УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАНГА К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО РАНГА. 2*

2. *Вычисление матрицы* z^Q. Пусть $G = HG_gH^{-1}$, где G_g — жорданова форма матрицы G, H — постоянная неособая матрица. Тогда (см. (16)) $Q = H(i\alpha_0)^{-1}(\operatorname{Ln} G_g)H^{-1}$ и

$$z^Q = H \exp\left\{\frac{\operatorname{Ln} z}{i\alpha_0} \operatorname{Ln} G_g\right\} H^{-1}. \tag{40}$$

* Часть I настоящей статьи опубликована в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1986, вып. 46.

Следовательно, задача сводится к вычислению G_g, H, H^{-1}.

Матрица G получена из единичной матрицы перемещением строк (17). При этом *из всей совокупности n^{r+1} строк не меняют своего положения только n строк с номерами*

$$s = m + \frac{(m-1)\,n\,(n^r - 1)}{(n-1)}, \quad m = \overline{1, n} \tag{41}$$

соответствующие значениям

$$i_0 = i_1 = \ldots = i_r = m, \quad m = \overline{1, n}. \tag{42}$$

Доказательство. Как видно из (17), строка переходит сама в себя, если

$$n^r (i_r - i_{r-1}) + n^{r-1} (i_{r-1} - i_{r-2}) + \ldots + n (i_1 - i_0) + (i_0 - i_r) = 0. \tag{43}$$

Выражение (43) формально можно рассматривать как уравнение r-й степени с целыми коэффициентами относительно n. Так как $|i_0 - i_r| < n$, то для целых положительных n отношение $(i_0 - i_r)/n$ не равно целому, если $i_0 - i_r \neq 0$, и такие n не являются корнями (43). Потребовав $i_0 - i_r = 0$, придем к уравнению $(r-1)$-й степени со свободным членом $(i_1 - i_0)$, относительно которого можно повторить то же самое, и т. д.

Пусть условие (42) не выполнено. Применяя (17) к правой половине (17), имеем

$$[i_r, i_0, \ldots, i_{r-1}] \to [i_{r-1}, i_r, i_0, \ldots, i_{r-2}]. \tag{44}$$

Продолжая этот процесс, получим замыкающее соотношение

$$[i_1, i_2, \ldots, i_r, i_0] \to [i_0, i_1, \ldots, i_r]. \tag{45}$$

Следовательно, *остальные $n(n^r - 1)$ строк можно разбить на непересекающиеся подсовокупности из $(r+1)$ строк каждая, в которых строки меняются местами по типу круговой перестановки, т. е. в каждой подсовокупности можно расположить номера строк $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ так, что $s_1 \to s_2$, $s_2 \to s_3$, $\ldots$, $s_{r+1} \to s_1$.* Будем искать характеристические корни γ и собственные векторы h матрицы G из уравнения

$$(G - E\gamma)\,h = 0, \quad h = \{h_1, \ldots, h_{n^r+1}\}. \tag{46}$$

Каждый столбец и каждая строка матрицы G имеют только один ненулевой элемент (он равен единице). Если этот элемент соответствует строке единичной матрицы, не меняющей своего положения, то он находится на главной диагонали. Соответствующий элемент матрицы $(G - E\gamma)$ есть $(1 - \gamma)$ (тоже на главной диагонали), а скалярное уравнение из (46) — $(1 - \gamma)\,h_s = 0$, где s находим из выражения (41). Отсюда $\gamma = 1$. Полагая $h_s = 1$, а прочие компоненты собственного вектора $h_\mu = 0$ для $\mu \neq s$, получаем n собственных значений $\gamma = 1$ и n соответствующих им *линейно независимых векторов h.*

Рассмотрим теперь подсовокупность ненулевых элементов матрицы G, соответствующую подсовокупность из $(r+1)$ строк $s_1, s_2 \ldots, s_{r+1}$ единичной матрицы, которые меняются местами по типу круговой перестановки. Соответствующие единичные (ненулевые) элементы G есть

$$[G]_{s_2, s_1}, \ [G]_{s_3, s_2}, \ \ldots, \ [G]_{s_{r+1} s_r}, \ [G]_{s_1 s_{r+1}}. \qquad (47)$$

