

✓ К-14038

П303032

ISSN 0453—8048

ISSN 0135—1850

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 221
1981

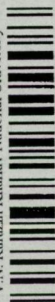
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Выпуск 46

1 р. 20 к.



V.N. Karazin Kharkiv National University



8

00196149

Вестн. Харьк. ун-та, 1981, 1—104.



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 221

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 46

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА» 1981

22.1 + 22.2

УДК 517

Прикладная математика и механика, вып. 46.— Вестн. Харьк. ун-та, № 221.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981.— 104 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории управляемых процессов, теории устойчивости динамических систем, механике, а также научные сообщения по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Для научных работников и специалистов.
Списки лит. в конце статей.

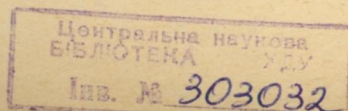
Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко
Печатается по решению ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 27 от 25 апреля 1980г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский государственный университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40

Редакция естественнонаучной литературы

В 20204 — 094
М 226 (04) — 81

© Харьковский государственный университет,
1981



КРИТЕРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где A , B — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, x — вектор n -мерного пространства E_n , u — вектор r -мерного пространства E_r . В статье даются необходимые и достаточные условия управляемости системы (1) на произвольное подпространство пространства E_n как за свободное, так и за фиксированное время.

Определение 1. Система (1) называется полностью управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное время, если для любой точки $x_0 \in E_n$ существует число $T(x_0) \geq 0$ и заданное на отрезке $[0, T(x_0)]$ суммируемое управление $u(t, x_0)$, переводящее согласно системе

$$\dot{x} = Ax + Bu(t, x_0) \quad (2)$$

точку x_0 в некоторую точку множества G , т. е. для решения $x(t)$ системы (2), удовлетворяющего произвольному начальному условию $x(0) = x_0$, справедливо включение $x(T(x_0)) \in G$.

Определение 2. Если в определении 1 оказалось, что для всех $x_0 \in E_n$ и некоторого T_1 справедливо $T(x_0) = T_1$, то система (1) называется полностью управляемой на G за время T_1 .

Определение 3. Если для наперед заданного T и для любой точки x_0 существует управление $u(t, x_0)$ $0 \leq t \leq T$, переводящее точку x_0 в некоторую точку G согласно (2), то система (1) называется полностью управляемой за наперед заданное время T на множество G .

Далее будет показано, что если система (1) полностью управляема за время T_1 , то она полностью управляема за наперед заданное время T .

Определение 4. Множество $G \subset E_n$ называется достижимым за свободное время из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы

$$\dot{x} = Ax, \quad (3)$$

если существует время $T(x_0)$ такое, что траектория системы (2), начинающаяся в точке x_0 при $t = 0$, в момент времени $T(x_0)$ достигает множества G , т. е. $x(T(x_0)) \in G$.

Определение 5. Множество G называется *достижимым* за время T_1 (или за *наперед заданное время* T) из всех точек E_n в силу системы (3), если траектория системы (3), начинающаяся в точке x_0 при $t=0$, в момент T_1 (в *наперед заданный момент времени* T) достигает множества G , т. е. $x(T_1) \in G$ ($x(T) \in G$).

Вспомогательные результаты. Рассмотрим случай, когда определения 1, 2, 3 эквивалентны.

Лемма 1. Если $G=0$, то определения 1, 2, 3 эквивалентны.

Доказательство. Установим, что из управляемости в смысле определения 1 следует управляемость в смысле определения 2. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимые векторы пространства E_n , а $u_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) — управления, переводящие соответствующие точки x_i в 0 за время $T_i = T(x_i)$. Обозначим через $T^* = \max_{1 \leq i \leq n} T_i$, тогда управление

$$v_i = \begin{cases} u_i(t), & 0 \leq t \leq T_i \\ 0, & T_i < t \leq T^* \end{cases}$$

переводит точку x_i в 0 за время T^* (для любого i). Пусть x_0 — произвольная точка из E_n и $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, тогда из x_0 возможно попадание в точку 0 за время T^* с помощью управления $u(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(t)$. Таким образом, система (1) полностью управляема в смысле определения 2.

Если система управляема в смысле определения 2, то $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$, но тогда система (1) управляема в смысле определения 3. Следование из управляемости в смысле определения 3, управляемости в смысле определений 2 и 1 очевидно.

Лемма 2. Если множество G *достижимо в силу* (3) за *наперед заданное время* или за *некоторое время* T_1 , то $G = E_n$.

Доказательство. Так как для любого $x_0 \in E_n$ справедливо включение $e^{AT}x_0 \in G$ и так как, в силу невырожденности оператора e^{AT} , справедливо равенство

$$\{x : x = e^{AT}x_0, x_0 \in E_n\} = E_n,$$

то $G = E_n$.

В формулировке некоторых критериев управляемости на подпространство G используется понятие наибольшего инвариантного подпространства относительно оператора A , содержащегося в G . Следующая лемма дает способ отыскания такого подпространства.

Лемма 3. Пусть подпространство $G \subset E_n$ задается равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H — постоянная вещественная матрица, тогда подпространство

$$M = \{x : Hx = 0, (HA)x = 0, \dots, (HA^{n-1})x = 0\}$$

является наибольшим подпространством, инвариантным относительно оператора A , содержащимся в G .

Доказательство. Пусть $x \in M$. Установим, что $Ax \in M$. Имеем:

$$H(Ax) = (HA)x = 0, \quad HA(Ax) = (HA^2)x = 0, \dots,$$

$$HA^{n-2}(Ax) = (HA^{n-1})x = 0,$$

$$HA^{n-1}(Ax) = H(A^n x) = H(\alpha_0 A^{n-1}x + \dots + \alpha_{n-2}Ax + \\ + \alpha_{n-1}x) \equiv \alpha_0 (HA^{n-1})x + \dots + \alpha_{n-1}Hx = 0.$$

В последнем равенстве использована теорема Гамильтона — Кэли, в силу которой $A^n = \alpha_0 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-2}A + \alpha_{n-1}E$.

Пусть M_1 — произвольное подпространство, инвариантное относительно оператора A , принадлежащее G . Покажем, что $M_1 \subset M$. Если $x \in M_1$, тогда $A^i x \in G$ $i \geq 0$ в силу инвариантности M_1 , а так как $M_1 \subset G$, то $HA^{i-1}x = 0$. Следовательно, $M_1 \subset M$ и лемма доказана.

Заметим, что степень $n-1$ в формулировке леммы можно заменить на степень минимального многочлена матрицы A .

В [1] доказана теорема об эквивалентности задачи управляемости (в смысле определения 1) системы (1) на множество G задаче достижимости в силу системы (3) более широкого множества $L + G$. Это утверждение об эквивалентности задач справедливо также и в смысле определения 2, 3. Ниже докажем эту теорему. Вначале введем обозначения. Пусть L — подпространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, через K обозначим подпространство, натянутое на корневые вектор-столбцы матрицы A , отвечающие вещественным собственным значениям.

Теорема 1. Система (1) управляема (в смысле любого из определений 1, 2, 3) на множество G тогда и только тогда, если множество $L + G$ достижимо (в смысле определения достижимости за свободное время, за некоторое время, за наперед заданное время соответственно) в силу системы (3).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x_0 \in E_n$. Так как система (1) управляема на множество G за время T в смысле любого из определений 1, 2, 3, т. е. время T представимо либо в виде $T(x_0)$, либо существует T одинаковое для всех x_0 , либо T наперед задано и одинаково для всех x_0 , то существует управление $u(t, x_0)$, заданное на отрезке $[0, T]$ такое, что $x(T) \in G$, где

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau, x_0)d\tau.$$

Используя представление $e^{A(T-\tau)}$ в виде степенного ряда, получаем, что вектор $\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau, x_0)d\tau \in L$. Поэтому $e^{AT}x_0 \in (L + G)$,

следовательно, множество $L + G$ достижимо из произвольной точки x_0 в силу системы (3).

Достаточность. Так как множество $L + G$ достижимо из точки x_0 за время T , в силу (3), согласно любому из введенных определений 4, 5, то $e^{AT}x_0 \in (L + G)$, следовательно, $e^{AT}x_0 = l + g$, где $l \in L$, $g \in G$. Система (1) в подпространстве L полностью управляема в смысле определения 3 [2], тогда, в силу леммы 1, она управляема и в смысле определений 2 и 3. Поэтому существует управление $u(t)$, переводящее точку $x_0 = 0$ в точку $x = -l$ за время T . Следовательно,

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau) d\tau = l + g - l = g,$$

т. е. $x(T) \in G$.

С помощью этой теоремы легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. Если система (1) полностью управляема за некоторое время T_1 на множество G , то она полностью управляема на множество G и за наперед заданное время T .

Доказательство. В силу теоремы 1 множество $(L + G)$ достижимо из произвольной точки x_0 за время T_1 , поэтому

$$e^{AT}x_0 \in (L + G). \quad (4)$$

Зададим произвольное число $T > 0$ и установим, что из произвольной точки x_1 возможно попасть на $L + G$, в силу (3), за это время T , что будет означать управляемость системы (1) за наперед заданное время (в силу теоремы 1). Выберем x_0 во включении (4) в виде $x_0 = e^{A(T-T_1)}x_1$, тогда $e^{AT}x_1 \in (L + G)$.

В силу доказанной леммы в дальнейшем будем рассматривать управляемость системы (1) на G за свободное время или за наперед заданное время T .

Обозначим через M матрицу, столбцы которой являются базисом в M , через $L\{\dots\}$ будем обозначать линейную оболочку множества векторов, стоящих в фигурных скобках.

В следующей теореме устанавливаются критерии достижимости подпространства $G = \{x: Nx = 0\}$ за свободное время в силу (3).

Теорема 2. Для того чтобы подпространство G было достижимо за свободное время в силу (3) из любой точки $x_0 \in E_n$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) Корневое подпространство K , отвечающее вещественным собственным значениям оператора A , содержится в G , $\dim G \geq n - 1$;

2) не существует собственного вектора A^* , отвечающего вещественному собственному значению, ортогонального наибольшему инвариантному подпространству относительно оператора A и содержащемуся в G , $\dim G \geq n - 1$;

- 3) $\text{rank}(A - \lambda E, \tilde{M}) = n$ для всех вещественных λ , $\text{rank } H \leq 1$;
 4) $L\{(A^* - \lambda E)^n, H^*\} = L\{(A - \lambda E)^n\}$ для всех вещественных λ , $\text{rank } H^* \leq 1$;
 5) $\text{rank} \begin{pmatrix} (A - \lambda E)^n \\ H \end{pmatrix} = \text{rank}(A - \lambda E)^n$ для всех вещественных λ , $\text{rank } H \leq 1$.

Доказательство. Необходимость и достаточность условия 1 доказана в [1].

Дальнейшие рассуждения будем производить в пространстве C_n — комплексном расширении пространства E_n , произвольный элемент которого обозначим через $x + iy$ ($x \in E_n$, $y \in E_n$). Произвольному вещественному подпространству $F \subset E_n$ сопоставим подпространство $\hat{F} = L\{x + io, x \in F\}$ (линейная оболочка берется в пространстве C_n). Рассмотрим также расширение $\hat{A}$ вещественного оператора A на комплексное пространство C_n , положив $\hat{A}(x + iy) = Ax + iAy$. Подпространству $F \subset E_n$ соответствует единственное подпространство $\hat{F} \subset C_n$ и любому $\hat{F} \subset C_n$ соответствует единственное подпространство F такое, что $L(F) = \hat{F}$. Для нахождения подпространства F и рассматриваем в $\hat{F}$ векторы вида $x + oi$, тогда вещественные векторы $\{x\}$ образуют подпространство $F \subset E_n$. Если $F_1 \subset F_2$, где $F_1 \subset E_n$ и $F_2 \subset E_n$, то $\hat{F}_1 \subset \hat{F}_2$ и обратное, если подпространство $\hat{F}_1 = L\{F_1\}$ принадлежит подпространству $\hat{F}_2 = L\{F_2\}$, то $F_1 \subset F_2$. Поэтому в дальнейшем комплексное расширение $\hat{F} = L\{F\}$ подпространства F обозначаем буквой F , а расширение $\hat{A}$ оператора A будем также обозначать через A .

Прежде чем доказывать эквивалентность условий, отметим, что все они содержат условие $\dim G \geq n - 1$, которое в условиях 3, 4, 5 записано в виде $\text{rank } H = \text{rank } H^* \leq 1$.

Докажем эквивалентность условий 1 и 2. Прежде всего отметим, что $K \subset G$ тогда и только тогда, когда $K \subset M$. Пусть выполняется условие 1 и пусть ω — произвольный собственный вектор оператора A^* , отвечающий вещественному собственному значению λ . Вектор ω ортогонален всем корневым векторам оператора A , отвечающим собственным значениям $\mu \neq \bar{\lambda}$ [3, с. 102] (в данном случае $\lambda = \bar{\lambda}$). В частности, вектор ω ортогонален всем корневым векторам оператора A , отвечающим собственному значению λ с $\text{Im } \lambda \neq 0$. Если ω ортогонален подпространству M , то, так как $K \subset M$, ω ортогонален также и всем корневым векторам оператора A , отвечающим вещественным собственным значениям, следовательно, ортогонален всем корневым векторам оператора A , поэтому $\omega = 0$.

Пусть выполняется условие 2. Можно считать, что $K \neq 0$, так как в противном случае условие 1 выполняется очевидным

образом. В этом случае $M^\perp$ (значок $\perp$ обозначает ортогональное дополнение к соответствующему множеству в пространстве S_n) не содержит ни одного собственного вектора оператора A^* , отвечающего вещественному собственному значению. Тогда не существует в $M^\perp$ и корневых векторов оператора A^* высоты больше 1, отвечающих вещественным собственным значениям. Действительно, пусть $v \in M^\perp$ — корневой вектор высоты m , отвечающий вещественному значению λ . Тогда $w = (A^* - \lambda E)^{m-1}v$ — собственный вектор оператора A^* . Имеем для любого вектора $\psi \in M$:

$$[(w, \psi) = ((A^* - \lambda E)^{m-1}v, \psi) = (v, (A - \lambda E)^{m-1}\psi).$$

Вектор $(A - \lambda E)^{m-1}\psi \in M$, так как M инвариантно относительно оператора A . Поэтому $(w, \psi) = 0$, т. е. $w \in M^\perp$, что противоречит условию 2. Следовательно, канонический базис пространства $M^\perp$ состоит из корневых векторов оператора A^* , отвечающих только вещественным собственным значениям λ . Поэтому M содержит все корневые векторы оператора A^* , отвечающие вещественным собственным значениям, это также следует из теоремы 10.2 [3, с. 102].

Докажем теперь эквивалентность условий 2 и 3. Пусть выполняется условие 2, но условие 3 не выполняется, т. е. существует вещественное число λ_0 такое, что $\text{rank}(A - \lambda_0 E, \tilde{M}) < n$. В этом случае существует вектор $\psi \neq 0$, ортогональный столбцам матрицы $(A - \lambda_0 E, \tilde{M})$, т. е.

$$\psi^*(A - \lambda_0 E) = 0, \quad \psi^* \tilde{M} = 0$$

(ψ^* — транспонированный вектор ψ). Но тогда $(A^* - \lambda_0 E)\psi = 0$, т. е. существует собственный вектор ψ матрицы A^* , отвечающий вещественному собственному значению, ортогональный подпространству M , что противоречит 2.

Пусть теперь выполняется условие 3, а условие 2 не выполняется, т. е. существует вектор $w \neq 0$ такой, что $A^*w = \lambda_0 w$, $w^* \tilde{M} = 0$, где λ_0 — вещественно. Тогда $w^*(A - \lambda_0 E, \tilde{M}) = 0$, что означает невыполнение условия 3.

Эквивалентность условий 1 и 4. Если вещественное число λ не является собственным значением оператора A , то условие 4 выполняется очевидным образом. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ все вещественные собственные значения оператора A , тогда $K = \sum_{i=1}^s K_i$, где $K_i = \{x: (A - \lambda_i E)^n x = 0\}$. Пусть условие 4 выполняется. Так как линейная оболочка столбцов матрицы $(A - \lambda_i E)^{*n} = (A^* - \lambda_i E)^n$ образует подпространство $K_i^\perp$, то условие 4 означает, что $K_i^\perp \supset G^\perp$. Но тогда $K_i \subseteq G$, $i = 1, 2, \dots, s$, т. е. $K \subseteq G$, а так как из того, что $\text{rank } H^* \leq 1$, следует, что $\dim G \geq n - 1$, то условие 1

выполнено. Если же выполняется условие 1, т. е. $K \subset G$, то, так как $K_i \subset K$, $K_i^\perp \supset G^\perp$, что означает выполнение условия 4.

Условие 5 означает, что строки матрицы $\begin{pmatrix} (A - \lambda E)^n \\ H \end{pmatrix}$ принадлежат линейной оболочке строк матрицы $(A - \lambda E)^n$, т. е. условие 5 лишь иная форма записи условия 4, но более удобная в конкретных проверках свойств управляемости.

Основные результаты. Вернемся теперь к задаче управляемости системы (1) на подпространство $F \subset E_n$. Рассмотрим подпространство $G = F + L$. Пусть подпространство G задается равенством $G = \{x: Hx = 0\}$, H — матрица, через M обозначим, как и ранее, наибольшее инвариантное подпространство, но содержащееся теперь уже в $G = F + L$, пусть $\tilde{M}_1$ — матрица, столбцы которой являются базисом в M .

