

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра фундаментальної математики
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Кваліфікаційна робота

магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)
на тему: Кругові трактиси та поверхні Діні

Виконала: студентка групи М-161 II курсу
другого(магістерського) рівня
111 Математика
(шифр і назва напрямку підготовки,
спеціальності)

Гашуренко Д.Д.
(прізвище та ініціали)
Керівник: Горькавий В.О.
(прізвище та ініціали)

Анотація

В роботі розглянуто новий клас кривих в тримірному евклідовому просторі E^3 , що називаються круговими (циркулярними) трактрисами і є аналогами класичної лінійної трактриси. За допомогою циркулярних трактрис побудовано нове сімейство двомірних поверхонь, циркулярних поверхонь Діні, в чотиримірному евклідовому просторі E^4 , що можуть розглядатись як аналоги класичної поверхні Діні в E^3 .

Доведено, що довільна неплоска кругова трактриса є сферичною кривою, тобто, може бути розташована на деякій сфері в E^3 . В той же час, в загальному випадку циркулярна поверхня Діні не є сферичною поверхнею, тобто, вона не може бути розташована на жодній сфері в E^4 . Крім того, обчислено першу фундаментальну форму циркулярної поверхні Діні і перевірено, що вказана поверхня має сталу гаусову кривину.

Зміст

Вступ

1. Кругові трактиси в E^3
2. Сферичні криві в E^3
3. Сферичність кругових трактрис в E^3
4. Загальні гелікоїдальні поверхні в E^4
5. Циркулярні поверхні Діні в E^4

Висновки

Література

Вступ

В нашій роботі ми розглянемо новітній клас кривих в тримірному евклідовому просторі E^3 , що називаються круговими (циркулярними) трактрисами і є аналогами класичної лінійної трактриси. Цей клас кривих був введений в розгляд в роботах [1]-[2], а їх детальне дослідження було представлено в роботі [3].

В класичній диференціальній геометрії добре відома спеціальна крива, що називається *лінійною трактрисою* або просто *трактрисою*. Це плоска крива, що характеризується наступною властивістю: якщо від точок трактриси відкласти відрізки деякої сталої довжини l вздовж дотичних прямих (у відповідному напрямку), то кінці відрізків будуть утворювати *пряму лінію*.

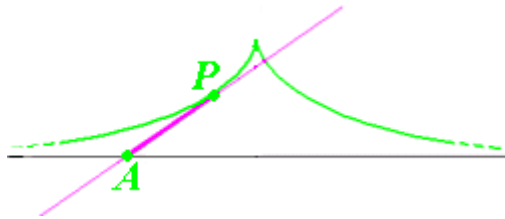


Рис. 1. Трактриса (зелений колір), дотична пряма (фіолетовий колір), утворена пряма (чорний колір), довжина відрізка AP є сталою і дорівнює l

Цій конструкції можна надати декілька різноманітних механічних інтерпретацій, наприклад – за допомогою руху годинника, що тягнуть за ланцюжок, по столу [4], або за допомогою руху велосипеда по плоскій поверхні [5].

Кругові трактриси є аналогами звичайної лінійної трактриси із заміною прямої на коло: якщо від точок кругової трактриси γ відкласти відрізки деякої сталої довжини l вздовж дотичних прямих (у відповідному напрямку), то кінці відрізків будуть утворювати *коло* Γ .

В тримірному евклідовому просторі E^3 існують різноманітні кругові трактриси, що відрізняються за якісною поведінкою, що суттєво залежить

від співвідношення між довжиною відрізків l і радіусом R кола Γ .

Уяву про зовнішній вигляд кругових трактрис можна скласти з наступного малюнку [3].

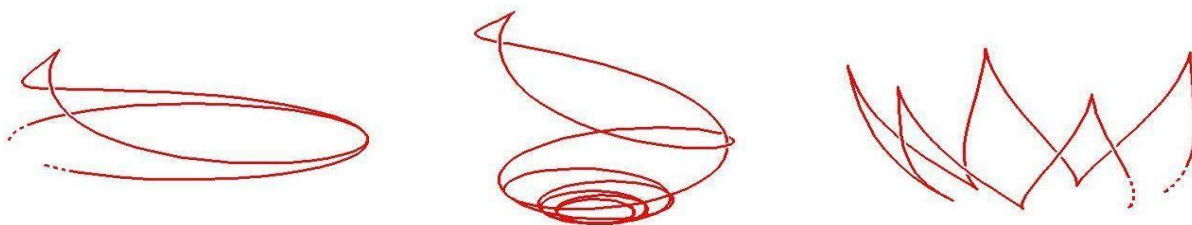


Рис. 2. Типові кругові трактиси: $l < R$ (зліва), $l = R$ (центр), $l > R$ (справа)

В роботі [3] було детально описано властивості кругових трактрис. Зокрема, було зазначено, що у випадку $l > R$ довільна кругова трактриса γ є періодичною кривою: вона або є замкнутою кривою, або незамкнутою, утворюючи всюди щільну обгортку на деякій поверхні обертання F . Було висловлено гіпотезу, що поверхня F є областю на сфері.

В.О. Горькавим було запропоновано використовувати кругові трактиси в E^3 для побудови нового сімейства поверхонь гелікоїдального типу в чотиримірному просторі E^4 . Ці поверхні названо *циркулярними поверхнями Діні*, по аналогії з класичною гелікоїдальною поверхнею Діні в E^3 , утвореною гвинтовим обертанням класичної трактиси.

В зв'язку з гіпотезою щодо сферичності кругових трактрис виникає природне питання стосовно сферичності циркулярних поверхонь Діні – чи належить довільна циркулярна поверхня Діні в E^4 якійсь сфері S^3 в E^4 ?

Крім того, важливим є питання дослідження внутрішньо- і зовнішньо-геометричних властивостей циркулярних поверхонь Діні в E^4 , які можуть слугувати обґрунтуванням змістовності розгляду вказаних поверхонь як аналогів класичної поверхні Діні в E^3 .

Метою нашої роботи було саме розв'язання згаданих питань стосовно сферичності кругових трактрис в E^3 та породжених ними циркулярних

поверхонь Діні в E^4 . А також обґрунтування доцільності розгляду циркулярних поверхонь Діні в E^4 як аналогів класичних поверхонь Діні в E^3

Об'єктом роботи є кругові тракт риси та циркулярні поверхні Діні.

Предметом роботи є сферичність (приналежність сфері) довільної кругової трактриси та довільної циркулярної поверхні Діні, а також перша фундаментальна форма і гаусова кривина довільної циркулярної поверхні Діні.

Для досягнення мети було вирішено спочатку застосувати критерій сферичності кривої, наведений в монографії [6]. А саме, крива в тримірному просторі E^3 є сферичною тоді, і тільки тоді, коли її кривина та скрут задовольняють деякому диференціальному співвідношенню другого порядку. Щоб застосувати цей критерій, ми послідовно розв'язуємо такі задачі: знайти натуральний параметр на круговій трактрисі, обчислити кривину та скрут кругової трактриси, перевірити, чи виконується для кругової трактриси критерій сферичності з [6].

Далі було застосовано прямий метод перевірки сферичності кругової трактриси підстановкою радіус-вектора кривої в квадратичне співвідношення, що представляє неявне рівняння сфери і перевірки можливості його виконання.

Для досягнення мети стосовно циркулярних поверхонь Діні було розглянуто загальні гелікоїдальні поверхні в E^4 і перевірено їх сферичність тим же методом підстановки радіус-вектора поверхні в рівняння сфери. Також було обчислено загальний вираз коефіцієнтів першої фундаментальної форми розглянутих поверхонь. Отримані результати були застосовані для циркулярних поверхонь Діні, що є частковим випадком гелікоїдальних поверхонь.

Як основний результат, доведено наступні твердження:

1) Довільна кругова трактриса в E^3 належить або сфері (в загальному випадку) або площині (у виключному випадку). Обчислено радіус та координати центра сфери, що містить кругову трактрису, в термінах параметрів кругової трактриси.

2) В загальному випадку циркулярна поверхня Діні в E^4 не належить жодній сфері. Єдиним виключним випадком є циркулярна поверхня Діні, отримана гелікоїдальним обертанням кругової трактриси, розташованої на сфері з центром в початку координат.

