

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

K-14038
П 219946

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 3

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЗАПИСКИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

ТОМ 31

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

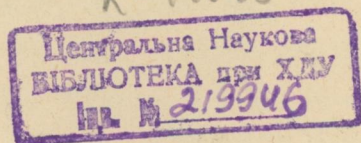
1965

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

85 № 3

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЗАПИСКИ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

ТОМ 31



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса и их связи с кинематикой на плоскости	
В. И. Бабенко. О закритических деформациях конических оболочек, находящихся под внешним давлением и осевым сжатием.	18
М. Л. Выдра. Однозначная определенность некоторых бесконечных поверхностей вращения в пространстве Лобачевского	26
В. И. Денисов. Об уравнениях движения твердого тела в римановом пространстве	30
Г. И. Дринфельд, А. В. Луценко. О мере множеств геометрических элементов	34
Е. А. Косачевская. Винтовые поверхности переноса и сдвига.	42
Ким Кыонг. Интегральные инварианты вполне интегрируемой системы уравнений в полных дифференциалах	51
А. С. Лейбин. Геометрическое определение аналитической функции, связанное с паратактическими поворотами четырехмерного пространства	65
А. И. Медяник. Некоторые теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства	75
А. Д. Милка. О параллельном переносе векторов на гладких поверхностях	82
В. В. Михайлов. Определение нижней критической нагрузки конической оболочки при продольном сжатии	94
М. А. Николаенко. О характеристиках монжевых уравнений	101
Ю. С. Слободян. Трехмерные римановы пространства, допускающие вполне геодезические поверхности	111
Г. И. Студенцов. К проективно-дифференциальной геометрии пары поверхностей	119

Редакционная коллегия:

Ахиезер Н. И., Бланк Я. П., Погорелов А. В. (ответственный редактор).

Редактор А. Г. Песчанская
 Техредактор Г. П. Александрова
 Корректоры М. И. Лелюк, Е. Т. Поступай

Сдано в набор 19/VI 1964 г. Подписано к печати 19/XII 1964 г. БЦ 10898. Формат 70×108¹/₁₆. Объем 8,25 физ. печ. л., 11,3 усл. печ. л., 9,3 уч.-изд. л. Зак. 2207. Тираж 500. Цена 65 коп.

Харьковская типография № 16 Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров УССР по печати. Харьков, Университетская, 16.

ПРОБЛЕМЕ В. БЛЯШКЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ КВАЗИПЕРЕНОСА И ИХ СВЯЗИ С КИНЕМАТИКОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный

В работах [1], [2] В. Бляшке установил взаимно однозначное соответствие между движениями евклидовой плоскости E и точками трехмерного проективного пространства P_3 , из которого исключены несобственные точки плоскости E .

При этом в проективном пространстве естественным образом возникает неевклидова метрика с абсолютом, состоящим из пары комплексно-сопряженных плоскостей, пересекающихся по несобственной прямой плоскости E , и из расположенной на этой прямой пары комплексно-сопряженных точек.

В. Бляшке называет геометрию этого пространства квазиэллиптической.

Независимо от Бляшке теорию поверхностей этого «пространства с распадающимся абсолютном» изучал А. Э.-А. Хатипов средствами тензорного анализа [3].

Поверхностью квазипереноса Бляшке называет поверхность квазиэллиптического пространства, допускающую каноническое представление:

$$X = A(u)B(v), \quad (1)$$

где X, A, B — бикватернионы вида:

$$x_0e_0 + x_1e_1 + \varepsilon(x_2e_2 + x_3e_3), \quad \varepsilon^2 = 0,$$

x_i — вещественные числа.

Проблема Бляшке состоит в отыскании поверхностей, которые могут быть двумя или большим числом способов представлены в виде (1). Этому соответствует в кинематике на плоскости отыскание движений с двумя степенями свободы, которые двумя существенно различными способами представимы как произведение двух движений с одной степенью свободы.

Таким образом, проблема Бляшке обобщает на квазиэллиптическое пространство известную проблему, поставленную и решенную С. Ли, о поверхностях переноса двойного образования евклидова пространства*.

В настоящей работе вводится понятие квазисопряженности сети кривых на поверхности квазиэллиптического пространства. Доказывается, что для того, чтобы сеть кривых была сетью квазипереноса, не-

* На III Всесоюзном математическом съезде в Москве в 1956 г. В. Бляшке в устной беседе сообщил одному из авторов настоящей статьи, что ему не известен пример поверхности квазипереноса двойного образования.

обходимо и достаточно, чтобы она была чебышевской (в обобщенном смысле) и квазисопряженной.

В работе найдены все поверхности вращения, являющиеся одновременно поверхностями квазипереноса. Они несут либо четыре сети квазипереноса, либо бесконечное множество сетей квазипереноса. Определены соответствующие им движения с двумя степенями свободы евклидовой плоскости и их расслоения на произведения однопараметрических движений.

Н. Г. Чеботареву [4] принадлежит широкое обобщение поверхностей переноса, заключающееся в следующем. Дана группа преобразований G . Рассматриваются поверхности, допускающие системы импримитивности относительно G , т. е. несущие семейства кривых, переводящихся друг в друга преобразованиями из G .

В случае трехчленной группы траектории точек линий импримитивности группы G являются линиями импримитивности для группы H , взаимной с G и совпадающей с нею только в случае коммутативности G .

Обобщая проблему Ли о поверхностях переноса двойного образования, Н. Г. Чеботарев доказал, что обобщенная поверхность переноса может иметь или континуум систем импримитивности или не более четырех. Однако до сих пор оставалось неизвестным, существуют ли обобщенные поверхности переноса, которые имеют все четыре системы импримитивности.

Найденные нами поверхности, несущие четыре сети квазипереноса, дают положительный ответ на этот вопрос, поставленный Н. Г. Чеботаревым [5].

§ 1. Кинематическое отображение Бляшке—Грюнвальда

Рассмотрим три плоскости $z = 1$, $z = 0$ (плоскость E) и $z = -1$.

Прямые проективного пространства P_3 , не пересекающие несобственную прямую S плоскости E , пересекают эти три плоскости в точках l_0 , m , r_0 . Их ортогональными проекциями на E служат точки l_1 , m ,

r_1 . После поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг m точки l_1 , r_1 переходят в l , r .

Таким образом, прямым пространства P_3 ставятся в соответствие упорядоченные пары точек (l, r) .

Прямые пространства P_3 , соответствующие упорядоченным парам точек $(l_1 r_1)$ $(l_2 r_2)$, называются право параллельными, если $r_1 = r_2$, и лево параллельными, если $l_1 = l_2$.

Рассмотрим пару комплексно-сопряженных точек $S_1(0, 0, 1, i)$, $S_2(0, 0, 1, -i)$ прямой S и пару комплексно-сопряженных плоскостей $\alpha_1(x_0 - ix_1 = 0)$, $\alpha_2(x_0 + ix_1 = 0)$, пересекающихся по S .

Все правые параллели к некоторой прямой пересекают одну и ту же пару прямых, из которых одна лежит в плоскости α_1 и проходит через S_1 , а вторая лежит в плоскости α_2 и проходит через S_2 .

Аналогично, все левые параллели пересекают пару прямых, из которых одна лежит в плоскости α_1 и проходит через S_2 , а вторая лежит в плоскости α_2 и проходит через S_1 .

Если G_{ik} плюккеровы координаты прямой, соответствующей упорядоченной паре точек (l, r) , пронормированные так, что $G_{01} = 1$, то координаты x , y точки l :

$$x = G_{02} + G_{31},$$

$$y = G_{03} + G_{12},$$

а координаты x' , y' точки r :

$$x' = G_{02} - G_{31},$$

$$y' = G_{03} - G_{12}.$$

Плоскости α_1 , α_2 и точки S_1 , S_2 составляют абсолют квазиэллиптического пространства.

Связке прямых с центром в точке $P(x, y, z)$ соответствуют поля $\{l\}$, $\{r\}$, которые совмещаются движением: вращением вокруг ортогональной проекции точки P на плоскость E на угол

$$\omega = -2 \operatorname{arccotg} z$$

в случае, когда P — собственная точка, и параллельным переносом, когда P — несобственная точка.

Таким образом, каждой точке P_3 , не лежащей на прямой C плоскости E , взаимно однозначно соответствует движение в плоскости E .

Аналитически кинематическое отображение можно задать посредством бикватернионов следующим образом.

Пусть p_i — вейерштрассовы координаты точки квазиэллиптического пространства, пронормированные так, что

$$p_0^2 + p_1^2 = 1^*,$$

следовательно,

$$p_0 = \cos \varphi, \quad p_1 = \sin \varphi.$$

Тогда точке

$$p = p_0 e_0 + p_1 e_1 + \varepsilon(p_2 e_2 + p_3 e_3), \quad \varepsilon^2 = 0$$

квазиэллиптического пространства соответствует движение на плоскости E , переводящее поле точек l

$$l = e_1 + \varepsilon(xe_2 + ye_3)$$

в поле точек r

$$r = e_1 + \varepsilon(x'e_2 + y'e_3)$$

и определяемое уравнением:

$$r = \bar{p}lp, \tag{2}$$

или

$$l = pr\bar{p},$$

где $\bar{p}$ — бикватернион сопряженный p :

$$p\bar{p} = \bar{p}p = 1.$$

Произведению движений соответствует произведение бикватернионов. Именно, если

$$l' = \bar{p}lp, \quad l'' = \bar{q}l'q,$$

то

$$l'' = \bar{p}q\bar{l}pq.$$

В квазиэллиптическом пространстве любое движение

$$X^* = AXB$$

может быть представлено как произведение двух квазипереносов — правого

$$X' = XB$$

* Этим исключаются точки абсолюта, для которых $p + p_1^2 = 0$.

и левого

$$X^* = AX'.$$

Соответственно этому поверхность квазипереноса определяется уравнением:

$$X(u, v) = A(u) \cdot B(v).$$

§ 2. Условия, характеризующие сеть квазипереноса

Расстояние между двумя точками y_i, z_i квазиэллиптического пространства определяется по проективному мероопределению Кэли-Клейна так:

$$\rho(y, z) = \frac{i}{2} \ln D(y, z, x, x^*),$$

где x, x^* — точки пересечения прямой (y, z) с плоскостями абсолюта α_1, α_2 .

Следовательно,

$$\rho(y, z) = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где

$$y_0 = \cos \varphi_1, \quad y_1 = \sin \varphi_1,$$

$$z_0 = \cos \varphi_2, \quad z_1 = \sin \varphi_2.$$

Отсюда

$$ds^2 = d\varphi^2 = dx_0^2 + dx_1^2.$$

Если u^1, u^2 криволинейные координаты на поверхности квазиэллиптического пространства, то ее первая квадратичная дифференциальная форма:

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k,$$

где

$$g_{ik} = \frac{\partial x_0}{\partial u^i} \frac{\partial x_0}{\partial u^k} + \frac{\partial x_1}{\partial u^i} \frac{\partial x_1}{\partial u^k} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u^k},$$

причем

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0.$$

Чтобы координатная сеть была чебышевской, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi = U_1(u^1) + U_2(u^2).$$

Положив

$$U_1(u^1) = u, \quad U_2(u^2) = v,$$

получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos(u + v), \\ x_1 &= \sin(u + v). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем понятие квазисопряженности. Пусть в данной точке $O(x_i)$ поверхности S задано направление касательной δx_i . Опишем около данной поверхности S линейчатую, образованную прямыми лево (право) параллельными к δx_i . Эта линейчатая поверхность касается поверхности S вдоль некоторой кривой γ , проходящей через O .

Касательную dx_i к этой кривой в точке O назовем левой (правой) квазисопреженной с δx_i .

Аналитически условие квазисопреженности можно получить следующим образом.

Плюккерovy координаты G_{ik} прямой δx_i определяются как миноры матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\delta x_0}{\delta \varphi} & \frac{\delta x_1}{\delta \varphi} & \frac{\delta x_2}{\delta \varphi} & \frac{\delta x_3}{\delta \varphi} \end{pmatrix}.$$

Вдоль γ прямолинейные образующие линейчатой поверхности лево параллельны и характеризуются условием:

$$G_{02} + G_{21} = \text{const},$$

$$G_{03} + G_{12} = \text{const}.$$

Следовательно, для dx_i выполняются условия:

$$d(G_{02} + G_{21}) = 0, \quad d(G_{03} + G_{12}) = 0,$$

или

$$\frac{dx_2}{d\varphi} - \frac{\delta x_2}{\delta \varphi} = x_3 + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\delta x_3}{\delta \varphi} \right),$$

$$\frac{\delta x_3}{\delta \varphi} - \frac{dx_3}{d\varphi} = x_2 + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\delta x_2}{\delta \varphi} \right).$$

Присоединим к этим уравнениям еще два тождества

$$0 = x_1 + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\delta x_1}{\delta \varphi} \right),$$

$$0 = x_0 + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\delta x_0}{\delta \varphi} \right).$$

Умножая эти равенства соответственно на $\xi_3, \xi_2, \xi_1, \xi_0$,

где ξ_i — координаты касательной плоскости, пронормированные так, что

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1^*,$$

получим

$$S\xi_i x_i + S\xi_i \frac{d}{d\varphi} \frac{\delta x_i}{\delta \varphi} = \xi_3 \left(\frac{dx_2}{d\varphi} - \frac{\delta x_2}{\delta \varphi} \right) + \xi_2 \left(\frac{\delta x_3}{\delta \varphi} - \frac{dx_3}{d\varphi} \right).$$

Первое слагаемое равно нулю.

Второе слагаемое

$$S\xi_i \frac{d}{d\varphi} \frac{\delta x_i}{\delta \varphi} = -S \frac{d\xi_i}{d\varphi} \cdot \frac{\delta x_i}{\delta \varphi} = b_{ik} \frac{du^i}{d\varphi} \frac{du^k}{\delta \varphi},$$

где

$$b_{ik} du^i du^k =$$

вторая квадратичная дифференциальная форма поверхности.

Если воспользоваться равенствами

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{\delta v}{\delta \varphi} - \frac{dv}{d\varphi} \frac{\delta u}{\delta \varphi} = \frac{1}{\varphi_u} \left(\frac{\delta v}{\delta \varphi} - \frac{dv}{d\varphi} \right) = \frac{1}{\varphi_v} \left(\frac{du}{d\varphi} - \frac{\delta}{\delta \varphi} \right),$$

* Этим исключаются плоскости, проходящие через S_1 или S_2 .

правую часть (4) можно преобразовать к виду:

$$\xi_3 \left(\frac{dx_2}{d\varphi} - \frac{\delta x_2}{\delta\varphi} \right) + \xi_2 \left(\frac{\delta x_3}{\delta\varphi} - \frac{dx_3}{d\varphi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} & \xi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u^1} - \xi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} & \xi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u^2} - \xi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{du^1}{d\varphi} & \frac{\delta u^1}{\delta\varphi} \\ \frac{du^2}{d\varphi} & \frac{\delta u^2}{\delta\varphi} \end{vmatrix}.$$

Введем тензор

$$\varepsilon_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} & \xi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u^i} - \xi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u^i} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u^k} & \xi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u^k} - \xi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u^k} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что тензор

$$\varepsilon_{ik} = \left(X, x, \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^k} \right),$$

где $X(0, 0, \xi_2, \xi_3)$ — полюс касательной плоскости относительно абсолюта [3].

Условие квазисопряженности сети запишется так:

$$(b_{ik} \pm \varepsilon_{ik}) du^i \delta u^k = 0, \quad (5)$$

(знак + для левой, знак — для правой квазисопряженности).

Это соотношение устанавливает в пучке касательных к поверхности два (в зависимости от знака) проективных соответствия. Двойными элементами служат асимптотические касательные. Соответствие вырождается, если

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} + \varepsilon_{12} \\ b_{21} + \varepsilon_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

Это имеет место только при $K=0$.

Квазисопряженность не инволюционна. Если поменять местами символы d и δ , знак перед ε_{ik} меняется на противоположный, т. е., если t_2 — правая квазисопряженная касательная к t_1 , то t_1 — левая квазисопряженная к t_2 .

Найдем необходимое и достаточное условие, чтобы сеть кривых на поверхности квазиэллиптического пространства была сетью квазипереноса.

Канонические уравнения поверхности квазипереноса по (1):

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos(u+v) \\ x_1 &= \sin(u+v) \\ x_2 &= b_2(v) \cos u - b_3(v) \sin u + a_2(u) \cos v + a_3(u) \sin v \\ x_3 &= b_3(v) \cos u + b_2(v) \sin u + a_3(u) \cos v - a_2(u) \sin v. \end{aligned} \quad (6)$$

Для координатной сети условие квазисопряженности (5) принимает вид

$$b_{12} \pm \varepsilon_{12} = 0. \quad (5')$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для поверхности (6) это условие выполняется.

Если отнести поверхность к тетраэдру

$$x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, X,$$

дериwационные формулы запишутся так [3]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} = G_{ik}^j \frac{\partial x}{\partial u^j} - g_{ik} x + b_{ik} X, \quad i, k = 1, 2, \quad (7)$$

где $u^1 = u$, $u^2 = v$.

Подставляя значения x_i по (6) в уравнения (7), убеждаемся, что

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = 0. \quad (8)$$

Условия (8) означают, что касательные к линиям v вдоль линий u (соответственно касательные к линиям u вдоль v) параллельны в смысле Леви-Чивита относительно связности G_{ik}^j .

При произвольном выборе криволинейных координат на поверхности условия (8) запишутся так:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + G_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (5), (9) составляют необходимые условия, чтобы сеть кривых была сетью квазипереноса.

Докажем, что эти условия являются и достаточными. Действительно, примем сеть v^1, v^2 за координатную, тогда уравнения (5), (9) принимают вид:

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = 0, \quad (8)$$

$$b_{12} \pm \varepsilon_{12} = 0. \quad (5')$$

В силу дериwационных формул (7) из (8) следует

$$\varphi = U(u) + V(v);$$

положив

$$U(u) = u_1, \quad V(v) = v_1$$

и опустив индексы, получим

$$x_0 = \cos(u + v), \quad x_1 = \sin(u + v),$$

откуда следует

$$g_{ik} = 1, \quad i, k = 1, 2.$$

Из условий (5'), (8) и дериwационных формул (7), следует

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} + x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} + x_3 = \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u}.$$

Интегрируя эту систему, находим для x_2, x_3 выражения, совпадающие с формулами (6).