Из теорем 1 и 2 следуют критерии управляемости системы (1) за свободное время, содержащиеся в следующей теореме.

Теорема 3. Для того чтобы система (1) была управляемой на подпространство F за свободное время, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) корневое подпространство K , отвечающее вещественным собственным значениям оператора A , содержится в $G = F + L$, $\dim(F + L) \geq n - 1$;

2) не существует вещественного собственного вектора оператора A^* , ортогонального M — наибольшему инвариантному подпространству относительно оператора A и содержащемуся в $(F + L)$, причем $\dim(F + L) \geq n - 1$;

3) $\text{rank}(A - \lambda E, M_1) = n$ для всех вещественных λ и $\text{rank} H \leq 1$;

4) $L\{(A^* - \lambda E)^n, H^*\} = L\{(A^* - \lambda E)^n\}$ для всех вещественных λ и $\text{rank} H^* \leq 1$;

5) $\text{rank} \begin{pmatrix} (A - \lambda E)^n \\ H \end{pmatrix} = \text{rank}(A - \lambda E)^n$ для всех вещественных λ .

Замечание. Очевидно, что условия 4, 5 теорем 2, 3 выполняются, если λ не является собственным значением оператора A . Если λ является собственным значением кратности q , то в условиях 4, 5 можно n заменить на q .

Из теоремы 1 и леммы 2 следует критерий управляемости системы (1) за наперед заданное время T на произвольное множество G .

Теорема 4. Для того чтобы система (1) была управляемой на произвольное множество G за наперед заданное время, необходимо и достаточно, чтобы

$$L + G = E_n. \quad (5)$$

В случае, если G — подпространство, известен [4] критерий управляемости системы (1) за наперед заданное время T . Пусть G задается равенством $\{x: Hx = 0, H$ — вещественная матрица}, тогда этот критерий формулируется следующим образом.

Для того чтобы система (1) была управляемой на подпространстве $G = \{x : Hx = 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank}(HB, HAB, \dots, HA^{n-1}B) = \text{rank } H. \quad (6)$$

Установим непосредственно эквивалентность критерия (5) в случае, если G — подпространство, и критерия (6). Не ограничивая общности, будем считать строки матрицы H линейно независимыми, обозначим их через $h_1, h_2, \dots, h_m$, столбцы матрицы $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ обозначим через $l_1, l_2, \dots, l_p$. Тогда матрица $(HB, HAB, \dots, HA^{n-1}B)$ имеет вид

$$Q = (HB, HAB, \dots, HA^{n-1}B) = \begin{pmatrix} h_1 l_1 & \dots & h_1 l_p \\ \dots & \dots & \dots \\ h_m l_1 & \dots & h_m l_p \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть условие (5) выполняется, докажем тогда справедливость условия (6). Предположим противное. Тогда $\text{rank } Q < m$. Так как в этом случае строки матрицы Q линейно зависимы, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \neq 0$ такие, что

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i h_i \right) l_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

В силу линейной независимости вектор-строк $h_1, h_2, \dots, h_m$ будет отлична от нуля и вектор-строка $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i$. Равенство (8) означает, что подпространство L принадлежит подпространству $N = \{x : fx = 0\}$. Подпространство $N \neq E_n$ и содержит также подпространство G , так как если $x \in G$, то $h_i x = 0$, но тогда $fx = \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i x = 0$. Полученные включения $G \subset N$, $L \subset N$ противоречат тому, что $G + L = E_n$.

Пусть теперь выполняется условие (6). Предположим, что условие (5) не выполняется, т. е. $L + G \neq E_n$. Тогда существует вектор $f \neq 0$ такой, что $f \in (L^\perp \cap G^\perp)$. Так как $f \in G^\perp$, то $f^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i$ (f^* — вектор-строка, h_i — вектор-строки матрицы H), а так как $f \in L^\perp$, то

$$f^* l_j = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i h_i \right) l_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Последнее равенство означает линейную зависимость строк матрицы (7), следовательно, ранг этой матрицы меньше m , что противоречит предположению.

Список литературы: 1. Коробов В. И., Луценко А. В. Управляемость линейной стационарной системы на подпространство. — Укр. мат. журн., 1977, 29, 4, с. 531 — 534. 2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М., Наука, 1968. — 472 с. 3. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — ФМ, Москва, Ленинград, 1963. — 734 с. 4. Калман Р. Е. Когда линейная система управления является оптимальной? — Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Д. Теоретические основы инженерных расчетов. 1964, 86.

Поступила в редколлегию 12.01.79.

УДК 517.919.2

А. С. СОХИН, канд. физ.-мат. наук

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА БИЛИНЕЙНОГО ТИПА

Рассмотрим эволюционную систему с распределенными параметрами, описываемую строго гиперболической [1] системой уравнений первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right)y + u(t, x)y = 0, \quad 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

и начальным условием

$$y(0, x) = f(x), \quad (1')$$

где a — постоянная матрица размерности $n \times n$, $y(t, x)$ — искомая вектор-функция, $f(x)$ — заданная вектор-функция, $u(t, x)$ — матрица (потенциал) размерности $n \times n$, являющаяся управлением из множества вида

$$U = \{u : u = u(t, x) = (u_{1i}(t) u_{2j}(x) + c \delta_{ij})_{i,j=1}^n\},$$

где функции $u_{1i}(t) \in L_1(0, T)$, $u_{2j}(x)$ — ограничены на $(-\infty, \infty)$, $c \in [0, \infty)$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Соответствие $\varphi : (u, y) \rightarrow uy$ билинейно.

Введем обозначения: E_n — n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $fg = \sum_{i=1}^n f_i g_i$ и нормой $|f| =$

$$= \left(\sum_{i=1}^n f_i^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

f^+ — вектор строки, полученная транспонированием вектор-столбца $f \in E_n$; M_n — множество матриц размерности $n \times n$ с нормой $[Q] = \left(\sum_{i=1}^n q_{ii}^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $H = L_2(-\infty, \infty; E_n)$ — пополнение множества непрерывных функций $f: E_1 \rightarrow E_n$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx$ относительно нормы $\|f\| \sqrt{V(f, f)}$.

$C(-\infty, \infty; E_n)$ — множество непрерывных ограниченных функций $f: E_1 \rightarrow E_n$ с нормой $\|f\|_{C(E)} = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|$; $C(-\infty, \infty; E_n)$ — множество непрерывных функций $u: E_1 \rightarrow M_n$ с нормой $\|u\|_{C(M)} = \max_{-\infty < x < \infty} [u(x)]$; $C(0, T; H)$ — множество непрерывных функций $y: [0, T] \rightarrow H$ с нормой $\|y\|_{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|$; $M(0, T; H)$ — множество ограниченных функций $y: [0, T] \rightarrow H$ с нормой $\|y\|_{M(H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|$; $L_1(0, T; E_n)$ — пополнение множества непрерывных функций $u_1: [0, T] \rightarrow E_n$ относительно нормы

$$\|u_1\|_{L_1(E)} = \int_0^T |u_1(t)| dt; \quad \text{supp } f(x) = \{x : |f(x)| > 0\}.$$

Пусть N — невырожденная матрица, приводящая матрицу a к диагональной матрице b по формуле $NaN^{-1} = b$ или $N^{-1}bNa$. Диагональные элементы $\{b_i, i = \overline{1, n}\}$ матрицы в согласно строгой гиперболичности являются различными вещественными числами. Положим

$z(t, x) = Ny(t, x)$, $z(0, x) = Nf(x) = f_N(x)$, $NuN^{-1} = q(t, x)$, тогда функция $z(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$[(\partial/\partial t) = b\partial/\partial x] z + q(t, x) z = 0, \quad 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

и начальному условию

$$z(0, x) = f_N(x). \quad (2')$$

Обозначим

$$S_t^{(b_i)} a(x) = a(x - b_i t), \quad a \in L_2(-\infty, \infty)$$

сильно непрерывную группу операторов, определенных на пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Введем диагональную матрицу с операторными элементами

$$S_t^{(b)} = \begin{pmatrix} S_t^{(b_1)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & S_t^{(b_n)} \end{pmatrix},$$

тогда вектор-функция

$$S_t^{(b)} f_N(x) = (f_{N1}(x - b_1 t), \dots, f_{Nn}(x - b_n t))^+$$

является решением задачи (2) — (2') при $q(t, x) \equiv 0$. Линейное отображение

$$S_t^{(a)} = N^{-1} S_t^{(b)} N : H \rightarrow C(0, T; H)$$

непрерывно, причем

$$\|S_t^{(a)}\| \leq [N^{-1}][N] \stackrel{\text{def}}{=} C(N).$$

Если $f, f' \in H$, то функция $S_t^{(a)} f(x)$ является решением задачи (1) — (1') при $u(t, x) \equiv 0$, а решение задачи (1) — (1') эквивалентно решению интегрального уравнения

$$y(t, x) = S_t^{(a)} f(x) - \int_0^t S_{t-\tau}^{(a)} u(\tau, x) y(\tau, x) d\tau. \quad (3)$$

Лемма 1. Если $\|u\|_{C(M)} = \max_{-\infty < x < \infty} [u(t, x)] < \infty$, то отображение $U(t): f(x) \rightarrow u(t, x) f(x)$ линейно и непрерывно в H , причем $\|U(t)\| \leq \|u(t)\|_{C(M)}$.

Доказательство легко получить непосредственной проверкой.

Теорема 1. Интегральное уравнение (3) имеет единственное решение $y \in C(0, T; H)$, если $\int_0^T \|U(t)\| dt < \infty$, причем отображение $f \rightarrow y(t)$ линейно и непрерывно в H при $\forall t \in [0, T]$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что отображение

$$P: y(t) \rightarrow \int_0^t S_{t-\tau}^{(a)} u(\tau) y(\tau) d\tau \text{ из } C(0, T; H) \text{ в } H$$

линейно и непрерывно $\forall t \in [0, T]$, причем

$$\begin{aligned} \|P^n y(t)\| &\leq [C(N)]^n \int_0^t \|U(t_1)\| dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} \|U(t_n)\| dt_n \times \\ &\times \|y\|_{C(H)} = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t C(N) \|U(\tau)\| d\tau \right)^n. \end{aligned}$$

Формальным решением интегрального уравнения (3) является сумма ряда

$$(I + P + \dots + P^n + \dots) S_t^{(a)} f = y(t). \quad (4)$$

В силу предыдущего неравенства ряд (4) сходится в топологии пространства H и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leq C(N) \exp \left[C(N) \int_0^t \|U(\tau)\| d\tau \right] \|f\|. \quad (4')$$

Решение интегрального уравнения (3) назовем обобщенным решением задачи (1) — (1'). Ниже будем рассматривать только обобщенные решения.

Лемма 2. Функция $y(t) \equiv y(t; u; f)$ непрерывна в $U \times H$ при $t \in [0, T]$.

Доказательство легко получить аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. Функция $y(t) \equiv y(t; u)$ может быть доопределена с $[0, T] \times U$ по непрерывности в пространстве $M(0, T; H)$ на множество $[0, T] \times \bar{U}$, где $\bar{U} = \{\bar{u}: \bar{u} = \bar{u}_1(t) u_2^+(x), \bar{u}_1 \in C^*(0, T; E_n), u_2 \in C(-\infty, \infty; E_n)\}$, $C^*(0, T; E_n) = (C^*(0, T), \dots, C^*(0, T))$ — множество функционалов на $C(0, T; E_n)$.

Доказательство. Умножая уравнение (2) на z скалярно в H , получим неравенство $\frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 = -2(qz, z) \leq q(t) \|_{C(M)} \times \|z(t)\|^2$, решая которое, находим

$$\|z(t)\|^2 \leq \|f_N\|^2 \exp \left(2 \int_0^t q(\tau) \|_{C(M)} d\tau \right).$$

Замечая, что $|y(t, x)| \leq [N] |z(t, x)|$, $[q(t, x)] \leq C(N) [u(t, x)]$, $[u(t, x)] \leq |u_1(t)| |u_2(x)|$, приходим к неравенству

$$\|y(t)\| \leq C(N) \|f\| \exp \left(C(N) \|u_2\|_{C(E)} \int_0^t |u_1(\tau)| d\tau \right),$$

которое, учитывая неравенство

$$\int_0^t |u_1(\tau)| d\tau \leq \sqrt{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t |u_{1i}(\tau)| d\tau \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

запишем в форме $\|y(t)\| \leq C(N) \|f\| \exp \left(\sqrt{n} C(N) \|u_2\|_{C(E)} \overset{t}{\text{Var}} v \right)$,

$$\text{где } v(t) = \int_0^t u_1(\tau) d\tau, \overset{t}{\text{Var}} v = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t |u_{1i}(\tau)| d\tau \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, повторяя рассуждения леммы 1, нетрудно показать, что $y(u) \rightarrow y(\bar{u})$ в пространстве $M(0, T; H)$, когда

$$\overset{T}{\text{Var}}(v - \bar{v}) \rightarrow 0, \text{ где } v(t) = \int_0^t u_1(\tau) d\tau, \bar{v}(t) = \int_0^t \bar{u}_1(\tau) d\tau.$$

Теорема 2. Семейство операторов $\{S_t^{(a)}, -\infty < t < \infty\}$ образует сильно непрерывную группу операторов в пространстве $L_2(-\infty, \infty; E_n)$.

Доказательство. Следуя работе [2], нетрудно получить, что семейство операторов $\{S_t^{(b)}, -\infty < t < \infty\}$ образует сильно непрерывную группу операторов в $L_2(-\infty, \infty; E_n)$ с производящим оператором $G_b = -b \frac{d}{dx}$, имеющим область определения $D(G_b) = \left\{ f(x) : f(x), \frac{df(x)}{dx} \in L_2(-\infty, \infty; E_n) \right\}$, причем, $G_b f = -b \frac{df(x)}{dx}$, $\forall f \in D(G_b)$.

Далее нетрудно проверить, что $\{S_t^{(a)}, -\infty < t < \infty\}$ образует сильно непрерывную группу в $L_2(-\infty, \infty; E_n)$ с производящим оператором G_a , имеющим область определения $D(G_a) = D(G_b)$ и $G_a f = -a \frac{df(x)}{dx}$, $\forall f \in D(G_a)$.

Следствие 1. Семейство операторов $\{S_t^{(a*)}, -\infty < t < \infty\}$ образует сильно непрерывную группу в пространстве $L_2(-\infty, \infty; E_n)$.

Теорема 3. Группы $\{S_t^{(a)}, -\infty < t < \infty\}$ и $\{S_t^{(a^*)}, -\infty < t < \infty\}$ связаны соотношением $(S_t^{(a)})^* = S_{-t}^{(a^*)}$.

Доказательство вытекает из очевидных соотношений

$$\begin{aligned}(S_t^{(a)}f, g) &= (f, N^*(S_t^{(b)})^*(N^*)^{-1}g) = (f, N^*S_{-t}^{(b)}(N^*)^{-1}g) = \\ &= (f, S_{-t}^{(a^*)}g), \forall f, g \in L_2(-\infty, \infty; E_n).\end{aligned}$$

Следствие 2. В $L_2(-\infty, \infty; E_n)$ существует

$$\lim_{t \rightarrow T} y(t) = S_T^{(a)}f + \int_0^T S_{T-\tau}^{(a)} u(\tau) y(\tau) d\tau = y(T; u; f).$$

Точку $f \in L_2(-\infty, \infty; E_n)$ назовем начальным состоянием системы (1), точку $y(T; u; f)$ — конечным состоянием системы (состоянием в момент T), полученным под воздействием управления $u \in U$ из начального состояния f .

Теорема 4. Конечное состояние $y(T; u; f)$ системы (1) определяет поведение системы при $t < T$ однозначно.

Доказательство вытекает из единственности решения интегрального уравнения $y(t) = S_{t-T}^{(a)}y(T; u; f) + \int_t^T S_{t-\tau}^{(a)}u(\tau)y(\tau)d\tau$, полученного из интегрального уравнения (3).

Определение. Система (1) почти управляема в момент T из начального состояния $f \in H$ в точку $g \in H$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in U$ такое, что $\|y(T; u_\varepsilon; f) - g\| \leq \varepsilon$.

Теорема 5. Пусть: 1) $u \in U$, 2) $f, g \in H$, $\text{mes supp } f(x) > 0$; 3) $S_T^{(a)}f(x)g(x) > 0$ почти везде на $\text{supp } g(x)$ в случае $\text{mes supp } x \times g(x) > 0$, тогда система (1) почти управляема из начального состояния $f(x)$ в точку $g(x) \in H$.

Доказательство. Достаточно показать, что существует последовательность управлений $\{u_m, m = 1, 2, \dots\}$ такая, что $\|y(T; u_m; f) - g\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Введем функционал $J(v) = \|y(T; v; f) - g\|^2 \geq 0$.

