МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем
Кафедра теоретичної радіофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри
_____ Вячеслав ХАРДІКОВ

"_7__" грудня 2022 року

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
МАГІСТРА

ВІДНОВЛЕННЯ СТРУКТУРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ВКЛЮЧЕННІ ПРЯМОКУТНОГО ХВИЛЕВОДУ

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Кирило БЄЛКІН

Керівник
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Ольга БАГАЦЬКА

Харків – 2022

ЗМІСТ

Вступ 3

1. Огляд літератури 4

2. Визначення структури електромагнітного поля неоднорідної анізотропної вставки, розташованої у прямокутному хвилеводі 7

2.1. Постановка задачі 7

2.2. Процедура дискретизації інтегральних рівнянь Максвелла 9

2.3. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній *Ox* 11

2.4. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній осі *Oy* 19

2.5. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній *Oz* 21

2.6. Визначення компонент магнітного поля, необхідних для створення замкненої системи рівнянь 25

2.7. Дискретизована система рівнянь Максвелла для середовища з анізотропією магнітної проникності 27

2.8 Загальна система дискретизированих рівнянь Максвелла для середовища з анізотропією змішаного типу 32

3. Результати розрахунків 34

4. Висновки 38

5. Список використаних джерел 39

ВСТУП

Розробка і застосування сучасних високоякісних магнітодіелектриків як природного, так і штучного походження сприяло значному поширенню в техніці надвисоких частот частково заповнених хвилеводів та резонаторів. Наявність таких матеріалів дозволило впливати не лише на основні характеристики хвилеводів, а й створювати нові прилади – керовані фазообертачі, вентилі, обмежувачі потужності тощо.

Дослідження поведінки електромагнітних полів в неоднорідних та анізотропних середовищах активно проводяться декілька останніх десятиліть, при цьому вони завжди були достатньо складними і потребували розробки нових підходів Актуальним видається саме теоретичний аналіз взаємодії електромагнітного поля з неоднорідними анізотропними структурами через своє фундаментальне значення для великої кількості своїх як суто наукових, так і практично важливих фізико-технічних застосувань.

Теорія і розрахунок частково заповнених хвилеводів мають значну спільність як відносно типу пристрою, так і відносно типу матеріалу, що заповнює хвилевід. Тому електродинамічна задача розрахунку часткового заповнених хвилеводів є актуальним з точки зору удосконалення існуючих, так і розробки нових пристроїв. Така задача є достатньо складною. Пояснюється це, по-перше, складною структурою поля, і, по-друге, анізотропними властивостями середовищ, що заповнюють хвилевід.

Задача з визначення структури електричного поля є базовою при розв’язанні задачі про розсіювання електромагнітних хвиль на анізотропній неоднорідності в хвилеводі. В пропонованій роботі наведено дослідження врахування впливу неоднорідної анізотропної вставки на характер і розподіл електромагнітного поля в прямокутному хвилеводі, для чого за допомогою методу скінченних різниць побудовано чисельно-аналітичний розв’язок тривимірної задачі. Запропонований алгоритм може бути поширений на задачі, які виникають при розробці й оптимізації характеристик хвилевідних фільтрів і резонаторів.

1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

На сучасному етапі для розв'язання хвилевідних задач розроблено і активно використовується широкий спектр числових методів, проте серед них одними з найбільш ефективних по праву вважаються методи на основі різницевих схем [1-3]. До цих методів належать методи скінченних різниць (МСР) і скінченних елементів (МСЕ). Метод скінченних різниць [1, 2] характеризується відносною простотою і логічністю, є не надто складним у застосуванні і при цьому в ряді задач забезпечує прийнятну точність отриманого розв'язку. Ці обставини обумовлюють широке використання цього методу в тому числі й при дослідженні різних аспектів хвилевідних задач. Для реалізації МСР необхідно здійснити два кроки: на першому відбувається дискретизація області визначення розв'язуваного рівняння (або рівнянь), тобто заміна безперервної області визначення на дискретну, другим кроком є апроксимація диференціальних операторів у рівняннях, і, можливо, в граничних і початкових. У підсумку отримуємо систему алгебраїчних рівнянь (лінійних або нелінійних залежно від первинного рівняння), розв'язавши яку маємо наближені значення шуканої функції у вузлах дискретної сітки. Метод скінченних різниць має суттєвий недолік, який полягає в наступному: якщо неоднорідності мають складну геометрію, то на таких границях неправильної форми МСР не забезпечує достатньо точного урахування граничних умов. Ці проблеми можна подолати шляхом зменшення кроку сітки, проте це суттєво збільшує витрати ресурсів. Подолати зазначені недоліки дозволяє використання вдосконалених методів і алгоритмів, серед них метод скінченних різниць зі змінним кроком сітки [4], неортогональний скінченно-різницевий алгоритм [5], скінченно-різницевий алгоритм в криволінійних координатах [6] тощо.

Важливу альтернативу до методу скінченних різниць складає метод скінченних елементів, який відомий з середини двадцятого сторіччя. Цей метод спочатку застосовувався в задачах теорії опору матеріалів, а згодом його подальша розробка і вдосконалення дозволили широке використання МСЕ для розв'язання задач в частинних похідних.

Обидва ці методи, МСР і МСЕ, є сітковими методами для наближеного

розв’язання граничних задач. Теоретичне порівняння точності цих методів дозволяє вважати, що можливості цих методів є співставними. Похибки апроксимації для обох методів є пропорційними кроку сітки в степені від першого до четвертого і залежать від форми області визначення та її границі, вигляду граничних і початкових умов. Загалом метод скінченних різниць є більш простим в реалізації, проте не надто точно дозволяє враховати граничні умови для областей складної форми. Метод скінченних елементів, в свою чергу, є більш складним, громіздким і витратним з точки зору ресурсів, однак дозволяє отримати більш точний результат для границь, складних за формою і виглядом граничних умов. Все це дозволяє широко застосовувати обидва ці сіткові методи безпосередньо для розв’язання наукових, зокрема, хвилевідних, задач, а також при розробці програмних комплексів автоматизованого проектування складних науково-технічних об’єктів.

Як метод скінченних різниць, так і метод скінченних елементів використовують апроксимацію, проте існує суттєва відмінність: в першому апроксимації підлягають всі диференціальні оператори, наявні в задачі (в рівнянні і, можливо, в граничних і початкових умовах), а в другому апроксимується сама шукана функція, яка є розв’язком рівняння в області визначення, на границі задовольняє відповідним граничним умовам, а в початковий момент часу – початковим умовам. Відмінною є і спосіб побудови сіток, зокрема, у МСР зазвичай застосовуються регулярні сітки (з постійним кроком), а особливості геометричної форми області визначення задачі враховуються лише безпосередньо поблизу границь. Отже метод скінченних різниць працює значно краще для задач з прямолінійними границями області визначення. Метод скінченних елементів позбавлений цього недоліку: краща апроксимація границі забезпечується завдяки розбиттю на елементи з урахуванням геометричних особливостей області, починаючи від границь і до внутрішньої області, тип елементів обирається залежно від форми границі. Алгоритм розбиття передбачає певні обмеження для елементів, зокрема, сторони трикутних елементів не повинні суттєво відрізнялися по довжині. Більш точне урахування форми границі і складних граничних умов приводить до того, що МСЕ є більш ефективним порівняно з МСР для рівнянь, заданих на області визначення зі складною геометрією, проте більш

громіздким і ресурсовитратним.

Результатом застосування як МСР, так і МСЕ для розв'язання диференціальних рівнянь, заданих у певній області визначення, сумісно з граничними і початковими умовами, є система алгебраїчних рівнянь (залежно від задачі лінійних або нелінійних), яку необхідно розв'язати в числовий спосіб. У зв'язку з цим для обох методів виникає проблема, обумовлена великим розміром (до десятків тисяч елементів) результуючої матриці системи. Для розв'язання таких систем доводиться використовувати відповідні числові методи, а також брати до уваги способи зберігання таких великих матриць.

Запропонована робота містить опис відповідної тривимірної фізико-математичної моделі для визначення розподілу електромагнітного поля в прямокутному хвилеводі з анізотропною неоднорідною вставкою. Оскільки границі вставки є прямолінійними, то при розв'язанні задачі ми скористалися більш простим методом скінченних різниць, який для задачі з правильною геометрією границь є оптимальним для забезпечення прийнятної точності й швидкодії алгоритму.

