbb{R}^3$ буде потенціальним тоді і тільки тоді, коли

$$rot\,\vec{F} = \vec{0} \;\; \textbf{\textit{в області}} \;\; U.$$

Тому потенціальне поле ще називають ***безвихровим***.

Отже, ми розглянули поняття

$$div\,\vec{F} = \left(\nabla, \vec{F}\right), \qquad rot\,\vec{F} = \left[\nabla, \vec{F}\right],$$

де $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ – оператор Гамільтона.

Ці скаляри і вектори не залежать від вибору базиса в $\mathbb{R}^3$.

Розглянемо деякі суперпозиції цих операцій.

1. $div\,rot\,\vec{F} = 0$, $\quad (\nabla\left[\nabla, \vec{F}\right] = 0)$.

2. $rot\,grad\,\varphi = 0$, $\quad (\left[\nabla, \nabla\varphi\right] = 0)$.

3. $div\,grad\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$ – оператор Лапласа.

Означення. ***Векторне поле $\vec{a}$ називається соленоїдальним, якщо існує векторне поле $\vec{b}$ таке, що $\vec{a} = rot\,\vec{b}$.***

Теорема (***критерій соленоїдального поля***).

Векторне поле $\vec{F} = C^1(U)$ є соленоїдальним в однозв'язній області $U \subset \mathbb{R}^3$ тоді і тільки тоді, коли

$$div\,\vec{F} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in U.$$

Приклад. Розглянемо соленоїдальне поле

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{-x}{x^2 + y^2}; 0\right) \quad \text{при} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{Oz\}.$$

Нам треба знайти векторне поле $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$ таке, щоб

$$rot\,\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial b_3}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial b_1}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{y}{x^2+y^2};\frac{-x}{x^2+y^2};0\right)=\vec{F}.$$

Векторне поле $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ можна взяти таким, щоб

$$b_1=\int_0^z\frac{-x}{x^2+y^2}dz=\frac{-xz}{x^2+y^2};\quad b_2=-\int_0^z\frac{y}{x^2+y^2}dz+\int_0^x 0\,dx=\frac{-yz}{x^2+y^2};\quad b_3=0.$$

Наслідок. ***Якщо область однозв'язна, а поле – соленоїдальне, то потік вектору через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.***

Теорема Гельмгольца. ***Будь-яке векторне поле*** $\vec{F}=C^1(U)$ ***,*** $U\subset\mathbb{R}^3$ ***, може бути представлено у вигляді суми потенційного і соленоїдального полів, тобто***

$$\vec{F}=grad\,\varphi+rot\,\vec{b}.$$

Зауваження. Звісно, це розкладання визначається неоднозначно, оскільки до обох частин рівності можна додати і відняти від них поле $\dfrac{k\,\vec{r}}{r^3}$, яке одночасно є і потенціальним, і соленоїдальним.

Якщо $div\,\vec{F}=0 \;\wedge\; rot\,\vec{F}=0$ ***, то поле*** $\vec{F}$ ***називається гармонічним (одночасно і потенціальне, і соленоїдальне)***.

Приклад 4.1. ***Показати, що поле***

$$\vec{F}=\left(\frac{2}{\sqrt{y+z}};-\frac{x}{(y+z)^{3/2}};-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\right)$$

є потенціальним в області $y+z>0$***. Знайти потенціал цього поля і роботу вздовж кривої, яка з'єднує точки*** $M(1,1,3)$ ***і*** $N(2,4,5)$***.***

Розв'язання. Перевіримо умову потенціальності даного поля, тобто

$$rot\,\vec{F}=\vec{0}.$$

Оскільки

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

то

$$rot\,\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

У нашому випадку маємо, що

$$P(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{y+z}};\ Q(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}};\ R(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}}$$

Звідки

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{x}{(y+z)^{5/2}} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{(y+z)^{3/2}} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{(y+z)^{3/2}} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

тобто усі умови виконані.