Необходимо показать, что $\inf J(v) = 0$. Пусть последовательность управлений $\{u_m\}$ минимизирует функционал $J(v)$. Возможны два случая: (а) последовательность $\{u_m\}$ содержит фундаментальную последовательность; (б) последовательность $\{u_m\}$ не содержит фундаментальную последовательность. Рассмотрим случай (а). Пусть подпоследовательность $\{u_{m'}\}$ фундаментальна и, следовательно, в силу полноты U , сходящаяся к некоторой точке $u_0 \in U$. По лемме 2 функция $y(t; u_{m'}) \rightarrow y(t; u_0)$ сильно в H при $\forall t \in [0, T]$. Так как $J(u_0) \leq J(v) \forall v \in U$, то $J'(u_0) = 0$. Производная Фреше функционала $J(v)$ находится по формуле $J'(v)(h) = (y(T; v) - g, y'(T; v)(h)) \forall h \in U$, где $y'(T; v)$ — производная Фреше отображения $v \rightarrow y(T; v)$. Нетрудно видеть, что функция $z(t) = z(t; v; h) \equiv y'(t; v)(h)$ удовлетворяет условиям

$$Lz \equiv (\partial/\partial t + \partial/\partial x)z + v(t, x)z = -hy(t; v), \quad (5)$$

$$z(0) = 0. \quad (5')$$

Определим сопряженное состояние $p(t) = p(t; v)$ системы (1) — (1') как решение задачи

$$L^*p \equiv -(\partial/\partial t + \partial/\partial x)p + v^*(t, x)p = 0, \quad (6)$$

$$p(T) = y(T; v; f). \quad (6')$$

Из равенств (5), (6), формулы Грина $\int_0^T [(Lz, p) - (z, L^*p)] dt = (z(T), p(T)) - (z(0), p(0))$ и условий (5') и (6) находим

$$\begin{aligned} J'(v)(h) &= (p(T; v), z(T; v; h;)) = - \int_0^T (hy)^+ p dt = \\ &= - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} h_2^+(x) y(t, x; v) h_1^+(t) p(t, x; v) dt dx. \end{aligned} \quad (7)$$

В частности, при $v = u_0$ из равенства (7) получаем, что матрица $y(T, x; u_0) p^+(T, x; u_0) = 0$ почти всюду по x , что означает

$$|y(T, x; u_0)| \cdot |p^+(T, x; u_0)| = 0. \quad (7')$$

Пусть $g(x) \equiv 0$, тогда $p(T; u_0) = y(T; u_0)$ и, согласно (7'), $y(T; u_0; f) = 0$ в H . По теореме 4 получаем, что $y(t; u_0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ в противоречие с условием теоремы $y(0; u_0) = f(x) \neq 0$. Значит, при $g \equiv 0$ минимизирующая последовательность не может содержать фундаментальную последовательность. Пусть $g(x) \neq 0$. Обозначим $S_g = \text{supp } g(x)$, $K_g^0 = \{x : |g(x)| = 0\}$, причем считаем, что лебегова $\text{mes } S_g > 0$. Из равенства (7') следует, что $y(T, x; u_0, f) = 0 \quad \forall x \in K_g^0$. Пусть существует $\Delta = \{x : p(T; u_0) \neq 0\}$, причем $\text{mes } \Delta > 0$.

Из равенства (7') следует, что $y(T, x; u_0; f) = 0 \quad \forall x \in \Delta$ и, следовательно, $p(T; u_0) = -g(x) \quad \forall x \in \Delta$, причем, $\Delta \subset S_g$ и

$$\inf J(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |p(T, x; u_0)|^2 dx = \|\chi_{\Delta} g\|^2 > 0,$$

$$\text{где } \chi_{\Delta} = \begin{cases} 1, & x \in \Delta \\ 0, & x \notin \Delta. \end{cases}$$

Положим $y_0(T) = y_0(T, x) \equiv g(T, x; \epsilon I; f)$, $\alpha = e^{-\epsilon T} > 0$, тогда

$$\begin{aligned} y_0(T) &= \alpha y(T; 0; f) = \alpha S_T^{(a)} f, \quad \inf J(v) \leq \|y_0(T) - \chi_{\Delta} g\|^2 = \\ &= \|\chi_{\Delta} g\|^2 + \alpha^2 \|S_T^{(a)} f\|^2 - 2\alpha (S_T^{(a)} f, \chi_{\Delta} g). \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия теоремы вытекает, что третье слагаемое в неравенстве (8) отрицательно. При $0 < \alpha < \frac{2(S_T^{(a)} f, \chi_{\Delta} g)}{\|S_T^{(a)} f\|^2}$ сумма двух последних слагаемых в неравенстве (8) отрицательна и, следовательно, выполнимо невозможное неравенство $\inf J(v) < \|\chi_{\Delta} g\|^2 =$

$= \inf J(v)$. Противоречие показывает, что $p(T, x; u_0) = 0$ почти всюду по x и, следовательно, $\inf J(v) = \|p(T; u_0)\|^2 = 0$.

Рассмотрим случай (б). Можно выделить подпоследовательность $\{u_m\}$ такую (будем обозначать ее по-прежнему), что $\|u_{m+1} - u_m\| \geq c_0 > 0$, причем $J(u_{m+1}) - J(u_m) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

По теореме о среднем [3] $J(u_{m+1}) - J(u_m) = J'(v_m)(u_{m+1} - u_m)$, $v_m = u_m + \Theta_m(u_{m+1} - u_m)$, $0 < \Theta_m < 1$. Из последнего равенства получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J'(v_m) = 0. \quad (9)$$

Последовательность $\{y(T; v_m), m = 1, 2, \dots\}$ ограничена в H и, значит, слабо компактна. Пусть $y(T; v_m) \rightarrow y^0$ слабо в H . В силу полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости имеем $\|y^0 - g\|^2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|y(T; v_m) - g\|^2 = \inf \|y(T; v) - g\|^2$, т. е. нижняя граница достигается на слабом пределе. Так как $y(T; v_m) - g \rightarrow y^0 - g$ слабо в H и $\|y(T; v_m) - g\| \rightarrow \|y^0 - g\|$, то $y(T, v_m) \rightarrow y^0$ и $p(T, v_m) \rightarrow p^0 = y^0 - g$ сильно в H .

Пусть $h \in \bar{U}$ в равенстве (7). Полагая

$$v = v_m, \quad h_1(t) = \begin{cases} 0, & i \neq s \\ \delta_T(t), & i = s \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \zeta(x), & i = k \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\delta_T(t)$ есть δ -функция, сосредоточенная в точке T , $\zeta(x)$ — произвольная функция из $M(-\infty, \infty; E_n)$, находим при $h = h_1 h_2^+$

$$J'(v_m)(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) y_s(T, x; v_m) p_k(T, x; v_m) dx.$$

В пределе при $m \rightarrow \infty$ получим $\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) y_s^0(x) p_k^0(x) dx = 0$.

В силу произвольности функции $\zeta(x)$ из предыдущего равенства вытекает соотношение $y_s^0(x) p_k^0(x) = 0$, которое означает

$$|y^0(x)| |p^0(x)| = 0. \quad (10)$$

почти всюду по $x \in (-\infty, \infty)$. Пусть $g(x) \equiv 0$, тогда $p^0(x) = y^0(x)$ и, согласно (10), функция $y^0(x) = 0$ в H , т. е. $\inf J(v) = \|p^0\|^2 = 0$.

Пусть $\text{mes supp } g(x) > 0$. Заменяя $y(T; u_0; f)$ на y^0 и $p(T; u_0)$ на p^0 и повторяя рассуждения, проведенные в случае (а), приходим к выводу, что $\inf J(v) = \|p^0\|^2 = 0$ также при $\text{mes supp } g(x) > 0$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504 с. 2. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с. 3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных операторов. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

Поступила в редколлегию 17.10.78.

УДК 517.919.2

А. П. ПРИХОДЬКО

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ БЫСТРОДЕЙСТВИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассматриваются достаточные условия существования оптимального управления для задач на быстроедействие в случае, если фазовое пространство X банахово, а пространство управлений U — рефлексивное банахово.

Обозначим через $[U, X]$ пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U в X , через $[X]$ пространство $[X, X]$.

Постановка задачи. При $t \geq t_0$ рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t) + v(t), \quad (1)$$

где $A(t): X \rightarrow X$ — семейство линейных, не обязательно ограниченных операторов,

$B(t) \in [U, X]$ при $t \geq t_0$, $B(\cdot) \in L_p^{loc}([t_0, +\infty), [U, X])$, $(1 < p < +\infty)$, $v(\cdot) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty), X)$.

Управление $u(t)$ — некоторая интегрируемая в смысле Бохнера [6] функция, подчиненная условию $u(t) \in \Omega_t \subset U$ (2), где Ω_t — семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств.

Рассмотрим задачу попадания из начального множества P на подвижное целевое множество M_t в силу уравнения (1) при ограничениях на управление (2) и фазовых ограничениях на траекторию $x(t) \in C_t$ (3), C_t — семейство подмножеств из X .

Обозначим через K_t множество достижимости уравнения (1) из начального множества P при ограничениях на управление (2) и фазовых ограничениях (3). Тогда вопрос существования оптимального управления $u^*(t)$ эквивалентен, очевидно, условию $K_{t^*} \cap M_{t^*} \neq \emptyset$, где $t^* = \inf \{t \geq t_0 : K_t \cap M_t \neq \emptyset\}$.

В этой работе модифицируются на бесконечномерных пространствах условия существования оптимальных быстрых действий, полученные Л. С. Понтрягиным и Р. В. Гамкрелидзе [1, 2] для конечномерных пространств.

Лемма 1. Если P и M два непересекающихся подмножества банахова пространства X , причем P слабо компактно в себе,

а M выпукло, замкнуто с непустой внутреннейностью, то их можно сильно разделить, т.е. $d(P, M) > 0$, где $d(P, M) = \inf \{\|x - y\| : x \in P, y \in M\}$.

Условие $\|\Omega_t\| \leq r(t)$ будет означать, что для каждого $u \in \Omega_t$ имеет место неравенство $\|u\| \leq r(t)$. Функцию $u(\tau)$ называют допустимым управлением ([2]), если существуют $x_0 \in P$ и $t_1 \geq t_0$ такие, что соответствующая траектория уравнения (1) $x(t, u)$ удовлетворяет условиям $x(t_1, u) \in M_{t_1}$, $u(\tau) \in \Omega_\tau$, $x(t, u) \in C_t$ при $t \in [t_0, t_1]$. Будем говорить, что выполнено условие A , если:

1) $A(t) \in [X]$, $t \geq t_0$; $A(\cdot) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty), X)$ либо $A(t)$ неограниченные операторы [5] такие, что разрешающий оператор $\Phi(t, t_0)$ однородного уравнения $dx/dt = A(t)x$ (4) равномерно непрерывен по t ;

2) P — слабо компактное в себе множество;

3) M_t — выпуклые замкнутые множества с непустой внутреннейностью либо слабо компактные в себе множества, непрерывно зависящие от t по Хаусдорфу;

4) C_t — слабо замкнутые множества при каждом t ;

5) $\|\Omega_t\| \leq r(t)$, $r(\cdot) \in L_{p'}^{loc}([t_0, +\infty), (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1))$.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия A тогда из существования допустимого управления для задачи на быстроедействие, следует существование оптимального быстрогодействия, если выполнено одно из следующих условий:

1. U — сепарабельное пространство, семейство Ω_t слабо измеримое ([3]).

2. Ω_t — слабо непрерывное семейство множеств ([3]).

3. $\Omega_t = \{u \in U : p_i(u) \leq c_i(t), i = 1, 2, 3, \dots\}$, где $p_i(u)$ — непрерывные сублинейные ([4]) функционалы, $c_i(t)$ — интегрируемые функции.

Заметим, что сформулированная теорема имеет место для динамических процессов вида

$$x(t) = \psi(t, t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [B(\tau)u(\tau) + v(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

где $\psi(t, t_0, x_0)$ равномерно непрерывно по t (5.1) и слабо непрерывно по x_0 [6], $\Phi(t, \tau)$ — равномерно непрерывен по (5.2) совокупности (t, τ) [6].

Этими свойствами обладают, например, линейные управляемые уравнения с распределенным запаздыванием, линейные управляемые функционально-дифференциальные уравнения.

Будем говорить, что выполнено условие B , если:

1. $A(t)$ — семейство линейных не обязательно ограниченных операторов, порождающее сильно непрерывное [6] семейство разрешающих операторов $\Phi(t, \tau)$, т.е. для каждого $x \in X$, $\Phi(t, \tau)x$ непрерывно по совокупности (t, τ) .

2. P — выпуклое, слабо компактное в себе множество.

3. M_i — выпуклые замкнутые множества с непустой внутренностью или слабо компактные в себе. Семейство M_i слабо непрерывно по t .

4. Множества Ω_i почти всюду лежат в некотором шаре пространства U .

5. C_i — выпуклые и замкнутые при каждом t множества.

Теорема 2. Пусть для линейной задачи на быстродействие выполнены условия В. Тогда из существования допустимого управления следует существование оптимального управления, если выполнено одно из следующих условий:

1. U — сепарабельное пространство; семейство Ω_i слабо измеримое.

2. Ω — слабо непрерывное семейство множеств.

3. $\Omega = \{u \in U : p_i(u) \leq c_i(t), i = 1, 2, 3, \dots\}$, где $p_i(u)$ — непрерывные сублинейные функционалы, $c_i(t)$ — интегрируемые функции.

Заметим, что теорема 2 имеет место для динамических процессов (5) в случае, если $\psi(t, t_0, x_0)$ непрерывно по t и непрерывно по x_0 из слабой в слабую топологии, $\Phi(t, \tau)$ сильно непрерывно по (t, τ) . Если $A(t) = A$, A — инфинитезимальный производящий оператор c_0 — полугруппы $S(t)$, то $S(t)$ сильно непрерывна [6], следовательно, A удовлетворяет условиям теоремы 2.

Обозначим $\text{dist}(P_1, P_2)$ — хаусдорфово расстояние между множествами P_1 и P_2 .

Определение 1. Семейство множеств $\Omega(x, t) \subseteq U$ будем называть hw -непрерывным по совокупности (x, t) ; если для каждого $f \in U$ и для всякой последовательности $(x_n, t_n) \xrightarrow{\text{сл}} (x_0, t_0)$ имеет место соотношение $\text{dist}(\langle f, \Omega(x_n, t_n) \rangle, \langle f, \Omega(x_0, t_0) \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Определение 2. Семейство множеств $C(x, t)$ будем называть hw -непрерывным по x , если для каждого $f \in X^*$ и для всякой последовательности $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ имеет место соотношение

$$\text{dist}(\langle f, C(x_n, t) \rangle, \langle f, C(x_0, t) \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Рассмотрим задачу на быстродействие в случае, если фазовые ограничения и ограничения на управление имеют вид $x \in C(x, t)$ и $u \in \Omega(x, t)$.

Теорема 3. Предположим, что для уравнения (1) выполнены условия А1—А3, семейство множеств $\Omega(x, t)$ hw -непрерывно по (x, t) удовлетворяет условию

$$\|\Omega(x, t)\| \leq k_1(t) \|x\| + k_2(t), \quad (6)$$

где $k_1(\cdot), k_2(\cdot) \in L_{p^*}^{\text{loc}}[t_0, +\infty)$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1\right)$, и выпуклые замкнутые, ограниченные при фиксированных (x, t) , $C(x, t)$ -выпуклые, замкнутые множества, hw -непрерывные по x .

Тогда из существования допустимого управления следует существование оптимального по быстродействию управления.

Теорема 3 также справедлива для динамических процессов (5), если $\psi(t, t_0, x_0)$ и $\Phi(t, \tau)$ удовлетворяют условиям непрерывности (5.1) и (5.2).

Следствие. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Допустим, что $F(x, t)$ выпуклые, замкнутые ограниченные множества рефлексивного пространства X , удовлетворяющие условию

$$\|F(x, t)\| \leq k_1(t)\|x\| + k_2(t); \quad k_1(\cdot), k_2(\cdot) \in L_{p'}^{loc}[t_0 + \infty), \quad p' > 1.$$

Если $F(x, t)$ л.н.н. по совокупности (x, t) , то множество концов траекторий (7) в каждый момент t является слабокомпактным в себе множеством. (Пустое множество мы также считаем здесь слабокомпактным в себе).

Определение 3. Операторное отображение $A: U \rightarrow [X, X]$ будем называть слабо* непрерывным по «и», если для каждого $f \in X^*$ скалярная функция $\langle f, A(u)x \rangle$ равномерно непрерывна по «и» на шаре $S(0, 1) \subset X$.

Применим следствие в задаче на быстродействие для уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = A(u(t))x + v(t), \quad (8)$$

$u(t) \in \Omega$, $x \in C(x, t)$, $v(t)$ — непрерывная функция.

Теорема 4. Предположим, что для уравнения (8) выполняются условия А2-А3, пространство X рефлексивно, $A(u)$ слабо непрерывно, многозначное отображение $A(\Omega)x$ выпукло и замкнуто при каждом x , ограничение на управление Ω — компакт в U , $C(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда из существования допустимого управления в задаче на быстродействие следует существование оптимального управления.

Заметим, что условие непрерывности целевых множеств в теоремах 1—3 может быть ослаблено: достаточно требовать, чтобы целевые множества M_i были непрерывными в некотором шаре фазового пространства X , так как множества достижения уравнения (1) при ограничениях на управление (А5) или (6) всегда лежат в некотором шаре [3] при $t_0 \leq t \leq t_1$.