Таким образом, (5) и (9) являются и достаточными условиями, чтобы сеть кривых на поверхности была сетью квазипереноса.

§ 3. Поверхности вращения, являющиеся поверхностями квазипереноса

1. Если потребовать, чтобы две точки $M_1(1, 0, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0, 0)$ оставались инвариантными относительно движения

$$X' = AXB$$

квазиэллиптического пространства, получим группу вращений вокруг прямой M_1M_2 . При этом кривая, лежащая в плоскости $x_2 = 0$, опишет поверхность вращения:

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos u \\ x_1 &= \sin u \\ x_2 &= p(u) \cos v \\ x_3 &= p(u) \sin v. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности 10:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \quad g_{12} = g_{22} = 0 \\ b_{11} &= p + p'', \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = -p. \end{aligned} \quad (11)$$

Для G_{ik}^i и ε_{ik} находим следующие значения

$$\begin{aligned} G_{12}^2 &= \frac{p'}{p}, \quad G_{ik}^1 = G_{11}^2 = G_{22}^2 = 0, \\ (\varepsilon_{12})^2 &= p^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть сеть кривых

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \psi(u, v) \quad (13)$$

поверхности (10) является сетью квазипереноса. Тогда для этой сети выполняются уравнения (5), (9), которые теперь принимают такой вид:

$$\begin{aligned} p(\varphi + 1)(\psi - 1) &= p'' \\ \varphi_u + \psi\varphi_v &= -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi) \\ \psi_u + \varphi\psi_v &= -\frac{p'}{p}(\varphi + \psi). \end{aligned} \quad (14)$$

Первое из уравнений (14) перепишем так:

$$\frac{\varphi + 1}{p''} = \frac{1}{p(\psi - 1)} = \sigma, \quad (15)$$

(если $p'' = 0$, $\psi = 1$, $\varphi = -1$, $k = 0$, кривыми квазипереноса служат асимптотические линии).

Тогда

$$\varphi = p''\sigma - 1, \quad \psi = \frac{1}{p\sigma} + 1. \quad (16)$$

Подставив эти значения φ , ψ в остальные два уравнения (14), получим два уравнения в частных производных первого порядка на одну функцию σ :

$$\begin{aligned} p^2 p'' \sigma \sigma_u + p p'' (1 + p\sigma) \sigma_v + p (p p'')' \sigma^2 + p' &= 0, \\ \sigma_u + (p''\sigma - 1) \sigma_v - p' p \sigma^3 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при σ_u, σ_v , системы (17)

$$\Delta = pp''(pp''\sigma^2 - 2p\sigma - 1) = \frac{p''}{p\sigma}(\varphi - \psi)$$

отличен от нуля, поэтому система (17) разрешима относительно σ_u, σ_v :

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_u &= -pp'p''\sigma^4 + \frac{(pp'')'}{p''}\sigma^2 - \frac{p'}{p}\sigma + \frac{p'}{pp''} \\ \Delta\sigma_v &= pp'p''\sigma^4 + \frac{(pp'')'}{p''}\sigma^2 + \frac{p'}{pp''}.\end{aligned}\quad (18)$$

Условия совместности системы (18)

$$\Delta(\alpha\sigma^4 + \beta\sigma^2 + \gamma) = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= pp''^2 - pp'p''' - 2p'^2p'', \\ \beta &= p'' - 5\frac{p'^2}{p} - \frac{pp'''^2}{p''^2} + \frac{pp'^2}{p''}, \\ \gamma p^2 p''^2 &= \alpha.\end{aligned}\quad (20)$$

2. Если условие совместности (19) выполняется тождественно относительно σ , система (18) вполне интегрируема и поверхность (10) несет ∞^1 сетей квазипереноса.

Определим эти поверхности. Приравняв нулю коэффициенты α, β, γ в уравнении (19), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения на одну функцию p , общим решением которых служит

$$p = \sqrt{a + 2bu}. \quad (21)$$

Для отыскания сетей квазипереноса надо проинтегрировать вполне интегрируемую систему (18).

Положив

$$\rho = p'\sigma, \quad (22)$$

систему (18) перепишем так:

$$\begin{aligned}\left(\rho^2 + 2\frac{p}{p'}\rho + 1\right)\rho_v &= (\rho^2 + 1)^2, \\ \left(\rho^2 + 2\frac{p}{p'}\rho + 1\right)\rho_u &= 1 - \rho^4.\end{aligned}\quad (18')$$

Интеграл этой системы

$$\operatorname{arctg} \rho - \frac{p}{p'} \frac{1}{1 + \rho^2} = v - u + C. \quad (23)$$

В силу (16)

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{dv}{du} = -\frac{p'}{p}\rho - 1, \\ \psi &= \frac{\delta v}{\delta u} = \frac{p'}{pp} + 1.\end{aligned}\quad (24)$$

Интегрируя эти уравнения, учитывая (23), (21), находим уравнения обеих семейств кривых сети квазипереноса:

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2}{p^2 - \lambda^2}, \quad (25)$$

$$p^2 = \mu^2 (1 + \rho^2), \quad (26)$$

где λ , μ — параметры сети квазипереноса. Из уравнений (25), (26), (21) и (23) находим формулы перехода от координат u , v к координатам λ , μ :

$$u = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a}{2b}, \quad (27)$$

$$v = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2 - a}{2b} - C.$$

Вводя вместо параметров λ , μ сети квазипереноса новые параметры ξ , η

$$\xi = \frac{\lambda^2 - a}{2b}, \quad \eta = \frac{\mu^2}{2b}, \quad (28)$$

получим каноническое представление найденных поверхностей квазипереноса посредством произведения бикватернионов

$$X = A(\xi) B(\eta),$$

где

$$A(\xi) = \cos \xi e_0 + \sin \xi e_1 + \varepsilon [-\sqrt{a + 2b\xi} \sin(\xi - c) e_2 + \sqrt{a + 2b\xi} \cos(\xi - c) e_3], \quad (29)$$

$$B(\eta) = \cos \eta e_0 + \sin \eta e_1 + \varepsilon [\sqrt{2b\eta} \cos(\eta + c) e_2 - \sqrt{2b\eta} \sin(\eta + c) e_3].$$

С изменением параметра c получаем все ∞^1 канонических представлений.

3. В случае, когда условие совместности (19) не является тождеством относительно σ , число сетей квазипереноса конечно.

Решая уравнение (19), находим σ как функцию одной лишь переменной u :

$$\sigma_v = 0.$$

Следовательно, по (16)

$$\varphi_v = \psi_v = 0.$$

Два последних уравнения системы (14) переписутся так:

$$\begin{aligned} p'(\varphi + \psi) + p\varphi' &= 0, \\ p'(\varphi + \psi) + p\psi' &= 0. \end{aligned} \quad (14')$$

Интегрируя эту систему, получим

$$\varphi = A + \frac{B}{p^2}, \quad \psi = -A + \frac{B}{p^2}.$$

Внеся эти значения в первое уравнение системы (14), получим дифференциальное уравнение, определяющее меридианы поверхности вращения:

$$p'' + p(A - 1)^2 - \frac{B^2}{p^3} = 0. \quad (31)$$

Его первый интеграл

$$2p'^2 + \frac{B^2}{p^2} + p^2(A-1) = C. \quad (32)$$

Интегрируя (32), находим при $A \neq 1$

$$\frac{2(A-1)^2 p^2 - C}{\pm \sqrt{C^2 - 4B^2(A-1)^2}} = \sin 2(A-1)(u+C'). \quad (33)$$

Из (33) следует

$$p^2(u) = h \sin \omega + g, \quad (34)$$

где

$$h = \frac{\pm \sqrt{C^2 - 4B^2(A-1)^2}}{2(A-1)^2}, \quad g = \frac{C}{2(A-1)^2}, \quad \omega = 2(A-1)(u+C').$$

Сети квазипереноса определяются дифференциальными уравнениями

$$\varphi = \frac{dv}{du} = A + \frac{B}{p^2}; \quad \psi = \frac{\delta v}{\delta u} = -A + \frac{B}{p^2}. \quad (35)$$

Интегрируя (35), находим

$$\begin{aligned} v &= Au + \frac{1}{2} \arcsin \frac{g \sin \omega + h}{h \sin \omega + g} - 2A\eta, \\ v &= -Au + \frac{1}{2} \arcsin \frac{g \sin \omega + h}{h \sin \omega + g} + 2A\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

где ξ, η — параметры сети квазипереноса. Определив из (36) u, v как функции ξ, η и подставив в уравнения поверхности вращения (10), получим ее каноническое представление как поверхности квазипереноса:

$$X = A(\eta) B(\xi), \quad (37)$$

где $A(\eta) = \cos \eta e_0 + \sin \eta e_1 + \varepsilon \{a \sin [(2A-1)\eta + 2(A-1)C'] e_2 + a \cos [(2A-1)\eta + 2(A-1)C'] e_3\}$,

$$B(\xi) = \cos \xi e_0 + \sin \xi e_1 + \varepsilon \{b \cos [(2A-1)\xi + 2(A-1)C'] e_2 - b \sin [(2A-1)\xi + 2(A-1)C'] e_3\},$$

$$a = \frac{\sqrt{C+2B}}{2(A-1)}, \quad b = \frac{\sqrt{C-2B}}{2(A-1)}.$$

В случае, когда $A=1$, меридиан поверхности определяется уравнением

$$C^2 p^2 = (C^2 u + C_1)^2 + B^2,$$

а сети квазипереноса

$$v = u + \operatorname{arctg} \left(\frac{C^2}{B} u + \frac{C_1}{B} \right) - 2\xi,$$

$$v = -u + \operatorname{arctg} \left(\frac{C^2}{B} u + \frac{C_1}{B} \right) + 2\eta.$$

При этом каноническое уравнение поверхности квазипереноса имеет вид:

$$X = A(\eta) B(\xi),$$

где

$$\begin{aligned}
 A(\eta) &= \cos \eta e_0 + \sin \eta e_1 + \varepsilon \{ (-C\eta \sin \eta) e_2 + (C\eta \cos \eta) e_3 \} \\
 B(\xi) &= \cos \xi e_0 + \sin \xi e_1 + \varepsilon \left\{ \left[\frac{B}{C} \cos \xi + \left(C\xi + \frac{C_1}{C} \right) \sin \xi \right] e_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{B}{C} \sin \xi + \left(C\xi + \frac{C_1}{C} \right) \cos \xi \right] e_3 \right\}.
 \end{aligned} \quad (38)$$

Из (19) следует, что поверхность вращения несет либо ∞^1 сетей квазипереноса, либо не более четырех.

Покажем, что на найденных поверхностях существуют все четыре сети квазипереноса.

Действительно, при замене B на $-B$, или $(A-1)$ на $-(A-1)$ меридиан поверхности вращения, определяемый уравнением (34), не изменяется, тогда как сети квазипереноса, определяемые уравнениями (35), существенно изменяются.

Таким образом поверхность несет четыре сети квазипереноса:

$$\begin{aligned}
 1^\circ. \quad \frac{dv}{du} &= A + \frac{B}{p^2}, & \frac{\delta v}{\delta u} &= -A + \frac{B}{p^2}, \\
 2^\circ. \quad \frac{dv}{du} &= A - \frac{B}{p^2}, & \frac{\delta v}{\delta u} &= -A - \frac{B}{p^2}, \\
 3^\circ. \quad \frac{dv}{du} &= 2 - A + \frac{B}{p^2}, & \frac{\delta v}{\delta u} &= A - 2 + \frac{B}{p^2}, \\
 4^\circ. \quad \frac{dv}{du} &= 2 - A - \frac{B}{p^2}, & \frac{\delta v}{\delta u} &= A - 2 - \frac{B}{p^2}.
 \end{aligned}$$

Все четыре способа представления найденных поверхностей в виде (1) получим, заменяя в формулах (37) A на $2-A$ либо B на $-B$ или выполняя обе замены одновременно.

§ 4. Кинематическое отображение полученных поверхностей квазипереноса

1. Поверхности квазипереноса соответствует в силу кинематического отображения Бляшке-Грюнвальда движение с двумя степенями свободы евклидовой плоскости, представимое в виде произведения двух однопараметрических движений.

Поверхности (29) несут ∞^1 сетей квазипереноса. Следовательно, соответствующие им двухпараметрические множества движений евклидовой плоскости допускают ∞^1 способов представления в виде произведения двух однопараметрических движений.

Найдем эти представления. Подставляя в уравнение (2) значение кватерниона A из (29), получим

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos 2\xi + y \sin 2\xi - 2\sqrt{a + 2b\xi} \cos C \\
 y' &= y \cos 2\xi - x \sin 2\xi + 2\sqrt{a + 2b\xi} \sin C.
 \end{aligned} \quad (39)$$

Это движение с одной степенью свободы можно осуществить путем качения подвижной центроиды по неподвижной.

Уравнение неподвижной центроиды:

$$x = \frac{b}{\sqrt{a+2b\xi}} \sin(c-2\xi), \quad (40)$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{a+2b\xi}} \cos(c-2\xi),$$

или в полярных координатах

$$\rho^2 = \frac{b^2}{a + b\left(\varphi + c - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (40')$$

Эта кривая известна под названием *lituus* Cotes'a.

Уравнение подвижной центроиды:

$$x' = \frac{b}{\sqrt{a+2b\xi}} \sin c - 2\sqrt{a+2b\xi} \cos c, \quad (41)$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a+2b\xi}} \cos c + 2\sqrt{a+2b\xi} \sin c,$$

это — равносторонняя гипербола.

Для второго однопараметрического движения, соответствующего кватерниону **B**, имеем

$$\begin{aligned} x' &= x \cos 2\eta + y \sin 2\eta + 2\sqrt{2b\eta} \sin(2\eta + c), \\ y' &= y \cos 2\eta - x \sin 2\eta + 2\sqrt{2b\eta} \cos(2\eta + c). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь уравнение неподвижной центроиды:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{\sqrt{2b\eta}} \cos c - 2\sqrt{2b\eta} \sin c, \\ y &= -\frac{b}{\sqrt{2b\eta}} \sin c - 2\sqrt{2b\eta} \cos c. \end{aligned} \quad (43)$$

Это — гипербола, конгруэнтная гиперболе (42). Уравнение подвижной центроиды:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b}{\sqrt{2b\eta}} \cos(2\eta + c), \\ y' &= -\frac{b}{\sqrt{2b\eta}} \sin(2\eta + c), \end{aligned} \quad (44)$$

или в полярных координатах:

$$\rho^2 = \frac{-b}{\varphi + c}. \quad (44')$$

Эта кривая получается из кривой (40') зеркальным отображением относительно ее асимптоты.

2. Для поверхности (37) однопараметрическое движение, соответствующее кватерниону **A**

$$\begin{aligned} x' &= x \cos 2\eta + y \sin 2\eta - 2a \cos(A-1)(2\eta + C'), \\ y' &= y \cos 2\eta - x \sin 2\eta + 2a \sin(A-1)(2\eta + C'), \end{aligned} \quad (45)$$

имеет неподвижной центроидой окружность радиуса $|2a(A-1)|$

$$\begin{aligned}x &= 2a(A-1) \cos [2A\eta + (A-1)C'], \\y &= -2a(A-1) \sin [2A\eta + (A-1)C']\end{aligned}$$

и подвижной центроидой — окружность радиуса $|2aA|$

$$\begin{aligned}x' &= 2aA \cos [(A-1)(2\eta + C')], \\y' &= -2aA \sin [(A-1)(2\eta + C')].\end{aligned}$$

Движение, соответствующее кватерниону B ,

$$\begin{aligned}x' &= x \cos 2\xi + y \sin 2\xi - 2b \sin [(A-1)(4\xi + C')], \\y' &= y \cos 2\xi - x \sin 2\xi + 2b \cos [(A-1)(4\xi + C')].\end{aligned}$$

Неподвижной центроидой служит окружность радиуса $|2bA|$:

$$\begin{aligned}x &= -2bA \sin [(A-1)(2\xi + C')], \\y &= 2bA \cos [(A-1)(2\xi + C')],\end{aligned}$$

а подвижной центроидой служит окружность радиуса $|2b(A-1)|$

$$\begin{aligned}x' &= -2b(A-1) \sin [2A\xi + (A-1)C'], \\y' &= 2b(A-1) \cos [2A\xi + (A-1)C'].\end{aligned}$$

Другие способы реализации этого движения с двумя степенями свободы как произведения двух однопараметрических движений получим, если изменим знак B , при этом a и b меняются местами, либо заменим A на $2-A$.

3. Для поверхности (38) кватерниону A соответствует движение

$$\begin{aligned}x' &= x \cos 2\eta + y \sin 2\eta - 2C\eta, \\y' &= y \cos 2\eta - x \sin 2\eta.\end{aligned}$$

Неподвижная центроида — окружность радиуса $|C|$

$$\begin{aligned}x &= -C \sin 2\eta, \\y &= C \cos 2\eta,\end{aligned}$$

подвижная центроида — прямая

$$\begin{aligned}x' &= -2C\eta, \\y' &= C.\end{aligned}$$

Кватерниону B соответствует движение:

$$x' = x \cos 2\xi + y \sin 2\xi + \frac{2B}{C} \sin 2\xi - 2\left(C\xi + \frac{C_1}{C}\right) \cos 2\xi,$$

$$y' = y \cos 2\xi - x \sin 2\xi + \frac{2B}{C} \cos 2\xi + 2\left(C\xi + \frac{C_1}{C}\right) \sin 2\xi,$$

неподвижной центроидой для которого служит прямая

$$\begin{aligned}x &= 2\left(C\xi + \frac{C_1}{C}\right), \\&= -\frac{2B}{C} + 2C,\end{aligned}$$

а подвижной центроидой — окружность

$$x' = 2C \sin 2\xi$$

$$y' = 2C \cos 2\xi.$$

Если заменить B на $-B$, получим второй способ реализации этого движения с двумя степенями свободы как произведение двух однопараметрических движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke. Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschrift für Mathematik und Physik 60, 1911, S. 61—91, 203—204.