3) Циркулярна поверхня Діні в E^4 має сталу гаусову кривину.

Таким чином, ми підтвердили гіпотезу стосовно сферичності кругових трактрис з роботи [3] і навіть довели більш загальне твердження, оскільки розглянули усі випадки без обмеження на співвідношення між l та R .

З іншого боку, ми встановили, що циркулярні поверхні Діні в E^4 представляють змістовно нове сімейство поверхонь сталої гаусової кривини в E^4 , що не зводиться до добре відомих поверхонь типу Діні в тримірній сфері.

В подальшому було б цікавим дослідити геометричні властивості кругових трактрис з точки зору саме сферичної геометрії та зовнішньо-геометричні характеристики циркулярних поверхонь Діні (точкова ковимірність, лінії кривини, асимптотичні лінії, чебишевські сітки і т.д.).

1 Кругові трактиси в E^3

Основним об'єктом наших досліджень у цій роботі є кругові трактиси в тримірному евклідовому просторі E^3 . Нагадаємо їх визначення та наведемо деякі загальні властивості цих кривих¹.

Визначення [3]. *Круговою трактисою* називається крива γ в E^3 , що у відповідних декартових координатах в E^3 задається радіус-вектором

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \frac{t}{R} + \xi_2 \sin \frac{t}{R} \\ -\xi_2 \cos \frac{t}{R} + \xi_1 \sin \frac{t}{R} \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $R > 0$ – фіксована константа, а $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ – функції, що мають наступний вигляд в залежності від значення R :

$R > 1$)

$$\xi_1 = \frac{\left(R - \frac{1}{R}\right) \cosh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t}, \quad \xi_2 = \frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t}, \quad \xi_3 = \frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t},$$

де $\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}$, а C_1 та C_2 задовольняють $C_1^2 + C_2^2 = 1$;

$R = 1$)

$$\xi_1 = \frac{2}{C_1 + t^2}, \quad \xi_2 = \frac{2t}{C_1 + t^2}, \quad \xi_3 = \frac{C_2}{C_1 + t^2},$$

де C_1 та C_2 задовольняють $4(C_1 - 1) = C_2^2$;

$0 < R < 1$)

$$\xi_1 = \frac{\left(R - \frac{1}{R}\right) \cos \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t}, \quad \xi_2 = -\frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t}, \quad \xi_3 = \frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t},$$

де $\lambda = \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R}$, а C_1 та C_2 задовольняють $C_1^2 - C_2^2 = 1$.

З точністю до рухів в обхопному просторі E^3 , при кожному фіксованому R ми маємо *однопараметричну* сім'ю кругових трактрис. Параметр сім'ї міститься у двох константах C_1 та C_2 , пов'язаних одним співвідношенням, залежним від R .

Функції $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, що визначають радіус-вектор кругової трактрис γ , залежать від параметра R . Якісна поведінка кругової трактрис також сильно залежить від того, чи є значення параметру R більшим, рівним, або меншим за 1 [3].

Якщо $R \geq 1$, то кругова трактриса є симетричною нескінченною кривою, що при $t \rightarrow \pm\infty$ асимптотично наближується, "обертаючись" навколо вертикальної координатної осі, до кола радіуса $\sqrt{R^2 - 1}$ в горизонтальній координатній площині. При $R=1$ це коло вироджується в точку O .



Рис. 3. Типові кругові трактрис: $R > 1$ (зліва), $R = 1$ (справа) [3]

Якщо ж $R < 1$, то кругова трактриса є періодичною кривою з періодом $T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1-R^2}}$, при цьому крива суміщається сама з собою обертанням навколо вертикальної координатної осі на кут $\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{1-R^2}}$. Якщо $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, тобто, $\sqrt{1-R^2} \in \mathbb{Q}$, то крива є замкнутою, в протилежному випадку вона є незамкнутою і утворює всюди щільну обгортку на деякій поверхні обертання.



Рис. 4. Типові замкнуті і незамкнуті кругові трактрис з $R < 1$ [3]

Приймаючи до уваги вигляд функцій $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ та якісну поведінку кривої, ми пропонуємо у випадках $R>1$, $R=1$ та $R<1$ називати кругові трактиси гіперболічними, параболічними та еліптичними відповідно.

Проаналізуємо більш детально базові властивості кругових трактрис.

Твердження 1. Для довільної кругової трактиси γ в E^3 виконується

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\xi_2|$$

Доведення проводиться прямою (але громіздкою) перевіркою.

Наслідок 2. Якщо $R>1$ або $R=1$, то довільна кругова трактриса γ має єдину сингулярну точку $t=0$.

Якщо ж $R<1$, то довільна кругова трактриса γ має два періодичних набори сингулярних точок $t = \frac{\pi}{\lambda} \cdot 2n$ та $t = \frac{\pi}{\lambda} \cdot (2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно.

Доведення. Сингулярні точки на кривій характеризуються властивістю $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$. З огляду на Твердження 1, ми можемо переписати цю умову у вигляді $\xi_2 = 0$. Згадуючи вигляд функції $\xi_2(t)$ і розв'язуючи рівняння $\xi_2(t) = 0$, ми й знаходимо сингулярні точки на кривій γ .

Якщо $R>1$, то $\xi_2 = \frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{c_1}{R} + \cosh \lambda t}$. Тож з рівняння $\frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{c_1}{R} + \cosh \lambda t} = 0$ отримуємо єдиний розв'язок $t=0$.

Якщо $R=1$, то $\xi_2 = \frac{2t}{c_1+t^2}$. Тож з рівняння $\frac{2t}{c_1+t^2} = 0$ також отримуємо єдиний розв'язок $t=0$.

Якщо ж $R<1$, то $\xi_2 = -\frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{c_1}{R} + \cos \lambda t}$. Тож з рівняння $\frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{c_1}{R} + \cos \lambda t} = 0$ отримуємо розв'язки $t = \frac{\pi}{\lambda} n$, $n \in \mathbb{Z}$, що розділяються на два набори, з парними та непарними n , з огляду на періодичність кривої γ .

Наслідок 3. Для довільного натурального параметру s на круговій трактрисі γ має місце формула

$$\frac{ds}{dt} = \pm |\xi_2|$$

Доведення спирається на визначення натурального параметру, що приводить до співвідношення $\frac{ds}{dt} = \pm \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$. Застосувавши Твердження 1, отримуємо бажану формулу.

Зауважимо, що вибір знаку відповідає збереженню або зміні орієнтації на кривій γ при переході від параметру t до натурального параметру s .

Зауважимо також, що підставивши конкретний вираз для функції ξ_2 і проінтегрувавши, можна знайти конкретний вираз для натурального параметру $s=s(t)$ [3]. Але в подальшому нам знадобиться саме формула з Наслідку 3.

Твердження 4. Для довільної кругової трактрисі γ в E^3 виконується

$$\vec{r} + \frac{1}{\xi_2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} R \cos \frac{t}{R} \\ R \sin \frac{t}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Доведення проводиться прямою (але громіздкою) перевіркою. В сингулярних точках перевірка проводиться із застосуванням граничного переходу.

Зауважимо, що в кожній точці кругової трактрисі γ вектор

$$\frac{1}{\xi_2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

є одиничним дотичним вектором кривої γ , це випливає з Твердження 1.

Тому Твердження 4, з геометричної точки зору означає наступне: якщо від кожної точки кругової трактиси відкласти відрізок одиничної довжини вздовж дотичної прямої у відповідному напрямку, то кінці відкладених відрізків будуть утворювати коло радіуса R . В цьому сенсі кругові трактиси нагадують звичайну трактису, із заміною прямої на коло.

Твердження 5. Для кривини k та скриту κ довільної кругової трактиси γ в E^3 мають місце наступні формули:

$$k = \sqrt{\frac{1 - \xi_2^2}{\xi_2^2}}, \quad \kappa = \frac{\xi_3}{R\xi_2(\xi_2^2 - 1)}.$$

Доведення. Для кривини та скриту мають місце стандартні формули

$$k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3}, \quad \kappa = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|[\vec{r}', \vec{r}'']|^2}.$$

Підставляючи в ці формули конкретний вираз для радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ кругової трактиси γ і виконуючи елементарні (але громіздкі) обчислення, отримуємо вказані в Твердженні 5 вирази для кривини та скриту кругової трактиси.