Список литературы: 1. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, 22 с. 449 — 474. 2. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с. 3. Приходько А. П. О множествах достижимости в банаховом пространстве. — Вестн. Харьк. ун-та, 1979, 177. Прикладная математика и механика, вып. 44, с. 27 — 35. 4. Вайнберг М. М. Вариационный метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. — 415 с. 5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с. 6. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит. 1962. — 829 с.

Поступила в редколлегию 10.01.79.

ПОДПРОСТРАНСТВО ИДЕАЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ
И ЕГО СТРУКТУРА

Статья является естественным продолжением исследования проблемы идеальной наблюдаемости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Hx \quad (1)$$

и примыкает к работам [1—5].

Напомним, что задача G -идеальной наблюдаемости системы (1) состоит в том, что для заданной $(k \times n)$ -матрицы G однозначно восстановить для любого $t \in [0, T]$ вектор $Gx(t)$ по известной из наблюдений функции $y(\tau)$, при неизвестном управлении $u(\tau)$, $\tau \in [0, T]$. Подпространство идеальной наблюдаемости $L_{ug}(H)$ системы (1), как показано в [5], дает ответ на эту задачу. Более того, векторы, принадлежащие этому подпространству, обладают еще тем свойством, что они представляют собой те и только те направления, на которые можно найти проекцию неизвестного фазового состояния $x(t)$ системы (1).

В статье исследуется структура $L_{ug}(H)$, приводится оценка его размерности, которая является неулучшаемой, а также указывается, при заданном числе выходов, подпространство идеальной наблюдаемости максимальной размерности.

В связи с важностью в дальнейшем понятия $L_{ug}(H)$ приведем его определение [5].

Обозначим через $L \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_s^*\}$ линейную оболочку, натянутую на вектор-столбцы матриц $A_1^*, A_2^*, \dots, A_s^*$ (* — означает

транспонирование матриц).

Предположим, что для системы (1) существуют такие матрицы $C_i (i = \overline{1, l})$ размера $(p_i \times n)$, удовлетворяющие условиям:

$$1. L \{C_i^*\} \subset L \{H^*, A^*C_0^*, \dots, A^*C_{i-1}^*\} \quad (C_0 = 0). \quad (2)$$

$$2. C_i B = 0. \quad (3)$$

$$3. \text{rank} (H^*, A^*C_1^*, \dots, A^*C_l^*) = \text{rank} H + \sum_{k=1}^l p_k \quad (4)$$

для каждого $i = \overline{1, l}$, причем для любого вектора $q \in L \{H^*, A^*C_1^*, \dots, A^*C_l^*\}$, удовлетворяющего условию $q^*B = 0$, имеет место соотношение

$$L \{H^*, A^*C_1^*, \dots, A^*C_l^*, A^*q\} = L \{H^*, A^*C_1^*, \dots, A^*C_l^*\}. \quad (5)$$

Определение. Подпространством идеальной наблюдаемости $L_{ug}(H)$ системы (1) назовем подпространство $L \{H^*, A^*C_1^*, \dots, A^*C_l^*\}$, где матрицы $C_1, \dots, C_l$ определяются из условий (2) — (5).

Перечислим теперь наиболее важные утверждения этой работы.

Теорема 1. Пусть имеются линейная управляемая система $\dot{x} = Ax + Bu$ и две системы выходов $y = Hx$, $\bar{y} = \bar{H}x$, для которых $L\{H^*\} = L\{\bar{H}^*\}$.

Тогда $L_{ug}(H) = L_{ug}(\bar{H})$.

Теорема 2. Пусть даны две линейно эквивалентные системы (1), а P — невырожденная матрица перехода от одной системы к другой.

Тогда 1) $L_{ug} = P^* \bar{L}_{ug}$; 2) для того чтобы $L\{G^*\} \subset L_{ug}$, необходимо и достаточно, чтобы $L\{\bar{G}^*\} \subset \bar{L}_{ug}$, где через L_{ug} и $\bar{L}_{ug}$ обозначены подпространства идеальной наблюдаемости первой и второй системы соответственно, а $\bar{G} = GP^{-1}$.

Теорема 3. Для любой линейной наблюдаемой системы (1) имеет место следующее неравенство: $\text{rank } H \leq \dim L_{ug}(H) \leq \leq \text{rank } H - \text{rank } B + n - s$, где через s обозначена размерность наибольшего собственного подпространства матрицы A^* , содержащегося в ортогональном дополнении к $L\{B\}$.

В частности, для наблюдаемой по Калману системы (1) это утверждение означает, что

$$\text{rank } H \leq \dim L\{H^*, A^*H^*, \dots, A^{*n-1}H^*\} \leq \text{rank } H + n - \sigma,$$

где под σ понимается размерность наибольшего собственного подпространства матрицы A^* .

Приведем еще несколько следствий из теоремы 3, которые на наш взгляд представляют практический интерес.

Следствие 1. Для того чтобы система (1) была идеально наблюдаемой, необходимо, чтобы $\text{rank } H \geq \text{rank } B + s$.

Следствие 2. Любая линейная наблюдаемая система (1), для которой $\text{rank } H < \text{rank } G + \text{rank } B + s - n$, не является G -идеально наблюдаемой.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем некоторые обозначения и напомним ряд вспомогательных утверждений.

Пусть L — подпространство управляемости системы $\dot{x} = Ax + Bu$, размерность которого обозначим через ρ , т. е. $\dim L \equiv \equiv L\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = \rho \leq n$.

Определим число ν следующим образом: $\nu = \text{rank}(B, AB) - \text{rank } B$. Построим теперь цепочку линейно-независимых векторов в L , как это описано в [4]:

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{m_1-1}b_1, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{m_r-1}b_r,$$

где $\text{rank } B = r$, а $\{b_i\}_{i=1}^r$ — вектор-столбцы матрицы B .

Оказывается, что $\sum_{i=1}^r m_i = \rho$, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_\nu > 1$, а $m_{\nu+1} = \dots = m_r = 1$.

Далее в силу инвариантности подпространства $L^\perp$ относительно оператора A^* , существует [6] ровно s циклических подпространств

$I_1, I_2, \dots, I_s$ с минимальными многочленами соответственно $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_s(\lambda)$ такие, что $L^\perp = I_1 + I_2 + \dots + I_s$ и при этом $\psi_1(\lambda)$ является делителем $\psi_{i-1}(\lambda)$ ($i = \overline{2, s}$),

Поэтому можем считать, что $\deg \psi_1(\lambda) \geq \dots \geq \deg \psi_\mu(\lambda) > 1$, $\deg \psi_{\mu+1}(\lambda) = \dots = \deg \psi_s(\lambda) = 1$.

Теорема 4. Для любой линейной управляемой системы $\dot{x} = Ax + Bu$ существует матрица $\bar{H}$ с $(\mu + \nu)$ линейно-независимыми строками такая, что для подпространства идеальной наблюдаемости $L_{ug}(\bar{H})$ системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = \bar{H}x$ имеет место соотношение $\dim L_{ug}(\bar{H}) = \text{rank } \bar{H} - \text{rank } B + n - s$.

Более того, для любой системы $\dot{x} = Ax + Bu$ и любой матрицы H , ранг которой меньше $\mu + \nu$, подпространство $L_{ug}(H)$, порожденное системой $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Hx$, обладает следующим свойством: $\dim L_{ug}(H) < \text{rank } H - \text{rank } B + n - s$.

Таким образом, во-первых, оценка размерности $L_{ug}(H)$ системы (1), полученная в теореме 3, является наилучшей и, во-вторых, первые $\mu + \nu$ выходов для системы $\dot{x} = Ax + Bu$ можно всегда выбрать так, чтобы каждый из них увеличивал $\dim L_{ug}$ соответствующей системы не менее чем на две единицы. В случае, если матрица H имеет ранг, равный $\mu + \nu$, и при этом подпространство $L_{ug}(H)$ системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Hx$ удовлетворяет соотношению $\dim L_{ug}(H) = \text{rank } H - \text{rank } B + n - s$, то добавление любого другого вектора к заданной матрице выхода H может увеличить размерность L_{ug} не более, чем на единицу.

Следует также заметить, что если число выходов системы $\dot{x} = Ax + Bu$ задано, то, выбирая выходы $y = Hx$ указанного количества специальным образом, можно построить $L_{ug}(H)$ системы (1) максимальной размерности.

Из теоремы 4 можно привести ряд следствий. В частности, справедливо следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Следствие 3. Для любой линейной управляемой системы $\dot{x} = Ax + Bu$ существует своя матрица выходов $\bar{H}$, $\text{rank } \bar{H} = \text{rank } B + s$ такая, что система $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = \bar{H}x$ является идеально наблюдаемой.

Список литературы: 1. Никольский М. С. Идеально наблюдаемые системы. — Изд. АН СССР, 1970, 191, № 6, с. 32 — 35. 2. Никольский М. С. Об идеально наблюдаемых системах. — Диф. уравнения, 1971, 7, № 4, с. 631 — 638. 3. Никольский М. С. Идеальная наблюдаемость систем по направлению. — Исследование операций. Модели, системы, решения, 1972, вып. 3, с. 75 — 94. 4. Коробов В. И., Маринич А. П. Идеально наблюдаемые системы с минимальным выходом. — Вестн. Харьк. ун-та, № 134. Математика и механика, 1976, вып. 41, с. 31 — 41. 5. Маринич А. П. Об относительно идеально наблюдаемых системах. — Диф. уравнения, 1976, 12, № 7 с. 1204 — 1210. 6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

Поступила в редколлегию 22. 11. 78.

О ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ
ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

Рассмотрим систему уравнений

$$dx/dt = Ax + Bu \quad (1), \quad y = Cx, \quad (2)$$

где A , B , C — действительные матрицы размеров $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(m \times n)$, соответственно, причем $\text{rg } B = r$, $\text{rg } C = m$.

Система (1), (2) называется стабилизируемой (по выходу) [2], если существует вещественная матрица P размеров $(r \times m)$ такая, что все решения системы (1) с управлением:

$$u = Py = PCx \quad (3)$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, т. е. спектр $\sigma(A + BPC)$ матрицы $(A + BPC)$ лежит в полуплоскости $K^- = \{z: \text{Re } z < 0\}$.

Говорят, что для системы (1), (2) разрешима задача о произвольном распределении спектра, если для любого множества S из n точек комплексной плоскости K , симметричного относительно вещественной оси R , существует вещественная матрица P такая, что $\sigma(A + BPC)$ лежит в ε -окрестности этого множества. Ясно, что из произвольности распределения спектра системы вытекает ее стабилизируемость.

Задача о произвольном распределении спектра исследовалась в ряде работ [1—4]. В случае, когда C — единичная $(n \times n)$ матрица, критерием разрешимости задачи является полная управляемость системы (1); и известен алгоритм построения матрицы P [1]. В работах [3—4] исследуется произвольное распределение спектра для почти всех систем (1), (2), когда $m + r > n$. В работе [2] доказано, что для произвольной вполне управляемой и наблюдаемой системы, для которой $m + r > n$, задача о произвольном распределении спектра разрешима.

В данной статье рассматривается более узкая задача произвольного распределения спектра по вещественной оси, т. е. для $S \subset R$. Разрешимость этой задачи также достаточна для стабилизируемости системы (1), (2). Проводится более естественное и простое доказательство результата работы [2] для этой задачи. В отличие от работы [2] это доказательство конструктивно. Приведен алгоритм построения матрицы P , дающей данное распределение спектра.

Во всей работе мы предполагаем, что рассматриваемые векторы принадлежат пространству K^n , а операторы действуют из $K^n \rightarrow K^n$. Под действительным вектором понимается вектор, действительный в исходном базисе. Под действительным подпространством понимается подпространство, имеющее базис из действительных векторов.

Теорема. Пусть система (1), (2) вполне управляема и наблюдаема и $m+r > n$. Тогда для множества S из n точек вещественной оси R существует вещественная матрица P такая, что $\sigma(A + BPC)$ лежит в ε -окрестности S .

Будем обозначать через:

$$W(\lambda) = R((\lambda J - A)^{-1} | R(B));$$

$$F'(\bar{\lambda}) = R((\bar{\lambda} J - A^*)^{-1} | R(C^*)), \quad \lambda \in \sigma(A),$$

где $R(X)$ — образ оператора X , $X|L$ — сужение оператора X на подпространство L .

Приведем ряд вспомогательных утверждений, представляющих самостоятельный интерес.

Лемма 1 [2]. Пусть дано m различных вещественных чисел λ_i , $i = \overline{1, m}$, $\lambda_i \in \sigma(A)$ и набор действительных векторов f_i , $i = \overline{1, m}$ таких, что $f_i = R_{\lambda_i} B p_i$, где p_i — вещественный столбец и $\det(Cf_1, \dots, Cf_m) \neq 0$. Пусть также дано l различных вещественных чисел β_j , $j = \overline{1, l}$ таких, что $\beta_j \neq \lambda_i$, $\beta_j \in \sigma(A)$, $i = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$ и существуют векторы $g_j \in F'(\beta_j)$ и $(g_j, f_i) = 0$, $j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$. Тогда для вещественной матрицы $P_0 = (p_1, \dots, p_m)(Cf_1, \dots, Cf_m)^{-1}$ выполняется $\lambda_i \in \sigma(A + B P_0 C)$, $\beta_j \in \sigma(A + B P_0 C)$, $(A + B P_0 C) f_i = \lambda_i f_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, l}$.

Лемма 2. Пусть c_j , $j = \overline{1, m}$, $c_i^\perp$, $i = \overline{1, n-m}$ — ортонормированный действительный базис в K^n , причем $c_j \in R(C^*)$, $c_i^\perp \in R(C^*)^\perp$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n-m}$, и оператор A^* в этом базисе записывается как

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

тогда наблюдаемость системы (1), (2) равносильна управляемости $dz/dt = A_{22}z + A_{21}v$.

Определение. Пусть для системы (1), (2), $m+r > n$. Будем называть действительное подпространство W размерности m неособым, если $W^\perp \cap R(B)^\perp = \{0\}$ и выполнено условие:

$\text{rg}(\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, (A^* - \mu I) b_1^\perp, \dots, (A^* - \mu J) b_{n-r}^\perp) = 2n - m - r$ для $\forall \mu \in K$, где $\xi_1, \dots, \xi_{n-m}$ — любой действительный базис $W^\perp$; $b_1^\perp, \dots, b_{n-r}^\perp$ — любой действительный базис $R(B)^\perp$.

Лемма 3. Пусть для системы (1), (2) $m+r > n$. Если W — неособое подпространство, то $\forall \Lambda \in R^m$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, за исключением, быть может, нигде не плотного множества, в W существует действительный базис $\{f_j\}_{j=1}^m$, причем $f_j \in W(\lambda_j)$.

Лемма 4. Пусть система (1) полностью управляема и $m+r > n$. Тогда для нее существуют неособые подпространства.

Следствие. Из леммы 4 вытекает, что для $\forall \{\xi_i\}_{i=1}^{n-m} \in (R^n)^{n-m}$, за исключением, быть может, нигде не плотного множества, орто-

гональное дополнение линейной оболочки $\text{Lin}\{\xi_1, \dots, \xi_{n-m}\}^\perp$ является неособым подпространством.

Действительно, пусть $T(\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-m}) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, (A^* - \mu J)b_1^\perp, \dots, (A^* - \mu J)b_{n-r}^\perp)$, где $b_i^\perp, i = \overline{1, n-r}$ — действительный базис $R(B)^\perp$, а $M_j(\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-m}), j = \overline{1, N}$ — все миноры порядка $(2n-m-r)$ матрицы $T(\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-m})$. Обозначим результат полиномов $\sum_{i=1}^N \alpha_i M_i(\cdot), \sum_{j=1}^N \beta_j M_j(\cdot)$, рассматриваемых как полиномы от μ , через $\text{Res}(\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N)$, где $\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \{\beta_i\}_{i=1}^N \subseteq R$. Так как по лемме 4 существуют неособые подпространства, $\text{Res}(\cdot) \neq 0$. Отсюда легко получить требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. Зададимся множеством $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq R$. Не ограничивая общности будем считать, что $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Так как система $dz/dt = A_{22}z + A_{21}v$ из леммы 2 вполне управляема, выберем вещественную матрицу D_0 так, чтобы $\sigma(A_{21}D_0 + A_{22}) = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ [1]. Обозначим через L_0 проектор $\begin{pmatrix} 0 & D_0 \\ 0 & J_{n-m} \end{pmatrix}$ (в базисе $c_j, j = \overline{1, m}, c_i^\perp, i = \overline{1, n-m}$), где J_{n-m} — единичная $(n-m) \times (n-m)$ матрица, и через $W_0^\perp$ действительное подпространство $R(L_0)$. Тогда

$$L_0 A^* L_0 = \begin{pmatrix} 0 & D_0 A_{21} D_0 + D_0 A_{22} \\ 0 & A_{21} D_0 + A_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что векторы $\xi_i = L_0 c_i^\perp, i = \overline{1, n-m}$ образуют действительный базис в $W_0^\perp$. Отсюда $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta > 0$ такое, что из $\|\Delta_i\| < \delta, i = \overline{1, n-m} : \text{Lin}\{\xi_1 + \Delta_1, \dots, \xi_{n-m} + \Delta_{n-m}\} \cap R(C^*) = \{0\}$, причем в базисе $c_j, j = \overline{1, m}, c_i, i = \overline{1, n-m}$ проектор на $\text{Lin}\{\xi_1 + \Delta_1, \dots, \xi_{n-m} + \Delta_{n-m}\}$ параллельно $R(C^*)$ записывается в виде $\begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & J_{n-m} \end{pmatrix}$, где $\|D - D_0\| < \varepsilon_1$. При этом, если векторы Δ_i действительны, то D — действительная матрица.