2. W. Blaschke. Ebene Kinematik, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 25. Heft, 1938.

3. А. Э.-А. Хатипов. Теория поверхностей в пространстве с распадающимися абсолютном. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Выпуск X. 1956. стр. 285—308.

4. Н. Г. Чеботарев. Обобщенные поверхности переноса. Математический сборник, 34, 1927, стр. 149—206.

5. Н. Г. Чеботарев. Математическая автобиография. Успехи математических наук, III, вып. 4 (26), 1948, стр. 3—66.



О ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ И ОСЕВЫМ СЖАТИЕМ

В. И. Бабенко

В работе определяются нижние критические нагрузки для конических оболочек, находящихся под внешним давлением и осевым сжатием. Применяемый метод разработан А. В. Погореловым [1—5]. Основу этого метода составляет способ приближения формы оболочки при закритических деформациях. Предполагается, что закритическая деформация является, во-первых, в основном геометрическим изгибанием и, во-вторых, развитием формы волнообразования на поверхности в момент потери устойчивости.

Задача по определению верхней критической нагрузки для конических оболочек исследовалась многими авторами. Обычно предполагается, что в момент потери устойчивости поверхность оболочки имеет n плоскостей симметрии [6—8]. Мы будем предполагать, что при закритических деформациях поверхность оболочки имеет столько же плоскостей симметрии, сколько и в момент потери устойчивости.

1. Выясним, как может быть устроена поверхность, изометричная конусу с углом 2γ при вершине и имеющая n плоскостей симметрии.

Пусть z — искомая поверхность, а g_k — ее пересечение с плоскостью симметрии α_k . Так как z — развертывающаяся поверхность, то через каждую точку g_k проходит прямая и притом единственная, если исключить из рассмотрения плоские куски. В силу симметрии образующие поверхности z либо перпендикулярны α_k , либо лежат в ней. Последняя возможность исключается, так как в противном случае переход конической оболочки в поверхность z не сопровождается осевым сжатием. Таким образом, z составлена из $2n$ цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными плоскостям симметрии.

Рассмотрим две произвольные смежные плоскости симметрии α_1 и α_2 . Пусть z_1 — часть поверхности z , заключенная между ними (рис. 1). Поверхность z_1 состоит из двух цилиндрических поверхностей, пересекающихся вдоль ребра g . Если β_1 — угол между ребром g и образующей, перпендикулярной α_1 , то $\beta_1 + \beta_2 + \frac{2\pi}{n} \sin \gamma = \pi$ есть необходимое и достаточное условие изометричности z конусу с углом 2γ при вершине.

В силу симметрии z_1 изометрична части сектора с центральным углом $2\alpha = \frac{2\pi}{n} \sin \gamma$. Ограничивающим лучам $\bar{g}_i$ этого сектора по

изометрии соответствуют кривые g_i (рис. 2). Пусть ребру g на развертке соответствует кривая $\bar{g}$, а P и $\bar{P}$ — соответствующие на них точки. Пусть, далее, P проектируется на a_i в точку P_i кривой g_i .

Введем прямоугольные декартовы координаты $\tilde{x}, y_i$ в плоскости α_i и x, y на развертке. Примем за ось $\tilde{x}$ линию пересечения плоскостей α_i , а за ось x — биссектрису центрального угла. Тогда координаты точки P_1 и отрезок образующей $\lambda_1(P)$, заключенный между P

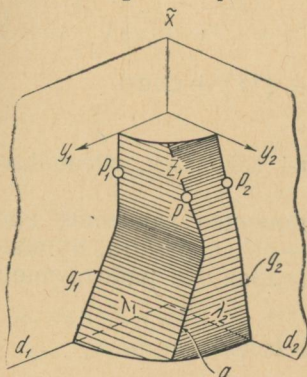


Рис. 1.

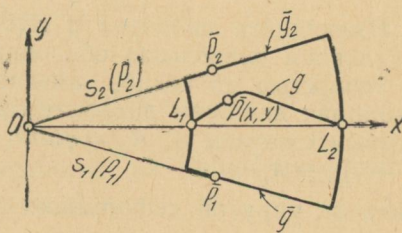


Рис. 2.

и P_1 , можно выразить через координаты точки $\bar{P}(x, y)$ равенствами:

$$y_1(P_1) = x \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - y \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n},$$

$$s_1(P_1) = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$\lambda_1(P) = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

где $s_1(P_1)$ — длина $g_1(\bar{g}_1)$.

Для $\lambda_2(P)$, $y_2(P_2)$ и $s_2(P)$ получим соответствующие равенства, заменив в предыдущих знак перед y на противоположный.

Итак, задавшись произвольной кривой g и используя приведенные соотношения, мы, таким образом, сможем построить искомую поверхность Z .

Поверхностью Z будем приближать форму срединной поверхности оболочки при закритических деформациях. При этом значение целочисленного параметра n возьмем в соответствии с характером волнообразования на поверхности оболочки в момент потери устойчивости. В связи с этим найдем выражения для кривизны k_i кривой g_i , для кривизны k ребра g и для угла ϑ между бинормалью к ребру g и нормалью к регулярному куску z . Пусть кривая g однозначно проектируется на ось x и $y = y(x)$ — ее уравнение. Тогда при достаточно большом n справедливы формулы:

$$k_1 s_1'^2 = -k_2 s_2'^2 = \frac{\pi}{2n} \cos \gamma y''(x) [1 + (*)],$$

$$k^2 = \frac{y''^2(x)}{(1 + y'^2(x))^3} [1 + (*)]; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2n} \cos \gamma (1 + y'^2(x))^{1/2} [1 + (*)],$$

где $(*)$ обозначены выражения, малые по сравнению с 1, когда $n \gg 1$.

Если l_1 и l_2 — длины образующих от вершины конуса соответственно до верхнего и нижнего оснований, то объем v , ограниченный поверхностью Z и плоскостями $\tilde{x} = \tilde{x}(l_i)$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \cos \gamma \left[\int_{l_1}^{l_2} y^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \sin \gamma \right)^2 \int_{l_1}^{l_2} x^2 y'^2 dx \right] [1 + (*)] + \text{const.}$$

Осевое сжатие конуса

$$\Delta l = \frac{\cos \gamma}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \int_{l_1}^{l_2} y'^2(x) dx [1 + (*)] + \text{const.}$$

2. Имеющийся произвол в выборе Z мы устраним, воспользовавшись условием равновесия оболочки.

С точностью до членов, имеющих подчиненное значение, работа, производимая внешним давлением p , $A_p = -pV$, а работа, производимая осевым сжатием q , $A_q = q \Delta l n l_1 \sin 2\gamma$. Полная же работа внешних сил $A = A_p + A_q$.

Энергия упругой деформации $U = U_Z + U$ [1],

где U_Z — энергия изгиба оболочки вне малой окрестности зоны сильного местного изгиба,

U_g — энергия, связанная с сильным местным изгибом вдоль ребер. Угол между кривыми, соответствующими образующим оболочки до и после деформации с точностью до членов порядка $1/n$ равен $\pi/2$. Поэтому для плотности энергии U_Z можно принять известное выражение

$$U = \frac{E \delta^3}{24(1 - \mu^2)} (\Delta k'^2 + \Delta k''^2 + 2\mu \Delta k' \Delta k''),$$

где E — модуль Юнга,
 μ — коэффициент Пуассона,
 δ — толщина оболочки,

$\Delta k'$ и $\Delta k''$ — изменение главных кривизн. В нашем случае $\Delta k' = k_i$,

$$\Delta k'' = -\frac{\text{ctg } \gamma}{s_i} [1 + (*)]. \text{ Плотность энергии } U_g \text{ [1]}$$

$$\overline{U}_g = c E \delta^{5/2} \gamma^{5/2} k^{1/2} \quad (c = 0,18).$$

Введем безразмерные величины:

$$\bar{x} = x/l_2, \quad \bar{y} = \frac{y}{l_2 \frac{\pi}{2n} \sin \gamma}, \quad x_1 = l_1/l_2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\delta \text{tg } \gamma}{l_2 \sqrt{12(1 - \mu^2)}}, \quad \bar{n} = \left[\frac{2n}{\pi \sin \gamma} \right]^2 \varepsilon,$$

$$\bar{p} = p \frac{l_2 \text{tg}^3 \gamma}{E \delta \varepsilon^3}, \quad \bar{q} = q \frac{2l_2 \text{tg}^2 \gamma}{E \delta \varepsilon^3 l_1},$$

где $x_1 \leq \bar{x} \leq 1$, $|\bar{y}(\bar{x})| \leq \bar{x}$.

Мы рассматриваем оболочки с толщиной δ , малой по сравнению с другими геометрическими размерами, поэтому будем считать ε достаточно малым, а n достаточно большим. Имея это ввиду, для полной энергии упругой деформации U получаем следующее выражение:

$$U = \pi \sqrt{12(1-\mu^2)} E \ell_2^3 \operatorname{ctg}^4 \gamma \cos \gamma \frac{\varepsilon^6}{n^2} I(\bar{y}) [1 + (*)],$$

где

$$\begin{aligned} I(\bar{y}) = \varepsilon^2 \int_{x_1}^1 \bar{x} \bar{y}''^2 d\bar{x} + 2\mu n \varepsilon \int_{x_1}^1 (\bar{x}^2 \bar{y}'^2 - \bar{y}^2) \frac{d\bar{x}}{\bar{x}^3} + \\ + \bar{c} \int_{x_1}^1 (\bar{y}'')^{1/2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{n} \bar{y}'^2 \right) d\bar{x}, \\ \bar{c} = \bar{c} n [12(1-\mu^2)]^{3/4}. \end{aligned}$$

Функция $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ теперь определится из минимума функционала $I(\bar{y})$ при условии постоянства работы A или

$$v = \int_{x_1}^1 \bar{y}^2 d\bar{x} + \frac{\varepsilon}{2n} \int_{x_1}^1 \bar{x}^2 \bar{y}'^2 d\bar{x} + \frac{\varepsilon x_1^2 \bar{q}}{2n p} \int_{x_1}^1 \bar{y}'^2 d\bar{x} = \text{const.}$$

Для шарнирно опертых оболочек в качестве граничных условий следует принять

$$\bar{y}(1) = \bar{y}(x_1) = \bar{y}''(1) = \bar{y}''(x_1) = 0.$$

Решив задачу на условный экстремум, мы тем самым полностью воспроизведем форму поверхности Z , приближающую срединную поверхность оболочки при закритических деформациях. Воспринимаемая оболочкой нагрузка найдется тогда из уравнения равновесия $dU = dA$. Нижняя же критическая нагрузка определится, как наименьшая нагрузка, воспринимаемая оболочкой.

3. Определим нижнюю критическую нагрузку p_i^1 при действии на боковую поверхность оболочки внешнего давления $p(q=0)$. В момент потери устойчивости и при закритических деформациях вдоль образующих конуса возникает одна полуволна.

Функцию, реализующую минимум $I(\bar{y})$, аппроксимируем гладкими функциями, удовлетворяющими условию:

$$\bar{y}''(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq \bar{x} \leq \frac{1+x_1}{2}(1-t) - \varepsilon_1 \\ a & \text{при } \frac{1+x_1}{2}(1-t) - \varepsilon_1 < \bar{x} < \frac{1+x_1}{2}(1-t) + \varepsilon_2 \\ 0 & \text{при } \frac{1+x_1}{2}(1-t) + \varepsilon_2 \leq \bar{x} \leq 1. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что при малом ε значения ε_1 и ε_2 , при которых достигается минимум $I(\bar{y})$, малы. Значения же параметров a

и t определяются равенствами:

$$a = \left[\frac{\bar{c}}{(1+x_1)(1-t_1)} \right]^{2/3} \varepsilon^{-4/3}, \quad t = t_1 \equiv \frac{3 - \sqrt{9 - 5t_0^2}}{5},$$

где $t_0 = \frac{1-x_1}{1+x_1}$.

Заметим, что выражение для $\bar{U}_g$ применимо лишь при выполнении условия [1]:

$$\frac{\delta k}{\vartheta} \ll 1, \quad \text{т. е.} \left(\frac{\varepsilon \bar{n}}{1+x_1} \right)^{2/3} \ll 0,25.$$

Рассмотрим сначала оболочки с неограниченной упругостью. Вычислив минимум $I(\bar{y})$ и проведя рассуждения подобно тому, как это было сделано в [3], мы находим, что нижнее критическое давление для оболочек с неограниченной упругостью определяется по формуле:

$$p_i^{(1)} = \nu_1(t_1) \left(\frac{c^2 \varepsilon^2}{\bar{n}} \right)^{1/3} \left[1 + \mu_1(t_1) \left(\frac{\varepsilon \bar{n}}{c^2} \right)^{1/3} \right] (*),$$

где

$$\nu_1(t) = \frac{18 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{(1-x_1)^2 (1-t^2/t_0^2) [(1+x_1)(1-t)]^{2/3}},$$

$$\mu_1(t) = \frac{8\mu}{3 \sqrt{12(1-\mu^2)} [(1+x_1)(1-t)]^{1/3}}, \quad c = 0,18.$$

Если оболочка замкнута в вершине, т. е. $x_1 = 0$, то верхнее критическое давление $\bar{p}_e = 20,8$, а значение параметра $\bar{n}$ в момент потери устойчивости равно 1,18 [6]. Тогда из (*) получаем, что нижнее критическое давление для замкнутых в вершине оболочек с неограниченной упругостью определится по формуле

$$p_i = 0,722 (\delta \operatorname{tg} \gamma (1-\mu^2)/l_2)^{1/3} \left(1 + 2,23 \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{7/12}} (\delta \operatorname{tg} \gamma / l_2)^{1/6} \right) \bar{p}_e.$$

Далее, для недлинных оболочек, у которых $\ln(l_2/l_1) \leq 1$, допуская погрешность в сторону занижения не более, чем на 3%, в (*) можно положить $t_1 = 0$. Тогда для нижнего критического давления получаем формулу

$$\bar{p}_i^{(1)} = 13,13 \frac{(\delta \operatorname{tg} \gamma (1-\mu^2)/\bar{n} l_2)^{1/3}}{(1-x_1)^2 (1+x_1)^{2/3}} \left(1 + 1,96 \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{7/12}} \left(\frac{\delta \operatorname{tg} \gamma \bar{n}^2}{l_2 (1+x_1)^2} \right)^{1/6} \right).$$

Рассмотрим оболочки средней длины:

$$1,7 \sqrt{\delta \operatorname{tg} \gamma / l_2} \ll \ln(l_2/l_1) \leq 1.$$

При $0,25 \leq \mu \leq 0,33$ с учетом выражения для $\bar{n}$ [8] предыдущая формула приводится к виду:

$$\bar{p}_i^{(1)} = \frac{11,05}{(1-x_1)^2} \left(- \frac{\delta \operatorname{tg} \gamma (1-\mu^2) \ln x_1}{l_2 (1+x_1)^2 x_1^{(1-\mu)/4}} \right)^{1/3} \left(1 + \right. \\ \left. + 2,35 \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \left(\frac{\delta \operatorname{tg} \gamma x_1^{(1-\mu)/2}}{l_2 (1+x_1)^2 \ln^2 x_1} \right)^{1/6} \right).$$

Заметим, что при переходе от (*) к последней формуле мы уменьшим нижнее критическое давление не более, чем на 5%.

Полученные выше формулы применимы также и для сравнительно тонких оболочек с ограниченной упругостью. Напряжения, возникающие при этом в зоне сильного местного изгиба, не должны превышать временное сопротивление σ_e , т. е.

$$c'E \sqrt{12(1-\mu^2)} \operatorname{ctg}^2 \gamma \left(\frac{c\varepsilon^4}{n^2(1+x_1)(1-t_1)} \right)^{1/3} \leq \sigma_e,$$

где $c' \approx 1,2$

В противном случае на закритические деформации сравнительно толстых оболочек накладывается дополнительное условие [4, 5]:

$$c'E (12(1-\mu^2))^{1/4} \operatorname{ctg}^2 \gamma \varepsilon^2 a^{1/2} / \bar{n} = \sigma_e.$$

Тогда значение параметра t , при котором достигается минимум $I(\bar{y})$, равно

$$t = t_2 \equiv 3 - 2\omega - \sqrt{(3 - 2\omega)^2 - t_0^2},$$

где

$$\omega = 1 - \frac{c(12(1-\mu^2))^{3/2}}{(1+x_1) \operatorname{tg}^6 \gamma n^2} (c'E/\sigma_e)^3 \varepsilon^4 \leq t_1.$$

Пластические деформации приводят к увеличению нижней критической нагрузки. Вычисления показывают, что она определяется по формуле

$$\bar{p}_i^{(2)} = C_v \nu_1(t_1) \left(\frac{c^2 \varepsilon^2}{n} \right)^{1/3} \left(1 + C_\mu \mu_1(t_1) \left(\frac{\varepsilon n}{c^2} \right)^{1/3} \right),$$

где

$$C_v = \frac{1 - t_1^2/t_0^2}{1 - t_2^2/t_0^2} \left(\frac{1 - t_1}{1 - \omega} \right)^{2/3} \frac{3 - 2\omega - t_2}{3(1 - t_2)}, \quad C_\mu = 3 \frac{(1 - t_1)^{1/3} (1 - \omega)^{2/3}}{3 - 2\omega - t_2}.$$

Значения коэффициентов C_v и C_μ приведены в табл. 1 и 2. Заметим, что $\omega \leq t_1$, но эти формулы не применимы, если $\omega \ll t_1$.