Розглянута нами структура вивчалась раніше іншими дослідниками. Зокрема, роботи [7-10] містять найбільш значущі результати вивчення запропонованої структури. Так у роботі [10] з використанням методу матриці передачі в частотній області визначено елементи матриці розсіяння однорідної ізотропної діелектричної вставки прямокутного хвилеводу. В публікаціях [7-9] для дослідження аналогічної структури було використано метод скінченних різниць. Так у роботах [7,8] досліджувались характеристики розсіяння однорідної ізотропної хвилевідної вставки без втрат. Для визначення елементів матриці розсіювання такої вставки було застосовано метод скінченних різниць у двовимірній області. Робота [9] для отримання аналогічних результатів використовує тривимірний метод скінченних різниць. Наведені роботи містять дослідження задачі розсіювання для випадку, коли вставка є однорідною ізотропною. Дипломна робота пропонує реалізацію розв'язання задачі з використанням методу скінченних різниць для більш загального і складного випадку, а саме, коли вставка у прямокутному хвилеводі є неоднорідною анізотропною.

2. ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ВСТАВКИ, РОЗТАШОВАНОЇ У ПРЯМОКУТНОМУ ХВИЛЕВОДІ

У роботі пропонується чисельно-аналітичне розв'язання задачі з визначення структури тривимірного електромагнітного поля для анізотропної вставки у прямокутному хвилеводі. Розв'язання здійснюється на основі застосування методу скінченних різниць [1, 2]. Передбачається, що орієнтація оптичних осей тензорів матеріальних параметрів може довільно змінюватись.

Наведена методика відіграє ключову роль при розв'язанні задач розсіювання електромагнітних хвиль анізотропною неоднорідністю у хвилеводі, що є актуальним при розробці хвилевідних фільтрів, резонаторів та інших пристроїв НВЧ діапазону.

2.1. Постановка задачі

Введемо до розгляду декартову систему координат $x,\ y,\ z$ в такий спосіб, що вісь Ox спрямована вертикально вгору. Анізотропну вставку будемо моделювати прямокутним паралелепіпедом, розташованим всередині прямокутного хвилеводу (рис. 2.1). Здійснимо розбиття цього паралелепіпеда на N елементарних комірок (рис. 2.2), при цьому вважаємо, що кожна комірка характеризується власним набором матеріальних параметрів. Будемо вважати, що бічні стінки вставки, розташовані впритул до стінок хвилеводу є ідеально провідними.

Побудова такої сітки розбиття досліджуваної вставки, а також здійснення нумерації комірок у раціональний спосіб значною мірою дозволяють спростити розв'язання відповідної задачі електродинаміки. Оскільки досліджувана структура має прямокутні границі, доцільним є використання рівномірної сітки.

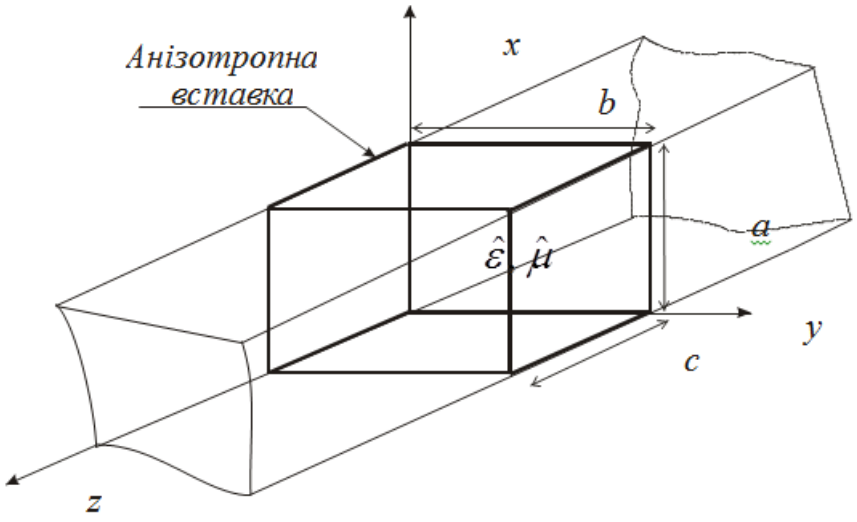


Рис. 2.1. Геометрія задачі

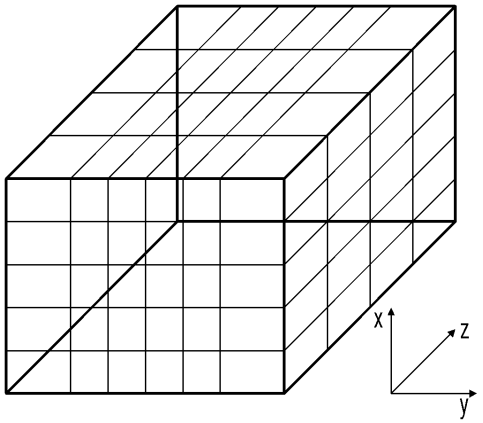


Рис. 2.2. Рівномірна сітка для дискретизації
інтегральних рівнянь Максвелла.

Для кожної з N комірок визначимо шість компонент поля, які у подальшому будуть використані при дискретизації рівнянь Максвелла. Вважатимемо, що джерела відсутні, а залежність від часу матиме вигляд $exp\,(-i\omega t)$. Тоді роторні рівняння Максвелла в інтегральній формі запишуться так:

$$\int_L \vec{E} \cdot \vec{\tau}\, dl - ik_0 \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_L \vec{H} \cdot \vec{\tau}\, dl + ik_0 \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{2.2}$$

Інтегрування відбувається за довільною поверхнею S, яку обмежено контуром L; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до контуру L; $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – відповідно напруженості електричного та магнітного полів, $k_0 = \omega/c$ – хвильове число у вакуумі, ω – циклічна частота, c – швидкість світла у вакуумі. Для анізотропного середовища матеріальні рівняння виглядають так:

$$\vec{B} = \hat{\mu} \cdot \vec{H}, \tag{2.3}$$

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{E}. \tag{2.4}$$

У цих рівняннях $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ – відповідно діелектрична та магнітна проникність, які для анізотропного середовища є тензорними величинами: $\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{jk}], \hat{\mu} = [\mu_{jk}], (j,k = x,y,z)$, а $\varepsilon_{jk}(\vec{R})$ $\mu_{jk}(\vec{R})$ є довільними функціями координат, $\vec{R} = (x,y,z)$.

2.2. Процедура дискретизації інтегральних рівнянь Максвелла

Оберемо типову комірку з номером k. Матеріальні параметри середовища всередині цієї комірки дорівнюють $\hat{\varepsilon}_k$, $\hat{\mu}_k$. Комірку вважатимемо настільки маленькою, що можна припустити, що в її межах матеріальні параметри є постійними. Аналогічно вважатимемо, що і поля в межах комірки є постійними.

Визначимо 6 компонент поля в k-й комірці, а саме E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}, B_{xk}, B_{yk}, B_{zk} (рис. 2.3). Геометричні розміри комірки позначимо через x_k, y_k, z_k. Компоненти вектора напруженості електричного поля E_k визначатимемо в точках, які є серединами відповідних ребер, а вектора магнітної індукції B_k – у точці перетину

діагоналей граней комірки.

Суміжні з k-ю комірки позначатимемо, як показано на рисунку 2.2. Комірка над k-ю позначатиметься буквою a (від англійського «*above*»), ліворуч («*lef*») – буквою l тощо.