Из следствия к лемме 4 существуют сколь угодно малые векторы $\tilde{\Delta}_i (\|\tilde{\Delta}_i\| < \delta)$, такие, что подпространство $\tilde{W} = \text{Lin}\{\xi_1 + \tilde{\Delta}_1, \dots, \xi_{n-m} + \tilde{\Delta}_{n-m}\}^\perp$ — неособое. Пусть $\tilde{L}$ проектор на $\tilde{W}^\perp$ параллельно $R(C^*)$.

Тогда

$$\tilde{L} A^* \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{D} A_{21} \tilde{D} + \tilde{D} A_{22} \\ 0 & A_{21} \tilde{D} + A_{22} \end{pmatrix},$$

где $\|\tilde{D} - D_0\| < \varepsilon_1$. Выбирая ε_1 достаточно малым, добьемся, чтобы спектр $\sigma(A_{21}\tilde{D} + A_{22})$, равный $\{\lambda_{m+1}', \dots, \lambda_n'\}$, попал в ε -

окрестность $\{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$. Тогда для собственных векторов g_i , $i = \overline{m+1, n}$ оператора $\tilde{L}A\tilde{L}$, соответствующих λ'_i , выполняется $g_i \in F'(\lambda'_i)$, $g_i \in \tilde{W}_0^\perp$; ($|\lambda'_i - \lambda_i| < \varepsilon$). По лемме 3 в $\tilde{W}$ существует действительный базис f_j , $j = \overline{1, m}$, причем $f_j \in W(\lambda'_j)$, где $|\lambda'_j - \lambda_j| < \varepsilon$, $j = \overline{1, m}$. Так как $\tilde{W}^\perp \cap R(C^*) = \{0\}$, матрица $(Cf_1, \dots, Cf_m)$ — невырождена. По лемме 1 существует матрица P_0 такая, что $\sigma(A + BP_0C) = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$, и теорема доказана.

Из доказательства теоремы вытекает способ построения матрицы P_0 . Сформулируем его в виде следующего алгоритма.

1. Проверить, что матрицы A , B , C удовлетворяют условию теоремы.

2. Задаться набором различных действительных чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ и точностью ε ; $\lambda_i \in \sigma(A)$; $i = \overline{1, n}$.

3. Выбрать действительный ортонормированный базис из векторов c_j , $j = \overline{1, m}$; $c_l^\perp$, $l = \overline{1, n-m}$; $c_j \in R(C^*)$, $c_l^\perp \in R(C^*)^\perp$.

4. Записать оператор A^* в базисе из пункта 3 и разбить матрицу A^* на блоки $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Перейти в этот базис.

5. Пользуясь управляемостью системы $dz/dt = A_{22}z + A_{21}v$, выбрать действительную D так, чтобы $\sigma(A_{22} + A_{21}D)$ совпал с $\{\lambda_i\}_{i=m+1}^n$ [1].

6. Выбрать базис в подпространстве $W = R(L)^\perp$, где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & J_{n-m} \end{pmatrix}.$$

7. Найти пересечения $R((\lambda_i J - A)^{-1} | R(B)) \cap W$, $i = \overline{1, m}$ и выбрать в них базис.

8. Выбрать векторы $f_i \in R((\lambda_i J - A)^{-1} | R(B)) \cap W$ как линейные комбинации векторов базиса этих подпространств со случайными коэффициентами.

9. Если f_i линейно независимы, перейти на 11, иначе на 10.

10. $D := D + \Delta D$, $\lambda_i := \lambda_i + \Delta \lambda_i$, $i = \overline{1, m}$, где ΔD и $\Delta \lambda_i$ — малые независимые случайные приращения, порядок малости которых определяется из точности. Перейти на 6.

11. Найти p_i такие, что $f_i = (\lambda_i J - A)^{-1} B p_i$, $i = \overline{1, m}$
 $P_0 = (p_1, \dots, p_m)(Cf_1, \dots, Cf_m)^{-1}$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система $dx/dt = Ax + Bu$ с выходом $y = Cx$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $S = \{-3, -2, -1\}$. В базисе

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица A^* имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разобьем ее на блоки A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} как в лемме 2. Пользуясь управляемостью системы $dz/dt = A_{22}z + A_{21}u$ находим, что при $D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\sigma(A_{22} + A_{21}D) = \{-1\}$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad W = R(L)^\perp = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Вычисляя резольвенту, находим, что $R((-3J - A)^{-1} | R(B)) \cap W = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $R((-2J - A)^{-1} | R(B)) \cap W = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

Пусть $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Эти векторы линейно независимы;

$$f_1 = (-3J - A)^{-1} B p_1, \quad f_2 = (-2J - A)^{-1} B p_2, \quad \text{где } p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Так как $(Cf_1, Cf_2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$P_0 = (p_1, p_2)(Cf_1, Cf_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A + BP_0C = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что $\sigma(A + BP_0C) = \{-3, -2, -1\}$.

Список литературы: Wonham W. M. On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Systems.—IEEE Trans. Autom. Contr., 1967, vol.AC-12, № 6, p. 660—665.
2. Kimura H. Pole Assignment by Gain Output Feedback.—IEEE Trans. Auto.

mat. Control, 1975, vol. AC-20, № 4, p. 509—516. 3. Davison E. J., Wang S. H. On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback.— IEEE. Trans. Automat. Control, 1975, vol. AC-20, № 4, p. 516—518. 4. Мейлахс А. М. О стабилизации систем автоматического регулирования с неполной информацией.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 7, с. 74—78.

Поступила в редколлегию 23.12.78.

УДК 517.977.1

В. М. ГАВРИЛЯКО

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрены некоторые свойства функции $\theta(x)$, впервые предложенной В. И. Коробовым в работе [1]. В статье показано, что для линейных управляемых систем вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in R_n, \quad u \in R_1, \quad |u| \leq d_1, \quad (1)$$

где A, b — матрицы $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, функция $\theta(x)$ естественно находится из некоторого выражения, определяемого матрицей управляемости

$$D_\theta = \int_0^\theta \exp(-At) b b' \exp(-A't) dt, \quad \theta > 0. \quad (2)$$

Показано, что при $\alpha = 1$ поверхность уровня функции $\theta(x)$ является гладкой аппроксимацией границы области управляемости системы (1). При этом используется метод, разработанный в [5] для анализа структуры области достижимости системы (1).

Выяснена связь функции $\theta(x)$ и решения задачи об оптимальной стабилизации системы (1) с квадратичным критерием качества [3, 4]:

$$C(u) = \int_0^\infty [x'(t) W x(t) + u^2(t)] dt, \quad (3)$$

где $W > 0$.

Рассмотрим систему (1). Не ограничивая общности, будем считать, что система имеет канонический вид [2]:

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{x}_n = \sum_{j=1}^n p_j x_j + u. \quad (4)$$

Выберем управление $u = -b'Ax + v$. Тогда можно указать [2] такие d, d_2 , что если $|v| \leq d$ в области $|x_i| \leq d_2, i = \overline{1, n}$, то в этой же области $|u| \leq d_1$. Система (4) в этом случае принимает вид

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{x}_n = v. \quad (5)$$

Для системы (5) матрица D_θ имеет вид

$$D_\theta = \left((-1)^{i+j} \frac{\theta^{2n-i-j+1}}{(2n-i-j+1)(n-i)!(n-j)!} \right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Так как система (5) управляема, то $(D_0 x, x) > 0$ для $\forall x \neq 0$. Можно также показать, что матрица D_0^{-1} удовлетворяет уравнению

$$D_0^{-1}A + A'D_0^{-1} - D_0^{-1}bb'D_0^{-1} = \frac{d}{d\theta} D_0^{-1} \quad (6)$$

и при этом D_0^{-1} имеет вид $D_0^{-1} = (p_{ij}\theta^{i+j-2n-1})$.

Образую из элементов p_{ij} матрицы D_0^{-1} матрицу P . Тогда из (6), следует, что P удовлетворяет уравнению

$$PA + A'P - Pbb'P = W, \quad (7)$$

где $W = (w_{ij})$, так как в покомпонентной записи для элемента с индексом i, j имеет место равенство

$$\theta^{i+j-2n-2} (p_{i, j-1} + p_{i-1, j} - p_{i, n} p_{n, j}) = \theta^{i+j-2n-2} w_{i, j}.$$

Однако $(\frac{d}{d\theta} D_0^{-1} x, x)$ и, следовательно, (Wx, x) являются лишь знакопостоянными квадратичными формами, что можно обнаружить, анализируя явный вид D_0^{-1} . Можно показать, что для системы (5) для $\forall \varepsilon > 0$ существует матрица S такая, что $W + S < 0$, $\|S\| < \varepsilon$. Рассмотрим теперь уравнение (7), где в правой части стоит выражение $W + S$ вместо W . Так как система (5) управляема, то существует единственная симметрическая положительно определенная матрица P , удовлетворяющая уравнению (7) [3]. Функцию управляемости $\theta(x)$ выберем [1] равной положительному решению уравнения $2a_0\theta = (P_0 x, x)$, где $P_0 = (p_{ij}\theta^{\frac{i+j-2n-1}{\alpha}})$, здесь $\alpha, 2a_0$ определены в [1]. Проверим выполнение

неравенства [1]: $\dot{\theta} \leq -\beta\theta^{1-\frac{1}{\alpha}}$. Для этого вычислим производную функции $\theta(x(t))$ по времени в силу системы (5) при управлении вида $v = -b'P_0 x$:

$$\dot{\theta} = (P_0 x, x)^{-1} [(P_0 A + A'P_0 - 2P_0 b b' P_0) x, x]. \quad (8)$$

Согласно выбору α имеем $(P_0 x, x) > 0$. Таким образом,

$$\dot{\theta} \leq (P_0 x, x)^{-1} ((W + S)x, x) \leq -\beta\theta^{1-1/\alpha}. \quad (9)$$

Здесь

$$P_0 = \left(\left(1 + \frac{2n-i-j+1}{\alpha} \right) p_{i, j} \theta^{\frac{i+j-2n-1}{\alpha}} - 1 \right)_{i, j=1, n}.$$

Рассмотрим теперь способ построения функции $\theta(x)$, основанный на гладкой аппроксимации границы области управляемости. Здесь удобно рассматривать другую каноническую форму управляемой системы с одномерным управлением, а именно:

$$\dot{x}_1 = -p_n x_n + u; \quad \dot{x}_i = x_{i-1} - p_{n-i+1} x_n, \quad i = 2, \dots, n, \quad (10)$$

которая получается, если в исходной управляемой системе сделать замену $x = Lz$, где $L = [b, Ab \dots A^{n-1}b]$,

Как и для системы (2) полагаем $u = -b_1^* A_1 x + v$, здесь $b_1^* = (1, 0, \dots, 0)$. Разобьем отрезок $[0, \theta]$ на n равных частей, на каждой из которых положим $v(t) \equiv v_i$, $\sum v_i^2 \leq 2a_0 \leq d^2$. Пусть точка x_0 и управления $\{v_i\}$ таковы, что траектория $x(t, t_0, x_0)$, исходящая в момент времени $t_0 = 0$ из точки x_0 , в момент времени $t_1 = \theta$ оканчивается в точке $x_1 = 0$. Согласно [5] имеем (опуская индекс у точки x_0)

$$-x = R_0 v, \quad (11)$$

где $v' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,

$$R_0 = \left((-1)^{i+j} \frac{\theta^i}{i! n^j} [j^i - (j-1)^i] \right)_{i,j=1,n}.$$

Можно показать, что матрица R_0 невырождена [5]. Если теперь менять на каждом отрезке $[in^{-1}\theta, (i+1)n^{-1}\theta]$ управление v_i , $\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 2a_0$, то оператор R_0 при фиксированном θ осуществляет отображение шара $S(0, \sqrt{2a_0})$ размерности n в пространство R_n . Рассмотрим образ границы шара $S(0, \sqrt{2a_0})$. Эта поверхность описывается выражением

$$2a_0 = (\tilde{P}_0 x, x), \quad \tilde{P}_0 = (R_0 R_0')^{-1}. \quad (12)$$

При каждом фиксированном значении θ поверхность (12) является гладкой аппроксимацией множества управляемости системы (10) при ограничениях на управление вида (10). Можно показать, что матрица $\tilde{P}_0$ имеет вид $\tilde{P}_0 = (p_{ij}\theta^{-i-j+1})_{i,j=1,n}$. Запишем (12) в эквивалентном виде:

$$2a_0\theta = \sum_{i,j=1}^n p_{ij}\theta^{-i-j+1} x_i x_j.$$

Рассмотрим теперь матричное выражение $\Phi(P_0, A) = P_0 A + A' P_0 - P_0 b b' P_0$, где $P_0 = \theta \tilde{P}_0$. Тогда $\Phi(P_0, A) = W_0$, где $W_0 = (\omega_{ij}\theta^{-i-j})$, а коэффициенты ω_{ij} удовлетворяют уравнению (7). Так как $P_0 > 0$ и, следовательно, $P > 0$, то при $W < 0$ в качестве функции управления рассмотрим величину $\theta(x)$, определяемую выражением

$$2a_0\theta = \sum_{i,j=1}^n p_{ij}\theta^{\frac{-i-j+1}{\alpha}} x_i x_j. \quad (13)$$

Здесь α , $2a_0$ определены в [1]. В противном случае изменяем W так, чтобы квадратичная форма $(Wx, x) < 0$ для $\forall x \neq 0$, и вновь рассматриваем уравнение (13).

Заметим, что рассмотренные способы построения функции $\theta(x)$ существенно использовали существование единственной симметричной положительно определенной матрицы P , удовлетворя-

ющей уравнению (7), где $W < 0$. Так как мы рассматриваем управляемые системы (1), т. е. предполагаем, что $\det L \neq 0$, то согласно [3, 4], матрица P с указанными свойствами существует и является решением уравнения (7). Более того, управление $u(x) = -b'Px$ является оптимальным управлением, доставляющим минимум функционала (3) [3, 4].

Покажем, что во всех случаях для управления $v(x)$ будут выполняться ограничения $|v| \leq d$. Действительно, так как $v = -b'P_\alpha x$, то ($\alpha=1$)

$$0 \leq 2(v, v)a_0(\tilde{P}_\alpha x, x)^{-1} \leq 2a_0\tilde{\lambda}_{\max}\lambda_{\min}^{-1}(P) = 2a_0\gamma,$$

где

$$\gamma = \tilde{\lambda}_{\max}\lambda_{\min}^{-1}(P).$$

Здесь $\tilde{\lambda}_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $Pbb'P$. Таким образом, $v^2(x) \leq 2a_0\gamma$. Выбрав $0 < a_0 \leq d^2/(2\gamma)$, удовлетворяем ограничению $|v| \leq d$.

Список литературы: 1. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости.— Докл. АН СССР. 1979, 248, № 5, с. 1051—1055. 2. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.— Мат. сб., 1979, 109, № 4, с. 582—606. 3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.— 574 е. 4. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений.— В кн.: Теория устойчивости движения. Под ред. И. Г. Малкина, доп. 4.— М.: Наука, 1966, с. 475—515. 5. Коробов В. И. О множествах достижимости.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, 10, № 1, с. 224—230. 6. Гавриляко В. М., Коробов В. И. О разностной аппроксимации синтеза ограниченного управления в задаче управляемости.— В кн.: III Всесоюз. семинар по численным методам нелинейного программирования /Харьков, 1979/ Тез. докл., 1979, с. 107—109.

Поступила в редколлегию 04.02.80

УДК 681.3:519.21

В. В. БАРАНОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Рассматривая задачу проектирования, будем исходить из условия, что структура системы уже определена и задана. Этап проектирования, связанный с выбором структуры системы, трудно формализуем и его следует рассматривать как этап непосредственной творческой деятельности человека.

Если структура системы определена, то далее остается выбрать параметры системы. Этот этап проектирования, связанный с выбором параметров системы, можно уже формализовать и разрабатывать методом автоматизации выбора проектных решений.

Мы будем рассматривать стохастические системы, эволюция либо функционирование которых может быть описано управляемым случайным процессом [1]. Тогда можно полагать, что задание структуры системы равносильно заданию аналитического вида переходной функции Q , зависящей от некоторого параметра θ , принимающего значения из множества Θ . В этом случае задачу выбора проектных решений можно понимать как задачу выбора оптимальных значений параметра θ . Здесь, однако, возникает ряд особенностей, которые не позволяют решать такую задачу методами нелинейного программирования либо другими известными методами.

Прежде всего заметим, что при проектировании обычно предполагается, что использование проектируемой системы не ограничено во времени. Но тогда ясно, что уже на стадии проектирования необходимо учитывать фактор морального старения, который присущ любой системе.

Далее заметим, что любая система используется в основном ближайшим живущим поколением людей. Но для такого поколения выигрыш, который может давать система в отдаленном будущем, не имеет реального смысла и ценности.

Из сказанного вытекает, что начальная «полезность» системы не остается постоянной и с течением времени стремится к нулю.