Таблица 1

Коэффициент C_v

$\omega \backslash x_1$	0,2	0,0505	0,0105	0	-3	-6	-10
0	1	1,00	1,00	1,00	1,04	1,17	1,31
0,3	—	1	1,00	1,00	1,16	1,32	1,50
0,6	—	—	1	1,00	1,18	1,36	1,54
1	—	—	—	1	1,19	1,37	1,55

В случае цилиндрических оболочек ($\gamma = 0$) полученные в пункте 3 формулы совпадают с результатами, полученными в [3, 5].

4. Пусть на оболочку, кроме внешнего давления p , действует малое сжимающее усилие q . Так как q мало, то минимум функционала $I(y)$ мы ищем среди гладких функций, рассмотренных в предыдущем пункте. Повторив рассуждения этого пункта, замечаем, что нижнее

Таблица 2

Коэффициент C_p

$\omega \backslash x_1$	0,2	0,505	0,0105	0	-3	-6	-10
0	1	1,00	1,00	0,99	0,79	0,68	0,60
0,3	—	1	1,00	1,00	0,83	0,72	0,63
0,6	—	—	1	1,00	0,84	0,73	0,64
1	—	—	—	1	0,84	0,73	0,64

критическое давление p_i при наличии осевого сжатия q для конических оболочек с неограниченной упругостью вычисляется по формуле:

$$p_i = p_i^{(1)} - \frac{12x_1^2}{(1-x_1)^2(1-t_1^2/t_0^2)} \cdot \frac{\varepsilon q}{nl_1 \operatorname{tg} \gamma}.$$

Нижнее критическое давление p_i при наличии малого осевого сжатия q для сравнительно толстых оболочек с ограниченной упругостью вычисляется по формуле

$$p_i = p_i^{(2)} - \frac{12x_1^2}{(1-x_1)^2(1-t_2^2/t_0^2)} \cdot \frac{\varepsilon q}{nl_1 \operatorname{tg} \gamma}.$$

5. Рассмотрим закритические состояния конических оболочек, находящихся под внешним давлением p и осевым сжимающим усилием q таким, что $\frac{g}{p} = \text{const}$. При таком нагружении в момент потери устойчивости вдоль образующих конуса появляется одна полуволна [8]. Поэтому, поступая таким же образом, как и в пункте 3, находим, что нижняя критическая нагрузка p_i для конических оболочек с неограниченной упругостью и для сравнительно тонких оболочек с ограниченной упругостью определяется из соотношения:

$$\bar{p}_i = v_1(t) (c^2 \varepsilon^2 / \bar{n})^{1/3} \frac{1 + v_1(t) (\varepsilon \bar{n} / c^2)^{1/3}}{1 + q^* / (1 - t^2 / t_0^2)}, \quad (**)$$

где t — меньший положительный корень уравнения

$$\frac{5t^2 - 6t + t_0^2}{2t^2 - 3t + t_0^2} (1 - t^2 / t_0^2) = -q^*,$$

а

$$q^* = 6 \left(\frac{x_1}{1-x_1} \right)^2 \frac{\varepsilon \bar{q}}{n p} > -1.$$

Формула (**) не применима, если

$$1 + q^* \ll 1.$$

В случае всестороннего сжатия $\bar{q} = \bar{p}$. Заметим также, что для длинных оболочек ($\ln(l_2/l_1) \leq 1$), допуская погрешность в сторону занижения не более, чем на 5%, если $q > 0$, и в сторону завышения не более, чем на 3% если $q < 0$, в (**) можно положить $t = 0$.

Если, кроме того, параметры оболочки удовлетворяют неравенствам (4,22) [8], то для нижнего критического давления из (**) получаем формулу:

$$p_i = \frac{p_i^{(1)}}{1 + q^*},$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Теория выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Изд-во ХГУ, 1960.
 2. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. 1. Осевое сжатие. Изд-во ХГУ, 1961.
 3. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. 2. Внешнее давление, Изд-во ХГУ, 1962.
 4. А. В. Погорелов. ДАН, 149, № 4, 1963.
 5. А. В. Погорелов. ДАН, 149, № 5, 1963.
 6. И. И. Трапезин. Устойчивость тонкостенной конической оболочки, замкнутой в вершине и нагруженной боковым гидростатическим давлением. Расчеты на прочность, вып. 5, 1960.
 7. А. В. Саченков. Об устойчивости конических оболочек кругового сечения, находящихся под внешним давлением. Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физико-матем., 12, 1958.
 8. Х. М. Муштари, А. В. Саченков. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. ПММ, т. 18, вып. 6, 1954.
-

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

М. Л. Выдра

В работе рассматривается вопрос об однозначной определенности бесконечных поверхностей вращения в трехмерном пространстве Лобачевского.

Поверхность F называется однозначно определенной в классе поверхностей $\{F\}$ если всякая поверхность этого класса, изометричная F , равна F . Под бесконечной выпуклой поверхностью мы понимаем границу бесконечного выпуклого тела. Не ограничивая общности, будем считать, что кривизна пространства Лобачевского $K = -1$. Рассматриваются выпуклые, трижды непрерывно дифференцируемые поверхности.

Метод доказательства основан на следующем соображении, которое используется А. В. Погореловым и А. Д. Александровым при изучении вопроса об однозначной определенности выпуклых поверхностей вращения евклидова пространства в работе [1]. Пусть F — поверхность вращения, а F' — поверхность, изометричная F . Так как поверхность F допускает вращение вокруг оси, то поверхность F' , будучи изометричной F , допускает непрерывное изгибание (вращение) в себе самой, соответствующее вращению поверхности F вокруг оси. При этом изгибании точки поверхности F' движутся с определенными скоростями, иными словами, в каждый момент имеет место бесконечно малое изгибание поверхности F' .

Пусть ξ — поле скоростей этого бесконечно малого изгибания. В каждой точке поверхности F' вектор ξ направлен по касательной к кривой, соответствующей по изометрии параллели поверхности F , а по абсолютной величине пропорционален длине этой параллели.

Если будет установлено, что поле ξ — тривиально, то есть, ξ — поле скоростей вращения F' как твердого тела, то тогда F' — также поверхность вращения, и, следовательно, равна F .

Итак, для доказательства однозначной определенности поверхности вращения достаточно исследовать поле ξ и доказать его тривиальность.

Отнесем пространство Лобачевского R к вейерштрассовым координатам: x_0, x_1, x_2, x_3 ,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = -1. \quad (1)$$

Отнесем каждой точке пространства R с вейерштрассовыми координатами x_0, x_1, x_2, x_3 точку евклидова пространства E с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 . Это отображение геодезическое. И, следовательно, выпуклая поверхность F пространства R перейдет в выпуклую поверхность Φ пространства E .

Между бесконечно малыми изгибаниями поверхностей F и Φ существует связь, которая устанавливается следующей теоремой, доказанной А. В. Погореловым в работе [2]: Если ξ является полем скоростей бесконечно малого изгибания поверхности F : $x = x(u, v)$ пространства Лобачевского, то

$$\bar{z} = \frac{\bar{\xi} + (\bar{e}_0 \bar{\xi}) \bar{e}_0}{(\bar{e}_0 x)}, \quad (2)$$

где $\bar{e}_0(1, 0, 0, 0)$ является полем скоростей бесконечно малого изгибания поверхности Φ :

$$\bar{y} = \frac{\bar{x} + \bar{e}_0(\bar{x} \bar{e}_0)}{(\bar{e}_0 x)}$$

евклидова пространства E .

Поле $\bar{z}$ тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле $\bar{\xi}$.

Отобразим пространство Лобачевского кривизны $K = -1$ на модель Кэли-Клейна со сферическим абсолютом единичного радиуса. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки. Тогда

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0},$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 — вейерштрассовы координаты точки пространства Лобачевского. С учетом этих равенств, соотношение (1) дает

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)x_0 = -1,$$

отсюда

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}, \quad (3)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ — евклидово расстояние на модели Кэли-Клейна до центра сферы. Оно связано с гиперболическим расстоянием ρ равенством $r = th\rho$. Подставляя это равенство в (3), получаем

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\rho}} = ch\rho. \quad (4)$$

Определяя скалярное произведение по отношению к квадратичной форме

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

из равенства (2) получаем

$$\bar{z}^2 = \frac{\bar{\xi}^2 + (\bar{e}_0 \bar{\xi})^2}{x_0^2}.$$

Так как вектор $\bar{\xi}$ направлен по касательной к кривой, соответствующей параллели при изгибании, то

$$\bar{\xi} = \bar{x}'_t = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3), \quad (\bar{e}_0 \bar{\xi}) = -x'_0.$$

Дифференцируя (4) по параметру t , получаем

$$x'_0 = (sh\rho)\rho'.$$

Следовательно,

$$\bar{z}^2 = \frac{\bar{\xi}^2 + (sh^2\rho)\rho'^2}{ch^2\rho} = \frac{\bar{\xi}^2}{ch^2\rho} + (th^2\rho)\rho'^2 \quad (5)$$

С помощью этого соотношения может быть доказана следующая теорема.

В пространстве Лобачевского бесконечная полная выпуклая поверхность вращения, параллели которой неограниченно убывают при удалении на бесконечность, является однозначно определенной.

Мы ограничимся доказательством этой теоремы для случая регулярных строго выпуклых поверхностей. Прежде всего замечаем, что при $\rho \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$. Действительно, $\bar{\zeta} \rightarrow 0$, так как $|\bar{\zeta}|$ пропорционально длине параллели, которая неограниченно убывает при $\rho \rightarrow 0$, а $\rho' \rightarrow 0$, так как $|\rho'| < |\bar{\zeta}|$. Таким образом, на поверхности Φ евклидова пространства, которая соответствует нашей поверхности вращения на модели Кели-Клейна, поле $\bar{z}$ непрерывно продолжается в точку S , где поверхность Φ соприкасается с абсолютном. Если бы мы могли гарантировать выполнение условия Липшица для поля $\bar{z}$ на всей поверхности Φ , включая и точку S , то вопрос о тривиальности поля $\bar{z}$ был бы решен благодаря соответствующей теореме о жесткости замкнутых общих выпуклых поверхностей [4]. Но мы ничего не знаем о поле $\bar{z}$, кроме его непрерывности, и поэтому закончим доказательство другим способом.

Введем декартовы прямоугольные координаты x, y, z , приняв точку S за начало, касательную плоскость к абсолютному в этой точке за плоскость xy , а нормаль к ней за ось z . Подвергнем поверхность Φ проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

При этом она перейдет в бесконечную поверхность Φ' , однозначно проектирующуюся на плоскость xy . По теореме Дарбу изгибающему полю $z(\lambda, \mu, \nu)$ поверхности Φ , соответствует изгибающее поле $z'(\lambda', \mu', \nu')$ поверхности Φ' , определяемое равенствами

$$\lambda' = \frac{\lambda}{z}, \quad \mu' = \frac{\mu}{z}, \quad \nu' = -\frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{z}.$$

Поле z' тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле z .

Рассмотрим составляющую $\nu'(x', y')$ поля z' по оси z . Утверждается, что при удалении на бесконечность, то есть при $x'^2 + y'^2 + z'^2 \rightarrow \infty$, $\nu' \rightarrow 0$, если $x'^2 + y'^2$ остается ограниченным, и $\nu' \sqrt{x'^2 + y'^2} \rightarrow 0$, если $x'^2 + y'^2 \rightarrow \infty$. Действительно, если удаляться на бесконечность по поверхности Φ' , то соответствующая точка на Φ приближается к S , а при этом $\lambda, \mu, \nu \rightarrow 0$. Поэтому, если x' и y' остаются ограниченными, то $\nu' = -x'\lambda - y'\mu - \nu \rightarrow 0$. Если же $x'^2 + y'^2 \rightarrow \infty$, то $\nu' / \sqrt{x'^2 + y'^2} \rightarrow 0$, так как

$$\frac{|x'|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \leq 1, \quad \frac{|\nu'|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \leq 1,$$

а

$$\frac{\nu'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = -\lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \mu \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \nu \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Проекция поверхности Φ' на плоскость xu представляет собой выпуклую область G . Эта область может быть конечной или бесконечной, в частности всей плоскостью. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Допустим, что область G конечна. Так как поверхность Ω : $z' = v'(x', y')$, задаваемая составляющей v' изгибающего поля z , является поверхностью неположительной кривизны и так как край этой поверхности лежит в плоскости x', y' , ввиду свойства $v' \rightarrow 0$ при $x'^2 + y'^2 + z'^2 \rightarrow \infty$, то $v' \equiv 0$. Отсюда следует, что поле $\bar{z}'$, а следовательно, и поле $\bar{z}$ тривиально.

Если проекция G поверхности Φ' совпадает со всей плоскостью xu , то заключение о тривиальности поля $\bar{z}'$ вытекает из теоремы С. Н. Бернштейна о поверхностях с отрицательной кривизной в применении к поверхности $z' = v'(x', y')$. Условия этой теоремы выполнены ввиду условия

$$v'/\sqrt{x'^2 + y'^2} \rightarrow 0 \text{ при } x'^2 + y'^2 \rightarrow \infty.$$

Если область G бесконечна, но не совпадает со всей плоскостью, то мы и здесь можем применить теорему С. Н. Бернштейна дополнив поверхность Ω до полной поверхности той частью плоскости $x'y'$, которая лежит вне области G .

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев, мы констатируем тривиальность поля $\bar{z}'$, а следовательно, тривиальность поля $\bar{z}$. После этого указанным выше способом, заключаем об однозначной определенности данной нам поверхности вращения в пространстве Лобачевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров, А. В. Погорелов. Однозначная определенность выпуклых поверхностей вращения. Матем. сб., т. 26/28, 2, 1950.
2. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Изд-во ХГУ, 1959.
3. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. А. В. Погорелов. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Изд-во ХГУ, 1959.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. И. Денисов

В работе получены уравнения движения твердого тела в римановом пространстве, допускающем группу изометрии пространства в себя. В частном случае, когда пространство евклидово, эти уравнения совпадают с известными в механике уравнениями движения твердого тела.

1. Среди римановых пространств естественно выделяются пространства, допускающие непрерывную группу Ли изометрических преобразований в себя. В пространствах такого рода можно говорить о движении твердого тела, при этом группу изометрии пространства в себя будем называть группой движения твердого тела, число параметров группы — числом степеней свободы твердого тела. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы риманово пространство допускало группу изометрии в себя, получены Киллингом [1] и носят его имя. Именно для того, чтобы риманово пространство допускало группу изометрии в себя, необходимо и достаточно существование хотя бы одного нетривиального решения системы уравнений:

$$g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0, \quad (1)$$

где ξ^k — компоненты инфинитезимальных операторов группы изометрии,

g_{ij} — метрический тензор риманова пространства.

Здесь и ниже $i, j, k = 1, 2, \dots, n$; $\rho, \psi = 1, 2, \dots, r$. Количество параметров группы изометрии, т. е. число степеней свободы твердого тела, определяется числом линейно-независимых решений системы (1).

Можно показать, что число линейно-независимых решений системы

$$r \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

где n — размерность пространства;

а максимальным числом степеней свободы обладает твердое тело пространства постоянной кривизны [2].

2. Построим уравнения движения твердого тела в римановом пространстве, допускающем группу изометрии в себя. В силу принципа возможных перемещений и принципа Даламбера, на действительных траекториях движения [3]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (2)$$

где δT — вариация кинетической энергии твердого тела.

δA — работа сил, действующих на тело, на возможных перемещениях твердого тела.

Движение твердого тела описывается зависимостью параметров группы изометрии от времени, поэтому уравнения движения твердого тела — это дифференциальные уравнения относительно параметров группы изометрии a^p .

Пусть известны компоненты инфинитезимальных операторов группы движений. Тогда

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \xi^i_p \frac{da^p}{dt}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{\dot{a}^\psi \dot{a}^\rho}{2} \int_D g_{ik} \xi^i_p \xi^k_\psi dm.$$

интеграл берется по области, определяемой телом.

Возможные перемещения будут

$$\delta x^i = \delta a^p \xi^i_p,$$

а работа сил F на возможных перемещениях

$$\delta A = \delta a^p \int_D F_i \xi^i_p dm.$$

Так как a^p независимы, т. е. на тело связи не наложены, то

$$\delta \frac{da^p}{dt} = \frac{d}{dt} \delta a^p.$$

Подставляя δT и δA в (2), после несложных преобразований получим

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{a}^\rho \int_D g_{ik} \xi^i_\rho \xi^k_\psi dm \right) = \int_D F_i \xi^i_\psi dm = Q_\psi. \quad (3)$$

В случае евклидова пространства уравнения (3) принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \vec{K} = \vec{M},$$

где $\vec{K}$ — момент количества движения твердого тела,

$\vec{M}$ — момент сил, действующих на тело.

Используя выражение для Q_ψ , можно ввести понятие эквивалентных сил. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ эквивалентны, если

$$\int_D F_{1,i} \xi^i_\psi dm = \int_D F_{2,i} \xi^i_\psi dm.$$

Для евклидова пространства это определение даёт известные условия эквивалентности сил.

Пусть группа движений известна в конечном виде, т. е. в виде

$$x^i = X^i(x^1, x^2, \dots, x^n; a^1, a^2, \dots, a^r).$$

Тогда

$$v^i = \frac{dx^{*i}}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial a^p} \frac{da^p}{dt}$$

и кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{\dot{a}^p \dot{a}^\psi}{2} \int_{D_0} g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial a^x} \frac{\partial X^k}{\partial a^\psi} dm.$$

Интеграл берется по области, определяемой телом в начальный момент времени. Работа сил на возможных перемещениях твердого тела

$$\delta A = \delta a^p \int_{D_0} F_i \frac{\partial X^i}{\partial a^p} dm.$$

Подставляя δT и δA в (2), после несложных преобразований получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a^p \int_{D_0} g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial a^p} \frac{\partial X^k}{\partial a^\psi} dm \right) - \frac{\dot{a}^x \dot{a}^p}{2} \frac{\partial}{\partial a^\psi} \left(\int_{D_0} g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial a^x} \frac{\partial X^k}{\partial a^p} dm \right) = \\ = \int_{D_0} F_i \frac{\partial X^i}{\partial a^\psi} dm. \end{aligned}$$

В случае евклидова пространства, если за параметры группы взять углы Эйлера, эти уравнения дают известные [4] уравнения движения твердого тела в независимых переменных.