Наслідок 6. Якщо $C_2=0$, то кругова трактриса γ має тотожно нульовий скрут і, значить, є плоскою кривою. Якщо ж $C_2 \neq 0$, то кривина та скрут кругової трактиси γ не обертаються в нуль в жодній точці кривої.

Доведення. Якщо $C_2=0$, то функція $\xi_3(t)$ є тотожно нульовою. Тоді з Твердження 5 випливає, що крива γ має тотожно нульовий скрут і є плоскою кривою. Якщо ж $C_2 \neq 0$, то функція $\xi_3(t)$, а, значить, і скрут кривої γ не обертаються в 0. Коли в цьому випадку проаналізувати функцію $\xi_2(t)$, то елементарними засобами математичного аналізу можна показати, що $\xi_2^2 < 1$. Тоді з Твердження 5 випливає, що кривина кривої γ не обертається в нуль.

2 Сферичні криві в E^3

Нехай γ – довільна регулярна (класу гладкості C^3) крива в тримірному евклідовому просторі E^3 . Позначимо через s , $k=k(s)$, $\kappa=\kappa(s)$ натуральний параметр, кривину та скрут кривої γ відповідно.

В класичній теорії кривих добре відомо, що крива γ з ненульовою кривиною $k=k(s)$ є плоскою, тобто, належить деякій площині в E^3 , тоді і тільки тоді, коли скрут кривої γ дорівнює нулю $\kappa \equiv 0$.

Більш складним є питання стосовно сферичності кривої γ , а саме, коли ми можемо стверджувати, що крива γ належить деякій сфері в E^3 ? Відповідь на це питання – критерій сферичності кривої – наведений в монографії [6]. А саме, крива γ з ненульовими кривиною $k=k(s)$ та скрутом $\kappa(s)$ є сферичною, тобто, належить деякій сфері в E^3 , тоді і тільки тоді, коли кривина $k(s)$ та скрут $\kappa(s)$ кривої γ задовольняють наступній умові (дивись умову (16.6) з монографії [6]):

$$\frac{\kappa}{k} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) = 0$$

Є і інші методи перевірки сферичності заданої кривої γ . Наприклад, обравши чотири (або більше) характерні точки на кривій γ , можна однозначно визначити сферу, якій належать ці чотири точки, а потім перевірити, чи буде вся крива γ належати визначеній сфері.

3 Сферичність кругових трактрис в E^3

Раніше в Наслідку 3 та Твердженню 5 ми вже обчислили натуральний параметр, кривину та скрут кругової трактиси. Далі для перевірки її сферичності ми використаємо саме метод з монографії [6] і розглянемо співвідношення

$$\frac{\kappa}{k} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) = 0$$

Будемо розглядати випадок, коли $C_2 \neq 0$. Тоді кривина та скрут кругової трактиси γ не обертаються в нуль в жодній точці кривої.

Маємо:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot \frac{dt}{ds} = \pm \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot |\xi_2|,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) \cdot \frac{dt}{ds} = \pm \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) \cdot |\xi_2| = \\ &= \pm \frac{d}{dt} \left(\pm \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot |\xi_2| \right) \cdot |\xi_2| = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot |\xi_2| \right) \cdot |\xi_2|, \end{aligned}$$

$$\frac{\kappa}{k} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \right) = \frac{\kappa}{k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot |\xi_2| \right) \cdot |\xi_2|.$$

Застосуємо Твердження 5 і підставимо замість кривини та скруту їх вирази через функції $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$. Потім підставимо конкретні вирази для функцій $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, наведені у Визначенні кругової трактиси, і обчислимо вираз

$$\frac{\kappa}{k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{k} \right) \cdot |\xi_2| \right) \cdot |\xi_2|$$

Елементарні (але громіздкі) обчислення показують, що вказаний вираз дорівнює нулю. Це і означає, що у випадку $C_2 \neq 0$ кругова трактриса є сферичною кривою, тобто, розташована на деякій сфері.

Якщо ж $C_2 = 0$, то, нагадаємо, кругова трактриса є плоскою кривою. Таким чином, має місце наступне

Твердження 7. *Довільна кругова трактриса γ в тримірному евклідовому просторі E^3 або є сферичною кривою, в загальному випадку, або є плоскою кривою, у виключному випадку.*

Зауважимо, що якщо кругова трактриса γ є еліптичною, то вона або є замкнутою кривою, або є незамкнутою кривою, що утворює всюди щільну обгортку на деякій поверхні обертання [3]. З твердження 7 випливає, що ця поверхня обертання є областю або на сфері ($C_2 \neq 0$) або на площині ($C_2 = 0$) – вона представляє собою кільце, обмежене двома колами, на яких розташовані сингулярні точки еліптичної кругової трактриси γ , дивись Рис. 4.

Використовуючи метод Ю.А. Амінова, ми довели, що кожна непlosка кругова трактриса є сферичною кривою. Застосуємо тепер прямий метод перевірки сферичності кругової трактриси, щоб визначити радіус і координати центра сфери S^2 в E^3 , якому належить непlosка кругова трактриса.

Для цього розглянемо рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + (z - B)^2 = A^2,$$

підставимо в нього функції $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, які задають кругову трактрису γ , і будемо підбирати константи A і B так, щоб задовольнити тотожність

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t) - B)^2 \equiv A^2.$$

Це і буде означати, що кругова трактриса γ належить сфері S^2 радіусу A із центром у точці $(0; 0; B)$ на осі z .

Випадки $R>1$, $R=1$, $R<1$ розглянемо окремо.

Якщо $0<R<1$, то кругова трактриса задається у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{(R - \frac{1}{R})\cos \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \cos \frac{t}{R} - \frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \sin \frac{t}{R} \\ y = \frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{(R - \frac{1}{R})\cos \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \sin \frac{t}{R} \\ z = \frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

де

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R}, \quad C_1^2 - C_2^2 = 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} & (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t) - B)^2 \\ &= \left(\frac{(R - \frac{1}{R})\cos \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \cos \frac{t}{R} - \frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\lambda \sin \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{(R - \frac{1}{R})\cos \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \left(\frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} - B \right)^2 = \\ &= \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cos^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \cos^2 \frac{t}{R} - \frac{2\lambda(R - \frac{1}{R})\cos \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} \\ & \quad + \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \cos^2 \frac{t}{R} + \frac{2\lambda(R - \frac{1}{R}) \sin \lambda t \cos \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} \\
& + \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cos^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \\
& + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} - \frac{2\lambda B C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} + B^2 = \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cos^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} [\cos^2 \lambda t + \sin^2 \lambda t] + \\
& + \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} [\sin^2 \lambda t + \cos^2 \lambda t] + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} - \frac{2\lambda B C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} + B^2 = \\
& = [\lambda = \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1-R^2}{R^2}] \\
& = \frac{(R^2 - 2 + \frac{1}{R^2}) \cos^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} + \frac{(\frac{1}{R^2} - 1) \sin^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} + \\
& + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} - \frac{2\lambda B C_2}{\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t} + B^2 \\
& = \frac{R^2 \cos^2 \lambda t - 2 \cos^2 \lambda t + \frac{1}{R^2} (\cos^2 \lambda t + \sin^2 \lambda t) - \sin^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} + \\
& + \frac{\lambda^2 C_2^2 - 2 \frac{C_1}{R} \lambda B C_2 - 2\lambda B C_2 \cos \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} + B^2 \\
& = \frac{R^2 \cos^2 \lambda t - \cos^2 \lambda t - 1 + \frac{1}{R^2} + \lambda^2 C_2^2 - 2 \frac{C_1}{R} \lambda B C_2 - 2\lambda B C_2 \cos \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} + B^2 = \\
& = \frac{1}{(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2} [(R^2 - 1) \cos^2 \lambda t + \lambda^2 (1 + C_2^2) - 2\lambda B C_2 (\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)] + B^2 \\
& =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [C_1^2 - C_2^2 = 1 \Rightarrow C_1^2 = 1 + C_2^2] = \\
&= \frac{1}{\left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right)^2} [(R^2 - 1)\cos^2 \lambda t + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right)] \\
&+ B^2 \equiv A^2
\end{aligned}$$