Отмеченные обстоятельства необходимо учитывать при проектировании системы. Это можно сделать, введя так называемый «коэффициент дисконтирования» β . Этот коэффициент определяет относительную скорость морального старения и изменения «ценностей» в единицу времени. Он принимает значения в пределах от 0 до 1 и задается, исходя из назначения и особенностей системы.

Поскольку проектируемые системы описываются управляемым случайным процессом, то с учетом сделанных замечаний в качестве целевого функционала целесообразно использовать математическое ожидание суммарного дисконтированного выигрыша $U^{\beta}(\pi, \theta)$, зависящего от стратегии управления π и параметра θ . Формальные определения этих объектов мы введем позднее.

Задача тогда состоит в выборе пары (π^*, θ^*) , которая максимизирует функционал $U^{\beta}(\pi, \theta)$, т. е.

$$U^{\beta}(\pi^*, \theta^*) \geq U^{\beta}(\pi, \theta) \text{ для всех } (\pi, \theta). \quad (1)$$

Таким образом, задача выбора проектных решений сводится к одновременному выбору оптимального значения параметра и оптимальной стратегии. Эта задача очевидным образом не может решаться методами нелинейного программирования. Поскольку здесь значение параметра θ^* неизвестно, то задача выбора оптимальной стратегии не может быть решена также и методами динамического программирования в условиях риска [2]. Наконец, заметим, что относительно выбора стратегии эта задача относится к классу задач, решаемых в условиях неопределенности.

Однако она не может быть решена также и методами, специально развитыми для этого случая в [3]. Это связано с тем, что на стадии проектирования система еще не существует и наблюдать траекторию ее состояний невозможно.

Однако если воспользоваться идеей имитационного моделирования, то можно искусственным образом ввести и построить некоторую траекторию состояний системы. Тогда мы приходим к задаче, которая ставится следующим образом.

Постановка задачи. Пусть E — множество состояний системы, Y — конечное множество управлений, ω — функция выигрышей на $E \times Y$ со значениями в R^+ .

Отображение $\pi: E \rightarrow Y$ назовем решающей функцией. Последовательность $(\pi_0, \pi_1, \dots)$ назовем стратегией управления. Стратегию вида $\pi^\infty = (\pi, \pi, \dots)$ назовем стационарной.

Пусть Θ — параметрическое пространство. Обозначим $Q(x, dz/y, \theta)$ переходную функцию, задающую вероятности переходов на $E \times E$ для каждого $y \in Y$ и $\theta \in \Theta$.

Заметим, что выбор параметра θ_t задает распределение случайной величины ξ_t , $t = 0, 1, \dots$ со значениями в E . Обозначим $x_t = M_{x_{t-1}}^{\theta_t} \xi_t$. Последовательность $\{x_t, t = 0, 1, \dots\}$ используем в качестве наблюдаемой траектории системы.

Обозначим $y_1^n = (y_1, \dots, y_n)$ и $\theta_1^n = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Определим теперь апостериорный дисконтированный выигрыш v_n , $n = 0, 1, \dots$ вида

$$v_n^\beta(y_1^n, \theta_1^n)(x_{n-1}) = M \left\{ \sum_{t=0}^n \beta^t \omega_{\pi_t} / (y_1^n, \theta_1^n), x_{n-1} \right\}.$$

Пусть π_1^n стратегия, которая выбирает управления y_1^n , т. е.

$$v_n^\beta(\pi_1^n, \theta_1^n) = v_n^\beta(y_1^n, \theta_1^n).$$

Обозначим

$$v^\beta(\pi, \theta) = \lim_n v_n^\beta(\pi_1^n, \theta_1^n).$$

Решим задачу, сформулированную в (1).

Синтез оптимальных решений. Пусть Q — переходная функция вида $Q(x, dz/y, \theta) = Q(x_t, dx_{t-1}/y, \theta)$. Введем тогда оператор $Q(y, \theta)$:

$$Q(y, \theta) u(x) = \int_E u(z) Q(x, dz/y, \theta), x \in E.$$

Далее, введем оператор $F_\beta(y, \theta)$ вида

$$F_\beta(y, \theta) u(x) = \omega(x, y) + \beta Q(y, \theta) u(x), x \in E.$$

Нетрудно проверить, что апостериорный выигрыш v_n^β можно задать в помощи рекуррентного соотношения

$$v_n^\beta(y_1^n, \theta_1^n)(x_{n-1}) = F_\beta(y_n, \theta_n) [v_{n-1}^\beta(y_1^{n-1}, \theta_1^{n-1})](x_{n-1}), v_0^\beta = 0.$$

Предположим, что $\sup_{\theta \in \Theta} F_{\beta}(y, \theta)$ и x достигается при некотором $\hat{\theta}$. Обозначим тогда $\hat{\theta}_n$ значение параметра такое, что

$$F_{\beta}(y, \hat{\theta}_n) v_{n-1}^{\beta}(x_{n-1}) = \sup_{\theta \in \Theta} F_{\beta}(y, \theta) v_{n-1}^{\beta}(x_{n-1}).$$

Наконец, введем оператор $U_n = U(\hat{\theta}_n)$, который определяется для фиксированного $\hat{\theta}_n$ следующим способом:

$$U_n v_{n-1}^{\beta}(x_{n-1}) = \max_{y \in Y} F_{\beta}(y, \hat{\theta}_n) v_{n-1}^{\beta}(x_{n-1}).$$

Теперь положим, что $v_n^{\beta}(x_n)$ вычисляется из рекуррентного соотношения

$$v_n^{\beta}(x_n) = U_n v_{n-1}^{\beta}(x_{n-1}), \quad v_0^{\beta} \equiv 0. \quad (2)$$

При этом x_n вычисляется последовательно следующим способом. Пусть вычислено v_n^{β} из соотношения (2). Отсюда же одновременно получаем значение $\hat{\theta}_n$. Тогда для заданного $\hat{\theta}_n$ вычисляется $x_n = M_{x_{n-1}}^{\hat{\theta}_n} \xi_n$, которое затем используется на следующей итерации.

Будем обозначать y_n и θ_n управления и значения параметра, вычисляемые в соответствии с соотношением (2).

Обозначим y_1^{∞} и θ_1^{∞} — последовательности управлений и значений параметра соответственно, получаемых при $n \rightarrow \infty$, и

$$v^{\beta}(y_1^{\infty}, \theta_1^{\infty}) = \lim_n v_n^{\beta}(y_1^n, \theta_1^n).$$

Теорема 1. Пусть $\omega \geq 0$. Тогда $v^{\beta}(\bar{y}_1^{\infty}, \bar{\theta}_1^{\infty}) \geq v^{\beta}(y_1^{\infty}, \theta_1^{\infty})$ для всех $(y_1^{\infty}, \theta_1^{\infty})$. Доказательство вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1. Пусть (y_1^n, θ_1^n) , $n = 1, 2, \dots$ — последовательность управлений и значений параметра, вычисляемых в соответствии с соотношением (2). Тогда $v_n^{\beta}(\bar{y}_1^n, \bar{\theta}_1^n) \geq v_n^{\beta}(y_1^n, \theta_1^n)$ для всех (y_1^n, θ_1^n) .

Лемма 2. Пусть $\omega \geq 0$. Тогда $v_{n+1}^{\beta} \geq v_n^{\beta}$, $n = 0, 1, \dots$

Следствие 1. Существует и конечен предел $\lim_n v_n^{\beta} = v^{\beta}$.

Заметим, что условие неотрицательности ω не снижает общности, поскольку не отражается на значениях y и θ .

Определение. Будем говорить что последовательность $\{\theta_n, n = 1, 2, \dots\}$ слабо сходится к некоторому значению θ^* , если существует предел $\lim_n v_n^{\beta}(\theta_1^n) = v^{\beta}$.

Теорема 2. Пусть $\{\theta_n\}$ — последовательность значений параметра, вычисляемых исходя из рекуррентного соотношения (2). Тогда эта последовательность слабо сходится к оптимальному значению θ^* .

Доказательство. Слабая сходимость вытекает из следствия 1.

Докажем оптимальность θ^* .

Пусть заданы последовательности $\{\theta_1^n\}$ и $\{y_1^n\}$, вычисленные из рекуррентного соотношения (2). Пусть σ_1^n — нестационарная стратегия, выбирающая управления y_1^n при заданных значениях θ_1^n . Пусть, далее, $v_n^\beta(\sigma_1^n, \theta_1^n)$ — апостериорный дисконтированный выигрыш, вычисляемый из (2).

Пусть, наконец, σ^∞ — стационарная оптимальная стратегия, определенная при оптимальном значении θ^0 параметра, и σ^* — стратегия такая, что

$$v^\beta(\sigma^*, \theta^*) = \lim_n v_n^\beta(\sigma_1^n, \theta_1^n).$$

Поскольку стратегия σ^∞ оптимальна и определена при оптимальном θ^0 , то $v^\beta(\sigma^\infty, \theta^0) \geq v^\beta(\sigma, \theta)$ для всех (σ, θ) . В частности,

$$v^\beta(\sigma^\infty, \theta^0) \leq v^\beta(\sigma^*, \theta^*). \quad (3)$$

С другой стороны, в силу леммы 1, для любого $n = 1, 2, \dots$ имеем $v_n^\beta(\sigma_1^n, \theta_1^n) \geq v_n^\beta(\sigma, \theta)$ для всех (σ, θ) . В частности, для любого $n = 1, 2, \dots$

$$v_n^\beta(\sigma_1^n, \theta_1^n) \geq v_n^\beta(\sigma^n, \theta^n),$$

где $\sigma^n = (\underbrace{\sigma_*, \sigma_*, \dots, \sigma_*}_n)$ — стратегия, полученная усечением оптимальной стационарной стратегии $\sigma^\infty = (\sigma_*, \sigma_*, \dots)$. Отсюда

$$v^\beta(\sigma^*, \theta^*) = \lim_n v_n^\beta(\sigma_1^n, \theta_1^n) \geq \lim_n v_n^\beta(\sigma^n, \theta^0) = v^\beta(\sigma^\infty, \theta^0).$$

Отсюда и из (2) получаем равенство $v^\beta(\sigma^*, \theta^*) = v^\beta(\sigma^\infty, \theta^0)$.

Поскольку по предположению θ^0 оптимальное значение параметра, то отсюда и θ^* является оптимальным.

Замечание. Учтем, что оптимальное значение θ^* достигается при $n \rightarrow \infty$. Поэтому вычислить θ^* мы на самом деле не можем. Однако всегда можно вычислить значение θ_ε^* , достаточно близкое к оптимальному. Например, в качестве такого θ_ε^* можно выбрать значение $\theta_{\tau_\varepsilon}$, где $\tau_\varepsilon = \inf \{n : v_{n+1}^\beta - v_n^\beta \leq \varepsilon\}$.

Используя теперь фиксированное значение параметра θ_ε^* , вычислим оптимальную стратегию с помощью методов, развитых в [2]. Эта стратегия будет близка к оптимальной стратегии σ^∞ .

Этим завершается решение задачи оптимального проектирования системы.

В рассмотренной задаче решается на самом деле две задачи: выбор оптимального параметра и выбор оптимальной стратегии. Первая является непосредственно задачей проектирования, а вторая относится уже к задачам эксплуатации системы. При этом обе задачи тесно связаны и решаются совместно. Это означает, что здесь реализуется системный подход к проектиро-

ванию. Поскольку получаемые значения параметра и стратегия оптимальны, то это означает, что описанный подход гарантирует синтез оптимальной системы.

Список литературы: Гихман И. И. Скороход А. В. Управляемые случайные процессы.— Киев: Наук. думка, 1977.— 640 с. 2. Баранов В. В. Об одном классе алгоритмов динамического программирования в стохастических системах.— Вестн. Харьк. ун-та, 1977, № 148. Прикладная математика и механика, вып. 42, с. 3—11. 3. Баранов В. В. Об адаптивном управлении марковскими процессами.— Вестн. Харьк. ун-та, 1978, № 174. Прикладная математика и механика. вып. 43, с. 19—27.

Поступила в редколлегию 31. 01. 79

УДК 629.4:512.2

А. А. БОСОВ, В. В. ЩЕРБАК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОТКАЗОВ

П.1. Постановка задачи. Рассматриваются объекты, интенсивность отказов для которых имеет вид

$$\lambda(t) = 2at + b, \quad (1)$$

где $a = \int_{\Theta} a(v) d\mu(v)$; $b = \int_{\Theta} b(v) d\mu(v)$. Обозначим через A σ -алгебру подмножеств множества Θ . Тогда под управлением процессом восстановления понимаем при каждом $t \geq 0$ $u_t \in A$ [1].

По физическому смыслу при фиксированном t u_t представляет собой набор (объем) простейших технологических операций восстановления, которые производятся над объектом после наработки t .

Определение. Управление u_t будем называть марковским, если для любых $0 \leq t_1 < t_2$ выполняется соотношение $u_{t_1} \subseteq u_{t_2}$ (2).

Название марковское для управления u_t , удовлетворяющее соотношению (2), естественно потому, что интенсивность отказов для $t \geq 0$ будет зависеть только от управления в момент t и не будет зависеть от того, какие восстановительные операции производились над объектом до момента t .

Для марковского управления u_t интенсивность отказов для любого $t \geq 0$ равна [1]

$$\lambda(t, u_t) = 2a(1 - \gamma_t)t + b, \quad (3)$$

где

$$\gamma_t = \frac{1}{a} \int_{u_t} a(v) d\mu(v). \quad (4)$$

По определению (4) функция $0 \leq \gamma_t \leq 1$ и для каждого фиксированного t величина γ_t характеризует степень восстановления (обновления) объекта.

Заметим, что если $u_t = \Theta$, в силу (4) $\gamma_t = 1$, а интенсивность отказов, определяемая по (3), будет постоянна и никакие другие мероприятия не могут уменьшить ее. Таким образом, выбирая то или иное управление u_t , мы можем получить интенсивность отказов, удовлетворяющую условиям $0 < b \leq \lambda(t, u_t) \leq 2at + b$. Все задачи по определению рационального в том или ином смысле можно разбить на два класса.

Класс 1. Это задачи, в которых существенным является получение необходимой интенсивности отказов, а каким управлением она достигается — не существенно. Для таких задач в качестве управления процессом восстановления можно принимать γ_t , а в качестве допустимых управлений выбирать такие функции γ_t , которые удовлетворяют требованиям 1) $0 \leq \gamma_t \leq 1$ для $t \geq 1$; 2) для любых $0 \leq t_1 < t_2$, $\gamma_{t_1} \leq \gamma_{t_2}$.

Заметим, что если требование 2) не будет выполнено, то управление не будет марковским и соотношение (3) не имеет места.

Класс 2. К этому классу относятся такие задачи, когда существенным является знание, какие операции и в какие моменты проводились. Такая ситуация возникает при учете технологии восстановления.

П.2. *Задача из класса 1.* В качестве примера рассмотрим задачу определения такого марковского управления, чтобы соответствующая ему интенсивность $\lambda(t, u_t)$ минимизировала функционал

$$J = \int_0^T [f(t) - \lambda(t, u_t)]^2 dt,$$

где $f(t)$ можно рассматривать как желаемую (или заданную) интенсивность отказов. Для этой задачи, очевидно, не столько важно знать u_t , как соответствующую ему степень восстановления γ_t , определяемую по формуле (4). С учетом (3) функционал J можно представить в виде

$$J[\gamma_t] = \int_0^T [f(t) - 2a(1 - \gamma_t)t - b]^2 dt \quad (5)$$

и тогда необходимо найти среди неубывающих функций γ_t такую функцию, чтобы $0 \leq \gamma_t \leq 1$ при $0 \leq t \leq T$, а функционал (5) принял бы минимальное значение.

Для задач практики функцию γ_t достаточно искать из класса кусочно-постоянных. Тогда выбираем γ_t в виде

$$\gamma_t(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \sigma(t - k\Delta), \quad (6)$$

где

$$n = \left[\frac{T}{\Delta} \right]; \quad \sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

а $z_k \geq 0$ и $\sum_{k=0}^{n-1} z_k \leq 1$, что обеспечивает неубывающий характер функции $\gamma_i(n)$ и выполнение условия $0 \leq \gamma_i \leq 1$.

После подстановки (6) в (5) для определения z_k , минимизирующих функционал (5), получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^j z_k + \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_{jk} z_k = A_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{jk} = \frac{T^3 - (k\Delta)^3}{T^3 - (j\Delta)^3}; \quad j \leq k; \quad j = \overline{0, n-1}; \quad k = \overline{j+1, n-1}, \quad (8)$$

$$A_j = -\frac{3}{2a(T^3 - (j\Delta)^3)} \int_{j\Delta}^T (f(t) - 2at - b) t dt; \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (9)$$

Из системы (7) имеем $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = A_{n-1}$, и если все z_k , как решения системы (7), неотрицательны, то тогда достаточно потребовать, чтобы $A_{n-1} \leq 1$, т. е. получаем условие

$$\int_{\Delta \left[\frac{T}{\Delta} \right]}^T (f(t) - 2at - b) t dt \geq -\frac{2a}{3} \left(T^3 - \left(\Delta \left\lfloor \frac{T}{\Delta} \right\rfloor \right)^3 \right),$$

из которого определяются допустимые значения Δ . После простейших преобразований это условие приводится к следующему:

$$\int_{\Delta \left[\frac{T}{\Delta} \right]}^T (f(t) - b) t dt \geq 0. \quad (10)$$

С учетом специфики системы уравнений (7) справедливо

Утверждение 1. Для того чтобы решение системы (7) было положительным, необходимо чтобы $A_i > 0$; $A_i - A_{i-1} > 0$, $i = \overline{2, n}$ (11). Справедливость утверждения следует из соотношения

$$z_i(1 - \alpha_{i-1, i}) + \sum_{k=i+1}^{n-1} z_k(\alpha_{ik} - \alpha_{i-1, k}) = A_i - A_{i-1}, \quad (12)$$

которое получается, если от j -го уравнения вычесть $j-1$.