3. Введем в пространстве параметров группы движений метрику

$$A_{p\psi} = \int_{D_0} g_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial a^p} \frac{\partial X^k}{\partial a^\psi} dm.$$

Легко видеть, что $A_{p\psi}$ симметричный тензор, положительная определенность формы $A_{p\psi} da^p da^\psi$ следует из положительной определенности формы $g_{ik} dx^i dx^k$.

После несложных преобразований уравнения (4) примут вид:

$$\frac{d^2 a^p}{dt^2} + \Gamma_{x\psi}^p \frac{da^x}{dt} \frac{da^\psi}{dt} = Q^p,$$

где $\Gamma_{x\psi}^p$ — символы Кристоффеля второго рода, построенные из тензора $A_{p\psi}$, а $Q^p = Q_\psi A^{p\psi}$.

Следовательно, уравнения движения твердого тела риманова пространства приводятся к уравнениям движения точки в пространстве параметров группы.

4. Так как уравнения движения твердого тела риманова пространства приводятся к уравнениям движения точки в пространстве параметров группы, то естественно попытка перенести результаты аналитической механики на случай движения твердого тела риманового пространства. Для этого необходимо определить, каким условиям должны удовлетворять F_i , чтобы Q_ψ имели потенциал.

Обобщенные силы Q_ψ в пространстве параметров группы имеют вид

$$Q_\psi = \int_{D_0} F_i \frac{\partial X^i}{\partial a^\psi} dm.$$

Предположим, что обобщенные силы потенциальны, т. е. существует такая функция U , что $Q_\psi = -\frac{\partial U}{\partial a^\psi}$.

Тогда F_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial a^\psi} \left(F_k \frac{\partial X^k}{\partial a^\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial a^\rho} \left(F_k \frac{\partial X^k}{\partial a^\psi} \right).$$

Если использовать инфинитезимальные операторы группы движений, эта система примет вид:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x^i} \xi_\psi^i \xi_\rho^k = \frac{\partial F_i}{\partial x^k} \xi_\psi^i \xi_\rho^k. \quad (5)$$

Можно показать, что эти условия и достаточны.

Пусть $\frac{\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^k} = \omega_{ki}$, тогда система уравнений (5) перепишется так:

$$\xi_\rho^k \xi_\psi^i \omega_{ki} = 0.$$

Если эта система уравнений относительно ω_{ki} имеет решения, отличные от нулевых, то в римановом пространстве существует вектор, не потенциальный, Q_ψ которого потенциальны в пространстве параметров группы движений.

Итак, если на твердое тело риманова пространства действуют силы, потенциальные в пространстве параметров группы движений, то, введя канонические переменные, уравнения движения твердого тела можно записать в форме канонических уравнений Гамильтона и написать уравнение Гамильтона—Якоби для функции действия S . Не трудно записать уравнения движения в форме Пуанкаре—Четаева. В случае неголономных связей, наложенных на тело, можно применить результаты В. В. Добронравова [5] по аналитической механике в неголономных координатах.

Для уравнений движения твердого тела риманова пространства можно построить интегральные инварианты, которые могут быть положены в основу построения уравнений движения. В случае евклидова пространства построенные интегральные инварианты совпадают с инвариантами, полученными Добронравовым [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Killing. Über die Grundlagen der Geometrie, Journ. reine und angew. Math. (Crell), 1902.
2. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. ИЛ, 1947.
3. Ф. Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
4. Г. К. Суслов. Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.
5. В. В. Добронравов. Аналитическая динамика в неголономных координатах. «Уч зап. МГУ», Механика, т. 2, вып. 122, Изд-во МГУ, 1948.

О МЕРЕ МНОЖЕСТВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г. И. Дринфельд, А. В. Луценко

Пусть H — множество геометрических элементов в пространстве $E_n(x)$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть G_r , r — параметрическая группа Ли преобразований в пространстве E_n . Под мерой множества H понимают меру, инвариантную относительно группы G_r .

Чжень Шен-шень в [1] рассмотрел вопрос о существовании меры множества геометрических элементов и об аналитическом ее выражении. Результаты Чжень-Шен-шеня формулируются в терминах структурных констант (условия существования) и в терминах относительных компонент группы (условия существования и выражение для меры).

На наш взгляд, во многих случаях выражение меры через относительные компоненты группы представляется неудобным, так как при этом не всегда просто указать метрическое толкование меры. Если, например, речь идет о мере множества кривых второго порядка, то естественно, мы полагаем, искать эту меру в виде

$$\int M(A, B, \dots) dA dB, \dots,$$

где $A, B, \dots$ — коэффициенты в уравнении кривых. Тогда метрическое толкование найденной меры или получится сразу, или его легко будет найти.

В работе [2], которую автор писал, не зная работы Чжень-Шен-шеня, изложенное выше соображение было применено к разысканию мер множеств прямых и плоскостей. В настоящей работе будут найдены меры кривых второго порядка, инвариантные относительно основных групп преобразований, и будут рассмотрены некоторые естественно возникающие вопросы.

§ 1. Аффинная мера множества парабол

Каждой параболе

$$x^2 + 2Bxy + B^2y^2 + Px + Qy + R = 0 \quad (1)$$

соответствует одна и только одна точка (B, P, Q, R) пространства W коэффициентов. Поэтому «количество» некоторого подмножества парабол равно «количеству» соответствующих точек (B, P, Q, R) . Преобразования

$$\begin{aligned} x' &= a_1 + b_1x + c_1y \\ y' &= a_2 + b_2x + c_2y, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1 \quad (2)$$

унимодулярной аффинной группы порождают группу H_5 преобразований в пространстве W , и меру точек этого пространства, инвариантную от-

носителю группы H_5 , можно принять за меру парабол. Мы ищем меру в виде интеграла

$$\int \text{MdBdPdQdR}, \quad (3)$$

что позволяет, как и естественно для интегральной геометрии, говорить о плотности рассматриваемых множеств.

Так как мы имеем дело с непрерывной группой преобразований, то нам достаточно рассмотреть преобразования группы (2), близкие к тождественному, то есть преобразования

$$\begin{aligned} x' &= a + (1 + \alpha)x + \beta y, \\ y' &= b + \gamma x + (1 - \alpha)y, \end{aligned}$$

где $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ — бесконечно малые.

Преобразования (4) переводят параболу (1) в параболу

$$[(1 + \alpha)x + \beta y + a]^2 + 2B[(1 + \alpha)x + \beta y + a][\gamma x + (1 - \alpha)y + b] + \dots + R = 0.$$

Отбросив в этом уравнении бесконечно малые порядка выше первого, мы найдем преобразования группы H_5 , близкие к тождественному, а именно:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{B + \beta + \gamma B^2}{1 + 2\alpha + 2\gamma B}, \\ P_1 &= \frac{P + \alpha P + \gamma Q + 2\alpha + 2bB}{1 + 2\alpha + 2\gamma B}, \\ Q_1 &= \frac{Q - \alpha Q + \beta P + 2\alpha B + 2bB^2}{1 + 2\alpha + 2\gamma B}, \\ R_1 &= \frac{aP + bQ + R}{1 + 2\alpha + 2\gamma B}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что инфинитезимальными операторами группы H_5 являются

$$\begin{aligned} X_1(f) &= 2B \frac{\partial f}{\partial B} + P \frac{\partial f}{\partial P} + 3Q \frac{\partial f}{\partial Q} + 2R \frac{\partial f}{\partial R}, \\ X_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial B} + P \frac{\partial f}{\partial Q}, \\ X_3(f) &= B^2 \frac{\partial f}{\partial B} + (2BP - Q) \frac{\partial f}{\partial P} + 2BQ \frac{\partial f}{\partial Q} + 2BR \frac{\partial f}{\partial R}, \\ X_4(f) &= 2 \frac{\partial f}{\partial P} + 2B \frac{\partial f}{\partial Q} + P \frac{\partial f}{\partial R}, \\ X_5(f) &= 2B^2 \frac{\partial f}{\partial Q} + Q \frac{\partial f}{\partial R} + 2B \frac{\partial f}{\partial P}. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы интеграл

$$\int M dB dP dQ dR$$

был инвариантным относительно группы с инфинитезимальными операторами (6), необходимо и достаточно [3] выполнение условий

$$\begin{aligned} X_1(M) + 8M &= 0, \quad X_2(M) = 0, \\ X_3(M) + 8BM &= 0, \quad X_4(M) = 0, \quad X_5(M) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрирование системы уравнений (7) не представляет затруднений. Единственным решением системы является

$$M = (Q - BP)^{-8/3}.$$

Таким образом, мерой множества парабол (1), инвариантной относительно унимодулярной аффинной группы, является

$$\int (Q - BP)^{-8/3} dB dP dQ dR. \quad (8)$$

Эта мера совпадает с приведенной Сантало [4]¹.

Заметим, что $(Q - BP)^2$, с точностью до постоянного множителя, является дискриминантом квадратичной формы, соответствующей уравнению (1), и что $Q - BP \neq 0$.

§ 2. О мере множества кривых второго порядка в случае группы преобразований декартовых прямоугольных координат

Преобразования прямоугольных декартовых координат (евклидово движение), близкие к тождественному,

$$x' = x - ay + a,$$

$$y' = ax + y + b,$$

где a, a, b — бесконечно малые, приводят в случае кривой

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0$$

к преобразованиям

$$B_1 = \frac{B - a + aC}{1 + 2aB},$$

$$C_1 = \frac{C - 2aB}{1 + 2aB},$$

$$D_1 = \frac{D + aE + a + bB}{1 + 2aB},$$

$$E_1 = \frac{E - aD + aB + bC}{1 + 2aB},$$

$$G_1 = \frac{G + 2aD + 2bE}{1 + 2aB},$$

которым соответствуют инфинитезимальные операторы

$$\begin{aligned} X_1(f) = & (2B^2 - C + 1) \frac{\partial f}{\partial B} + 2B(1 + C) \frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E) \frac{\partial f}{\partial D} + \\ & + (D + 2BE) \frac{\partial f}{\partial E} + 2BG \frac{\partial f}{\partial G}, \end{aligned}$$

¹ Вычисления, связанные с получением формулы (8) Сантало не приводит. Методом относительных компонент группы Сантало находит меру множества парабол, заданных параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1x + c_1x^2 \\ y &= a_2 + b_2x + c_2x^2, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1$$

относительно некоторой неподвижной системы координат, и затем ищет метрический смысл полученной формулы.

$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial D} + B \frac{\partial f}{\partial E} + 2D \frac{\partial f}{\partial G}, \quad (9)$$

$$X_3(f) = B \frac{\partial f}{\partial D} + C \frac{\partial f}{\partial E} + 2E \frac{\partial f}{\partial G}.$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int M dB dC dD dE dG$$

таковы:

$$X_1(M) + 12BM = 0, \quad X_2(M) = 0, \quad X_3(M) = 0. \quad (10)$$

Проинтегрировав уравнения (10), найдем

$$M = \Delta^{-2} F \left(\Delta (1+C)^{-3}, \frac{B^2 - C}{(1+C)^2} \right),$$

где F — произвольная функция,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix}.$$

Так как не соблюдено условие единственности, то мера, в обычном смысле этого понятия, не существует. Это можно было утверждать заранее, так как группа преобразований прямоугольных декартовых координат не обладает свойством транзитивности относительно множества всех кривых второго порядка. По этой причине группа с операторами (9) тоже не транзитивна и обладает двумя абсолютными инвариантами

$$\Delta_1 = \Delta (1+C)^{-3}, \quad \Delta_2 = (B^2 - C) (1+C)^{-2}.$$

Наличие указанных абсолютных инвариантов связано с тем, что при евклидовом движении кривая не деформируется и соответствующая кривой точка (B, C, D, E, G) не может перемещаться по произвольной траектории. Так как при движении кривой

$$\Delta_1 = \text{const}, \quad \Delta_2 = \text{const},$$

то для движущейся кривой мы уже получили единственный, с точностью до постоянного множителя, инвариант

$$\int \Delta^{-2} dB dC dD dE dG \quad (11)$$

— кинематическую меру.

Замечание. Абсолютные инварианты Δ_1, Δ_2 являются интегралами системы линейных уравнений

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0$$

и поэтому могут быть заменены такими:

$$\Delta_1 \Delta_2 = (1+C)(B^2 - C)u^{-1}, \quad \Delta_1 = (1+C)^3 u^{-1},$$

а это означает, что исключать случай $1+C=0$ нет необходимости.

Резюмируя, можно утверждать:

Относительно преобразований прямоугольных декартовых координат множество кривых второго порядка не имеет меры, но обладает кинематической мерой (11).

Интранзитивность группы с операторами (9) связана с тем, что число операторов меньше числа переменных (коэффициентов уравнения

кривой). Увеличивая число параметров преобразований можно получить транзитивную группу и мера множеств кривых может оказаться существующей. Например, для трехпараметрического семейства окружностей

$$x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$$

преобразования

$$x' = (1 - \lambda)(x - \alpha y) + a_1,$$

$$y' = (1 - \lambda)(\alpha x + y) + a_2$$

(соединение движения с преобразованием подобия), где $\lambda, \alpha, a_1, a_2$ — бесконечно малые, порождают преобразования

$$P_1 = \frac{2a_1 + (1 - \lambda)P + \alpha Q}{1 - 2\lambda},$$

$$Q_1 = \frac{2a_2 - \alpha P + (1 - \lambda)Q}{1 - 2\lambda},$$

$$R_1 = \frac{a_1 P + a_2 Q + R}{1 - 2\lambda},$$

которым соответствуют инфинитезимальные операторы

$$X_1(f) = Q \frac{\partial f}{\partial P} - P \frac{\partial f}{\partial Q},$$

$$X_2(f) = 2 \frac{\partial f}{\partial P} + P \frac{\partial f}{\partial R},$$

$$X_3(f) = P \frac{\partial f}{\partial P} + Q \frac{\partial f}{\partial Q} + 2R \frac{\partial f}{\partial R}, \quad (A)$$

$$X_4(f) = 2 \frac{\partial f}{\partial Q} + Q \frac{\partial f}{\partial R}.$$

Группа с операторами (A) имеет единственный интегральный инвариант третьего порядка

$$\int \frac{dP dQ dR}{(P^2 + Q^2 - 4R)^2}.$$

Обозначив координаты центра окружности через a, b и радиус через r , имеем

$$a = -\frac{P}{2}, \quad b = -\frac{Q}{2}, \quad 4r^2 = P^2 + Q^2 - 4R,$$

$$da = -\frac{dP}{2}, \quad db = -\frac{dQ}{2}, \quad dr^2 = \frac{PdP + QdQ - 2dR}{2}.$$

Перемножив последние равенства по правилам внешнего умножения дифференциальных форм, найдем

$$dPdQdR = -4dadbd r^2.$$

Следовательно, с точностью до постоянного множителя, мерой семейства окружностей является

$$\int \frac{dadbd r^2}{r^4}.$$

§ 3. Об аффинной мере множества центральных кривых второго порядка

Для кривых

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + Px + Qy + R = 0, \quad (12)$$

$$C \neq B^2,$$

вместо преобразований (5), получаются преобразования

$$B_1 = \frac{B + \beta + \gamma C}{1 + 2\alpha + 2\gamma B},$$

$$C_1 = \frac{C - 2\alpha C + 2\beta B}{1 + 2\alpha + 2\gamma B},$$

$$P_1 = \frac{P + \alpha P + 2\alpha + 2bB + \gamma Q}{1 + 2\alpha + 2\gamma B},$$

$$Q_1 = \frac{Q - \alpha Q + \beta P + 2Ba + 2bC}{1 + 2\alpha + 2\gamma B},$$

$$R_1 = \frac{aP + bQ + R}{1 + 2\alpha + 2\gamma B}.$$

Этим преобразованиям соответствуют инфинитезимальные операторы

$$X_1(f) = 2B \frac{\partial f}{\partial B} + 4C \frac{\partial f}{\partial C} + P \frac{\partial f}{\partial P} + 3Q \frac{\partial f}{\partial Q} + 2R \frac{\partial f}{\partial R},$$

$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial B} + 2B \frac{\partial f}{\partial C} + P \frac{\partial f}{\partial Q},$$

$$X_3(f) = (2B^2 - C) \frac{\partial f}{\partial B} + 2BC \frac{\partial f}{\partial C} + (2BP - Q) \frac{\partial f}{\partial P} + 2BQ \frac{\partial f}{\partial Q} + 2BR \frac{\partial f}{\partial R},$$

$$X_4(f) = 2 \frac{\partial f}{\partial P} + 2B \frac{\partial f}{\partial Q} + P \frac{\partial f}{\partial R},$$

$$X_5(f) = 2C \frac{\partial f}{\partial Q} + Q \frac{\partial f}{\partial R} + 2B \frac{\partial f}{\partial P}.$$

Для того, чтобы интеграл

$$\int N dBdCdPdQdR$$

был инвариантным, необходимы и достаточны условия

$$\begin{aligned} X_1(N) + 12N &= 0, & X_2(N) &= 0, \\ X_3(N) + 12BN &= 0, & X_4(N) &= 0, & X_5(N) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрирование системы уравнений (13) требует элементарных, хотя и несколько утомительных вычислений, которые мы опускаем.

Общим решением системы является

$$N = \Delta_2^{-3} f(\Delta_1^2, \Delta_2^{-3}),$$

где f — произвольная функция величин

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2B & P \\ 2B & 2C & Q \\ P & Q & 2R \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = B^2 - C.$$

Условие единственности не соблюдено и поэтому аффинная мера множества центральных кривых второго порядка не существует.

Обсуждение этого результата, подобное обсуждению результата параграфа 2, мы опускаем.