Отже, отримали тригонометричну тотожність

$$(R^2 - 1)\cos^2 \lambda t + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right) \equiv (A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right)^2$$

Ця тотожність повинна виконуватись при будь-яких значеннях t

$$1) t = \frac{\pi}{2\lambda}: \cos \lambda t = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos^2 \lambda t = 0$$

$$\lambda^2 C_1^2 - \frac{2\lambda B C_1 C_2}{R} = (A^2 - B^2) \frac{C_1^2}{R^2} \mid \cdot \frac{R^2}{C_1} \quad (C_1 \neq 0)$$

$$R^2 C_1 \lambda^2 - 2B C_2 R \lambda = C_1 (A^2 - B^2)$$

$$2) t = 0: \cos \lambda t = 1 \Rightarrow \cos^2 \lambda t = 1$$

$$R^2 - 1 + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} + 1\right) = (A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} + 1\right)^2$$

$$(A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} + 1\right)^2 + 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} + 1\right) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 = 0$$

$$3) t = \frac{\pi}{\lambda}: \cos \lambda t = \cos \pi = -1 \Rightarrow \cos^2 \lambda t = 1$$

$$R^2 - 1 + \lambda^2 C_1^2 - \frac{2\lambda B C_1 C_2}{R} + 2\lambda B C_2 = (A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2$$

$$R^2 - 1 + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) = (A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2$$

$$(A^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2 + 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 = 0$$

При $t = \frac{\pi}{2\lambda}$ ми вивели співвідношення

$$R^2 C_1 \lambda^2 - 2B C_2 R \lambda = C_1 (A^2 - B^2).$$

Виразимо з нього радіус $A > 0$:

$$R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda = A^2 - B^2$$

$$A^2 = R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda + B^2 \Rightarrow A = \sqrt{R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda + B^2}$$

Підставимо знайдене значення A у рівняння при $t=0$:

$$(R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda + B^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + 1)^2 + 2\lambda B C_2 (\frac{C_1}{R} + 1) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 = 0$$

$$R^2 \lambda^2 (\frac{C_1}{R} + 1)^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)^2 + 2\lambda B C_2 (\frac{C_1}{R} + 1) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 = 0$$

$$B(2\lambda C_2 (\frac{C_1}{R} + 1) - 2 \frac{C_2}{C_1} R \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)^2) = R^2 + \lambda^2 C_1^2 - 1 - R^2 \lambda^2 (\frac{C_1}{R} + 1)^2$$

Виражаємо B з останнього рівняння:

$$\begin{aligned} B &= \frac{R^2 + \lambda^2 C_1^2 - 1 - R^2 \lambda^2 (\frac{C_1}{R} + 1)^2}{2\lambda C_2 (\frac{C_1}{R} + 1) [1 - \frac{R}{C_1} (\frac{C_1}{R} + 1)]} = [\lambda = \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R} \Rightarrow \lambda^2 \\ &= \frac{1 - R^2}{R^2}, R^2 - 1 = -R^2 \lambda^2] = \\ &= \frac{\lambda^2 [-R^2 + C_1^2 - R^2 (\frac{C_1^2}{R^2} + \frac{2C_1}{R} + 1)]}{2\lambda C_2 (\frac{C_1}{R} + 1) (1 - 1 - \frac{R}{C_1})} = \frac{\lambda (-R^2 + C_1^2 - C_1^2 - 2C_1 R - R^2)}{2C_2 (-1 - \frac{R}{C_1})} \\ &= \frac{-2\lambda (R^2 + C_1 R)}{-2C_2 (1 + \frac{R}{C_1})} = \frac{R^2 \lambda (1 + \frac{C_1}{R})}{C_2 (1 + \frac{R}{C_1})} = \\ &= \frac{R^2 \lambda \frac{R + C_1}{R}}{C_2 \frac{C_1 + R}{C_1}} = \frac{C_1 R \lambda}{C_2} \end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{R^2 \lambda^2 - \frac{2C_1 R \lambda}{C_2} \cdot \frac{C_2}{C_1} R \lambda + \left(\frac{C_1 R \lambda}{C_2}\right)^2} = \sqrt{R^2 \lambda^2 - 2R^2 \lambda^2 + \frac{C_1^2 R^2 \lambda^2}{C_2^2}} = \\
 &= \sqrt{R^2 \lambda^2 \left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 1\right)} = R \lambda \sqrt{\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_2^2}} = [C_1^2 - C_2^2 = 1] = R \lambda \sqrt{\frac{1}{C_2^2}} = \frac{R \lambda}{C_2}
 \end{aligned}$$

А тепер підставимо $A = \sqrt{R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda + B^2}$ у рівняння при $t = \pi / \lambda$:

$$\begin{aligned}
 (R^2 \lambda^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda + B^2 - B^2) \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2 + 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 \\
 = 0
 \end{aligned}$$

$$R^2 \lambda^2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2 - 2B \frac{C_2}{C_1} R \lambda \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2 + 2\lambda B C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) - R^2 - \lambda^2 C_1^2 + 1 = 0$$

$$B(2\lambda C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) - 2 \frac{C_2}{C_1} R \lambda \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2) = R^2 + \lambda^2 C_1^2 - 1 - R^2 \lambda^2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2$$

Виражаємо B з останнього рівняння:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{R^2 + \lambda^2 C_1^2 - 1 - R^2 \lambda^2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)^2}{2\lambda C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) \left[1 - \frac{R}{C_1} \left(\frac{C_1}{R} - 1\right)\right]} = [R^2 - 1 = -R^2 \lambda^2] = \\
 &= \frac{\lambda^2 [-R^2 + C_1^2 - R^2 \left(\frac{C_1^2}{R^2} - 2\frac{C_1}{R} + 1\right)]}{2\lambda C_2 \left(\frac{C_1}{R} - 1\right) \left(1 - 1 + \frac{R}{C_1}\right)} = \frac{\lambda [-R^2 + C_1^2 - C_1^2 + 2RC_1 - R^2]}{2C_2 \left(1 - \frac{R}{C_1}\right)} \\
 &= \frac{-2\lambda R^2 \left(1 - \frac{C_1}{R}\right)}{2C_2 \left(1 - \frac{R}{C_1}\right)} = \\
 &= \frac{-\lambda R^2 \frac{R - C_1}{R}}{C_2 \frac{C_1 - R}{C_1}} = \frac{C_1 \lambda R (C_1 - R)}{C_2 (C_1 - R)} = \frac{C_1 \lambda R}{C_2}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, при $0 < R < 1$ ми встановили, що якщо трактриса γ лежить на сфері, то радіус дорівнює $\frac{R\lambda}{|C_2|}$, а центр – в точці $(0; 0; \frac{C_1 R \lambda}{C_2})$.

А тепер підставимо значення $A = \frac{R\lambda}{C_2}$ і $B = \frac{C_1 R \lambda}{C_2}$ у рівняння :

$$(R^2 - 1)\cos^2 \lambda t + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda B C_2 (\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t) = (A^2 - B^2)(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2 :$$

$$(R^2 - 1)\cos^2 \lambda t + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda \frac{C_1 R \lambda}{C_2} C_2 (\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t) =$$

$$= (\frac{R^2 \lambda^2}{C_2^2} - \frac{C_1^2 R^2 \lambda^2}{C_2^2})(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t)^2$$

$$R^2 \cos^2 \lambda t - \cos^2 \lambda t + \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda^2 C_1^2 - 2\lambda^2 C_1 R \cos \lambda t =$$

$$= \frac{R^2 \lambda^2 (1 - C_1^2)}{C_2^2} (\frac{C_1^2}{R^2} + 2 \frac{C_1}{R} \cos \lambda t + \cos^2 \lambda t)$$

$$C_1^2 - C_2^2 = 1 \Rightarrow 1 - C_1^2 = -C_2^2 \Rightarrow \frac{R^2 \lambda^2 (1 - C_1^2)}{C_2^2} = \frac{-R^2 \lambda^2 C_2^2}{C_2^2} = -R^2 \lambda^2$$

$$R^2 \cos^2 \lambda t - \cos^2 \lambda t - \lambda^2 C_1^2 - 2\lambda^2 C_1 R \cos \lambda t = -\lambda^2 C_1^2 - 2R\lambda^2 C_1 \cos \lambda t - R^2 \lambda^2 \cos^2 \lambda t$$

$$R^2 \cos^2 \lambda t - \cos^2 \lambda t + R^2 \lambda^2 \cos^2 \lambda t = 0, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{R^2} - 1$$

$$\cos^2 \lambda t (R^2 - 1 + R^2 (\frac{1}{R^2} - 1)) = 0, \quad \cos^2 \lambda t \cdot 0 = 0 \Rightarrow \forall t$$

Таким чином, ми довели наступне

Твердження 8.1. При $0 < R < 1$, якщо $C_2 \neq 0$, то кругова трактриса γ в E^3 лежить на сфері радіусу $\frac{R\lambda}{|C_2|}$ з центром у точці $(0; 0; \frac{C_1 \lambda R}{C_2})$. Якщо ж

$C_2 = 0$, то кругова трактриса γ лежить в координатній площині xy .