В строках $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ матрицы $(G - E\gamma)$ имеются два ненулевых элемента: 1) один из подсовокупности (47); 2) $(-\gamma)$ на главной диагонали. Этим строкам соответствует следующая подсистема из $(r+1)$ скалярных уравнений системы (46):

$$h_{s_m} - \gamma h_{s_{m+1}} = 0 \ (m = \overline{1, r}); \ h_{s_{r+1}} - \gamma h_{s_1} = 0. \qquad (48)$$

Из подсистемы (48) находим

$$h_{s_m} = \gamma^{r-m+1} h_{s_{r+1}} \ (m = \overline{1, r}); \ \gamma_k = \varepsilon^k \ (k = \overline{1, r+1}). \qquad (49)$$

Полагая равными нулю все компоненты h_μ с номерами $\mu \neq s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, а $h_{s_{r+1}} = 1$, получаем с помощью (49) $(r+1)$ *линейно независимых* собственных векторов h. Как видно из структуры матриц G и $(G - E\gamma)$, в разных подсистемах рассмотренного типа остаются ненулевыми *разные* (и не пересекающиеся по номеру компоненты μ) подсовокупности из $(r+1)$ компонент h_μ. Поэтому *число линейно независимых векторов h совпадает с порядком n^{r+1} матрицы G*, хотя она имеет кратные характеристические корни. *Следовательно, ее жорданова форма Gg диагональна;* а $\exp\left\{\frac{(\mathrm{Ln}\, z)}{i\alpha_0} \times \right.$ $\left. \times (\mathrm{Ln}\, Gq)\right\}$ — *тоже диагональная матрица, которую, в частности, можно выбрать с диагональными элементами* $1, z, z^2, \ldots, z^r$. Кроме того, собственные векторы h являются столбцами матрицы H.

Перейдем к определению H^{-1}. Будем искать H^{-1} из условия $HH^{-1} = E$. В каждой строке (и соответственно в каждом столбце) матрица H имеет 1) либо один ненулевой элемент, равный единице; 2) либо $(r+1)$ ненулевых элементов. Первый случай соответствует вектору h, найденному из уравнения $(1-\gamma) h_s = 0$, (42), второй — $(r+1)$ линейно независимым вектором h, полученным из (49). Во втором случае можно выделить $(r+1)$ строк, ненулевые элементы которых лежат в одних и тех же столбцах. Вектор-столбец матрицы H^{-1} обозначим через h'. Матричное уравнение $HH^{-1} = E$ дает следующую скалярную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n^{r+1}} [H]_{jk} [H^{-1}]_{k\mu} = \delta_{j\mu}, \ j, r = \overline{1, n^{r+1}}, \qquad (50)$$

где $\delta_{j\mu}$ — символ Кронекера. Пусть в μ-й строке матрицы H имеется только один ненулевой элемент $[H]_{\mu, k_0} = 1$. Тогда решение системы (50) (для этого значения μ) будет $[H^{-1}_{k_0\mu} = 1$; $[H^{-1}]_{k\mu} = 0$ для

$k \neq k_0$ (так как k_0-й столбец матрицы H в этом случае, как указано выше, не содержит других ненулевых элементов). Пусть строки $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ матрицы H содержат по $(r+1)$ ненулевых элементов, лежащих в одних и тех же столбцах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$. Полагая в этом случае $[H^{-1}]_{k\mu} = 0$ для $k \neq k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ и $\mu = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$, получаем из (50) подсистему

$$\sum_{\rho=1}^{r+1} [H]_{jk_\rho} [H^{-1}]_{k_\rho \mu} = \delta_{j\mu} \; j, \; r = s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_{r+1}, \tag{51}$$

которая определяет $(r+1)$ линейно независимых векторов h' для $\mu = s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$. Подставляя уравнение (49) в (51), имеем $([H]_{s_{r+1}k} = 1)$

$$\begin{gathered}
\gamma_1^r [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2^r [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1}^r [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_1\mu}; \\
\gamma_1^{r-1} [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2^{r-1} [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1}^{r-1} [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_2\mu}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_1 [H^{-1}]_{k_1\mu} + \gamma_2 [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + \gamma_{r+1} [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_r\mu}; \\
[H^{-1}]_{k_1\mu} + [H^{-1}]_{k_2\mu} + \ldots + [H^{-1}]_{k_{r+1}\mu} = \delta_{s_{r+1}\mu}; \\
r = s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_{r+1}.
\end{gathered} \tag{52}$$

Определитель D системы (52) является определителем Вандермонда*.