§ 4. Проективная мера множества кривых второго порядка

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка в однородных координатах

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \quad (14)$$

и проективные преобразования

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \quad \det \|a_{ik}\| = 1.$$

Преобразованиями, близкими к тождественным, являются

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \alpha)x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha_1 x + (1 + \beta_1)y + \gamma_1 z, \\ z' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + (1 - \alpha - \beta_1)z, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \beta_2$ — бесконечно малые.

Преобразования (15) порождают преобразования коэффициентов уравнения (14)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\beta + (1 + \alpha + \beta_1)B + \gamma_1 C + \beta_2 D + \alpha_2 E}{1 + 2\alpha + 2\alpha_1 B + 2\alpha_2 D}, \\ C_1 &= \frac{2\beta B + (1 + 2\beta_1)C + 2\beta_2 E}{1 + 2\alpha + 2\alpha_1 B + 2\alpha_2 D}, \\ D_1 &= \frac{(1 - \beta_1)D + \gamma + \gamma_1 B + \alpha_1 E + \alpha_2 F}{1 + 2\alpha + 2\alpha_1 B + 2\alpha_2 D}, \\ E_1 &= \frac{\gamma B + \gamma_1 C + \beta D + (1 - \alpha)E + \beta_2 F}{1 + 2\alpha + 2\alpha_1 B + 2\alpha_2 D}, \\ F_1 &= \frac{2\gamma D + 2\gamma_1 E + (1 - 2\alpha - 2\beta_1)F}{1 + 2\alpha + 2\alpha_1 B + 2\alpha_2 D}. \end{aligned}$$

Эти преобразования образуют группу с инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} X_1(f) &= B \frac{\partial f}{\partial B} + 2C \frac{\partial f}{\partial C} + 2D \frac{\partial f}{\partial D} + 3E \frac{\partial f}{\partial E} + 4F \frac{\partial f}{\partial F}, \\ X_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial B} + 2B \frac{\partial f}{\partial C} + D \frac{\partial f}{\partial E}, \\ X_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial D} + B \frac{\partial f}{\partial E} + 2D \frac{\partial f}{\partial F}, \\ X_4(f) &= (2B^2 - C) \frac{\partial f}{\partial B} + 2BC \frac{\partial f}{\partial C} + (2BD - E) \frac{\partial f}{\partial D} + 2BE \frac{\partial f}{\partial E} + 2BF \frac{\partial f}{\partial F}, \quad (16) \\ X_5(f) &= B \frac{\partial f}{\partial B} + 2C \frac{\partial f}{\partial C} - D \frac{\partial f}{\partial D} - 2F \frac{\partial f}{\partial F}, \end{aligned}$$

$$X_6(f) = B \frac{\partial f}{\partial D} + C \frac{\partial f}{\partial E} + 2E \frac{\partial f}{\partial F},$$

$$X_7(f) = (2BD - E) \frac{\partial f}{\partial B} + 2DC \frac{\partial f}{\partial C} + (2D^2 - F) \frac{\partial f}{\partial D} + 2DE \frac{\partial f}{\partial E} + 2DF \frac{\partial f}{\partial F},$$

$$X_8(f) = D \frac{\partial f}{\partial B} + 2E \frac{\partial f}{\partial C} + F \frac{\partial f}{\partial E}.$$

Условия инвариантности интеграла

$$\int N dBdCdDdEdF$$

таковы:

$$\begin{aligned} X_1(N) + 12N &= 0, & X_2(N) &= 0, & X_3(N) &= 0, \\ X_4(N) + 12BN &= 0, & X_5(N) &= 0, & X_6(N) &= 0, \\ X_7(N) + 12DN &= 0, & X_8(N) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Среди уравнений (17) есть пять однородных, общим решением которых является

$$N = \varphi(\Delta), \quad (18)$$

где φ — произвольная функция, а Δ — дискриминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Подставляя (18) в неоднородные уравнения системы (17), находим

$$N = \Delta^{-2},$$

и это единственное, с точностью до числового множителя, решение системы (17).

Следовательно, проективная мера множества кривых второго порядка существует и равна

$$\int \Delta^{-2} dBdCdDdEdF.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Chern Shüngh-Shen. Annals of Math 43, (1942), стр. 178—189.
2. Г. И. Дринфельд. Об основных формулах интегральной геометрии. «Записки мат. отделения ХГУ и ХМО», XXII, 1952, стр. 61—71.
3. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли, Гостехиздат, М.—Л., 1940.
4. Л. А. Сантало. Введение в интегральную геометрию, ИЛ, М., 1956.

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА И СДВИГА

Е. А. Косачевская

(Донецк)

В работе Я. П. Бланка и Л. Т. Моторного [1] найдены поверхности вращения эллиптического пространства, несущие на себе сети сдвига. В данной статье аналогичным методом решается задача о нахождении винтовых поверхностей переноса в евклидовом пространстве и винтовых поверхностей сдвига в эллиптическом пространстве.

§ 1. Винтовые поверхности переноса евклидова пространства

Параметрические уравнения винтовой поверхности могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} r &= ue(v) + [\zeta(u) + av] k, \\ e(v) &= i \cos v + j \sin v. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Наша задача состоит в определении функции $\zeta(u)$, при которой поверхность (1.1) несет на себе сеть переноса.

Сеть переноса характеризуется тем, что она одновременно чебышевская и сопряженная, т.е. имеют место уравнения Сервана-Бианки [2]:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2} = 0 \quad (1.2)$$

и условие сопряженности:

$$L + M(\varphi + \psi) + N\varphi\psi = 0, \quad (1.3)$$

$$\varphi(u, v) = \frac{dv}{du}, \quad \psi(u, v) = \frac{\delta v}{\delta u}. \quad (1.4)$$

Здесь u^i — параметры координатной сети u и v , v^i — параметры сети переноса; $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ — символы Кристоффеля; L , M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (1.1).

Согласно (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial v^1} &= \varphi(u, v) \frac{\partial u}{\partial v^1}, \quad \frac{\partial v}{\partial v^2} = \psi(u, v) \frac{\partial u}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial v^1 \partial v^2} &= - \frac{\varphi_u - \psi_u + \varphi_v \psi - \psi_v \varphi}{\varphi - \psi} \frac{\partial u}{\partial v^1} \frac{\partial u}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial v^1 \partial v^2} &= \frac{\psi_u \varphi - \varphi_u \psi + \psi_v \varphi^2 - \varphi_v \psi^2}{\varphi - \psi} \frac{\partial u}{\partial v^1} \frac{\partial u}{\partial v^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вычислив значения $\Gamma_{\alpha\beta}^k$, L , M , N и учитывая (1.5), приводим систему уравнений (1.2) к виду

$$\varphi_u + \varphi_v \psi + u \varphi^2 \psi + \frac{1}{u} (\varphi + \psi) = 0, \quad (1.6)$$

$$\psi_u + \psi_v \varphi + u \psi \psi^2 + \frac{1}{u} (\varphi + \psi) = 0,$$

а уравнение (1.3)

$$u \zeta'' - a (\varphi + \psi) + u^2 \zeta' \varphi \psi = 0^*. \quad (1.7)$$

Положим

$$\varphi + \psi = \frac{z}{u}, \quad \ln u = \xi. \quad (1.8)$$

Согласно (1.7)

$$\varphi \psi = \frac{1}{u^2 \zeta'} (az - \zeta'' + \zeta'). \quad (1.9)$$

Складывая два уравнения (1.6) и учитывая (1.8) и (1.9), получаем

$$\zeta' z \xi + az_v = -az^2 + (\zeta'' - 2\zeta')z. \quad (1.10)$$

Если умножить первое уравнение (1.6) на ψ , второе — на φ , а затем их сложить, получим еще одно уравнение относительно z :

$$a \zeta' z \xi + \zeta' (\zeta'' - \zeta') z_v = - (2a^2 + \zeta'^2) z^2 + a (5\zeta'' - 2\zeta') z + \zeta''' \zeta' + 2\zeta'' \zeta' - 3\zeta'^2. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) находим z_ξ и z_v как рациональные функции z . Условие совместности этой системы имеет вид алгебраического уравнения второй степени относительно z с коэффициентами, зависящими лишь от ξ :

$$A(\xi) z^2 + B(\xi) z + C(\xi) = 0,$$

$$A(\xi) = \zeta''' \zeta'^2 + 2\zeta'' \zeta' \frac{2a^2 - \zeta'^2}{a^2 + \zeta'^2} - 3\zeta'' (a^2 + \zeta'^2) - 2\zeta' (a^2 + \zeta'^2),$$

$$B(\xi) = (\zeta''' \zeta' - \zeta''^2) (3a^2 + 3\zeta'^2 - \zeta' \zeta'') + 2\zeta' \zeta'' (a^2 + \zeta'^2 - 3\zeta' \zeta'' + 2\zeta''^2),$$

$$C(\xi) = \zeta^{IV} \zeta'^2 (a^2 + \zeta'^2 - \zeta' \zeta'') + \zeta'''^2 \zeta'^3 + 2\zeta''' \zeta' [2\zeta' \zeta'' (\zeta'' - \zeta') - (3\zeta'' - 2\zeta') (a^2 + \zeta'^2)] + \\ + \zeta''^3 (3a^2 + 17\zeta'^2) + 2\zeta'' \zeta' [(2\zeta' - 3\zeta'') (a^2 + \zeta'^2) - \zeta'' (4\zeta'^2 + 3\zeta''^2)].$$

Если это уравнение не является тождеством, оно определяет z как функцию только одной переменной u , а согласно (1.8), (1.9) φ и ψ также являются функциями только u .

Условие совместности обращается в тождество при

$$A(\xi) = 0, \quad B(\xi) = 0, \quad C(\xi) = 0. \quad (1.12)$$

Исключая ζ''' из первых двух уравнений (1.12), получим

$$[\zeta'' (3a + \zeta'^2) + 2\zeta' (a^2 + \zeta'^2)] (a^2 + \zeta'^2 - \zeta' \zeta'')^2 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение

$$a^2 + \zeta'^2 - \zeta' \zeta'' = 0$$

* Здесь и далее в этом параграфе штрих означает дифференцирование по ξ .

противоречит третьему уравнению (1.12), а уравнение

$$\zeta''(3a^2 + \zeta'^2) + 2\zeta'(a^2 + \zeta'^2) = 0$$

удовлетворяет всем трем уравнениям (1.12) лишь при $\zeta = \text{const}$, т. е. в случае, когда винтовая поверхность представляет собой геликоид. При этом из уравнений (1.6) и (1.7) следует

$$\varphi = -\psi = \frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2}},$$

где R — произвольная постоянная.

Итак, для любой винтовой поверхности, несущей сеть переноса,

$$\varphi_v = \psi_v = 0. \quad (1.13)$$

При условии (1.13) решение системы (1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1 + c^2 u^2}{u \sqrt{c_1 u^2 - 1 - c^4 u^4}}, \\ \psi &= \frac{1 - c^2 u^2}{u \sqrt{c_1 u^2 - 1 - c^4 u^4}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.7), находим

$$\zeta(u) = \frac{1}{2} [c_2 P(u) + a Q(u)] + c_3 \quad (1.15)$$

$$P(u) = \arcsin \frac{2c^4 u^2 - c_1}{\sqrt{c_1^2 - 4c^4}}, \quad Q(u) = \arcsin \frac{2 - c_1 u^2}{u^2 \sqrt{c_1^2 - 4c^4}}$$

(c, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные).

Интегрируя уравнения (1.14), получаем два семейства линий образующих сеть переноса:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} [P(u) - Q(u)] + \text{const}, \\ v &= -\frac{1}{2} [P(u) + Q(u)] + \text{const}. \end{aligned}$$

Параметры сети переноса определим формулами

$$\begin{aligned} v^1 &= v - \frac{1}{2} [P(u) - Q(u)] + \frac{\pi}{2}, \\ v^2 &= v + \frac{1}{2} [P(u) + Q(u)]. \end{aligned}$$

Тогда для обратного преобразования получаем следующие формулы:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2c^2}} \sqrt{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c^4} \cos(v^1 - v^2)}, \quad (1.16)$$

$$v = \frac{1}{2} \left[v^1 + v^2 - \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{c_1^2 - 4c^4} + c_1 \cos(v^1 - v^2)}{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c^4} \cos(v^1 - v^2)} \right].$$

Подставляя (1.15) и (1.16) в (1.1), убеждаемся, что рассматриваемая винтовая поверхность записывается в виде

$$r = r_1(v^1) + r_z(v^2), \quad (1.17)$$

$$r_1(v^1) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{c_1 - 2c^2}}{c^2} e(v^1) + (a - c_2)(v^1 + c_4)k \right],$$

$$r_2(v^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{c_1 + 2c^2}}{c^2} e(v^2) + (a + c_2)(v^2 + c_4)k \right],$$

$$c_4 = \frac{1}{a} \left(c_3 - \frac{a - c_2}{4} \pi \right),$$

т. е. эта винтовая поверхность представляет собой поверхность переноса винтовой линии, расположенной на цилиндре радиуса $\frac{1}{c^2} \sqrt{c_1 - 2c^2}$,

по другой винтовой линии на цилиндре радиуса $\frac{1}{c^2} \sqrt{c_1 + 2c^2}$.

В формулах (1.14) корень может быть взят также со знаком „минус“. Вид поверхности от этого не изменится. Следовательно, рассматриваемые винтовые поверхности несут на себе две сети переноса.

Рассмотрим частный случай:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = R^2 c, \quad c \rightarrow \infty.$$

Здесь R — произвольная постоянная. При этом

$$\varphi = -\psi = \frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2}}, \quad \zeta(u) = \text{const},$$

т. е. поверхность является геликоидом.

Формулы (1.16) принимают вид

$$u = R \cos \frac{v^1 - v^2}{2}, \quad v = \frac{v^1 + v^2}{2}. \quad (1.18)$$

Поскольку в (1.18) входит одна произвольная постоянная R , от которой не зависит уравнение геликоида, на последнем существует ∞^1 сетей переноса.

Полагая в (1.1) $a = 0$, получим уравнения поверхности вращения. Согласно (1.15) эта поверхность несет на себе две сети переноса, если

$$\zeta(u) = \frac{c_2}{2} P(u) + c_3.$$

Согласно общей теореме С. Ли [3] о поверхностях, несущих две сети переноса, касательные к кривым переноса всех четырех семейств пересекают бесконечно-удаленную плоскость по алгебраической кривой четвертого порядка. Покажем, что в случае винтовой поверхности переноса эта кривая распадается на два конических сечения.

Уравнения касательных к первому семейству кривых переноса имеют вид

$$\frac{x - u \cos v}{(u \cos v)'} = \frac{y - u \sin v}{(u \sin v)'} = \frac{z - (\zeta + av)}{(\zeta + av)'} = t, \quad \frac{v}{du} = \varphi(u). \quad (1.19)$$

Введем однородные координаты

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad y = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad z = \frac{\xi_3}{\xi_4}. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.19) и полагая $\xi_4 = 0$, получим параметрические уравнения геометрического места точек пересечения касательных

с бесконечно-удаленной плоскостью:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= t(\cos v - u\varphi \sin v), \\ \xi_2 &= t(\sin v + u\varphi \cos v), \\ \xi_3 &= t(\zeta' + a\varphi).\end{aligned}$$

Учитывая (1.14) и исключая параметры, находим искомое геометрическое место в явном виде:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{c_1 + 2c^2}{c^4(c_2 + a)^2} \xi_3^2. \quad (1.21)$$

По этой же кривой пересекаются касательные к семейству кривых переноса, для которого φ имеет противоположный знак. Аналогично находим геометрическое место точек пересечения с бесконечно-удаленной плоскостью касательных к семействам кривых, для которых

$$\frac{dv}{du} = \psi(u):$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{c_1 - 2c^2}{c^4(c_2 - a)^2} \xi_3^2. \quad (1.22)$$

§ 2. Уравнения винтовой поверхности эллиптического пространства

Уравнения винтовой поверхности в эллиптическом пространстве можно найти, рассматривая преобразование

$$X = AX'B, \quad (2.1)$$

которое оставляет инвариантной ось $(0, 0, x_2, x_3)$. Здесь X, X', A и B — кватернионы.

$$\begin{aligned}X &= x_0 + x_1i + x_2j + x_3k, & i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ X' &= x'_0 + x'_1i + x'_2j + x'_3k, & ij &= -ji = k, \\ A &= \alpha_0 + \alpha_1i + \alpha_2j + \alpha_3k, & jk &= -kj = i, \\ B &= \beta_0 + \beta_1i + \beta_2j + \beta_3k, & ki &= -ik = j\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \text{ и } (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \text{ — точки эллиптического пространства} \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1. \quad (2.3)$$

Условия нормировки кватернионов A и B :

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (2.4)$$

Полагая в первых двух равенствах (2.1) $x'_0 = x'_1 = 0$, $x_0 = x_1 = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при x'_2 и x'_3 , получаем

$$\begin{aligned}-\alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \beta_1\alpha_3 - \beta_0\alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \beta_0\alpha_3 - \beta_1\alpha_2 &= 0, \\ \alpha_0\beta_3 - \alpha_1\beta_2 - \beta_0\alpha_3 - \beta_1\alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 - \beta_1\alpha_3 + \beta_0\alpha_2 &= 0.\end{aligned}$$

Если определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_0 & \beta_1 & -\beta_0 \\ -\alpha_0 & \alpha_1 & -\beta_0 & -\beta_1 \\ \alpha_0 & -\alpha_1 & -\beta_0 & -\beta_1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_0 & -\beta_1 & \beta_0 \end{vmatrix} = 4(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)(\beta_0^2 + \beta_1^2)$$

не равен нулю, ее решением будет

$$\beta_2 = \beta_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad (2.5)$$

и согласно (2.4):

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 = 1.$$

Полагая

$$\alpha_0 = \cos \delta, \quad \alpha_1 = \sin \delta, \quad \beta_0 = \cos \theta, \quad \beta_1 = \sin \theta$$

приводим (2.1) к виду

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \cos(\theta + \delta) - x'_1 \sin(\theta + \delta), \\ x_1 &= x'_0 \sin(\theta + \delta) + x'_1 \cos(\theta + \delta), \\ x_2 &= x'_2 \cos(\theta - \delta) + x'_3 \sin(\theta - \delta), \\ x_3 &= -x'_2 \sin(\theta - \delta) + x'_3 \cos(\theta - \delta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В качестве образующей винтовой поверхности возьмем кривую в плоскости $x'_1 = 0$;

$$\begin{aligned} x'_0 &= u, \quad x'_2 = p(u), \quad x'_3 = q(u) \\ u^2 + p^2 + q^2 &= 1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и полагая

$$\theta + \delta = v, \quad \theta - \delta = \alpha v, \quad (\alpha = \text{const}),$$

получаем из (2.6) уравнения винтовой поверхности в эллиптическом пространстве:

$$\begin{aligned} x_0 &= u \cos v, \\ x_1 &= u \sin v, \\ x_2 &= p(u) \cos \alpha v + q(u) \sin \alpha v, \\ x_3 &= -p(u) \sin \alpha v + q(u) \cos \alpha v. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если же определитель $D=0$, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 &= \cos \delta, \quad \alpha_3 = \sin \delta, \quad \beta_2 = \cos \theta, \quad \beta_3 = \sin \theta \end{aligned}$$

и согласно (2.1):

$$\begin{aligned} x_0 &= -x'_0 \cos(\theta - \delta) + x'_1 \sin(\theta - \delta), \\ x_1 &= x'_0 \sin(\theta - \delta) + x'_1 \cos(\theta - \delta), \\ x_2 &= -x'_2 \cos(\theta + \delta) - x'_3 \sin(\theta + \delta), \\ x_3 &= -x'_2 \sin(\theta + \delta) + x'_3 \cos(\theta + \delta). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Положив здесь

$$\begin{aligned} \theta - \delta &= \pi - v, \quad \theta + \delta = \pi - \alpha v \\ x'_0 &= u, \quad x'_1 = 0, \quad x'_2 = p(u), \quad x'_3 = -q(u), \end{aligned}$$

вновь приходим к уравнениям (2.8).