Розглянемо тепер випадок $R=1$, коли кругова трактриса задається

$$\gamma: \begin{cases} x = \frac{2}{C_1+t^2} \cos \frac{t}{R} + \frac{2t}{C_1+t^2} \sin \frac{t}{R} \\ y = -\frac{2t}{C_1+t^2} \cos \frac{t}{R} + \frac{2}{C_1+t^2} \sin \frac{t}{R} \\ z = \frac{C_2}{C_1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

за умови, що $4(C_1 - 1) = C_2^2$. Маємо:

$$\begin{aligned} (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t) - B)^2 &= \left(\frac{2}{C_1+t^2} \cos \frac{t}{R} + \frac{2t}{C_1+t^2} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \\ &+ \left(-\frac{2t}{C_1+t^2} \cos \frac{t}{R} + \frac{2}{C_1+t^2} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \left(\frac{C_2}{C_1+t^2} - B \right)^2 = \frac{4}{(C_1+t^2)^2} \cos^2 \frac{t}{R} + \\ &+ \frac{8t}{(C_1+t^2)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} + \frac{4t^2}{(C_1+t^2)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \frac{4t^2}{(C_1+t^2)^2} \cos^2 \frac{t}{R} \\ &- \frac{8t}{(C_1+t^2)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} + \\ &+ \frac{4}{(C_1+t^2)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \frac{C_2^2}{(C_1+t^2)^2} - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 \\ &= \frac{4}{(C_1+t^2)^2} [\cos^2 \frac{t}{R} + \sin^2 \frac{t}{R}] + \\ &+ \frac{4t^2}{(C_1+t^2)^2} [\sin^2 \frac{t}{R} + \cos^2 \frac{t}{R}] + \frac{C_2^2}{(C_1+t^2)^2} - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 \\ &= \frac{4}{(C_1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(C_1+t^2)^2} + \\ &+ \frac{C_2^2}{(C_1+t^2)^2} - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 = [C_2^2 = 4(C_1 - 1)] \\ &= \frac{4}{(C_1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(C_1+t^2)^2} + \frac{4C_1}{(C_1+t^2)^2} - \\ &- \frac{4}{(C_1+t^2)^2} - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 = \frac{4}{(C_1+t^2)^2} (t^2 + C_1) - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 \\ &= \frac{4}{C_1+t^2} - \frac{2C_2B}{C_1+t^2} + B^2 = \\ &= \frac{2(2 - C_2B)}{C_1+t^2} + B^2 \equiv A^2 \end{aligned}$$

Отже, отримали співвідношення:

$$(A^2 - B^2)t^2 + C_1(A^2 - B^2) - 2(2 - C_2B) \equiv 0 \quad \forall t$$

Воно рівносильне системі

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = 0 \\ C_1(A^2 - B^2) - 2(2 - C_2B) \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \pm B \\ 2 - C_2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \pm \frac{2}{C_2} \\ B = \frac{2}{C_2} \end{cases}.$$

Оскільки A – це радіус, то $A > 0$, тому

$$\begin{cases} A = |B| = \frac{2}{|C_2|} \\ B = \frac{2}{C_2} \end{cases}.$$

Таким чином, ми довели

Твердження 8.2. При $R=1$, якщо $C_2 \neq 0$, то кругова трактриса γ в E^3 лежить на сфері радіусу $\frac{2}{|C_2|}$ з центром у точці $(0; 0; \frac{2}{|C_2|})$. Якщо ж $C_2=0$, то кругова трактриса γ лежить в координатній площині xy .

Нарешті, розглянемо тепер випадок $R > 1$, коли кругова трактриса задається

$$\gamma: \begin{cases} x = \frac{(R-\frac{1}{R})\cosh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \sin \frac{t}{R} \\ y = -\frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{(R-\frac{1}{R})\cosh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \sin \frac{t}{R} \\ z = \frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

де $\lambda = \frac{\sqrt{R^2-1}}{R}$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$.

Маємо:

$$\begin{aligned}
& (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t) - B)^2 \\
&= \left(\frac{(R - \frac{1}{R}) \cosh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \\
&+ \left(-\frac{\lambda \sinh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \cos \frac{t}{R} + \frac{(R - \frac{1}{R}) \cosh \lambda t}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} \sin \frac{t}{R} \right)^2 + \left(\frac{\lambda C_2}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} - B \right)^2 = \\
&= \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \cos^2 \frac{t}{R} + \frac{2\lambda(R - \frac{1}{R}) \sinh \lambda t \cosh \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} \\
&\quad + \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \\
&+ \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \cos^2 \frac{t}{R} - \frac{2\lambda(R - \frac{1}{R}) \sinh \lambda t \cosh \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \sin \frac{t}{R} \cos \frac{t}{R} \\
&\quad + \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} \sin^2 \frac{t}{R} + \\
&+ \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} - \frac{2\lambda C_2 B}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} + B^2 \\
&= \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} [\cos^2 \frac{t}{R} + \sin^2 \frac{t}{R}] + \\
&+ \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} [\sin^2 \frac{t}{R} + \cos^2 \frac{t}{R}] + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} - \frac{2\lambda C_2 B}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} + B^2 = \\
&= \frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} + \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} - \frac{2\lambda C_2 B}{\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t} + B^2 \\
&=
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} [(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t + \lambda^2 \sinh^2 \lambda t + \lambda^2 C_2^2 - 2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)] +$$

$$+ B^2 \equiv A^2$$

Тобто

$$(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t + \lambda^2 \sinh^2 \lambda t + \lambda^2 C_2^2 - 2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t) = (A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2$$

Поділимо останнє рівняння на його праву частину:

$$\frac{(R - \frac{1}{R})^2 \cosh^2 \lambda t}{(A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} + \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{(A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} + \frac{\lambda^2 C_2^2}{(A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)^2} - \frac{2\lambda C_2 B}{(A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t)} = 1$$

При $t \rightarrow \infty$ (зауважимо, що $\cosh \lambda t \rightarrow +\infty$, $\tanh \lambda t \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$) ми отримуємо наступне:

$$\frac{(R - \frac{1}{R})^2}{A^2 - B^2} + \frac{\lambda^2}{A^2 - B^2} = 1.$$

Враховуючи, що $\lambda = \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}$, $\lambda^2 = 1 - \frac{1}{R^2}$ маємо:

$$R^2 - 2 + \frac{1}{R^2} + 1 - \frac{1}{R^2} = A^2 - B^2$$

$$R^2 - 1 = A^2 - B^2 \Rightarrow A = \sqrt{R^2 + B^2 - 1}.$$

А при $t=0$ маємо наступне рівняння:

$$(R - \frac{1}{R})^2 + \lambda^2 C_2^2 - 2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + 1) = (A^2 - B^2) (\frac{C_1}{R} + 1)^2.$$