На першому етапі визначимо як S нижню грань k-ї комірки, відповідно L – контур, що її обмежує, при цьому вектор зовнішньої нормалі $\vec{n} = \vec{x}_0$. З рівняння (2.1) отримаємо

$$E_{yk} y_k + E_{zr} z_k - E_{yb} y_k - E_{zk} z_k = ik_0 B_{xk} y_k z_k . \tag{2.5}$$

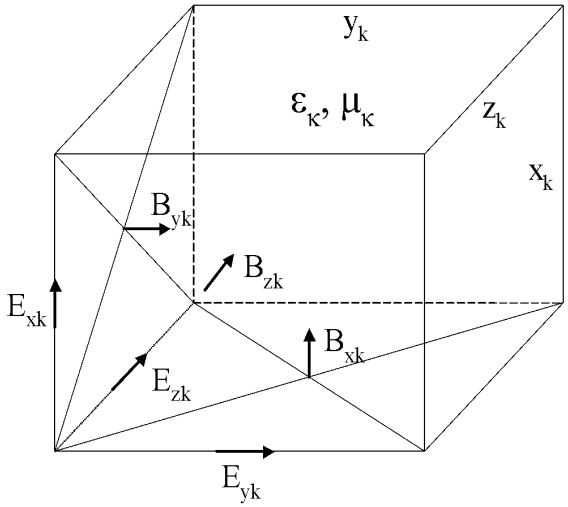


Рис. 2.3. Компоненти полів у типовій k-й комірці

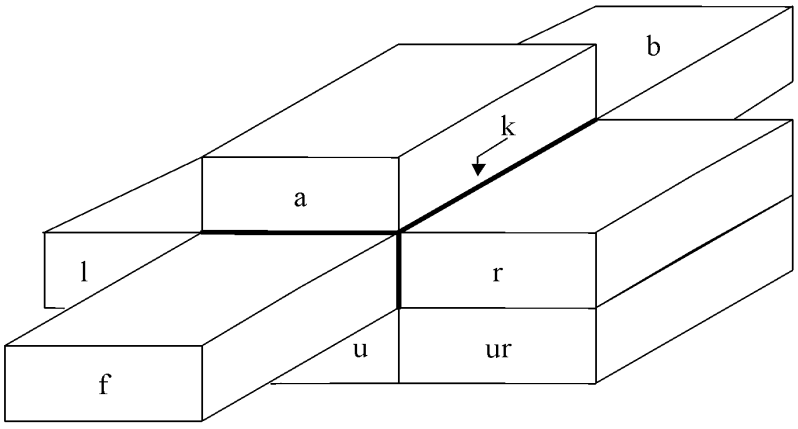


Рис 3.2. Позначення комірок

Далі діємо в аналогічний спосіб, обираючи як S ліву грань k-ї комірки, відповідно $\vec{n} = \vec{y}_0$:

$$E_{zk} z_k + E_{xb} x_k - E_{za} z_k - E_{xk} x_k = ik_0 B_{yk} x_k z_k \tag{2.6}$$

Для передньої грані, для якої одиничний вектор нормалі $\vec{n} = -\vec{z}_0$, маємо:

$$E_{yk} y_k + E_{xr} x_k - E_{ya} y_k - E_{xk} x_k = -ik_0 B_{zk} x_k y_k . \tag{2.7}$$

Тут взято до уваги, що $\overrightarrow{B} \cdot \vec{n} = -B_z$.

2.3. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній *Ox*

Дискретизація другого інтегрального рівняння Максвелла (2.2) відбуватиметься дещо складніше. Спочатку проінтегруємо його в площині, перпендикулярній до *Ox*. Для зручності перепишемо це рівняння так:

$$L_x = -ik_0 R_x , \tag{2.8}$$

тут введено два інтегральні оператори

$$L_x = \int_L \vec{H} \cdot \vec{\tau} dl, \qquad R_x = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds, \quad (\vec{n} = \vec{x}_0). \tag{2.9}$$

Розглянемо їх окремо.

Здійснимо інтегрування рівняння у формі (2.9) у площині, перпендикулярній до осі Ox (див. рис. 2.5). При цьому контур інтегрування обираємо в такий спосіб, щоб

він ділив навпіл k-ту комірку площиною yOz і проходив через комірки k, l, fl та f. Оскільки вектори поля $\vec{H}$ та $\vec{D}$ вважаються сталими в межах комірок, матимемо такі співвідношення для L_x та R_x:

$$L_x = \frac{1}{2}[H_{zk}z_k - H_{yk}y_k - H_{yl}y_l - H_{zl}z_k - \\ - H_{zfl}z_f + H_{yfl}y_l + H_{yf}y_k + H_{zf}z_f], \tag{2.10}$$

$$R_x = \frac{1}{4}\left[D_{xk}y_k z_k + D_{xl}y_l z_k + D_{xfl}y_l z_f + D_{xf}y_k z_f\right]. \tag{2.11}$$

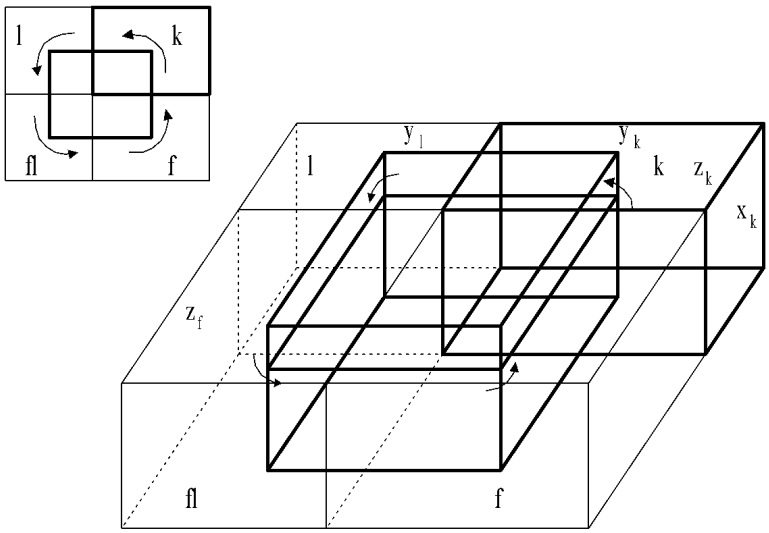


Рис. 2.5. Контур інтегрування в площині, перпендикулярній Ox.

Застосуємо зворотні матеріальні рівняння для зменшення кількості невідомих у (2.10), (2.11):

$$\vec{H} = \hat{\eta}\vec{B}, \;\; \vec{E} = \hat{\nu}\vec{D}, \tag{2.12}$$

тут введено такі позначення: $\hat{\eta} = \hat{\mu}^{-1}$, $\hat{\nu} = \hat{\varepsilon}^{-1}$ $(\hat{\eta} = [\eta_{jk}],\ \hat{\nu} = [\nu_{jk}],\ j,k = x,y,z))$.

Вважатимемо, що визначники для матеріальних параметрів відмінні від нуля: $det\, det\, \hat{\varepsilon} \neq 0$, $det\, det\, \hat{\mu} \neq 0$.

Спочатку виконаємо такі перетворення у (2.10): виразимо компоненти вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ через компоненти вектора магнітної індукції $\vec{B}$ із застосуванням зворотних матеріальних рівнянь (2.12):

$$H_{yl} = \eta^{l}_{yx} B_{xl} + \eta^{l}_{yy} B_{yl} + \eta^{l}_{yz} B_{zl},$$

$$H_{zl} = \eta^{l}_{zx} B_{xl} + \eta^{l}_{zy} B_{yl} + \eta^{l}_{zz} B_{zl}.$$

Умова безперервності нормальних компонент вектора $\vec{B}$ на границі розділу комірок l та k може бути записана так: $B_{yl} = B_{yk} + o(h)$. Тоді отримуємо:

$$H_{yl} = \eta^{l}_{yx} B_{xl} + \eta^{l}_{yy} B_{yk} + \eta^{l}_{yz} B_{zl} + o(h),$$

$$H_{zl} = \eta^{l}_{zx} B_{xl} + \eta^{l}_{zy} B_{yk} + \eta^{l}_{zz} B_{zl} + o(h).$$

Тут h – характерний розміру комірки, який для простоти вважається однаковим для всіх комірок.

Розмірковуючи в аналогічний спосіб, отримуємо вирази для компонент вектора напруженості магнітного поля H_{yfl} та H_{zfl}:

$$H_{yfl} = \eta^{fl}_{yx} B_{xfl} + \eta^{fl}_{yy} B_{yfl} + \eta^{fl}_{yz} B_{zfl},$$

$$H_{zfl} = \eta^{fl}_{zx} B_{xfl} + \eta^{fl}_{zy} B_{yfl} + \eta^{fl}_{zz} B_{zfl}$$

Далі враховуємо умову безперервності нормальних компонент вектора $\vec{B}$ на границі розділу комірок fl та l $B_{yfl} = B_{yf} + o(h)$, $B_{zfl} = B_{zl} + o(h)$ і отримуємо:

$$H_{yfl} = \eta_{yx}^{fl} B_{xfl} + \eta_{yy}^{fl} B_{yf} + \eta_{yz}^{fl} B_{zl} + o(h),$$

$$H_{zfl} = \eta_{zx}^{fl} B_{xfl} + \eta_{zy}^{fl} B_{yf} + \eta_{zz}^{fl} B_{zl} + o(h).$$

Аналогічно

$$H_{yf} = \eta_{yx}^{f} B_{xf} + \eta_{yy}^{f} B_{yf} + \eta_{yz}^{f} B_{zk} + o(h),$$

$$H_{zf} = \eta_{zx}^{f} B_{xf} + \eta_{zy}^{f} B_{yf} + \eta_{zz}^{f} B_{zk} + o(h).$$