При $\alpha=0$ из (2.8) получаем уравнения поверхности вращения эллиптического пространства [1].

§ 3. Винтовые поверхности сдвига эллиптического пространства

Сеть сдвига в эллиптическом пространстве удовлетворяет уравнениям Сервана-Бианки (1.2) и условию клиффордовой сопряженности [4]:

$$\begin{aligned} L + M(\varphi + \psi) + N\varphi\psi &= g(\varphi - \psi), \\ g &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выполнив соответствующие вычисления, приводим эту систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \varphi_u + \varphi_v \psi + \frac{1}{u}(\varphi + \psi) - \frac{\alpha}{u}(\varphi - \psi) - \frac{\gamma_u}{2\gamma} \varphi + \\ & + \frac{\varphi}{u\sqrt{\gamma}} [(\alpha^2 - u^2\alpha^2 + u^2)(\varphi - \psi) - \alpha(\varphi + \psi)] = 0, \\ & \psi_u + \psi_v \varphi + \frac{1}{u}(\varphi + \psi) - \frac{\alpha}{u}(\varphi - \psi) - \frac{\gamma_u}{2\gamma} \psi + \frac{\psi}{u\sqrt{\gamma}} [(\alpha^2 - u^2\alpha^2 + u^2)(\varphi - \psi) - \\ & - \alpha(\varphi + \psi)] = 0, \\ & u(E_u - 2uE^2) + 2(1 - \alpha^2)u^2\gamma\varphi\psi = 2\sqrt{\gamma}[(u^2E + \alpha^2)(\varphi - \psi) - \alpha(u^2E + 1)(\varphi + \psi)] \\ & \gamma = (1 - u^2)E - 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие совместимости этой системы, как и в случае евклидова пространства, определяет φ и ψ как функции только одной переменной u . Следовательно, остается в силе условие (1.13). При этом из первых двух уравнений системы (3.2) следует

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{[1 + (1 + \alpha)c^2u^2]\sqrt{\gamma}}{(1 - \alpha^2)c^2u^4 + c_1u^2 + \alpha}, \\ \psi &= \frac{[1 - (1 - \alpha)c^2u^2]\sqrt{\gamma}}{(1 - \alpha^2)c^2u^4 + c_1u^2 + \alpha}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а из третьего уравнения (3.2):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{[(1 - \alpha^2)c^2u^4 + c_1u^2 + \alpha]^2}{u^2(-c_2u^4 + bu^2 - 1)}, \\ b &= 1 + c_2 - [c_1 + (1 - \alpha^2)c^2 + \alpha]^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь c , c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Введя обозначения

$$c^2 = \frac{1}{a}, \quad c_2 = \frac{a_2^2}{a^2}, \quad b = \frac{b_1}{a^2}, \quad 1 - \alpha^2 + \frac{c_1 + \alpha}{c^2} = a_1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{a + (1 + \alpha)u^2}{u\sqrt{-a_2^2u^4 + b_1u^2 - a^2}}, \\ \psi &= \frac{a - (1 - \alpha)u^2}{u\sqrt{-a_2^2u^4 + b_1u^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из уравнений

$$u^2 + p^2 + q^2 = 1, \quad 1 + p_u^2 + q_u^2 = E = \frac{1 + \gamma}{1 - u^2}$$

находим

$$p = \sqrt{1 - u^2} \cos \omega(u), \quad q = \sqrt{1 - u^2} \sin \omega(u),$$

$$\omega(u) = \frac{1}{2} \left[P(u) - \frac{1 - \alpha^2}{a_1} Q(u) + \alpha R(u) \right],$$

$$P(u) = \arcsin \frac{(b_1 - 2a_2^2)(1 - u^2) + 2a_1^2}{2a_2^2k(1 - u^2)},$$

$$Q(u) = \arcsin \frac{2a_2^2 u^2 - b_1}{2a_2^2 k}, \quad R(u) = \arcsin \frac{b_1 u^2 - 2a^2}{2a_2^2 k u^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{b_1^2}{4a_2^4} - \frac{a^2}{a_2^2}}.$$

Интегрируя (3.5), находим сеть сдвига:

$$v = \frac{1}{2} \left[R(u) + \frac{1+\alpha}{a_2} Q(u) \right] + \text{const},$$

$$v = \frac{1}{2} \left[R(u) - \frac{1-\alpha}{a_2} Q(u) \right] + \text{const}.$$

Параметры сети сдвига:

$$v^1 = v - \frac{1}{2} \left[R(u) + \frac{1+\alpha}{a_2} Q(u) \right],$$

$$v^2 = v - \frac{1}{2} \left[R(u) - \frac{1-\alpha}{a_2} Q(u) \right].$$

Формулы обратного преобразования:

$$u = \sqrt{\frac{b_1}{2a_2^2} + k \sin a_2 (v^2 - v^1)}, \quad (3.7)$$

$$v = \frac{1}{2} [v^1 + v^2 - \alpha (v^1 - v^2) + R(u)].$$

Из этих формул следует, что рассматриваемая поверхность допускает каноническое представление в виде произведения кватернионов

$$X = A(v^1) B(v^2) \quad (3.8)$$

или в развернутом виде

$$x_0 = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3,$$

$$x_1 = A_1 B_0 + A_0 B_1 - A_3 B_2 + A_2 B_3,$$

$$x_2 = A_2 B_0 + A_3 B_1 + A_0 B_2 - A_1 B_3,$$

$$x_3 = A_3 B_0 - A_2 B_1 + A_1 B_2 + A_0 B_3.$$

Компоненты кватернионов A и B имеют вид:

$$A_0 = \cos \frac{1-\alpha-a_2}{2} v^1 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad B_0 = \cos \frac{1+\alpha+a_2}{2} v^2 \cos \frac{\lambda-\mu}{2},$$

$$A_1 = \sin \frac{1-\alpha-a_2}{2} v^1 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad B_1 = \sin \frac{1+\alpha+a_2}{2} v^2 \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \quad (3.9)$$

$$A_2 = \sin \frac{1-\alpha+a_2}{2} v^1 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad B_2 = \cos \frac{1+\alpha-a_2}{2} v^2 \sin \frac{\lambda-\mu}{2},$$

$$A_3 = -\cos \frac{1-\alpha+a_2}{2} v^1 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad B_3 = -\sin \frac{1+\alpha-a_2}{2} v^2 \sin \frac{\lambda-\mu}{2},$$

$$\cos \lambda = \sqrt{\frac{b_1}{2a_2^2} - k}, \quad \cos \mu = \sqrt{\frac{b_1}{2a_2^2} + k}.$$

Выбирая в (3.3) значение $V\sqrt{\gamma}$ со знаком „минус“, получим вторую сеть сдвига. Для этой сети имеем:

$$X = C(v^3)D(v^4),$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \cos \frac{1-\alpha+a_2}{2} v^3 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, & D_0 &= \cos \frac{1+\alpha-a_2}{2} v^4 \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ C_1 &= \sin \frac{1-\alpha+a_2}{2} v^3 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, & D_1 &= \sin \frac{1+\alpha-a_2}{2} v^4 \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ C_2 &= \sin \frac{1-\alpha-a_2}{2} v^3 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, & D_2 &= \cos \frac{1+\alpha+a_2}{2} v^4 \sin \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ C_3 &= -\cos \frac{1-\alpha-a_2}{2} v^3 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, & D_3 &= -\sin \frac{1+\alpha+a_2}{2} v^4 \sin \frac{\lambda-\mu}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В случае поверхности сдвига эллиптического пространства касательные к кривым сдвига одного семейства вдоль кривой сдвига второго семейства являются параллелями Клиффорда и пересекаются поэтому с парой образующих одной серии абсолюта [1]. Записывая условие пересечения касательных к кривым сдвига v^1 вдоль кривой v^2 с образующими второй серии абсолюта, находим аналогично [1]:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \sin^2(\lambda + \mu) + 4\sigma_1\sigma_2 \left[\frac{1-\alpha}{a_2} - \cos(\lambda + \mu) \right]^2 = 0, \quad (3.11)$$

где σ_1 и σ_2 — координаты, определяющие две образующие второй серии абсолюта.

Для касательных к кривым v^2 вдоль кривой v^1 имеем

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \sin^2(\lambda - \mu) + 4\sigma_1\sigma_2 \left[\frac{1+\alpha}{a_2} + \cos(\lambda - \mu) \right]^2 = 0. \quad (3.12)$$

Для касательных к кривым v^3 и v^4 получаются соотношения, совпадающие соответственно с (3.11) и (3.12).

Следовательно, для винтовой поверхности сдвига, так же как и для поверхности вращения [1], σ_1 и σ_2 оказываются связанными алгебраическими уравнениями второй степени.

Настоящая работа выполнена под руководством Я. П. Бланка, за что автор выражает ему глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. О поверхностях сдвига эллиптического пространства, несущих две сети сдвига. УМН, т. 19, вып. 1 (115), 1964
2. В. Ф. Катан. Основы теории поверхностей, т. 1, Гостехиздат, 1947.
3. S. Zie. Ges. Abh. 1.
4. H. Poincare. Bull. Soc. math. de France, 29, 1901..

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Ким Кыонг

(Ханой, ДРВ)

§ 1. Интегральные инварианты Пуанкаре

Принадлежащее Пуанкаре [1] понятие интегрального инварианта системы дифференциальных уравнений

$$dx_i = X_i dt \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

оказалось весьма полезным не только в связи с его ролью в вопросах механики. Оно оказалось весьма полезным и необходимым также в вопросах геометрии (интегральной геометрии).

Напомним основные определения и факты теории интегральных инвариантов Пуанкаре.

Рассмотрим на траекториях системы уравнений (1) p -мерное множество E_p^0 точек, соответствующих $t = t_0$ и множество E_p^τ , в которое переходит множество E_p^0 при перемещении его точек вдоль соответствующих траекторий, при $t = \tau$. Интеграл

$$\int \omega = \int A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}, \quad (2)$$

где под знаком интеграла стоит внешняя дифференциальная форма, (знак суммы опускается при суммировании по индексам, встречающимся дважды — вверх и вниз), Пуанкаре назвал интегральным инвариантом системы уравнений (1), если

$$\int_{E_p^0} \omega = \int_{E_p^\tau} \omega. \quad (3)$$

Интегральный инвариант называется абсолютным, если равенство (3) справедливо при любом τ без предположения замкнутости множеств E_p^0 , E_p^τ , и относительным, если (3) справедливо только в предположении замкнутости множеств E_p^0 , E_p^τ . Мы будем рассматривать только абсолютные интегральные инварианты и в дальнейшем прилагательное „абсолютный“ будем опускать.

Для того, чтобы интеграл (2) был инвариантом системы уравнений (1), необходимы и достаточны условия [2]:

$$X(A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_{h=1}^n \left\{ A^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right\} = 0, \quad (4)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

В частности, при $p = n$, интеграл (2) запишется в виде

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (5)$$

и соответствующие условия (4) — в виде

$$X(M) + M \sum_{h=1}^n \frac{\partial X_h}{\partial x_h} = 0; \quad (6)$$

при $p = n - 1$, интеграл (2) удобно записать в форме

$$\int A_1 dx_2 \dots dx_n \pm A_2 dx_3 \dots dx_n dx_1 \pm \dots \pm A_n dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \quad (7)$$

(с чередованием знаков при n четном) и тогда условия (4) сводятся к следующим

$$X(A(f)) - A(X(f)) + HA(f) = 0, \quad (8)$$

где

$$A(f) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i};$$

наконец, при $p = 1$, будем иметь интеграл

$$\int M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n \quad (9)$$

и условия инвариантности

$$X(M_i) + M_i \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + M_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_i} + \dots + M_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Мы будем предполагать, что функции X_i непрерывно дифференцируемы и при $t = t_0$ одновременно не обращаются в нуль. Тогда из условия (6), которое можно переписать в виде

$$X(\ln M) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial X_h}{\partial x_h} = 0, \quad (6_1)$$

сразу следует существование интегрального инварианта максимального (n -го) порядка. Кроме того, если интеграл

$$\int N dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

также является инвариантом той же системы (1), то

$$N = M\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция аргументов; φ_i — независимые решения уравнения

$$X(f) = 0, \quad (11)$$

или, что то же, интегралы, не зависящие от t , системы уравнений (1).

Г. И. Дринфельд [3] показал, что система (1) имеет точно C_n^p линейно несвязанных интегральных инвариантов p -го порядка

$$\int A_j^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p},$$

и что любой интегральный инвариант p -го порядка системы (1) можно записать в виде

$$\int \Pi^j A_j^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p},$$

где Π^j — произвольные функции решений уравнения (1).

Интеграл (2) называется интегральным инвариантом группы Ли с инфинитезимальными операторами

$$X_i(f) = \sum_{j=1}^n X_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

если он сохраняет значение при всех преобразованиях группы. Необходимыми и достаточными условиями инвариантности являются следующие:

$$\begin{aligned} X_i(A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_{h=1}^n \left\{ A^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_{\alpha_1}} + A^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_{\alpha_p}} \right\} = 0, \quad (4_1) \\ (i = 1, 2, \dots, r), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

r -членная группа Ли не всегда имеет интегральные инварианты: при $r=n$ (просто транзитивная группа), существуют интегральные инварианты всех порядков; при $r>n$ интегральный инвариант n -го порядка существует, если операторы группы удовлетворяют некоторым условиям [4], которые могут быть выражены и с помощью структурных констант группы [5], [6]. Здесь мы отметим только, что при $r>n$, если все структурные константы группы равны нулю (группа коммутативна), то интегральный инвариант n -го порядка существует.

§ 2. Интегральные инварианты Видаль Абаскаля

Видаль Абаскаль [7], [8] обобщил понятие интегрального инварианта на случай вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений Пфаффа

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} du_j = 0, \quad (12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, h; h < n),$$

имея ввиду, по-видимому, применения к интегральной геометрии.

Рассмотрим на интегральных многообразиях системы уравнений (12) произвольное p -мерное множество D_p^0 ($p \leq h$) точек, соответствующих $u_j = u_{j0}$, и множество D_p^1 , в которое переходят точки множества D_p^0 при перемещении их по соответствующим многообразиям, при $u_j = u_j$. Интеграл

$$\int \Omega = \int A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} du_{\alpha_1} du_{\alpha_2} \dots du_{\alpha_p}, \quad (13)$$

где Ω — внешняя дифференциальная форма, называется интегральным инвариантом системы уравнений (12), если

$$\int_{D_p^0} \Omega = \int_{D_p^1} \Omega. \quad (14)$$

Как в параграфе 1, интегральный инвариант называется абсолютным, если равенство (14) справедливо при любых u_{j1} без предположения замкнутости множеств D_p^0 , D_p^1 , и относительным, если это равенство справедливо только при условии, что D_p^0 и D_p^1 — замкнутые множества. В дальнейшем мы будем рассматривать только абсолютные интегральные инварианты.

Видаль Абаскаль доказал, что необходимым и достаточным условием инвариантности интеграла (13) относительно системы уравнений (12) является

$$d\Omega = 0, \quad (15)$$

на основании самой системы (12), d — символ внешнего дифференцирования.