Из (12) получим

$$z_i = \frac{1}{1 - \alpha_{i-1, i}} \left(A_i - A_{i-1} - \sum_{k=i+1}^{n-1} (\alpha_{ik} - \alpha_{i-1, k}) z_k \right), \quad (13)$$

и тогда последовательно, начиная с z_{n-1} , определяются все z_k .

При вычислении по формуле (13) может оказаться $z_i < 0$. Тогда необходимо положить $z_i = 0$ в определении функции $\gamma_i(n)$

по формуле (6), что приведет к отсутствию соответствующего уравнения в системе (7).

Следовательно, необходимо пересчитать вновь z_{i+1} и если $z_{i+1} > 0$, то переходить к вычислению z_{i-1} .

Рассмотрим более подробно случай, когда желаемая интенсивность отказов представляет собой постоянную величину [2]. Обозначим через λ^* желаемую интенсивность отказов. Тогда условия (10) можно записать в виде $\lambda^* - b \geq 0$. Принимая во внимание, что $f(t) = \lambda^* = \text{const}$ из (8) и (9) получим

$$\alpha_{jk} = \frac{1 - (k/n)^3}{1 - (j/n)^3} \quad k \geq j + 1, \quad (14)$$

$$A_j = 1 - \frac{3(\lambda^* - b)}{4aT} \frac{1 + j/n}{1 + j/n + (j/n)^2}; \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (15)$$

Отсюда при $j = n - 1$ имеем

$$A_{n-1} = 1 - \frac{3(\lambda^* - b)}{4aT} \frac{2 - 1/n}{3 - 2/n + 1/n^2}.$$

и так как A_{n-1} должно быть больше нуля, но меньше или равно единице, то параметры λ^* , b , a , T при достаточно «больших n » с необходимостью удовлетворяют неравенству

$$\frac{\lambda^* - b}{2aT} \leq 1, \quad (16)$$

выполнение которого обеспечивает положительность A_j и разностей $A_j - A_{j-1}$. Таким образом, условия положительности решения системы (7) будут выполнены.

Для удобства исследования введем безразмерный параметр

$$\beta = \frac{3(\lambda^* - b)}{4aT}, \quad (17)$$

выбирая который из условия $0 \leq \beta \leq \frac{3}{2}$, обеспечиваем выполнение неравенства (16) и тем самым удовлетворяем необходимому условию положительности решения системы (7).

Для удобства дальнейших построений, не ограничивая общности рассмотрения, принимаем $b = 0$ и вводим безразмерное время $\tau = t/T$. Поэтому исследования будем проводить для $0 \leq \tau \leq 1$.

На рис. 1 построены зависимости γ_τ , когда отрезок $[0, 1]$ разбили на 5, 10, 15 и 30 частей, и для практических расчетов достаточная сходимость имеет место при $n \geq 30$. Так как решения системы (7) существенно зависят только от n и параметра β , то перебирая β в пределах $[0; 1, 5]$, на рис. 2 строим зависимости $\gamma_\tau(\beta)$, которые позволяют с учетом β определять $\gamma_\tau(\beta)$.

Пример. Пусть $\lambda^* = 0,266$, $a' = aT = 1$, тогда $\beta = \frac{3\lambda^*}{4a'} = 0,2$. Выбрав $\gamma_\tau(0,2)$ из данных рис. 2, построим $\lambda(\tau, \gamma_\tau) = 2(1 - \gamma_\tau)\tau$, которая изображена на рис. 3.

II.3. Задачи из класса 2. Для этого класса уже не достаточно задание γ_i и необходимо определять для каждого момента времени множество u_t . Не усложняя рассмотрения, будем предпо-

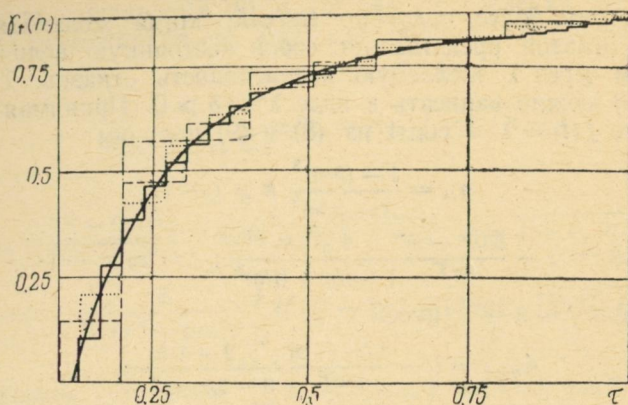


Рис. 1

лагать, что элементарная технологическая операция представляет собой замену i -го элемента на новый. Интенсивность отказов принимаем в виде $\lambda(t) = 2t \left(\sum_{i=1}^M a_i \right) + b$, а задание u_t одно-

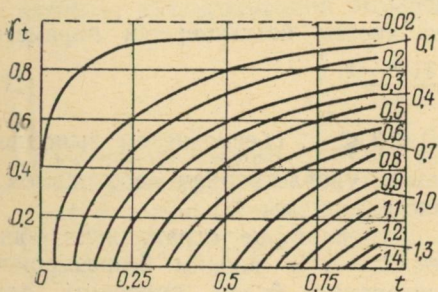


Рис. 2

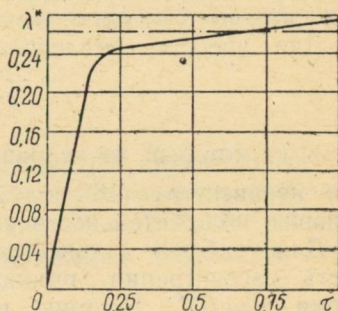


Рис. 3

значно определяем набором чисел x_i , $i = \overline{1, M}$, где x_i обозначает, что до момента x_i i -й элемент не заменяется, а после этого момента он постоянно обновляется. Тогда, изменяя x_i , мы можем получить ту или иную интенсивность отказов и в аналитической форме это можно отразить следующей записью:

$$\lambda(t, u) = 2a \left(1 - \sum_{i=1}^M z_i \sigma(t - x_i) \right) t + b,$$

$$\text{где } a = \sum_{i=1}^M a_i; \quad z_i = a_i/a.$$

Пусть $f(t)$ — желаемая интенсивность на отрезке времени $[0, T]$, тогда одну из задач данного класса можно сформулировать следующим образом: найти такие $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, M}$, чтобы функционал

$$J = \int_0^T \left[f(t) - 2a \left(1 - \sum_{i=1}^M z_i \sigma(t - x_i) \right) t - b \right]^2 dt \quad (18)$$

принимал минимальное значение.

Решение данной задачи получаем из утверждения: для того чтобы функционал (18) принимал минимальное значение, неизвестные x_k , $k = \overline{1, M}$ с необходимостью должны быть решением системы

$$az_k x_k + Q_k(x_k) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (19)$$

где $Q_k(t) = f(t) - b - 2at + 2at \sum_{i \neq k} z_i \sigma(t - x_i)$. В справедливости данного утверждения легко убедиться, если функционал (18) записать в виде

$$J = A_k + 4az_k \int_{x_k}^T t Q_k(t) dt + 4a^2 z_k^2 \int_{x_k}^T t^2 dt,$$

где A_k — величина, не зависящая от переменной x_k .

Пример. Пусть $f(t) = \lambda^*$ (λ^* — постоянная величина). Тогда из соотношения (19) получим

$$x_k = \frac{\lambda^* - b}{2a} \frac{1}{1 - z_k/2 - \sum_{i \neq k} z_i \sigma(x_k - x_i)}. \quad (20)$$

Следовательно, задав порядок восстановления по формуле (20), однозначно определяем моменты x_k , начиная с которых восстанавливаются соответствующие элементы.

Для удобства дальнейших рассмотрений введем безразмерный параметр β , вычисляемый по формуле (17). Тогда формулу (20) можно переписать следующим образом:

$$x_k = \frac{2}{3} \beta \frac{1}{1 - z_k/2 - \sum_{i \neq k} z_i \sigma(x_k - x_i)},$$

где x_k — безразмерное время, $T = 1$.

Функционал в этих обозначениях примет вид

$$J = T(\lambda^* - b)^2 \int_0^1 \left[1 - \frac{3}{2\beta} \left(1 - \sum_{i=1}^M z_i \sigma(t - x_i) \right) t \right]^2 dt. \quad (21)$$

Из (20) следует, что $x_{k+1} \geq x_k$ при любых z_i , и при этом моменты x_k и значение функционала зависят от порядка вели-

чин z_i . Порядок, минимизирующий J , можно определить перебором $M!$ всевозможных порядков, но такой перебор при реальных значениях M невозможен. Поэтому выясним необходимые условия оптимальности порядка.

Пусть $x_M \leq 1$, что обеспечивается условием $\beta \leq \frac{3}{4} z_M$.

В этом случае интеграл $\bar{J}$ в выражении функционала можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[1 - \frac{3}{2\beta} \left(1 - \sum_{j=1}^i z_j \right) t \right]^2 dt + (x_M - 1) = \\ &= \left(\frac{4\beta}{3z_M} - 1 \right) + \frac{2\beta}{9} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{1 - \sum_{j=0}^i z_j} \left\{ \left[\left(1 - \sum_{j=0}^i z_j \right) \frac{3}{2\beta} x_{i+1} - 1 \right]^3 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(1 - \sum_{j=0}^i z_j \right) \frac{3}{2\beta} x_i - 1 \right]^3 \right\}, \end{aligned}$$

где $z_0 = 0$ и $x_0 = 0$.

Введем обозначение $S_i = \sum_{j=0}^i z_j$ и подставим вместо x_i их выражения. Тогда

$$\bar{J} = \left(\frac{4\beta}{3z_M} - 1 \right) + \frac{2\beta}{9} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{1 - S_i} \left[\left(\frac{z_{i+1}}{2 - 2S_i - z_{i+1}} \right)^3 + \left(\frac{z_i}{2 - 2S_i - z_i} \right)^3 \right].$$

Приводя подобные, получаем

$$J = \left(\frac{14\beta}{9z_M} - 1 \right) + \frac{2\beta}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{z_i^3}{(2 - 2S_i + z_i)^2 (1 - S_i) (1 - S_i + z_i)}.$$

Предположим, что естественный порядок $z_1, z_2, \dots, z_M$ оптимален. Очевидно, что минимум функционалов $J, \bar{J}$ достигается на одном и том же порядке. Поменяем местами элементы z_k и z_{k+1} при $1 \leq k < M-1$ и вычислим приращение $\Delta \bar{J}$ функционала $\bar{J}$:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{J} &= \frac{2\beta}{9} \left[\frac{z_{k+1}^3}{(2 - 2S_k + 2z_k - z_{k+1})^2 (1 - S_k + z_k - z_{k+1}) (1 - S_k + z_k)} + \right. \\ &\quad + \frac{z_k^3}{(2 - 2S_k + z_k - 2z_{k+1})^2 (1 - S_k - z_{k+1}) (1 - S_k - z_{k+1} + z_k)} - \\ &\quad - \frac{z_k^3}{(2 - 2S_k + z_k) (1 - S_k) (1 - S_k + z_k)} - \\ &\quad \left. - \frac{z_{k+1}^3}{(2 - 2S_k - z_{k+1})^2 (1 - S_k - z_{k+1}) (1 - S_k)} \right]. \end{aligned}$$

Обозначив $\eta = 1 - S_k - z_{k+1}$, $\xi = 1 - S_k + z_k$, получим

$$\Delta \bar{J} = \frac{2\beta}{9} \left[\frac{4\eta^2(z_k^3 - z_{k+1}^3) + 8\eta z_k z_{k+1}(z_k^2 - z_{k+1}^2) + 5z_k^2 z_{k+1}^2(z_k - z_{k+1})}{(2\eta + z_k)^2(2\eta + z_{k+1})^2(\eta + z_k)(\eta + z_{k+1})} - \right. \\ \left. - \frac{4\xi^2(z_k^3 - z_{k+1}^3) - 8\xi z_k z_{k+1}(z_k^2 - z_{k+1}^2) + 5z_k^2 z_{k+1}^2(z_k - z_{k+1})}{(2\eta + 2z_{k+1} + z_x)^2(2\eta + 2z_k + z_{k+1})^2(\eta + z_k)(\eta + z_{k+1})} \right].$$

Предположим, что $z_k > z_{k+1}$ и $z_k = z_{k+1} + \theta$. Обозначая $v = z_{k+1}$, имеем $\xi = \eta + 2z_{k+1} + \theta = \eta + 2v + \theta$.

Очевидно, что $\text{sign } \Delta \bar{J} = \text{sign } \varphi(\eta, v, \theta)$, где

$$\varphi(\eta, v, \theta) = \frac{4\eta^2[(v + \theta)^3 - v^3] + 8\eta v(v + \theta)[(v + \theta)^2 - v^2] + 5v^2(v + \theta)^2\theta}{\theta(2\eta + v + \theta)(2\eta + v)^2} - \\ - \frac{4(\eta + 2v + \theta)^2[(v + \theta)^3 - v^3] - 8(\eta + 2v + \theta)v(v + \theta)[(v + \theta)^2 - v^2] + 5v^2(v + \theta)^2\theta}{\theta(2\eta + 3v + \theta)^2(2\eta + 3v - 2\theta)^2} = \\ = \frac{4\eta^2(3v^2 + 3v\theta + \theta^2) + 8\eta v(v + \theta)(2v + \theta) + 5v^2(v + \theta)^2}{(2\eta + 3v + \theta)^2(2\eta + v)^2} - \\ - \frac{4(\eta + 2v + \theta)^2(3v^2 + 3v\theta + \theta^2) - 8(\eta + 2v + \theta)v(v + \theta)(2v + \theta) + 5v^2(v + \theta)^2}{(2v + 3v + \theta)^2(2\eta + 3v + 2\theta)^2}.$$

Здесь $0 < v < \frac{1}{2}$; $0 < \theta < 1 - 2v$; $0 < \eta < 1 - 2v - \theta$.

Раскрывая скобки и приводя к общему знаменателю, получаем в числителе форму восьмого порядка относительно η , v и θ с неотрицательными коэффициентами. Следовательно, для $z_k \geq z_{k+1}$ и $k < M - 1$ имеем $\Delta J \geq 0$.

Аналогично можно убедиться, что при перестановке z_{M+1} и z_M также $\Delta J \geq 0$ при условии, что $z_M \geq z_{M+1}$. Итак, доказано следующее утверждение: для того чтобы порядок $z_1, z_2, \dots, z_M$ оптимизировал функционал (18) при $f(t) = \lambda^*$ и при $\beta \leq \frac{3}{4} z_M$, необходимо выполнение условий $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_{M-1} \leq z_M$ (22). Доказанное утверждение позволяет вместо перебора $M!$ порядков рассмотреть только $M - 1$ порядок, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности.

Полученный результат можно проиллюстрировать следующим примером.

Пусть $\lambda = 1$; $a = 1$; $b = 0$; $T = 2$; $M = 4$; $z_1 = 0,01$; $z_2 = 0,03$; $z_3 = 0,4$; $z_4 = 0,56$. Тогда $\beta = \frac{1}{8}$.

В результате перебора невозможных порядков был найден оптимальный порядок z_4, z_2, z_1, z_3 . Легко видеть, что этот порядок удовлетворяет необходимому условию (22).

Список литературы: 1. Босов А. А. Аксиоматический подход к построению математической модели восстановления. — Вестн. Харьк. ун-та, № 174. Прикладная математика и механика, 1978, вып. 43, с. 50—55. 2. Босов А. А. Оптималь-

УДК 538.3 : 532 : 538.4

В. И. ЕРМАКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В НОРМАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В гидростатике при рассмотрении равновесных форм жидкостей со свободной поверхностью обычно учитывают влияние поверхностного натяжения, краевого угла, силы тяжести или инерционных сил [1].

Существенное влияние на форму поверхности раздела сред и устойчивость равновесных конфигураций оказывает также электромагнитное поле [2—9]. В условиях невесомости эффекты воздействия поля усиливаются, являясь подчас определяющими и единственными «механизмами», позволяющими воздействовать на жидкость в целях ее удержания и стабилизации [4, 5].

Статья продолжает исследование [5—8] по изучению влияния нормального электрического поля на устойчивость плоской поверхности раздела. Учитывается вязкость и конечность толщины объемов жидкостей.