Наведені співвідношення дозволяють отримати такий вираз для оператора L_x:

$$\begin{aligned} L_x = \frac{1}{2}\{ & B_{xk}\left(z_k \eta_{zx}^{k} - y_k \eta_{yx}^{k}\right) - B_{yk}\left[y_l \eta_{yy}^{l} + y_k \eta_{yy}^{k} + z_k\left(\eta_{zy}^{l} - \eta_{zy}^{k}\right)\right] + \\ & + B_{zk}\left[z_f \eta_{zz}^{f} + z_k \eta_{zz}^{k} + y_k\left(\eta_{yz}^{f} - \eta_{yz}^{k}\right)\right] - B_{xl}\left(y_l \eta_{yx}^{l} - z_k \eta_{zx}^{l}\right) - \\ & - B_{zl}\left[z_k \eta_{zz}^{l} + z_f \eta_{zz}^{fl} + y_l\left(\eta_{yz}^{l} - \eta_{yz}^{fl}\right)\right] + B_{xf}\left(y_k \eta_{yx}^{f} + z_f \eta_{zx}^{f}\right) + \\ & + B_{yf}\left[y_k \eta_{yy}^{f} + y_l \eta_{yy}^{fl} + z_f\left(\eta_{zy}^{f} - \eta_{zy}^{fl}\right)\right] + B_{xfl}\left(y_l \eta_{yx}^{fl} - z_f \eta_{zx}^{fl}\right)\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

Очевидно, отриманий результат (2.13) містить вісім невідомих компонент поля. При цьому виявляється, що L_x не залежить від вигляду тензора діелектричної проникності $\hat{\varepsilon}$.

Якщо для середовища тензором є лише діелектрична проникність, а магнітна проникність – скаляр ($\hat{\mu} = \mu\hat{I}$, $\hat{I}$ – одинична діада, $\hat{\eta} = \frac{1}{\mu}\hat{I}$), то вираз для L_x спрощується:

$$L_x = \frac{1}{2}\left\{-B_{yk}\left[\frac{y_l}{\mu_l}+\frac{y_k}{\mu_k}\right]+B_{zk}\left[\frac{z_f}{\mu_f}+\frac{z_k}{\mu_k}\right]-B_{zl}\left[\frac{z_f}{\mu_{fl}}+\frac{z_k}{\mu_l}\right]+B_{yf}\left[\frac{y_l}{\mu_{fl}}+\frac{y_k}{\mu_f}\right]\right\}. \quad (2.14)$$

Далі, застосовуючи матеріальне рівняння (2.4), виконаємо перетворення рівняння (2.11). Для цього визначимо компоненти вектора електричного зміщення $D_{xk}, D_{xl}, D_{xfl}, D_{xf}$ в такий сосіб:

$$D_{xk} = \varepsilon^k_{xx} E_{xk} + \varepsilon^k_{xy} E_{yk} + \varepsilon^k_{xz} E_{zk}. \quad (2.15)$$

При здійсненні перетворень візьмемо до уваги граничні умови, а саме умову безперервність тангенціальних компонент векторів напруженості електричного поля $\vec{E}$ на границі розділу комірок, зокрема, l та k ($E_{xl} = E_{xk}+o(h)$, $E_{zl} = E_{zk}+o(h)$). Маємо

$$D_{xl} = \varepsilon^l_{xx} E_{xk} + \varepsilon^l_{xy} E_{yl} + \varepsilon^l_{xz} E_{zk} + o(h).$$

Для виключення з отриманого проміжного результату для D_{xl} невідомої компоненти електричного поля E_{xl} скористаємось таким виразом для D_{yl}:

$$D_{yl} = \varepsilon^l_{yx} E_{xk} + \varepsilon^l_{yy} E_{yl} + \varepsilon^l_{yz} E_{zk} + o(h).$$

Тепер урахуємо факт безперервності нормальних компонент вектора електричного зміщення $\vec{D}$ на границі розділу комірок l та k ($D_{yl} = D_{yk}+o(h)$, матимемо:

$$D_{yk} = \varepsilon^k_{yx} E_{xk} + \varepsilon^k_{yy} E_{yk} + \varepsilon^k_{yz} E_{zk}.$$

В результаті маємо

$$E_{yl} = \frac{1}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left[\left(\varepsilon_{yx}^{k} - \varepsilon_{yx}^{l}\right)E_{xk} + \varepsilon_{yy}^{k}E_{yk} + \left(\varepsilon_{yz}^{k} - \varepsilon_{yz}^{l}\right)E_{zk}\right] + o(h). \tag{2.16}$$

Підставляючи результат (2.16) до співвідношення для D_{xl}, маємо остаточний вираз:

$$D_{xl} = \left[\varepsilon_{xx}^{l} + \frac{\varepsilon_{xy}^{l}}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left(\varepsilon_{yx}^{k} - \varepsilon_{yx}^{l}\right)\right]E_{xk} + \varepsilon_{xy}^{l}\frac{\varepsilon_{yy}^{k}}{\varepsilon_{yy}^{l}}E_{yk} + \left[\varepsilon_{xz}^{l} + \frac{\varepsilon_{xy}^{l}}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left(\varepsilon_{yz}^{k} - \varepsilon_{yz}^{l}\right)\right]E_{zk} + o(h). \tag{2.17}$$

Застосовуємо аналогічні міркування для визначення D_{xfl}. Відповідно до граничних умов тангенціальні компоненти напруженості електричного поля $\vec{E}$ є безперервними на границі розділу комірок fl та k, fl та l, fl та f: $E_{xfl} = E_{xk}+o(h)$, $E_{yfl} = E_{xl}+o(h)$, $E_{zfl} = E_{zf}+o(h)$. Враховуючи останні співвідношення, маємо

$$D_{xfl} = \varepsilon_{xx}^{fl}E_{xk} + \varepsilon_{xy}^{fl}E_{yl} + \varepsilon_{xz}^{fl}E_{zf} + o(h) \tag{2.18}$$

Невідомі компоненти E_{yl} та E_{zf} можна виключити з (2.18) . Формулу (2.16) для E_{yl} ми вже маємо, залишилось отримати вираз для E_{zf} в явному вигляді, виходячи з матеріального рівняння для D_{zf}:

$$D_{zf} = \varepsilon_{zx}^{f}E_{xf} + \varepsilon_{zy}^{f}E_{yf} + \varepsilon_{zz}^{f}E_{zf}$$

З урахуванням граничних умов безперервності тангенціальних компонент напруженості компонент вектора $\vec{E}$ на границі розділу комірок f та k, а саме $E_{xf} = E_{xk}+o(h)$ та $E_{yf} = E_{yk}+o(h)$, маємо

$$D_{zf} = \varepsilon_{zx}^{f} E_{xk} + \varepsilon_{zy}^{f} E_{yk} + \varepsilon_{zz}^{f} E_{zf} + o(h)$$

Далі візьмемо до уваги граничну умову безперервності нормальних компонент вектора $\vec{D}$ на границі розділу тих самих комірок f та k ($D_{zf} = D_{xk} + o(h)$):

$$D_{zk} = \varepsilon_{zx}^{k} E_{xk} + \varepsilon_{zy}^{k} E_{yk} + \varepsilon_{zz}^{k} E_{zk}.$$

З урахуванням останнього співвідношення отримуємо формулу для визначення компоненти вектора напруженості електричного поля E_{zf}:

$$E_{zf} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left[\left(\varepsilon_{zx}^{k} - \varepsilon_{zx}^{f} \right) E_{xk} + \left(\varepsilon_{zy}^{k} - \varepsilon_{zy}^{f} \right) E_{yk} + \varepsilon_{zz}^{k} E_{zk} \right]. \tag{2.19}$$