Підставляємо у нього знайдене вище A :

$$(R - \frac{1}{R})^2 + \lambda^2 C_2^2 - 2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + 1) = (R^2 + B^2 - 1 - B^2) (\frac{C_1}{R} + 1)^2$$

$$2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + 1) = (R - \frac{1}{R})^2 + \lambda^2 C_2^2 - (R^2 - 1) (\frac{C_1}{R} + 1)^2$$

$$2\lambda C_2 B (\frac{C_1}{R} + 1) = (R(1 - \frac{1}{R^2}))^2 + \lambda^2 C_2^2 - R^2(1 - \frac{1}{R^2}) (\frac{C_1}{R} + 1)^2$$

Тепер згадаємо, що $1 - \frac{1}{R^2} = \lambda^2$ та отримуємо наступне:

$$2C_2 B (\frac{C_1}{R} + 1) = \lambda(R^2 \lambda^2 + C_2^2 - R^2 (\frac{C_1}{R} + 1)^2)$$

Виражаємо з останнього рівняння B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\lambda(R^2 \lambda^2 + C_2^2 - R^2 (\frac{C_1}{R} + 1)^2)}{2C_2 (\frac{C_1}{R} + 1)} = [\lambda = 1 - \frac{1}{R^2}] \\ &= \frac{\lambda(R^2 - 1 + C_2^2)}{2C_2 (\frac{C_1}{R} + 1)} - \frac{R^2 \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)}{2C_2} = \\ &= [C_1^2 + C_2^2 = 1 \Rightarrow C_1^2 = 1 - C_2^2] = \frac{\lambda(R^2 - C_1^2)}{2C_2 (\frac{C_1}{R} + 1)} - \frac{R^2 \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)}{2C_2} = \\ &= \frac{-R^2 \lambda (\frac{C_1^2}{R^2} - 1)}{2C_2 (\frac{C_1}{R} + 1)} - \frac{R^2 \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)}{2C_2} \\ &= \frac{-R^2 \lambda (\frac{C_1}{R} - 1)(\frac{C_1}{R} + 1)}{2C_2 (\frac{C_1}{R} + 1)} - \frac{R^2 \lambda (\frac{C_1}{R} + 1)}{2C_2} = \\ &= \frac{-R\lambda C_1 + R^2 \lambda - R\lambda C_1 - R^2 \lambda}{2C_2} = \frac{-2R\lambda C_1}{2C_2} = -\frac{R\lambda C_1}{C_2} \end{aligned}$$

Тобто $B = -\frac{R\lambda C_1}{C_2}$. Підставляємо це значення у формулу для A :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{R^2 + B^2 - 1} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2 \lambda^2 C_1^2}{C_2^2} - 1} = \sqrt{\frac{R^2 C_2^2 + R^2 \lambda^2 C_1^2 - C_2^2}{C_2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{C_2^2 (R^2 - 1) + R^2 \lambda^2 C_1^2}{C_2^2}} = [R^2 - 1 = R^2 \lambda^2] = \sqrt{\frac{C_2^2 R^2 \lambda^2 + R^2 \lambda^2 C_1^2}{C_2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{R^2 \lambda^2 (C_2^2 + C_1^2)}{C_2^2}} = [C_1^2 + C_2^2 = 1] = \sqrt{\frac{R^2 \lambda^2}{C_2^2}} = \frac{R\lambda}{C_2}. \end{aligned}$$

Оскільки $A > 0$, то $A = \frac{R\lambda}{|C_2|}$.

Підставимо $A = \frac{R\lambda}{C_2}$ і $B = -\frac{R\lambda C_1}{C_2}$ у початкове співвідношення, перевіряємо, що воно виконується тотожно, при будь-якому значенні t .

Таким чином, ми довели

Твердження 8.3. При $R > 1$, якщо $C_2 \neq 0$, то кругова трактриса γ в E^3 лежить на сфері радіусу $\frac{R\lambda}{|C_2|}$ з центром у точці $(0; 0; -\frac{R\lambda C_1}{C_2})$.

Підсумовуючи, можемо зробити

Висновок. Довільна неплоска кругова трактриса, при будь-якому значенні параметрів $R > 0$ і $C_2 \neq 0$, розташовується на однозначним чином визначеній сфері в E^3 , радіус і координати центра якої залежать від значень параметрів $R > 0$ і $C_2 \neq 0$.

4 Загальні гелікоїдальні поверхні в E^4

Нехай в тримірному просторі E^3 задано криву γ :

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \\ x^3 = f^3(t) \end{cases}.$$

Розглянемо в чотиримірному просторі E^4 поверхню F , задану у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = \cos \alpha v \cdot f^1(t) - \sin \alpha v \cdot f^2(t) \\ x^2 = \sin \alpha v \cdot f^1(t) + \cos \alpha v \cdot f^2(t) \\ x^3 = \cos \beta v \cdot f^3(t) \\ x^4 = \sin \beta v \cdot f^3(t) \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha v & -\sin \alpha v & 0 & 0 \\ \sin \alpha v & \cos \alpha v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta v & -\sin \beta v \\ 0 & 0 & \sin \beta v & \cos \beta v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ f^3(t) \\ f^4(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta - \text{константи.}$$

Поверхня F утворена з кривої γ обертанням в E^4 , яке розпадається на обертання в координатних площинах x^1x^2 і x^3x^4 . Таке обертання в E^4 інколи називають паратактичним, воно є аналогом гвинтового обертання в E^3 .

Поверхню F будемо називати *гелікоїдальною*, а криву γ – меридіаном поверхні F .

Обчислимо першу фундаментальну форму поверхні F :

$$g = g_{11}dt^2 + 2g_{12}dt dv + g_{22}dv^2,$$

де

$$g_{11} = \langle \vec{r}'_t, \vec{r}'_t \rangle, \quad g_{12} = \langle \vec{r}'_t, \vec{r}'_v \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{r}'_v, \vec{r}'_v \rangle.$$

Маємо:

$$\vec{r} = \{\cos \alpha v f^1(t) - \sin \alpha v f^2(t), \sin \alpha v f^1(t) + \cos \alpha v f^2(t), \cos \beta v f^3(t), \sin \beta v f^3(t)\}$$

$$\vec{r}'_t = \{\cos \alpha v f^{1'}(t) - \sin \alpha v f^{2'}(t), \sin \alpha v f^{1'}(t) + \cos \alpha v f^{2'}(t), \cos \beta v f^{3'}(t), \sin \beta v f^{3'}(t)\}$$

$$\vec{r}'_v = \{-\alpha \sin \alpha v f^1(t) - \alpha \cos \alpha v f^2(t), \alpha \cos \alpha v f^1(t) - \alpha \sin \alpha v f^2(t), -\beta \sin \beta v f^3(t), \beta \cos \beta v f^3(t)\}$$

$$g_{11} = \cos^2 \alpha v (f^{1'}(t))^2 - 2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^{1'}(t) f^{2'}(t) + \sin^2 \alpha v (f^{2'}(t))^2 + \\ + \sin^2 \alpha v (f^{1'}(t))^2 + 2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^{1'}(t) f^{2'}(t) + \cos^2 \alpha v (f^{2'}(t))^2 + \\ + \cos^2 \beta v (f^{3'}(t))^2 +$$

$$+ \sin^2 \beta v (f^{3'}(t))^2 = (f^{1'}(t))^2 + (f^{2'}(t))^2 + (f^{3'}(t))^2$$

$$g_{12} = -\alpha \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^{1'}(t) + \alpha \sin^2 \alpha v f^1(t) f^{2'}(t) - \\ - \alpha \cos^2 \alpha v f^2(t) f^{1'}(t) +$$

$$+ \alpha \sin \alpha v \cos \alpha v f^2(t) f^{2'}(t) + \alpha \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^{1'}(t) - \\ + \alpha \cos^2 \alpha v f^1(t) f^{2'}(t) -$$

$$- \alpha \sin^2 \alpha v f^2(t) f^{1'}(t) - \alpha \sin \alpha v \cos \alpha v f^2(v) f^{2'}(v) - \\ - \beta \sin \beta v \cos \beta v f^3(t) f^{3'}(t) +$$

$$+ \beta \sin \beta v \cos \beta v f^3(t) f^{3'}(t) = \alpha f^1(t) f^{2'}(t) - \alpha f^{1'}(t) f^2(t) =$$

$$= \alpha (f^1(t) f^{2'}(t) - f^2(t) f^{1'}(t))$$

$$g_{22} = \alpha^2 \sin^2 \alpha v (f^1(t))^2 + 2 \alpha^2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^2(t) + \alpha^2 \cos^2 \alpha v (f^2(t))^2 + \\ +$$

$$+ \alpha^2 \cos^2 \alpha v (f^1(t))^2 - 2 \alpha^2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^2(t) + \alpha^2 \sin^2 \alpha v (f^2(t))^2 +$$

$$+ \beta^2 \sin^2 \beta v (f^3(t))^2 + \beta^2 \cos^2 \beta v (f^3(t))^2 = \alpha^2 (f^1(t))^2 + \alpha^2 (f^2(t))^2 +$$

$$+ \beta^2 (f^3(t))^2 = \alpha^2 ((f^1(t))^2 + (f^2(t))^2) + \beta^2 (f^3(t))^2$$