Потенціал $\varphi(x,y,z)$ можна знайти за формулою

$$\varphi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x,\eta,z_0)d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta.$$

Але в даному випадку легко побачити, що $\varphi(x,y,z) = \dfrac{2x}{\sqrt{y+z}}$.

$$A = \int_{(1,1,3)}^{(2,4,5)} \frac{2dx}{\sqrt{y+z}} - \frac{xdy}{(y+z)^{3/2}} - \frac{xdz}{(y+z)^{3/2}} = \varphi(2,4,5) - \varphi(1,1,3) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

за темою «Криволінійні і поверхневі інтеграли»

Варіант №1

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x + z,\, y,\, z - x), \qquad D:\quad 4x^2 + z^2 \le y^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x + z,\, y,\, z - x); \qquad L:\ \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{xz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}};\ \frac{-yz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}};\ 2z\sqrt{x^2 - y^2} \right).$$

Варіант №2

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (2x,\, y - z,\ z + 2y); \qquad D:\quad y^2 + \frac{z^2}{4} \le x^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (2x,\, y - z,\, z + 2y); \qquad L:\ \begin{cases} y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{y^2}{z};\ \frac{2xy}{z};\ \frac{-xy^2}{z^2} \right).$$

Варіант №3

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x - y,\ 2y,\ 2z + x), \qquad D:\quad x^2 + 4y^2 \le z^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x - y, 2y, 2z + x); \qquad L:\ \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 2z};\ \frac{y}{x^2 + y^2 - 2z};\ \frac{-1}{x^2 + y^2 - 2z} \right).$$

Варіант №4

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z,\ 2x + 1,\ y - z); \qquad D:\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le z^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z, 2x + 1, y - z); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(z\cos x,\ z\sin y,\ \sin x - \cos y \right).$$

Варіант №5

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z + x,\ 2y - z,\ 3x); \qquad D:\ \frac{y^2}{4} + z^2 \le x^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x + z, 2y - z, 3x); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{z}{x} + \ln y,\ \frac{x}{y},\ \ln x \right).$$

Варіант №6

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x,\ -z,\ y); \qquad D:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x + z, y, z - x); \qquad L:\ \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(-\frac{z}{x^2},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right).$$

Варіант №7

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z,\ 2y,\ -x); \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 5, \\ y \ge 2. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z,\ 2y,\ -x); \qquad L: \begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(y^2 - 2zx,\ 2xy,\ -x^2\right).$$

Варіант №8

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (y,\ 1-x,\ 2z); \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2, \\ z \ge 1. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (y, 1-x,\ 2z); \qquad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{e^z}{y},\ -\frac{x}{y^2}e^z,\ \frac{x}{y}e^z\right).$$

Варіант №9

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (2 - x,\ y,\ \ x - z); \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2x, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (2 - x,\ y, x - z); \qquad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{zy}{1 + x^2 y^2},\ \frac{z\,x}{1 + x^2 y^2},\ arctg\, xy \right).$$

Варіант №10

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z + y,\ x - y,\ 2z - x); \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2y, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z + y, x - y, 2z - x); \qquad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{z},\ -\frac{1}{z},\ \frac{y - x}{z^2} \right).$$

Варіант №11

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z - x,\ 2y,\ z + x); \qquad D:\ \ x^2 + 4z^2 \le y^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z - x, 2y,\ z + x); \qquad L:\ \begin{cases} x^2 + 4z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(-\frac{xz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ \frac{yz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ -2z\sqrt{x^2 - y^2} \right).$$

Варіант №12

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x,\ z - y,\ y + 2z); \qquad D:\ \frac{y^2}{4} + z^2 \le x^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x, z - y,\ y + 2z); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{y^2}{z},\ \frac{2xy}{z},\ -\frac{xy^2}{z^2} \right).$$

Варіант №13

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (y - x,\ 2x,\ 2z + y); \qquad D:\ \ 4x^2 + y^2 \le z^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (y - x, 2x, 2z + y); \qquad L:\ \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2 - 2z},\ \frac{-y}{x^2 + y^2 - 2z},\ \frac{1}{x^2 + y^2 - 2z} \right).$$