Пусть $\mu = s_\xi$. Тогда

$$[H^{-1}]_{k_\rho s_\xi} = (-1)^{\rho+\xi} \frac{D_\rho}{D} \quad \rho, \; \xi = \overline{1, \; r+1} \tag{53}$$

где минор D_ρ получается из определителя D вычеркиванием ξ-й строки и ρ-го столбца. Минор D_ρ приводится к определителю Вандермонда.

3. *Случай* $n = 2$, $r = 1$. Для примера выпишем матрицы $A(z)$, z^Q и $M(z)$, соответствующие этому случаю. Обозначим элементы матрицы $B(z)$ через $b_{ik}(z)$;

$$\beta_{ik}(\pm) = b_{ik}(z) \pm b_{ik}(-z); \quad \beta(+) = \beta_{22}(+) + \\ + \beta_{11}(+); \quad \beta(-) = \beta_{22}(-) - \beta_{11}(-),$$

а элементы матрицы $M(z)$ — через m_{ik}. Тогда

$$A(z) = z \begin{vmatrix} b_{11}(z) + b_{11}(-z), & b_{12}(z), & b_{12}(-z), & 0 \\ b_{21}(z), & b_{22}(z) + b_{11}(-z), & 0, & b_{12}(-z) \\ b_{21}(-z), & 0, & b_{11}(z) + b_{22}(-z), & b_{12}(z) \\ 0, & b_{21}(-z), & b_{21}(z), & b_{22}(z) + b_{22}(-z) \end{vmatrix}$$

---

* Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).—М.: Наука, 1965.—300 с.

одно из возможных значений

$$z^Q = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0{,}5\,(1+z), & 0{,}5\,(1-z), & 0 \\ 0, & 0{,}5\,(1-z), & 0{,}5\,(1+z), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

элементы m_{ik}, соответствующие этому значению z^Q, будут

$$m_{11} = z\beta_{11}(+);\ m_{44} = z\beta_{22}(+);\ m_{41} = m_{14} = 0;$$

$$m_{21} = 0{,}5z\,[\beta_{21}(+) + z^{-1}\beta_{21}(-)];\quad m_{43} = 0{,}5z\,[\beta_{21}(+) + z\beta_{21}(-)];$$

$$m_{31} = 0{,}5z\,[\beta_{21}(+) - z^{-1}\beta_{21}(-)];\quad m_{42} = 0{,}5z\,[\beta_{21}(+) - z\beta_{21}(-)];$$

$$m_{34} = 0{,}5z\,[\beta_{12}(+) + z^{-1}\beta_{12}(-)];\quad m_{12} = 0{,}5z\,[\beta_{12}(+) + z\beta_{22}(-)];$$

$$m_{24} = 0{,}5z\,[\beta_{12}(+) - z^{-1}\beta_{12}(-)];\quad m_{13} = 0{,}5z\,[\beta_{12}(+) - z\beta_{12}(-)];$$

$$m_{23} = 0{,}25z\,[2z^{-2} - (z - z^{-1})\,\beta(-)];\ m_{32} = 0{,}25z\,[2z^{-2} + (z - z^{-1})\,\beta(-)];$$

$$m_{22} = 0{,}25z\,[2\beta(+) + (z + z^{-1})\,\beta(-) - 2z^{-2}];$$

$$m_{33} = 0{,}25z\,[2\beta(+) - (z + z^{-1})\,\beta(-) - 2z^{-2}].$$

§ 4. *Полилинейное преобразование.* Рассмотрим некоторые свойства полилинейного преобразования, необходимые для доказательства п. А) теоремы 1.1. Везде по двум одинаковым нижним индексам предполагается суммирование. Пусть задана система

$$\frac{du_i}{dz} = a_{ik}u_k;\quad i,\ k = 1,\ n \tag{54}$$

и l_q систем

$$\frac{dw_j}{dz} = b^q_{j\nu}w^q_\nu;\quad j,\ \nu = \overline{1,\ n_q};\ q = \overline{1,\ l} \tag{55}$$