Після підстановки (2.16), (2.19) до (2.18) маємо

$$\begin{aligned} D_{xfl} = & \left[\varepsilon_{xx}^{fl} + \frac{\varepsilon_{xy}^{fl}}{\varepsilon_{yy}^{l}} \left(\varepsilon_{yx}^{k} - \varepsilon_{yx}^{l} \right) + \frac{\varepsilon_{xz}^{fl}}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zx}^{k} - \varepsilon_{zx}^{f} \right) \right] E_{xk} \\ & + \left[\frac{\varepsilon_{xy}^{fl} \varepsilon_{yy}^{k}}{\varepsilon_{yy}^{l}} + \frac{\varepsilon_{xz}^{fl}}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zy}^{k} - \varepsilon_{zy}^{f} \right) \right] E_{yk} + \\ & + \left[\frac{\varepsilon_{xz}^{fl} \varepsilon_{zz}^{k}}{\varepsilon_{zz}^{f}} + \frac{\varepsilon_{xy}^{fl}}{\varepsilon_{yy}^{l}} \left(\varepsilon_{yz}^{k} - \varepsilon_{yz}^{l} \right) \right] E_{zk} + o(h). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Далі врахуємо граничні умови $E_{xf} = E_{xk} + o(h)$, $E_{yf} = E_{zk} + o(h)$, а також співвідношення (2.19) і визначимо D_{zf}:

$$D_{xf} = \left[\varepsilon_{xx}^{f} + \frac{\varepsilon_{xy}^{f}}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zx}^{k} - \varepsilon_{zx}^{f} \right) \right] E_{xk} +$$
$$+ \left[\varepsilon_{xy}^{f} + \frac{\varepsilon_{xz}^{f}}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zy}^{k} - \varepsilon_{zy}^{f} \right) \right] E_{yk} + \varepsilon_{xz}^{f} \frac{\varepsilon_{zz}^{k}}{\varepsilon_{zz}^{f}} E_{zk} + o(h). \tag{2.21}$$

Нарешті після підстановки виразів для визначених компонент вектора електричного зміщення (2.15), (2.17), а також (2.20), (2.21) у (2.11) і певних нескладних перетворень, отримуємо вираз для інтегрального оператора R_x:

$$\begin{aligned} 4R_x = \{ & y_k z_k \varepsilon_{xx}^{k} + y_l z_k \varepsilon_{xx}^{l} + y_l z_f \varepsilon_{xx}^{fl} + y_k z_f \varepsilon_{xx}^{f} + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^{l}} \left(\varepsilon_{yx}^{k} - \varepsilon_{yx}^{l} \right) \left(z_f \varepsilon_{xy}^{fl} + z_k \varepsilon_{xy}^{l} \right) + \\ & + \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zx}^{k} - \varepsilon_{zx}^{f} \right) \left(y_l \varepsilon_{xz}^{fl} + y_k \varepsilon_{xz}^{f} \right) \} E_{xk} + \{ y_k z_k \varepsilon_{xy}^{k} + y_k z_f \varepsilon_{xy}^{f} + \\ & + \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(\varepsilon_{zy}^{k} - \varepsilon_{zy}^{f} \right) \left(y_k \varepsilon_{xz}^{f} + y_l \varepsilon_{xz}^{fl} \right) + \frac{y_l \varepsilon_{yy}^{k}}{\varepsilon_{yy}^{l}} \left(z_f \varepsilon_{xy}^{fl} + z_k \varepsilon_{xy}^{l} \right) \} E_{yk} + \\ & + \{ y_k z_k \varepsilon_{xz}^{k} + y_l z_k \varepsilon_{xz}^{l} + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^{l}} \left(\varepsilon_{yz}^{k} - \varepsilon_{yz}^{l} \right) \left(z_k \varepsilon_{xy}^{l} + z_f \varepsilon_{xy}^{fl} \right) + \\ & + \frac{z_f \varepsilon_{zz}^{k}}{\varepsilon_{zz}^{f}} \left(y_l \varepsilon_{xz}^{fl} + y_k \varepsilon_{xz}^{f} \right) \} E_{zk}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Вигляд отриманого виразу свідчить про те, що оператор R_x не залежить від магнітних властивостей середовища.

Для середовища, якому притаманна анізотропія лише магнітної проникності, а діелектрична проникність є скаляром $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \hat{I}$ ($\hat{I}$ – одинична діада), маємо такий результат:

$$R_x = \frac{1}{4} \left[y_k z_k \varepsilon_k + y_l z_k \varepsilon_l + y_l z_{fl} \varepsilon_{fl} + y_k z_f \varepsilon_f \right] E_{xk}. \tag{2.23}$$

2.4. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній осі *Oy*

На наступному етапі здійснимо інтегрування рівняння (2.2) в площині, яка є перпендикулярною до осі Oy (рис. 2.6). В цій площині друге рівняння Максвелла запишеться як $L_y = -ik_0 R_y$. Тут $L_y = \int_L \vec{H} \cdot \vec{\tau} dl$, $R_y = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$. При цьому контур інтегрування проходить через комірки k, f, ul та u, перетинаючи їх в серединах сторін. З огляду на те, що вектори $\vec{H}$ та $\vec{D}$ є постійними в межах комірок, отримуємо такі вирази для інтегральних операторів L_y і R_y:

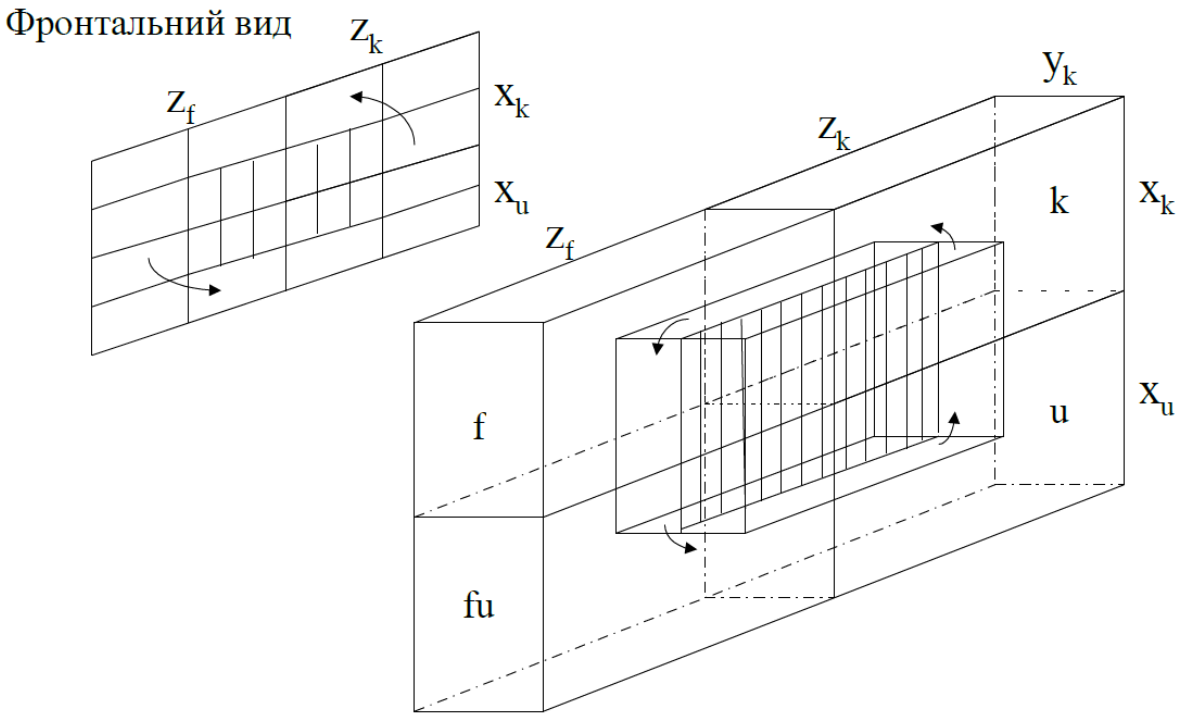


Рис 2.6. Область інтегрування в площині, перпендикулярній *Oy*.

$$L_y = \frac{1}{2}[H_{xk}x_k - H_{zk}z_k - H_{zf}z_f - H_{xf}x_k - \\ - H_{xfu}x_u + H_{zfu}z_f + H_{zu}z_k + H_{xu}x_u], \tag{2.24}$$

$$R_y = \frac{1}{4}\left[D_{yk}x_k z_k + D_{yf}x_k z_f + D_{yfu}x_u z_f + D_{yu}x_u z_k\right]. \tag{2.25}$$