Варіант №14

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z + x,\ 2x - y,\ -z + y); \qquad D:\ \frac{x^2}{4} + z^2 \le y^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z + x, 2x - y, y - z); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(z\cos x,\ z\sin y,\ \sin x - \cos y \right).$$

Варіант №15

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z - x,\ 2y - z,\ x + y); \qquad D:\quad y^2 + z^2 \le x^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z - x, 2y - z, x + y); \qquad L:\ \begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{z}{x} + \ln y,\ \ \frac{x}{y},\ \ \ln x \right).$$

Варіант №16

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x + z, y, z - x), \qquad D:\quad 4x^2 + z^2 \le y^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x + z, y, z - x); \qquad L:\ \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{xz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}};\ \frac{-yz^2}{\sqrt{x^2 - y^2}};\ 2z\sqrt{x^2 - y^2} \right).$$

Варіант №17

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (2x, y - z,\ z + 2y); \qquad D: \quad y^2 + \frac{z^2}{4} \le x^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (2x, y - z, z + 2y); \qquad L: \quad \begin{cases} y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{y^2}{z};\ \frac{2xy}{z};\ \frac{-xy^2}{z^2} \right).$$

Варіант №18

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x - y,\ 2y,\ 2z + x), \qquad D: \quad x^2 + 4y^2 \le z^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x - y, 2y, 2z + x); \qquad L: \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 2z};\ \frac{y}{x^2 + y^2 - 2z};\ \frac{-1}{x^2 + y^2 - 2z} \right).$$

Варіант №19

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z,\ 2x+1,\ y-z); \qquad D:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le z^2 \le 1.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (z, 2x+1, y-z); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(z\cos x,\ z\sin y,\ \sin x - \cos y \right).$$

Варіант №20

1. ***Знайти потік вектору $\vec{F}$ через зовнішню поверхню тіла D 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z+x,\ 2y-z,\ 3x); \qquad D:\ \frac{y^2}{4} + z^2 \le x^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору $\vec{F}$ вздовж кривої L 2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x+z, 2y-z, 3x); \qquad L:\ \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле $\vec{F}$ потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{z}{x} + \ln y,\ \frac{x}{y},\ \ln x \right).$$

Варіант №21

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x,\ -z,\ y); \qquad D: \ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x+z, y, z-x); \qquad L: \ \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(-\frac{z}{x^2},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right).$$

Варіант №22

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (z+x,\ 2y-z,\ 3x); \qquad D: \ \frac{y^2}{4} + z^2 \le x^2 \le 4.$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x+z, 2y-z, 3x); \qquad L: \ \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(\frac{z}{x} + \ln y,\ \frac{x}{y},\ \ln x \right).$$

Варіант №23

1. ***Знайти потік вектору*** $\vec{F}$ ***через зовнішню поверхню тіла*** D ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Гауса-Остроградського):***

$$\vec{F} = (x,\ -z,\ y); \qquad D: \ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

2. ***Знайти циркуляцію вектору*** $\vec{F}$ ***вздовж кривої*** L ***2 способами (безпосереднім обчисленням інтеграла та за формулою Стокса):***

$$\vec{F} = (x + z, y, z - x); \qquad L: \ \begin{cases} 4x^2 + z^2 = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. ***Перевірити, чи є дане векторне поле*** $\vec{F}$ ***потенціальним і знайти його потенціал:***

$$\vec{F} = \left(-\frac{z}{x^2},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Т. 2. – Київ: “Вища школа”, 1991. – 365 с.
2. Ковальчук Б.В., Шіпка Й.Г. Математичний аналіз. Ч. 2. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 280 с.
3. Ковальчук Б.В., Шіпка Й.Г. Математичний аналіз. Ч. 3. Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 270 с.
4. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Навчальний посібник.– Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 385 с.
5. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі. Навчальний посібник. – Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – 403 с.
6. Тріщ Б.М. Математичний аналіз. Частина 3. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Курс лекцій. – Львів. Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 223 с.