(значок сверху означает индекс, а не степень). Произведем полилинейное преобразование системы (54), т. е. представим каждую компоненту u_i в виде полилинейной формы:

$$u_i = p_{i\omega_1\omega_2\ldots\omega_l}w^1_{\omega_1}w^2_{\omega_2}\ldots w^l_{\omega_l};\quad i = \overline{1,\ n};\ \omega_q = \overline{1,\ n_q}. \tag{56}$$

Предложение 4.1. *Коэффициенты $p_{i\omega_1\omega_2\ldots\omega_l}$ полилинейной формы (56) удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$a_{ik}p_{k\omega_1\ldots\omega_l} = p_{i\xi\omega_2\ldots\omega_l}b^1_{\xi\omega_1} + p_{i\omega_1\xi\omega_3\ldots\omega_l}b^2_{\xi\omega_2} + \ldots + p_{i\omega_1\ldots\omega_{l-1}\xi}b_{\xi\omega_l} + \frac{dp_{i\omega_1\ldots\omega_l}}{dz}, \tag{57}$$

$$i,\ k = \overline{1,\ n};\ \xi,\ \omega_q = \overline{1,\ n_q};\ q = \overline{1,\ l}.$$

Пусть $n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_l$. Систему (57) при фиксированном i можно рассматривать как систему из n алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно n элементов i-й строки матрицы $(a_{ik})^n_1$ системы (54). Обозначим (квадратную) матрицу этой системы через X; k-й столбец матрицы — это n коэффициентов $p_{k\omega_1\ldots\omega_l}$ (для фиксированного k). Вместе с тем k-й столбец матрицы X — это совокупность коэффициентов полилинейной формы для компоненты u_k. Поэтому условие $\det X \neq 0$ совпадает с условием линейной независимости компонент $u_1, \ldots, u_n$.

Доказательство предложения 4.1. Подставляем уравнение (56) в (54), а затем в полученном выражении заменяем все $dw^q_{\omega_q}/dz$ согласно (55). Это дает

$$\begin{gathered} w^1_{\omega_1}\ldots w^l_{\omega_l}\frac{dp_{i\omega_1\ldots\omega_l}}{dz}+p_{i\omega_1\ldots\omega_l}b^1_{\omega_1\nu}w^1_\nu w^2_{\omega_2}w^l_{\omega_l}+\\ +p_{i\omega_1\ldots\omega_l}b^2_{\omega_2\nu}w^1_{\omega_1}w^2_\nu w^3_{\omega_3}\ldots w^l_{\omega_l}+\ldots+\\ +p_{i\omega_1\ldots\omega_l}b^l_{\omega_l\nu}w^1_{\omega_1}\ldots w^{l-1}_{\omega_{l-1}}w^l_\nu=\\ =a_{i\nu}p_{\nu\omega_1\ldots\omega_l}w^1_{\omega_1}\ldots w^l_{\omega_l};\quad i=\overline{1,\ n}. \end{gathered} \tag{58}$$

Производя в (58) в соответствующих слагаемых переобозначение индексов суммирования $(\omega_q, \nu)\to(\nu, \omega_q)$ и соответственно перегруппировку слагаемых, имеем

$$\begin{gathered} \left(\frac{dp_{i\omega_1\ldots\omega_l}}{dz}+p_{i\nu\omega_2\ldots\omega_l}b^1_{\nu\omega_1}+\ldots+p_{i\omega_1\ldots\omega_{l-1}\nu}b^l_{\nu\omega_l}-\right.\\ \left.-a_{i\nu}p_{\nu\omega_1\ldots\omega_l}\right)w^1_{\omega_1}\ldots w^l_{\omega_l}=0\quad i=\overline{1,\ n}. \end{gathered} \tag{59}$$

Для того чтобы левая часть (59) тождественно равнялась нулю, нужно потребовать, чтобы выражение в круглых скобках равнялось нулю при любых $i, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_l$. Это уравнение (57).

Поступила в редколлегию 29.08.85.