Остаточні вирази для інтегральних операторів L_y та R_y можна отримати аналогічно до того, як раніше були отримані формули для L_x та R_x. При цьому є очевидним той факт, що $L_x \to L_y$, $R_x \to R_y$ при здійсненні заміни $x \to y$, $y \to z$, $z \to x, f \to u, l \to f, fl \to fu$. Як результат маємо:

$$\begin{aligned} L_y = \frac{1}{2}\{ & B_{xk}\left[x_u\eta_{xx}^{u} + x_k\eta_{xx}^{k} + z_k\left(\eta_{zx}^{u} - \eta_{zx}^{k}\right)\right] + B_{yk}\left(x_k\eta_{xy}^{k} - z_k\eta_{zy}^{k}\right) - \\ & - B_{zk}\left[z_f\eta_{zz}^{f} + z_k\eta_{zz}^{k} + z_k\left(\eta_{xz}^{f} - \eta_{xz}^{k}\right)\right] - B_{yf}\left(z_f\eta_{zy}^{f} - x_k\eta_{xy}^{f}\right) - \\ & - B_{xf}\left[x_k\eta_{xx}^{f} + x_u\eta_{xx}^{fu} + z_f\left(\eta_{zx}^{f} - \eta_{zx}^{fu}\right)\right] + B_{yu}\left(z_k\eta_{zy}^{u} + x_u\eta_{xy}^{u}\right) + \\ & + B_{zu}\left[z_k\eta_{zz}^{u} + z_f\eta_{zz}^{fu} + x_u\left(\eta_{xz}^{u} - \eta_{xz}^{fu}\right)\right] + B_{yfu}\left(z_f\eta_{zy}^{fu} - x_u\eta_{xy}^{fu}\right)\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Для середовища з анізотропією лише діелектричної проникності, для якої магнітна проникність є скаляром ($\hat{\mu} = \mu\hat{I}$), отримуємо:

$$L_y = \frac{1}{2}\left\{B_{xk}\left[\frac{x_k}{\mu_k} + \frac{x_u}{\mu_u}\right] - B_{zk}\left[\frac{z_f}{\mu_f} + \frac{z_k}{\mu_k}\right] + B_{zu}\left[\frac{z_f}{\mu_{fu}} + \frac{z_k}{\mu_u}\right] - B_{xf}\left[\frac{x_u}{\mu_{fu}} + \frac{x_k}{\mu_f}\right]\right\}. \tag{2.27}$$

Для R_y маємо

$$4R_y = \{x_k z_k \varepsilon_{yx}^k + x_k z_f \varepsilon_{yx}^f + \frac{x_u \varepsilon_{xx}^k}{\varepsilon_{xx}^u}\left(z_f \varepsilon_{yx}^{fu} + z_k \varepsilon_{yx}^u\right) +$$
$$+ \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^f}\left(\varepsilon_{zx}^k - \varepsilon_{zx}^f\right)\left(x_k \varepsilon_{yz}^f + x_u \varepsilon_{yz}^{fu}\right)\}E_{xk} + \{x_k z_k \varepsilon_{yy}^k +$$
$$+ x_k z_f \varepsilon_{yy}^f + x_u z_f \varepsilon_{yy}^{fu} + x_u z_k \varepsilon_{yy}^u + \frac{x_u}{\varepsilon_{xx}^u}\left(\varepsilon_{xy}^k - \varepsilon_{xy}^u\right)\left(z_f \varepsilon_{yz}^{fu} + z_k \varepsilon_{yx}^u\right) +$$
$$+ \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^f}\left(x_k \varepsilon_{yz}^f + x_u \varepsilon_{yz}^{fu}\right)\left(\varepsilon_{zy}^k - \varepsilon_{zy}^f\right)\}E_{yk} + \{x_k z_k \varepsilon_{yz}^k + x_u z_k \varepsilon_{yz}^u +$$
$$+ \frac{x_u}{\varepsilon_{xx}^u}\left(\varepsilon_{xz}^k - \varepsilon_{xz}^u\right)\left(z_f \varepsilon_{yx}^{fu} + z_k \varepsilon_{yx}^u\right) + \frac{z_f \varepsilon_{zz}^k}{\varepsilon_{zz}^f}\left(x_k \varepsilon_{yz}^f + x_u \varepsilon_{yz}^{fu}\right)\}E_{zk}. \quad (2.28)$$

Відзначимо, що останній вираз для R_y, подібно до (2.22), визначається лише через три компоненти поля $E_{xk},\ E_{yk},\ E_{zk}$.

Для випадку середовища з анізотропією лише магнітних властивостей матимемо

$$R_y = \frac{1}{4}\left[x_k z_k \varepsilon_k + x_k z_f \varepsilon_f + x_u z_f \varepsilon_{fu} + x_u z_k \varepsilon_u\right]E_{yk} \quad (2.29)$$

2.5. Інтегрування другого рівняння Максвелла в площині, перпендикулярній *Oz*

Тепер здійснимо інтегрування другого рівняння Максвелла (2.2) в площині, яка є перпендикулярною до осі Oz (рис. 2.7). Це рівняння матиме вигляд $L_z = -ik_0 R_z$, де $L_z = \int_L \vec{H} \cdot \vec{\tau} dl,\ R_z = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$. Тепер контур інтегрування проходить через середини сторін комірок k, l, ul та u. Інтегральні оператори L_z і R_z після аналогічних до попередніх викладок матимуть вигляд

$$L_z = \frac{1}{2}[H_{xk}x_k - H_{yk}y_k - H_{yl}y_l - H_{xl}x_k - \\ - H_{xul}x_u + H_{yul}y_l + H_{yu}y_k + H_{xu}x_u], \tag{2.30}$$

$$R_y = -\frac{1}{4}\left[D_{zk}x_k y_k + D_{zl}x_k y_l + D_{zul}x_u y_l + D_{zu}x_u y_k\right]. \tag{2.31}$$

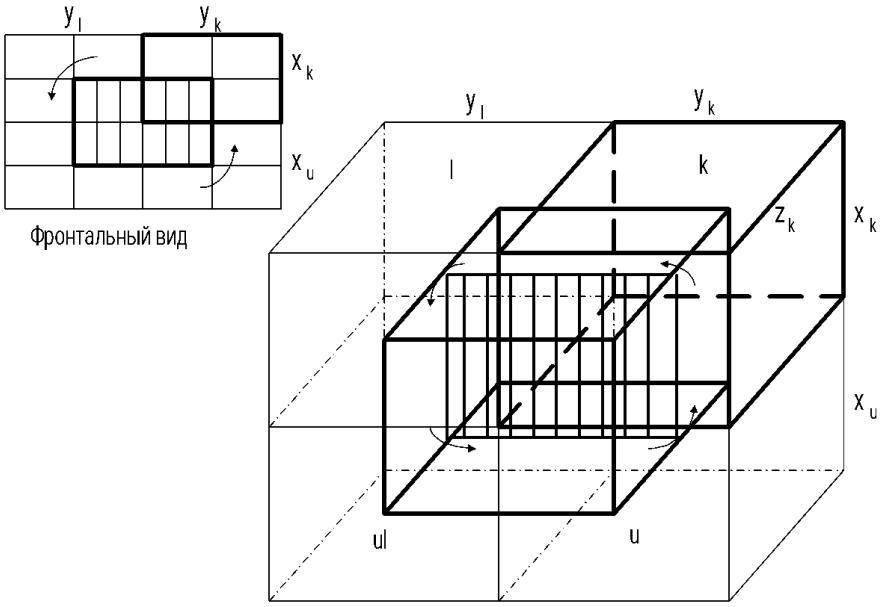


Рис. 2.7. Область інтегрування в площині, перпендикулярній Oz

Формули для L_z та R_z можна отримати, здійснивши такі заміни у співвідношеннях для L_x, R_x: $x \to z,\ z \to x, f \to u, fl \to ul$.

$$L_z = \frac{1}{2}\{B_{xk}\left[x_u\eta_{xx}^u + x_k\eta_{xx}^k + y_k\left(\eta_{yx}^u - \eta_{yx}^k\right)\right] + B_{zk}\left(x_k\eta_{xz}^k - y_k\eta_{yz}^k\right) - \\ - B_{yk}\left[y_l\eta_{yy}^l + y_k\eta_{yy}^k + x_k\left(\eta_{xy}^l - \eta_{xy}^k\right)\right] - B_{zl}\left(y_l\eta_{yz}^l + x_k\eta_{xz}^l\right) - \\ - B_{xl}\left[x_u\eta_{xx}^{ul} + x_k\eta_{xx}^l + y_l\left(\eta_{yx}^l - \eta_{yx}^{ul}\right)\right] + B_{zu}\left(y_k\eta_{yz}^u + x_u\eta_{xz}^u\right) + \\ + B_{yu}\left[y_k\eta_{yy}^u + y_l\eta_{yy}^{ul} + x_u\left(\eta_{xy}^u - \eta_{xu}^{ul}\right)\right] + B_{zul}\left(y_l\eta_{yz}^{ul} - x_u\eta_{xz}^{ul}\right)\}, \tag{2.32}$$