Исходной является система уравнений электродинамики [2, 10]

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla \left(p - \rho \epsilon_p \frac{E^2}{2} \right) + \rho \mathbf{q} + \rho_e \mathbf{E} + \mu \Delta \mathbf{v}; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_e; \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1)$$

На поверхности раздела должны выполняться условия [2—5]

$$\left[\left(\rho + \frac{\epsilon E^2}{2} - \rho \epsilon_p \frac{E^2}{2} \right) n_i - \epsilon E_n E_i - 2\mu v_{ik} n_k \right] = \gamma x n_i; \quad (2)$$

$$[E_\tau] = 0; [\epsilon E_n] = \vartheta; [\sigma E_n] + \operatorname{Div} \mathbf{v}_\tau - x \vartheta v_n + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F = 0. \quad (4)$$

Здесь $F(x, y, z, t) = 0$ — уравнение поверхности раздела жидкостей, ϑ — поверхностная плотность заряда, x — удвоенная средняя кривизна поверхности раздела $[f] = f_2 - f_1$ скачек f при переходе через границу раздела по нормали $\mathbf{n}$, которая направлена из среды 1 в 2.

Проектируя (2) на нормаль и касательную плоскость к поверхности раздела, с учетом (3), получаем

$$\left[\rho - 2\mu v_{ik} n_i n_k - \rho \epsilon_p \frac{E^2}{2} + \frac{\epsilon E_\tau^2 - \epsilon E_n^2}{2} \right] = -\gamma x; \quad (5)$$

$$[2\mu v_{ik} n_i \tau_k] = \vartheta E_\tau. \quad (6)$$

Из (6) видно, что равновесие возможно в одном из двух случаев, когда $E_\tau = 0$ или $\vartheta = 0$. В настоящей работе исследуется устойчивость равновесного состояния двух жидкостей с общей плоской поверхностью раздела в нормальном электрическом поле, когда в невозмущенном состоянии $E_\tau = 0$.

Пусть две несмешивающихся жидкости, одна из которых находится над другой, заключены между двумя горизонтальными идеально проводящими электродами и представляют собой два горизонтальных плоских слоя толщиной h_1 и h_2 . Вводится декартова система координат $Oxyz$. Ось $y = b$ направлена противоположно силе тяжести q и так, чтобы плоскость $y = 0$ совпала с невозмущенной поверхностью раздела.

Жидкости, находящаяся внизу, занимает область $\Omega_1 = \{-h_1 \leq y \leq 0; \infty < x, z < -\infty\}$, верхняя — $\Omega_2 = \{0 \leq y \leq h_2; \infty < x, z < -\infty\}$, и величины, относящиеся к Ω_1 или Ω_2 , помечены соответственно индексами 1 или 2. Диэлектрические проницаемости ϵ_i , производимости σ_i , вязкости μ_i жидкостей предполагаются постоянными и заданными. В состоянии равновесия поле направлено по нормали к поверхности раздела и в области Ω_i имеет вид $E_i = (0, E_i, 0)$, $E_1 = -U\sigma_2/(\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1)$, $E_2 = -U\sigma_1/(\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1)$, U — разность потенциалов между верхним и нижним электродами. Поверхностная плотность заряда в равновесии равна $\vartheta = U(\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1)/(\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1)$.

Возмущения поверхности раздела $y = \eta(x, z, t)$, а также возмущения скорости $\mathbf{v}'$, давления p' , поля $\mathbf{e}'$ и объемного заряда ρ_e , как функций x, y, z и t , отыскиваем в виде

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \mathbf{v}' \\ p \\ \mathbf{e}' \\ \rho_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{v}^*(y) \\ p^*(y) \\ \mathbf{e}^*(y) \\ \rho_e^*(y) \end{pmatrix} \zeta(x, z, t); \quad (\zeta = e^{i\omega t - ikr}). \quad (7)$$

Считая, как обычно, их бесконечно малыми, из (1) получаем

$$\nabla^* \mathbf{v}^* = 0; \quad \nabla^* p^* = \mu \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{\omega \rho}{\mu} \right) \mathbf{v}^* + \rho_e \nabla^* (\mathbf{e}^* E) + \rho_e E; \quad (8)$$

$$\nabla^* \times \mathbf{e}^* = 0; \quad \rho_e - \epsilon \nabla^* \mathbf{e}^* = 0; \quad \omega \rho_e + \sigma \nabla^* \mathbf{e}^* = 0,$$

где $\nabla^* = (-ik_1, d/dy, -ik_2)$.

Из (8) следует, что $\rho_e^* = 0$, а для определения $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{e}^*$ и p^* имеем согласно (2)–(4) задачу

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) e_y^* &= 0; \quad e_x^* = -\frac{ik_x}{k^2} \frac{de_y^*}{dy}; \quad k_z e_x^* = k_x e_z^*; \\ \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{\omega \rho}{\mu} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v_y^* &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{\omega\rho}{\mu}\right)\left(v_x^* + \frac{ik_x}{k^2} \frac{dv_y^*}{dy}\right) = 0; \quad v_z^* = -\frac{k_x}{k_z} v_x^* - \frac{i}{k_z} \frac{dv_y^*}{dy};$$

$$p^* = \frac{\mu}{k^2} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 - \frac{\omega\rho}{\mu}\right) \frac{d}{dy} v_y^* + \rho\varepsilon_p (e^* E)$$

с условиями

$$\frac{de_y^*}{dy} = 0 \quad (10); \quad v = 0 \quad (11)$$

на электродах $y = -h_1$ и $y = h_2$, а также условиями сопряжения

$$\left[\frac{de_y^*}{dy}\right] = -ak^2 [E]; \quad [(\sigma + \varepsilon\omega) e_y^*] = [\varepsilon E] \frac{dv_y^*}{dy};$$

$$\left[\mu \left(\frac{dv_x^*}{dy} - ik_x v_y^*\right)\right] = ik_x a [\varepsilon E^2] - [\varepsilon E e_x^*]; \quad (12)$$

$$\gamma k^2 a + 2 \left[\mu \frac{dv_y^*}{dy}\right] - [p^*] + [\rho] ga = -[(\varepsilon + \rho\varepsilon_p) E e_y^*]$$

$$\left[\mu \left(\frac{dv_z^*}{dy} - ik_z v_y^*\right)\right] = ik_z a [\varepsilon E^2] - [\varepsilon e_z^* E]; \quad [v^*] = (0, a\omega, 0)$$

при $y = 0$.

Нейтральную кривую устойчивости рассматриваемого равновесного состояния плоской поверхности раздела жидкостей в нормальном электрическом поле определим для случая монотонных возмущений $\omega = 0$ [1].

Из (9), (10) имеем

$$e_{y1}^* = a_1 \operatorname{Ch} k(h_1 + y); \quad e_{y2}^* = a_2 \operatorname{Ch} k(h_2 - y);$$

$$v_{y1}^* = a_{61-3} e^{k_{11}y} + a_{61-2} e^{-k_{11}y} + ya_{61-1} e^{k_{11}y} + ya_{61} e^{-k_{11}y}; \quad (13)$$

$$v_{xi}^* = -\frac{ik_x}{k^2} \frac{dv_{yi}^*}{dy} + a_{61+1} e^{k_{11}y} + a_{61+2} e^{-k_{11}y};$$

$$v_{zi}^* = -\frac{ik_z}{k^2} \frac{dv_{yi}^*}{dy} - \frac{k_x}{k_z} a_{61+1} e^{k_{11}y} - \frac{k_x}{k_z} a_{61+2} e^{-k_{11}y}; \quad (j = 1, 2).$$

Подставляя (13) в (11, 12), получаем однородную линейную систему относительно постоянных a , a ($s = 1, 2 \dots 14$). Условие нетривиальной разрешимости указанной системы, т. е. равенство нулю ее определителя дает дисперсионное уравнение, позволяющее указать критические значения параметров для возмущений вида (7) с волновым вектором k . Если равновесная поверхность устойчива относительно возмущений с произвольным по величине и направлению вектором k , то говорят об абсолютной устойчивости в данном классе возмущений.

Рассмотрение устойчивости в общем случае без вычислений на ЭВМ затруднительно ввиду громоздкости дисперсионного

уравнения. Для простоты теоретического анализа положим $\mu_2 = 0$, т. е. будем считать, что жидкость в первом слое невязкая. Тогда дисперсионное уравнение можно представить в безразмерных переменных в виде

$$B = -\zeta^2 + A\zeta(m_1 n_2^2 \operatorname{cth} l_1 \zeta + m_2 n_1^2 \operatorname{cth} l_2 \zeta + c\beta(\alpha(n_1 - n_2)(n_1^2 m_2 - n_2^2 m_1) \operatorname{cth} l_1 \zeta \operatorname{cth} l_2 \zeta + 2n_1 n_2 l_1^2 \zeta^2 (m_2 n_1 - m_1 n_2)(\operatorname{cth} l_1 \zeta + \operatorname{cth} l_2 \zeta)) / (1 + C\beta\alpha(n_1 \operatorname{cth} l_1 \zeta + n_2 \operatorname{cth} l_2 \zeta)), \quad (14)$$

где

$$B = (\rho_1 - \rho_2) g h_0^2 / \gamma, \quad A = \varepsilon_0 U^2 / \gamma h_0, \quad C = \mu_1 (\sigma_1 + \sigma_2) (\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1)^2 / U^2 (\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)^2; \quad n_i = \varepsilon_i / (\sigma_1 + \sigma_2); \quad m_i = \varepsilon_i / \varepsilon_0; \quad l_i = h_i / h_0; \\ \alpha = \operatorname{sh} 2l_1 \zeta - 2l_1 \zeta, \quad \beta = (\operatorname{sh}^2 l_1 \zeta - l_1^2 \zeta^2)^{-1}, \quad h_0 = (\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1) / (\sigma_1 + \sigma_2), \\ \varepsilon_0 = (\sigma_1 \varepsilon_2 + \sigma_2 \varepsilon_1) / (\sigma_1 + \sigma_2), \quad \zeta = h_0 k.$$

Следует отметить, что в общем случае устойчивость зависит от вязкости, которая входит в безразмерный комплекс C . При $C \gg 1$ из (14) получаем уравнение

$$B = -\zeta^2 + A\zeta(n_1 - n_2)(n_1^2 m_2 - n_2^2 m_1)(n_1 \operatorname{th} l_2 \zeta + n_2 \operatorname{th} l_1 \zeta), \quad (15)$$

исследованное в работе [6]. Поэтому результаты, приведенные в [6], справедливы для проводящих жидкостей с близкими временами релаксации $\tau_e = \varepsilon / \sigma$ и большой вязкостью.

Если одна из жидкостей непроводящая, то (14) переходит в $B = -\zeta^2 + A\zeta \operatorname{cth} \zeta$, что совпадает с результатами [6, 7] и не зависит от вязкости.

Для слабопроводящих жидкостей, как следует из общей системы уравнений для возмущений (9)–(12) при $\tau_e \gg \omega^{-1}$, дисперсионное уравнение имеет вид $B = -\zeta^2 + A\zeta(m_1 n_2 \operatorname{cth} l_1 \zeta + m_2 n_1 \operatorname{cth} l_2 \zeta)$ (16), которое можно также получить из (14), положив $C = 0$. Этот же результат получаем для невязких жидкостей. Поскольку последнее слагаемое в (16) больше нуля, то электрическое поле, нормальное к невозмущенной поверхности раздела, ухудшает ее устойчивость.

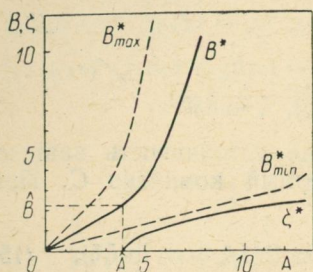
Определяя максимум правой части (16) по ζ , находим критерий абсолютной устойчивости, как зависимость $B = B^*(A)$, которая для $0 \leq A \leq \hat{A} \equiv 3 / (m_1 l_1 n_2^2 + m_2 l_2 n_1^2)$ имеет вид $B^* = A(m_1 l_2 n_2^2 + m_2 l_1 n_1^2)$, а при $A \geq \hat{A}$ представляется параметрически уравнениями (16) и

$$A = 4\zeta \left/ \left(n_2^2 m_1 \frac{\operatorname{sh} 2l_1 \zeta - 2l_1 \zeta}{\operatorname{sh}^2 l_1 \zeta} + n_1^2 m_2 \frac{\operatorname{sh} 2l_2 \zeta - 2l_2 \zeta}{\operatorname{sh}^2 l_2 \zeta} \right) \right. \quad (17)$$

При этом для $B < \hat{B} \equiv 3(m_1 l_2 n_2^2 + m_2 l_1 n_1^2) / l_1 l_2 (m_1 l_1 n_2^2 + m_2 l_2 n_1^2)$, т. е. в случае малых значений числа Бонда B , не-

устойчивы длинноволновые возмущения, соответствующие значению $\zeta = 0$. При $B > \hat{B}$ неустойчивы возмущения с конечной длиной волны, волновое число которых ζ^* определяется как корень уравнения (17). Графики $\zeta^*(A)$ и $B^*(A)$ для некоторого произвольного набора значений параметров $m_1, n_1, l_1 \dots$ представлены на рисунке сплошной линией, причем область устойчивости находится выше кривой $B = B^*(A)$.

Из семейства кривых $B = B^*(A)$ можно выделить две — $B_{\max}^*$, проходящую выше всех кривых из семейства, и $B_{\min}^*$, занимающую нижнее положение. Кривая $B_{\max}^*$ ограничивает снизу область устойчивости в случае $n_1 = 0$ (или $n_2 = 0$), т. е. когда проводимости одной жидкости значительно меньше, чем у другой. В этом, наиболее часто реализуемом на практике случае, неустойчивость плоской поверхности раздела в зависимости от величины поля наступает раньше, чем для жидкостей с менее выраженным различием в проводимости.



Кривую $B_{\min}^*$ получаем при $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = l_1/2 = l_2/2 = 1/2$, т. е. когда $\tau_{e1} = \tau_{e2}$. В этом случае критерий устойчивости $B > B^*(A)$, полученный из общего дисперсионного уравнения (14) при $C = 0$, неприменим, так как квадрат разности $\tau_{e1} - \tau_{e2}$ входит в знаменатель C . Таким образом, для сред с близкими τ_e нужно исследовать общее дисперсионное уравнение (14) или его следствие (15). В частности, как видно из (14), при $m_1 = m_2$ и $n_1 = n_2$, т. е. когда проводимости и проницаемости сред совпадают, $B^*(A) = 0$ и устойчивость не зависит от внешнего поля.

Список литературы: 1. Гидромеханика невесомости/ В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др.— М.: Наука, 1976.— 504 с. 2. Таранов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1974, № 5, с. 141 — 144. 3. Ермаков В. И. Равновесие и устойчивость границы раздела идеально проводящей и непроводящей жидкостей между двумя горизонтальными слабоискривленными заряженными поверхностями.— Вестн. Харьк. ун-та, № 177. Прикладная математика и механика, 1979, вып. 44, с. 22 — 27. 4. Melcher J. R., Schwarz W. J. Interfacial Relaxation Overstability in a Tangential Electric Field.— Phys Fluids, 1969, 11, № 12, p. 2604—2616. 5. Melcher J. R., Smith C. V. Electrohydrodynamic, charge Relaxation and Interfacial Perpendicular Field Instability.— Phys. Fluids, 1969, 12, № 4, p. 778 — 790. 6. Ермаков В. И. Об устойчивости границы раздела двух диэлектрических жидкостей в электрическом поле.— Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с. 85 — 89. 7. Taylor G. A. McEwan A. D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field.— I. fluid.mech. 1965, 22, № 1, p. 1 — 15. 8. Ермаков В. И. К устойчивости плоской поверхности раздела движущихся жидкостей в электрическом поле.— В кн.: Материалы всесоюз. совещан. по проблемам намагнич. жидкостей. Изд. МГУ, 1979, с. 21 — 22.

Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 221—239. 10. Тарапов И. Е. Ермаков В. И. Движение поляризующейся жидкости в каналах.— Вестн. Харьк. ун-та, № 148. Прикладная математика и механика, 1977, вып. 42, с. 89—92.

Поступила в редколлегию 19.09.79.

УДК 532.516

Л. П. ТЕРЕХОВ

ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается стационарная задача о плоскопараллельном движении вязкой несжимаемой жидкости, полностью занимающей пространство между внешним круговым цилиндром безразмерного радиуса R и m внутренними цилиндрами безразмерных радиусов R_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Плоское течение обусловлено равномерным вращением цилиндров вокруг параллельных друг другу их осей симметрии в предположении, что длины цилиндров бесконечны, а граничные контуры не имеют общих точек.

С целью удобства применения численных методов при получении окончательных результатов задача решается в безразмерных переменных. Предположено, что все величины, имеющие размерность длины, скорости и функции тока плоского течения отнесены к L , ΩL и ΩL^2 соответственно. При этом L — произвольный фиксированный линейный размер, а Ω — характерная угловая скорость.

Если использовать полярную систему координат (r, θ) с плюсом в точке O — центре внешнего контура (рис. 1), то все основные характеристики течения могут быть выражены через функцию тока $\psi_0(r, \theta)$, выбираемую таким образом, что

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}; v_\theta = - \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad (1)$$

где v_r, v_θ — компоненты вектора скорости жидкой частицы.

Пренебрегаем влиянием сил инерции, считая их малыми по сравнению с вязкими силами. Тогда следствием уравнений движения вязкой жидкости является то, что подлежащая определению ψ_0 должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\Delta_r \Delta_\theta \psi_0 = \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \theta^4} = 0. \quad (2)$$