§ 3. Условия инвариантности в случае вполне интегрируемой системы нормальной формы

Видаль Абаскаль не расшифровал условие (15) и не привел ни одного примера, возможно потому, что непосредственное применение условия (15) затруднительно. Мы заменим условие (15) другим, нам кажется — более удобным, но ограничиваясь в этой работе случаем системы вида

$$dy_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} dt_i \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

где $a_{ji} = a_{ji}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, то есть явно не зависят от t_i . Рассмотрим инте

$$\int \Omega^p = \int A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p}. \quad (17)$$

Внешний дифференциал формы Ω^p , на основании (16), равен

$$d\Omega^p = \sum_{i=1}^m dt_i dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p} \left[a_{1i} \frac{\partial A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial y_1} + a_{2i} \frac{\partial A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial y_2} + \dots \right. \\ \left. \dots + a_{ni} \frac{\partial A^{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial y_n} + \sum_{h=1}^n \left(A^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_1}} + A^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_2}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_p}} \right) \right].$$

Приравняв нулю коэффициенты при $dt_i dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p}$, находим, что условия инвариантности интеграла (17) относительно системы уравнений (16) таковы:

$$X_i(A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_{h=1}^n \left(A^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_1}} + A^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_2}} + \dots \right) = 0, \quad (18) \\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

где

$$X_i(f) = a_{1i} \frac{\partial f}{\partial y_1} + a_{2i} \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots + a_{ni} \frac{\partial f}{\partial y_n}. \quad (19)$$

Так как система (16) вполне интегрируема, то [9] операторы (19) удовлетворяют условиям

$$(X_i, X_k)f \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Следовательно, эти операторы можно рассматривать как инфинитезимальные операторы коммутативной группы. Сравнив условия (18) с условиями (4₁), мы можем сказать, что интеграл (17) является инвариантом системы уравнений (16) в том и только в том случае, когда он является интегральным инвариантом группы Ли с инфинитезимальными операторами (19). Этот результат из несколько отличных соображений мы указали в работе [10]. Из этого утверждения, в частности, следует, что система (16) всегда имеет интегральный инвариант n -го порядка (Видаль Абаскаль не останавливается на вопросе существования).

§ 4. Два примера

Пример 1. Пусть задана система уравнений

$$dx = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} du - ydv \\ dy = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} du + xdv \\ dz = -\sqrt{x^2 + y^2} du.$$

Операторы системы таковы:

$$X_1(f) = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_2(f) = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Система вполне интегрируема, так как

$$(X_1, X_2)f = \left[X_1(-y) - X_2\left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right] \frac{\partial f}{\partial x} + \left[X_1(x) - X_2\left(\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right] \frac{\partial f}{\partial y} + [X_1(0) - X_2(-\sqrt{x^2+y^2})] \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0.$$

Легко проверить, что интегральными многообразиями системы являются сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const.}$$

Применив условие (18) к интегралу $\int M(x, y, z) dx dy dz$, получаем систему двух уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial M}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2} \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} M = 0 \\ -y \frac{\partial M}{\partial x} + x \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Легко найти частное решение $(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ этой системы. Следовательно, так как интегральными многообразиями являются $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, самым общим интегральным инвариантом третьего порядка рассматриваемого вида является

$$\int (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \Phi(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

где Φ — произвольная функция.

Легко проверить, что форма $(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \Phi dx dy dz$ удовлетворяет условию Абаскаля, то есть, что внешний дифференциал

$$d((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \Phi(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz)$$

равен нулю на основании данной системы.

Пример 2. Возьмем систему уравнений

$$dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} du - y dv$$

$$dy = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} du + x dv$$

$$dz = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} du.$$

Соответствующими операторами являются:

$$X_1(f) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_2(f) = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Легко проверить, что

$$(X_1, X_2)f \equiv 0,$$

то есть что система вполне интегрируема.

Интегральными многообразиями являются конусы

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = m^2 = \text{const.}$$

Условия инвариантности интеграла $\int M(x, y, z) dx dy dz$ таковы:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{2M}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ -y \frac{\partial M}{\partial x} + x \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Почти очевидным частным решением этой системы уравнений является $(x^2 + y^2)^{-1}$ и потому

$$M = (x^2 + y^2)^{-1} \Phi \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right).$$

На основании данной системы легко проверить, что

$$d \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \Phi \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) dx dy dz \right) = 0.$$

§ 5. Построение интегральных инвариантов произвольного порядка

Пуанкаре доказал, что если интеграл (2) является инвариантом системы (1), то интеграл

$$\int \left(\sum_{h=1}^n X_h A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h} \right) dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p-1}}$$

является инвариантом той же системы. Мы сформулируем обобщенную теорему в удобных для нашей цели терминах.

Теорема. Если оператор

$$Y(f) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (20)$$

удовлетворяет условиям

$$(X_i, Y)f \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (21)$$

и интеграл

$$\int \Omega^p = \int A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p}$$

является инвариантом системы уравнений (16), то

$$\int \left(\sum_{h=1}^n \eta_h A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h} \right) dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_{p-1}} \quad (22)$$

является интегральным инвариантом $(p-1)$ -го порядка той же системы.

Доказательство. Условия (21) можно записать так:

$$(X_i, Y)f \equiv \sum_{j=1}^n [X_i(\eta_j) - Y(a_{ji})] \frac{\partial f}{\partial y_i} \equiv 0.$$

Отсюда следует для всех i, j :

$$X_i(\eta_j) - Y(a_{ji}) = 0. \quad (21_1)$$

Обозначая через $C^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}$ сумму $\sum_{h=1}^n \eta_h A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h}$, проверим, что

$C^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}$ удовлетворяют условиям (18).

Имеем

$$\begin{aligned} X_i(C^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}) + \sum_{k=1}^n \left(C^{k \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_1}} + C^{\alpha_1 k \dots \alpha_{p-1}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + C^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2} k} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_{p-1}}} \right) = X_i \left(\sum_{h=1}^n \eta_h A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} \right) + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\eta_h A^{k \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} \frac{h \partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_1}} + \dots + \eta_h A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2} kh} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_{p-1}}} \right) = \\ = \sum_{h=1}^n \eta_h X_i(A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h}) + \sum_{h=1}^n A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} X_i(\eta_h) + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \eta_h \left(A^{k \alpha_2 \dots \alpha_{p-2} h} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_1}} + \dots + A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2} kh} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_{p-1}}} + \right. \\ \left. + A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} k} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_h} \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \eta_h A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} k} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_h} = \\ = \sum_{h=1}^n \eta_h \left[X_i(A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h}) + \sum_{k=1}^n \left(A^{k \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{\alpha_1}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} k} \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_h} \right) \right] + \sum_{h=1}^n A^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} \left[X_i(\eta_h) - \sum_{k=1}^n \eta_k \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_k} \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

на основании (18) и (21₁). Теорема доказана.

Известно [11], что существуют, включая самые операторы (19), n линейно несвязанных операторов

$$Y_r(f) = \sum_{j=1}^n \eta_{rj} \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Delta = \|\eta_{rj}\| \neq 0, \quad (23)$$

удовлетворяющих условиям (21)

$$(X_i, Y_r) f \equiv 0.$$

Пусть $\int M dy_1 dy_2 \dots dy_n$ — инвариант n -го порядка системы уравнений (16). По доказанной обобщенной теореме Пуанкаре мы можем построить интегральные инварианты $(n-1)$ -го порядка

$$\int M [\eta_{r1} dy_2 dy_3 \dots dy_n + \eta_{r2} dy_3 \dots dy_n dy_1 + \dots + \eta_{rn} dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}], \quad (24)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

предполагая для определенности n нечетным. Подынтегральные формы (24) линейно несвязаны, так как

$$\|M\eta_{rj}\| = M^n \Delta \neq 0.$$

Применяя ту же теорему к инвариантам (24), мы составим C_n^2 инвариантов $(n-2)$ -го порядка

$$\begin{aligned} & \int M [(\eta_{r1}\eta_{s2} - \eta_{r2}\eta_{s1}) dy_3 \dots dy_n + (\eta_{r2}\eta_{s3} - \eta_{r3}\eta_{s2}) dy_4 \dots dy_n dy_1 + \dots] = \\ & = \int M \left[\begin{vmatrix} \eta_{r1} & \eta_{r2} \\ \eta_{s1} & \eta_{s2} \end{vmatrix} dy_3 \dots dy_n + \begin{vmatrix} \eta_{r2} & \eta_{r3} \\ \eta_{s2} & \eta_{s3} \end{vmatrix} dy_4 \dots dy_n dy_1 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

По теореме Сильвестера [12] определитель, составленный из $(C_n^2)^2$ определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} \eta_{r\mu} & \eta_{r\nu} \\ \eta_{s\mu} & \eta_{s\nu} \end{vmatrix},$$

равен ΔC_{n-1}^1 и потому отличен от нуля.

Мы построили, следовательно, C_n^2 интегральных инвариантов порядка $(n-2)$ с линейно несвязанными подынтегральными формами.

Теперь предположим, что существуют C_n^{l-1} интегральных инвариантов порядка $n-l+1 = p+1$ вида

$$\begin{aligned} & \int M \left[\begin{vmatrix} \eta_{r1} & \eta_{r2} & \dots & \eta_{r,l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{s1} & \eta_{s2} & \dots & \eta_{s,l-1} \end{vmatrix} dy_l \dots dy_n + \begin{vmatrix} \eta_{r2} & \eta_{r3} & \dots & \eta_{rl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{s2} & \eta_{s3} & \dots & \eta_{sl} \end{vmatrix} dy_{l+1} \dots dy_n dy_1 + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \begin{vmatrix} \eta_{rl} & \eta_{r1} & \dots & \eta_{r,l-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{sl} & \eta_{s1} & \dots & \eta_{s,l-2} \end{vmatrix} dy_{l+1} \dots dy_n dy_{l-1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

По формуле (22) мы получим C_n^l интегральных инвариантов порядка $n - l = p$:

$$\begin{aligned} & \int M \left\{ \left[\begin{vmatrix} \eta_{r1} & \cdots & \eta_{r, l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_{s1} & \cdots & \eta_{s, l-1} \end{vmatrix} \eta_{ql} + \begin{vmatrix} \eta_{r2} & \cdots & \eta_{rl} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_{s2} & \cdots & \eta_{sl} \end{vmatrix} \eta_{q1} + \cdots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdots + \begin{vmatrix} \eta_{rl} & \eta_{r1} & \cdots & \eta_{r, l-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{sl} & \eta_{s1} & \cdots & \eta_{s, l-2} \end{vmatrix} \eta_{q, l-1} \right] dy_{l+1} \cdots dy_n + \cdots \right\} = \\ & = \int M \left\{ \begin{vmatrix} \eta_{r1} & \eta_{r2} & \cdots & \eta_{r, l-1} & \eta_{rl} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_{s1} & \eta_{s2} & \cdots & \eta_{s, l-1} & \eta_{sl} \\ \eta_{q1} & \eta_{q2} & \cdots & \eta_{q, l-1} & \eta_{ql} \end{vmatrix} dy_{l+1} \cdots dy_n + \cdots \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

Подынтегральные формы линейно несвязаны, так как определитель порядка C_n^l , составленный из определителей

$$\begin{vmatrix} \eta_{r\mu} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{r\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{q\mu} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{q\nu} \end{vmatrix},$$

по теореме Сильвестера равен $\Delta^{C_{n-1}^{l-1}}$ и потому отличен от нуля.

Так как более чем C_n^l линейно несвязанных внешних форм p -го порядка не может быть, то мы нашли все независимые интегральные инварианты p -го порядка. Обозначим их через

$$\begin{aligned} \int \Omega_k^p &= \int A_k^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \cdots dy_{\alpha_p} \\ (k &= 1, 2, \dots, \mu = C_n^l = C_n^p) \end{aligned} \quad (27)$$

и подчеркнем, что

$$\| A_k^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} \| \neq 0. \quad (28)$$

Пусть

$$\int \Omega^p = \int A^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \cdots dy_{\alpha_p}$$

любой интегральный инвариант p -го порядка системы, тогда

$$\Omega^p = \lambda_1 \Omega_1^p + \lambda_2 \Omega_2^p + \cdots + \lambda_\mu \Omega_\mu^p,$$

где λ_k — функции, пока неопределенные.

Следовательно,

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} = \lambda_1 A_1^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} + \lambda_2 A_2^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} + \cdots + \lambda_\mu A_\mu^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}. \quad (29)$$

Так как $A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ удовлетворяют условиям (18), то

$$\begin{aligned} 0 &= X_i (A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_{h=1}^n \left(A^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_1}} + A^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_2}} + \dots \right) = \\ &= A_1^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_1) + A_2^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_2) + \dots + A_{\mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_{\mu}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \left[X_i (A_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_{h=1}^n \left(A_k^{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_1}} + A_k^{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_{\alpha_2}} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как $A_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ тоже удовлетворяют условиям (18), то мы получаем

$$A_1^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_1) + A_2^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_2) + \dots + A_{\mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_i (\lambda_{\mu}) = 0.$$

Отсюда, на основании (28), следует

$$\begin{aligned} X_i (\lambda_k) &= 0, \\ (i &= 1, 2, \dots, m); \quad (k = 1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \quad (30)$$

то есть λ_k являются интегралами системы (16). Таким образом, имеет место следующее утверждение:

Теорема. Вполне интегрируемая система уравнений в полных дифференциалах (16) имеет C_n^p линейно несвязанных интегральных инвариантов p -го порядка, через которые любой инвариант p -го порядка можно выразить по формуле (29), где λ_k — функции интегралов системы (16).

§ 6. Примеры

Вернемся к рассмотрению системы уравнений

$$\begin{aligned} dx &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} du - ydv \\ dy &= \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} du + xdv, \\ dz &= -\sqrt{x^2 + y^2} du \end{aligned}$$

для которой нами был найден интегральный инвариант

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Phi(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Для построения интегральных инвариантов низших порядков найдем оператор

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial z},$$

удовлетворяющий условиям

$$(X_1, Y)f \equiv 0, \quad (X_2, Y)f \equiv 0, \quad (\alpha)$$

где

$$X_1(f) = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (\beta)$$

$$X_2(f) = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Условия (α) приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -y \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + x \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \eta_2 = 0, \\
 & -y \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + x \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \eta_1 = 0, \\
 & -y \frac{\partial \eta_3}{\partial x} + x \frac{\partial \eta_3}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - \\
 & - \frac{y^2 z}{(x^2+y^2)^{3/2}} \eta_1 + \frac{xyz}{(x^2+y^2)^{3/2}} \eta_2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \eta_3 = 0, \\
 & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \\
 & + \frac{xyz}{(x^2+y^2)^{3/2}} \eta_1 - \frac{x^2 z}{(x^2+y^2)^{3/2}} \eta_3 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \eta_3 = 0, \\
 & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_3}{\partial x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2} \frac{\partial \eta_3}{\partial z} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \eta_1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \eta_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{γ}$$

Достаточно найти частное решение этой системы, так как нам нужен только один, отличный от операторов (β), оператор, удовлетворяющий условию (α). Легко проверить, что частным решением системы (γ) является

$$\eta_1 = x; \quad \eta_2 = y; \quad \eta_3 = z,$$

(можно найти и все решения этой системы).

С помощью операторов (β) и оператора $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$ по формуле (24) мы получим три линейно-несвязанных инварианта второго порядка

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\Phi}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} dydz + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dzdx - \sqrt{x^2+y^2} dxdy \right), \\
 & \int \frac{\Phi}{\sqrt{x^2+y^2}} (-ydydz + xdzdx), \\
 & \int \frac{\Phi}{\sqrt{x^2+y^2}} (xdydz + ydzdx + zdx dy),
 \end{aligned}$$

и по формуле (25) три линейно несвязанных инварианта первого порядка

$$\begin{aligned}
 & \int \Phi \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \\
 & \int \Phi (xdx + ydy + zdz), \\
 & \int \Phi \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dy - \sqrt{x^2+y^2} dz \right).
 \end{aligned}$$

Геометрический смысл инвариантов становится яснее, если перейти к сферическим координатам. В этих координатах найденные интегральные инварианты имеют вид

$$\begin{aligned} & \int \Phi(r) dr d\theta d\varphi; \\ & \int \Phi(r) dr d\theta, \quad \int \Phi(r) d\theta d\varphi, \quad \int \Phi(r) d\varphi dr; \\ & \int \Phi(r) dr, \quad \int \Phi(r) d\theta, \quad \int \Phi(r) d\varphi. \end{aligned}$$

Рассмотрим снова систему уравнений

$$\begin{cases} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} du - y dv \\ dy = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} du + x dv, \\ dz = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} du \end{cases}$$

для которой в параграфе 4 мы нашли интегральный инвариант

$$\int \frac{1}{x^2 + y^2} \Phi\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right) dx dy dz.$$

Оператор

$$Y(f) = z \frac{\partial f}{\partial z}$$

удовлетворяет условиям

$$(X_1, Y)f \equiv 0, \quad (X_2, Y)f \equiv 0,$$

где

$$X_1(f) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_2(f) = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

С помощью операторов $X_1(f)$, $X_2(f)$, $Y(f)$ мы находим интегральные инварианты

— второго порядка:

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dz + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right),$$

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} (-y dy dz + x dz dx),$$

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} z dx dy;$$

— первого порядка:

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy - \sqrt{x^2 + y^2} dz \right),$$

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} (xzdx + yzdy),$$

$$\int \frac{\Phi}{x^2 + y^2} \left(\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right),$$

те же, что и в предыдущем примере, но с другой функцией Φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris Gauthier—Villars, 1899.
2. E. Goursat. Leçons sur le problème de Pfaff, Paris, Hermann, 1922.
3. Г. И. Дринфельд. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, 1936, т. XXII.
4. Г. И. Дринфельд. О мере группы Ли, «Записки Харьк. матем. об-ва», т. XXI, 1949, стр. 47—58.
5. M. I. Stoka. Asupra grupurilor G_r masurabile dintr-un spatiu E_n , Comun. Acad. RPR, 1959, 9, № 1, 5—10.
6. Е. Г. Ушакова. Об условиях существования интегрального инварианта транзитивной группы, «Записки Харьк. матем. об-ва», т. XXVII, серия 4, 1961, стр. 149—152.
7. E. Vidal Abascal. A generalization of integral invariants Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 10, № 5, 1959, 721—727.
8. E. Vidal Abascal. Collect. math., 1960, 12, № 2, 71—102.
9. E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, Hermann, 1921.
10. Г. И. Дринфельд та Ким Кьонг. Про інтегральні інваріанти повністю інтегровних пфаферових систем диференціальних рівнянь. «Доповіді АН УРСР», 1963, 6.
11. Ю. В. Пфейфер. Будування загального оператора інволюційної системи лінійних однорідних рівнянь. Журн. математичного циклу Всеукраїнської Академії наук, № 2—3, 1931, стр. 43—66.
12. E. Pascal. I Determinanti, Milano, V-Hoepli, 1897.