Тобто наша поверхня має наступну першу фундаментальну форму:

$$g = \begin{pmatrix} (f^{1'}(t))^2 + (f^{2'}(t))^2 + (f^{3'}(t))^2 & \alpha(f^1(t)f^{2'}(t) - f^2(t)f^{1'}(t)) \\ \alpha(f^1(t)f^{2'}(t) - f^2(t)f^{1'}(t)) & \alpha^2((f^1(t))^2 + (f^2(t))^2) + \beta^2(f^3(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Припустимо тепер, що меридіан γ лежить на двомірній сфері в E^3 :

$$(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t) - C)^2 = R^2.$$

Чи буде гелікоїдальна поверхня F лежати на якійсь тримірній сфері в E^4 ?

Тобто чи існують A^3, A^4, r такі, що

$$(x^1(t, v))^2 + (x^2(t, x))^2 + (x^3(t, v) - A^3)^2 + (x^4(t, v) - A^4)^2 \equiv r^2 ?$$

Підставимо координатні функції гелікоїдальної поверхні F в рівняння сфери. Маємо:

$$\begin{aligned} & (x^1(t, v))^2 + (x^2(t, x))^2 + (x^3(t, v) - A^3)^2 + (x^4(t, v) - A^4)^2 \\ &= (\cos \alpha v f^1(t) - \\ & - \sin \alpha v f^2(t))^2 + (\sin \alpha v f^1(t) + \cos \alpha v f^2(t))^2 + (\cos \beta v f^3(t) - A^3)^2 + \\ & + (\sin \beta v f^3(t) - A^4)^2 = \cos^2 \alpha v (f^1(t))^2 - 2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^2(t) + \\ & + \sin^2 \alpha v (f^2(t))^2 + \sin^2 \alpha v (f^1(t))^2 + 2 \sin \alpha v \cos \alpha v f^1(t) f^2(t) + \\ & + \cos^2 \alpha v (f^2(t))^2 + \cos^2 \beta v (f^3(t))^2 - 2 A^3 \cos \beta v f^3(t) + (A^3)^2 \\ & + \sin^2 \beta v (f^3(t))^2 - \\ & - 2 A^4 \sin \beta v f^3(t) + (A^4)^2 = (f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t))^2 - \\ & - 2 f^3(t) [A^3 \cos \beta v + A^4 \sin \beta v] + (A^3)^2 + (A^4)^2 = r^2 \\ & (f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t))^2 - 2 f^3(t) [A^3 \cos \beta v + A^4 \sin \beta v] + (A^3)^2 + \\ & (A^4)^2 - r^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t) - C)^2 = R^2$$

$$(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t))^2 - 2 C f^3(t) + C^2 = R^2$$

$$(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t))^2 = R^2 + 2 C f^3(t) - C^2$$

(2)

Підставимо праву частину рівняння (2) у рівняння (1):

$$R^2 + 2Cf^3(t) - C^2 + (A^3)^2 + (A^4)^2 - 2f^3(t)[A^3 \cos \beta v + A^4 \sin \beta v] - r^2 = 0$$

$$2f^3(t)[A^3 \cos \beta v + A^4 \sin \beta v] + R^2 + 2Cf^3(t) - C^2 + (A^3)^2 + (A^4)^2 - r^2 = 0$$

$$2A^3 f^3(t) \cos \beta v + 2A^4 f^3(t) \sin \beta v + R^2 + 2Cf^3(t) - C^2 + (A^3)^2 + (A^4)^2 - r^2 = 0$$

$$A^3 f^3(t) = 0 \Rightarrow A^3 = 0$$

$$A^4 f^3(t) = 0 \Rightarrow A^4 = 0$$

$$R^2 + 2Cf^3(t) - C^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = R^2 - 2Cf^3(t) + C^2$$

Проаналізуємо співвідношення

$$r^2 = R^2 - 2Cf^3(t) + C^2.$$

Якщо $C \neq 0$, то тотожність виконується лише у випадку, коли

$$f^3(t) = q = \text{const.}$$

Тоді

$$r^2 = R^2 - 2Cq + C^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - 2Cq + C^2}.$$

Якщо ж $C=0$, то тотожність виконується при $r = R$.

Таким чином, або крива γ є колом, і тоді трубчата гелікоїдальна поверхня F розташовується на деякій тримірній сфері в E^4 , або крива γ розташовується на сфері з центром в початковій точці O в E^3 , і тоді гелікоїдальна поверхня F розташовується на тримірній сфері того ж радіуса з центром в точці O в E^4 . В усіх інших випадках хоч крива γ і розташовується на деякій сфері в E^3 , породжена нею гелікоїдальна поверхня F не буде розташовуватись на жодній тримірній сфері в E^4 .

5 Циркулярні поверхні Діні в E^4

Застосуємо конструкцію з попереднього розділу у конкретному випадку, коли крива γ в E^3 – це неплоска кругова трактриса. Застосувавши до кривої γ паратактичне (гвинтове) обертання в E^4 , отримаємо двомірну гелікоїдальну поверхню F^2 в E^4 .

Будемо називати цю поверхню *циркулярною (круговою) поверхнею Діні* в E^4 по аналогії зі звичайною поверхнею Діні, отриманою гвинтовим обертанням в E^3 звичайної класичної трактриси.

Радіус-вектор циркулярної поверхні Діні в E^4 має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x^1 = \cos \alpha v \cdot f^1(t) - \sin \alpha v \cdot f^2(t) \\ x^2 = \sin \alpha v \cdot f^1(t) + \cos \alpha v \cdot f^2(t) \\ x^3 = \cos \beta v \cdot f^3(t) \\ x^4 = \sin \beta v \cdot f^3(t) \end{cases}$$

де $f^1(t)$, $f^2(t)$, $f^3(t)$ – координатні функції кругової трактриси, вираз яких залежить від параметрів $R > 0$, C_1 , $C_2 \neq 0$.

За побудовою, координатні лінії $v = \text{const}$ на циркулярній поверхні Діні представляють собою криві, конгруентні круговій трактрисі γ . А координатні криві $t = \text{const}$ – це «гвинтові» лінії в E^4 .

Як зовнішній вигляд кругової трактриси γ залежить від значень параметрів R , C_1 , C_2 , так і геометрія циркулярної поверхні Діні також залежать від тих же параметрів R , C_1 , C_2 і від додаткових параметрів $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Обчислимо першу фундаментальну форму циркулярної поверхні Діні F . Для цього в загальну формулу з попереднього розділу

$$g = \begin{pmatrix} (f^1(t))^2 + (f^2(t))^2 + (f^3(t))^2 & \alpha(f^1(t)f^2(t) - f^2(t)f^1(t)) \\ \alpha(f^1(t)f^2(t) - f^2(t)f^1(t)) & \alpha^2((f^1(t))^2 + (f^2(t))^2) + \beta^2(f^3(t))^2 \end{pmatrix}$$

просто підставимо координатні функції $f^1(t)$, $f^2(t)$, $f^3(t)$ кругової трактриси γ – меридіану поверхні F . Після громоздких, подібно до попередніх розділів, але елементарних обчислень, ми отримаємо наступні формули.