Для середовища з анізотропією лише електричних властивостей

$$L_z = \frac{1}{2}\left\{ B_{xk}\left[\frac{x_k}{\mu_k}+\frac{x_u}{\mu_u}\right] - B_{yk}\left[\frac{y_k}{\mu_k}+\frac{y_l}{\mu_l}\right] + B_{yu}\left[\frac{y_l}{\mu_{ul}}+\frac{y_k}{\mu_u}\right] - B_{xl}\left[\frac{x_u}{\mu_u}+\frac{x_k}{\mu_l}\right]\right\}. \tag{2.33}$$

R_z можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
4R_z = \{ & x_k y_k \varepsilon_{xz}^{k} + x_k y_l \varepsilon_{xz}^{l} + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left(\varepsilon_{yx}^{k} - \varepsilon_{yx}^{l}\right)\left(x_k \varepsilon_{zy}^{l} + x_u \varepsilon_{zy}^{ul}\right) + \\
& + \frac{x_u \varepsilon_{xx}^{k}}{\varepsilon_{xx}^{u}}\left(y_l \varepsilon_{zx}^{ul} + y_k \varepsilon_{zx}^{u}\right)\}E_{xk} + \{ x_k y_k \varepsilon_{zy}^{k} + x_u y_k \varepsilon_{zy}^{u} + \\
& + \frac{x_u}{\varepsilon_{xx}^{u}}\left(\varepsilon_{xy}^{k} - \varepsilon_{xy}^{u}\right)\left(y_k \varepsilon_{zx}^{u} + y_l \varepsilon_{zx}^{ul}\right) + \frac{y_l \varepsilon_{yy}^{k}}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left(x_u \varepsilon_{zy}^{ul} + x_k \varepsilon_{zy}^{l}\right)\}E_{yk} + \\
& + \{ x_k y_k \varepsilon_{zz}^{k} + x_k y_l \varepsilon_{zz}^{l} + x_u y_l \varepsilon_{zz}^{ul} + x_u y_k \varepsilon_{zz}^{u} + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^{l}}\left(\varepsilon_{yz}^{k} - \varepsilon_{yz}^{l}\right)\left(x_u \varepsilon_{zy}^{ul} + x_k \varepsilon_{zy}^{l}\right) + \\
& + \frac{x_u}{\varepsilon_{xx}^{u}}\left(\varepsilon_{xz}^{k} - \varepsilon_{xz}^{u}\right)\left(y_l \varepsilon_{zx}^{ul} + y_k \varepsilon_{zx}^{u}\right)\}E_{zk}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Для випадку середовища з анізотропією лише магнітних властивостей матимемо такий результат:

$$R_z = -\frac{1}{4}\left[x_k y_k \varepsilon_k + x_k y_l \varepsilon_l + x_u y_k \varepsilon_u + x_u y_l \varepsilon_{ul} \right] E_{zk}. \tag{2.35}$$

Співвідношення (2.35) було отримано з (2.34), виходячи з припущення, що $\varepsilon_{xx} \neq 0$, $\varepsilon_{yy} \neq 0$.

Як результат маємо дискретизовані рівняння Максвелла для довільно-анізотропної вставки у довільно анізотропному магнітодіелектричному середовищі:

$$E_{yk} y_k + E_{zr} z_k - E_{yb} y_k - E_{zk} z_k = ik_0 B_{xk} y_k z_k \tag{2.36}$$

$$E_{zk} z_k + E_{xb} x_k - E_{za} z_k - E_{xk} x_k = ik_0 B_{yk} x_k z_k \tag{2.37}$$

$$E_{ya} y_k + E_{xk} x_k - E_{yk} y_k - E_{xr} x_k = ik_0 B_{zk} x_k y_k \tag{2.38}$$

$$L_x\left(B_{xk}, B_{yk}, B_{zk}, B_{xl}, B_{zl}, B_{xf}, B_{yf}, B_{xfl}\right) = -ik_0 R_x\left(E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}\right), \tag{2.39}$$

$$L_y\left(B_{xk}, B_{yk}, B_{zk}, B_{xf}, B_{yf}, B_{yu}, B_{zu}, B_{yfu}\right) = -ik_0 R_y\left(E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}\right), \tag{2.40}$$

$$L_z\left(B_{xk}, B_{yk}, B_{zk}, B_{xl}, B_{zl}, B_{yu}, B_{zu}, B_{zul}\right) = -ik_0 R_z\left(E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}\right). \tag{2.41}$$

Тепер з урахуванням рівнянь (2.36)-(2.38) можна виключити компоненти вектора магнітної індукції B_{xk}, B_{yk}, B_{zk} з рівнянь (2.39)-(2.41). Однак ці рівняння все ще будуть містити величини $B_{yu}, B_{zu}, B_{xl}, B_{zl}, B_{xf}, B_{yf}, B_{xfl}, B_{yfu}, B_{zul}$. Нашою метою є отримання замкнутої системи рівнянь з (2.36)-(2.41), для цього необхідно виразити компоненти вектора магнітної індукції через відповідний набір компонент електричного поля. Це можна здійснити, якщо аналогічно до наведеного вище провести дискретизацію першого рівняння Максвелла (2.1) для сусідніх комірок: нижньої (u), лівої (l), передньої (f), передньої лівої (fl), передньої нижньої (fu), нижньої лівої (ul).

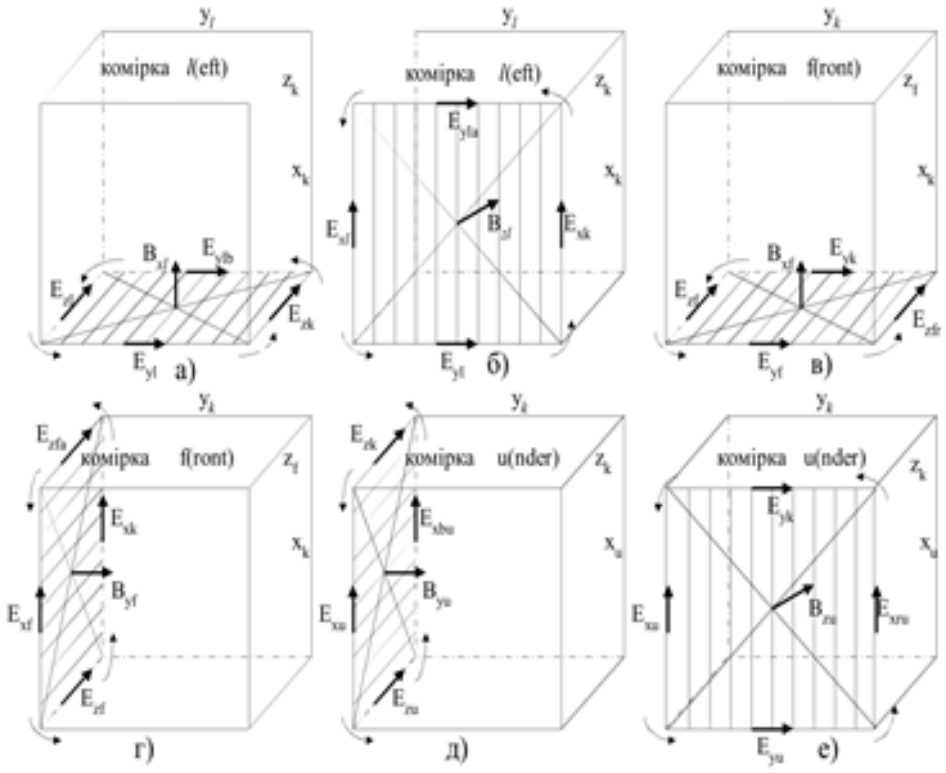
2.6. Визначення компонент магнітного поля, необхідних для створення замкненої системи рівнянь

Для того, щоб отримати замкнену систему рівнянь, визначимо необхідні компоненти магнітного поля, виходячи з першого інтегрального рівняння Максвелла (2.1). Будемо вважати, що S – нижня грань l-ї комірки, відповідно L – контур, що її обмежує (рис. 2.7 а), візьмемо до уваги, що $\vec{n} = \vec{x}_0$ і отримаємо B_{xl} у вигляді

$$E_{yl} y_l + E_{zk} z_k - E_{ylb} y_l - E_{zl} z_k = ik_0 B_{xl} y_l z_k . \tag{2.42}$$

Тепер розглянемо як S передню грань l-ї комірки (рис. 2.7 б), візьмемо до уваги, що тепер $\vec{n} = -\vec{z}_0$, і матимемо

$$E_{yla} y_l + E_{xl} x_k - E_{yl} y_l - E_{xk} x_k = ik_0 B_{zl} y_l x_k \tag{2.43}$$