Твердження 9. Циркулярна поверхня Діні F в E^4 має наступну першу фундаментальну форму, вигляд якої залежить від значення параметра $R>0$:

якщо $R>1$, то

$$g = \frac{\lambda^2 \sinh^2 \lambda t}{\left(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t\right)^2} (dt + \alpha R dv)^2 + \frac{\lambda^2 (a^2 (R^2 - 1) + \beta^2 C_2^2)}{\left(\frac{C_1}{R} + \cosh \lambda t\right)^2} (dv)^2$$

якщо $R=1$, то

$$g = \frac{4t^2}{(C_1 + t^2)^2} (dt + \alpha dv)^2 + \frac{4(a^2 + \beta^2 C_2^2)}{(C_1 + t^2)^2} (dv)^2$$

якщо $R>1$, то

$$g = \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda t}{\left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right)^2} (dt + \alpha R dv)^2 + \frac{\lambda^2 (a^2 (1 - R^2) + \beta^2 C_2^2)}{\left(\frac{C_1}{R} + \cos \lambda t\right)^2} (dv)^2$$

Зауважимо, що циркулярна поверхня Діні містить сингулярні криві – ребра, де $\det g = 0$. Ці криві породжуються особливим точками (вістрями) на круговій трактрисі – меридіані поверхні. В усіх інших точках циркулярна поверхня Діні є регулярною. В цьому вона схожа на класичну поверхню Діні, що розділяється на дві частини своїм одним сингулярним ребром.

Обчислимо гаусову кривину циркулярної поверхні Діні, застосувавши відому формулу Гауса для гаусової кривини в термінах коефіцієнтів першої фундаментальної форми поверхні [7]:

$$K = - \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & (g_{11})'_t & (g_{11})'_v \\ g_{12} & (g_{12})'_t & (g_{12})'_v \\ g_{22} & (g_{22})'_t & (g_{22})'_v \end{vmatrix}}{(\det g)^2} - \frac{\left(\left(\frac{(g_{11})'_v - (g_{12})'_t}{\sqrt{\det g}} \right)'_v - \left(\frac{(g_{12})'_v - (g_{22})'_t}{\sqrt{\det g}} \right)'_t \right)}{2\sqrt{\det g}}$$

Знов таки, після громоздких, подібно до попередніх розділів, але елементарних обчислень, ми отримаємо наступні формули для гаусової кривини циркулярної поверхні Діні.

Твердження 10. *Циркулярна поверхня Діні F в E^4 має сталу гаусову кривину, вигляд якої залежить від значення параметра $R>0$:*

якщо $R>1$, то

$$K = \frac{C_2^2(a^2 - \beta^2)}{a^2(R^2 - 1) + \beta^2},$$

якщо $R=1$, то

$$K = \frac{C_2^2(a^2 - \beta^2)}{a^2 + \beta^2},$$

якщо $R<1$, то

$$K = \frac{C_2^2(a^2 - \beta^2)}{a^2(1 - R^2) + \beta^2}.$$

Таким чином, не зважаючи на нетривіальний вигляд меридіана – кругової трактиси, породжена нею циркулярна поверхня Діні має сталу гаусову кривину, подібно до класичної поверхні Діні!

Важливо зазначити, що класична поверхня Діні має сталу від’ємну гаусову кривину. Такі поверхні (псевдосфера, поверхня Діні, катушки Міндінга, поверхня Амслера і інші) в тримірному евклідовому просторі E^3 відповідають розв’язкам рівняння синус-Гордона. Таке саме явище спостерігається і для поверхонь сталої від’ємної гаусової кривини в тримірній сфері S^3 .

А ми побудували циркулярну поверхню Діні – при $|\alpha| < |\beta|$ це буде приклад поверхні сталої від’ємної гаусової кривини вже в чотиримірному евклідовому просторі E^4 . Можливо, вона зводиться до вже відомих прикладів?

З огляду на те, що поверхня побудована за допомогою паратактичного обертання, вона не може належати жодному тримірному підпростору E^3 в E^4 . Тобто, циркулярна поверхня Діні в E^4 не зводиться до відомих поверхонь сталої від’ємної гаусової кривини в E^3 .

Що стосується приналежності циркулярної поверхні Діні якійсь тримірній сфері в E^4 , ми можемо застосувати загальний результат з попереднього розділу і Твердження 3.1-3.3, оскільки початкова кругова трактриса є сферичною кривою. Як наслідок, отримуємо, що при $C_1 \neq 0$ циркулярна поверхня Діні не належить жодній тримірній сфері в E^4 . Лише у виключному випадку $C_1 = 0$, коли кругова трактриса розташовується на двомірній сфері радіуса R з центром в початку O в E^3 , відповідна циркулярна поверхня Діні розташовується на тримірній сфері радіуса R з центром в початку O в E^4 .

Твердження 11. *Якщо $C_1 \neq 0$, то циркулярна поверхня Діні не належить жодній тримірній сфері і жодному тримірному підпростору в E^4 .*

Таким чином, циркулярна поверхня Діні з $R > 0$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $|\beta| > |\alpha| > 0$ представляє собою ціле сімейство нетривіальних нових прикладів поверхонь сталої від'ємної гаусової кривини в чотиримірному евклідовому просторі.

Зазначимо також, що якщо відкласти відрізки одиничної довжини по дотичним до меридіанів довільної циркулярної поверхні Діні, то кінці відрізків будуть описувати не двомірну поверхню, а криву – коло радіусу R з центром в точці O в координатній площині x^1x^2 . Це впливає з конструкції самої поверхні як поверхні «гвинтового» обертання і з того, що згадане коло залишається на місці (ковзає саме по собі) при застосуванні згаданого «гвинтового» обертання в E^4 .

Це спостереження додатково обґрунтовує природність розгляду циркулярних поверхонь Діні в E^4 як аналогів класичної поверхні Діні в E^3 .

Висновки

Таким чином, в нашій роботі було розглянуто спеціальну сім'ю кривих в тримірному евклідовому просторі E^3 , названих круговими трактрисами за аналогією з класичною лінійною трактрисою.

Проведений аналіз властивостей кругових трактрис, із застосуванням метода Ю.А. Амінова, дозволив встановити, що будь-яка кругова трактриса належить або сфері (в загальному випадку), або площині (у виключному випадку) в E^3 . При цьому обчислено радіус і координати центра сфери в термінах параметрів сімейства кругових трактрис.

Розглянуто новий клас гелікоїдальних поверхонь в чотиримірному евклідовому просторі E^4 , утворених «гвинтовим» (паратактичним) обертанням кругових трактрис. Обчислено першу фундаментальну форму та гаусову кривину вказаних поверхонь, названих циркулярними поверхнями Діні – показано, що гаусова кривина є сталою. Крім того, показано, що в загальному випадку циркулярна поверхня Діні не належить ні тримірному підпростору, ні тримірній сфері в E^4 . Таким чином, циркулярні поверхні Діні представляють собою нове нетривіальне сімейство поверхонь сталої гаусової кривини в чотиримірному евклідовому просторі.

З огляду на отримані результати, в подальшому було б цікавим дослідити властивості циркулярних поверхонь Діні в рамках загальної теорії двомірних поверхонь в чотиримірному евклідовому просторі.

Список використаної літератури

1. Gorkaviy V., Nevmerzhitska O., Stiepanova K., *Generalized circular tractrices and Dini surfaces*, IV International conference "Analysis and mathematical physics": Book of abstracts, Kharkiv, 2016, 22-23.
2. Stiepanova K., Gorkaviy V., *Helical tractrices and pseudo-spherical submanifolds in R^n* , International conference "Geometry, Differential Equations and Analysis": Book of abstracts, Kharkiv, 2019, 34-35.
3. Gorkaviy V., Sirosh A., *On circular tractrices in E^3* , arXiv:2203.14938v1 [math.DG] 28 Mar 2022
4. Cady W.G., *The circular tractrix*, The American Mathematical Monthly 72 (1965), 1065-1071.
5. Foot R., Levi M. and Tabachnikov S., *Tractrices, bicycle tire tracks, Hatchet planimeters, and a 100-year-old conjecture*, The American Mathematical Monthly 120 (2013), 199-216.
6. Амінов Ю.А., *Диференціальна геометрія і топологія кривих*. – М.: Наука, 1987.
7. Погорелов О.В., *Диференціальна геометрія*. – Х.: Наука, 1974.