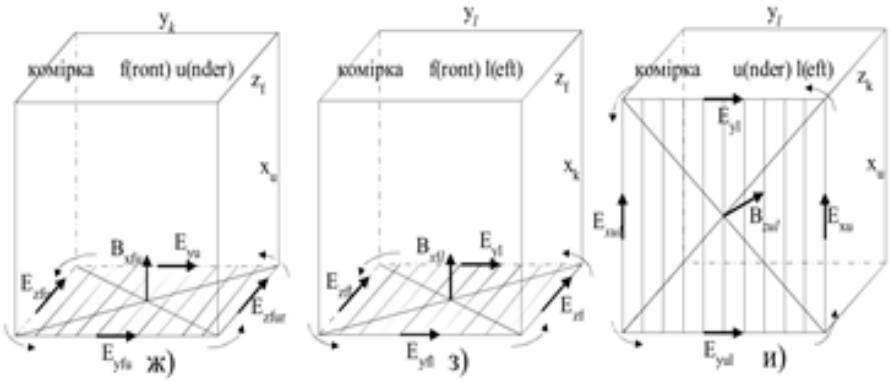


Рис. 2.8. Ілюстрації до визначення додаткових компонент магнітного поля

Далі для комірки f спочатку будемо вважати, що S – це нижня грань цієї комірки, $\vec{n} = \vec{x}_0$ (рис. 2.7в), потім S – її ліва грань, $\vec{n} = \vec{y}_0$ (рис. 2.7г). Як результат отримаємо

$$E_{yf} y_k + E_{zfr} z_f - E_{yk} y_k - E_{zf} z_f = ik_0 B_{xf} y_k z_f \tag{2.44}$$

$$E_{xk} x_k + E_{zf} z_f - E_{xf} x_k - E_{zfa} z_f = ik_0 B_{yf} x_k z_f \tag{2.45}$$

Застосовуючи аналогічні міркування до комірок, що залишилися, а саме u – рис. 2.7д, е, fu – рис. 2.7ж, fl – рис. 2.7з, ul – рис. 2.7и, отримуємо вирази для тих компонент вектора $\vec{B}$, яких не вистачає для того, щоб отримати замкнену систему рівнянь

$$E_{xbu} x_u + E_{zu} z_k - E_{xu} x_u - E_{zk} z_k = ik_0 B_{yu} x_u z_k, \tag{2.46}$$

$$E_{yk} y_k + E_{xu} x_u - E_{yu} y_k - E_{xru} x_u = ik_0 B_{zu} y_k x_u, \tag{2.47}$$

$$E_{yfu}y_k + E_{zfur}z_f - E_{yu}y_k - E_{zfu}z_f = ik_0 B_{xfu}y_k z_f, \tag{2.48}$$

$$E_{yfl}y_l + E_{zf}z_f - E_{yl}y_l - E_{zfl}z_f = ik_0 B_{xfl}y_l z_f, \tag{2.49}$$

$$E_{yl}y_l + E_{xul}x_u - E_{yul}y_l - E_{xu}x_u = ik_0 B_{zul}y_l x_u. \tag{2.50}$$

2.7. Дискретизована система рівнянь Максвелла для середовища з анізотропією магнітної проникності

Окремим випадком загального анізотропного неоднорідного середовища є середовище, яке характеризується анізотропією лише магнітних властивостей. Для нього діелектрична проникність є скаляром $\hat{\varepsilon} = \varepsilon\hat{I}$, а магнітна проникність – довільним тензором $\hat{\mu}$ (як і раніше, $\hat{I}$– одинична діада).

Для визначення L_x підставляємо до (2.13) вирази (2.5)-(2.7), (2.42)-(2.45), а також (2.49):

$$\begin{aligned} 2ik_0 L_x = {} & P_{xx}(k)E_{xk} + P_{xy}(k)E_{yk} - P_{xz}(k)E_{zk} + P_{xy}(a)E_{ya} + P_{xz}(a)E_{za} - \\ & - P_{xx}(b)E_{xb} - P_{xy}(b)E_{yb} - P_{xx}(f)E_{xf} + P_{xy}(f)E_{yf} + P_{xz}(f)E_{zf} - \\ & - P_{xx}(l)E_{xl} + P_{xy}(l)E_{yl} + P_{xz}(l)E_{zl} - P_{xx}(r)E_{xr} + P_{xz}(r)E_{zr} - P_{xy}(la)E_{yla} + \\ & + P_{xy}(lb)E_{ylb} + P_{xy}(fl)E_{yfl} + P_{xz}(fr)E_{zfr} - P_{xz}(fa)E_{zfa} - P_{xz}(fl)E_{zfl} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Більш наочною є форма

$$L_x \equiv L_x\begin{pmatrix} E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}, E_{ya}, E_{za}, E_{xb}, E_{yb}, E_{xf}, E_{yf}, E_{zf}, E_{xl}, \\ E_{yl}, E_{zl}, E_{xr}, E_{zr}, E_{yla}, E_{ylb}, E_{yfl}, E_{zfr}, E_{zfa}, E_{zfl} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Отже ми виразили L_x лише через компоненти напруженості електричного поля, загалом до (2.52) входить двадцять одна така компонента.

У формулі (2.51) ми застосували такі позначення:

$$
\begin{aligned}
&P_{xx}(k)=\frac{CX}{y_k}+\frac{BX}{z_k}+\frac{EX}{y_l}+\frac{GX}{z_f},\ P_{xy}(k)=\frac{AX}{z_k}-\frac{CX}{x_k}+\frac{FX}{z_f},\\
&P_{xz}(k)=\frac{AX}{y_k}+\frac{BX}{x_k}+\frac{DX}{y_l},\ P_{xy}(a)=\frac{CX}{x_k},\quad P_{xz}(a)=\frac{BX}{x_k},\\
&P_{xx}(b)=\frac{BX}{z_k},\quad P_{xy}(b)=\frac{AX}{z_k},\ P_{xx}(f)=\frac{GX}{z_f},\ P_{xy}(f)=\frac{FX}{z_f},\\
&P_{xz}(f)=\frac{GX}{x_k}-\frac{FX}{y_k}+\frac{HX}{y_l},\ P_{xx}(l)=\frac{EX}{y_l},\ P_{xz}(l)=\frac{DX}{y_l},\\
&P_{xy}(l)=\frac{EX}{x_k}-\frac{DX}{z_k}-\frac{HX}{z_f},\ P_{xx}(r)=\frac{CX}{y_k},\quad P_{xz}(r)=\frac{AX}{y_k},\\
&P_{xy}(la)=\frac{EX}{x_k},\ P_{xy}(lb)=\frac{DX}{z_k},\ P_{xy}(fl)=\frac{HX}{z_f},\ P_{xz}(fr)=\frac{FX}{y_k},\\
&P_{xz}(fa)=\frac{GX}{x_k},\ P_{xz}(fl)=\frac{HX}{y_l},
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

тут

$$
\begin{aligned}
&AX=z_k\eta_{zx}^{k}-y_k\eta_{yx}^{k},\quad BX=y_k\eta_{yy}^{k}+y_l\eta_{yy}^{l}+z_k\left(\eta_{zl}^{l}-\eta_{zy}^{k}\right),\\
&CX=z_f\eta_{zz}^{f}+z_k\eta_{zz}^{k}+y_k\left(\eta_{yz}^{f}-\eta_{yz}^{k}\right),\quad DX=y_l\eta_{yx}^{l}-z_k\eta_{zx}^{l},\\
&EX=z_k\eta_{zz}^{l}+z_f\eta_{zz}^{fl}+y_l\left(\eta_{yz}^{l}-\eta_{yz}^{fl}\right),\quad FX=y_k\eta_{yx}^{f}+z_f\eta_{zx}^{f},\\
&GX=y_l\eta_{yy}^{fl}+y_k\eta_{yy}^{f}+z_f\left(\eta_{zy}^{f}-\eta_{zy}^{fl}\right),\quad HX=y_l\eta_{yx}^{fl}-z_f\eta_{zx}^{fl}.
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

Аналогічні дії надають вираз для інтегрального оператора L_y:

$$
\begin{aligned}
2ik_0L_y=&-P_{yx}(k)E_{xk}+P_{yy}(k)E_{yk}+P_{yz}(k)E_{zk}+P_{yz}(r)E_{zr}-P_{yy}(b)E_{yb}+\\
&+P_{yx}(b)E_{xb}-P_{yz}(a)E_{za}-P_{yy}(a)E_{ya}+P_{yx}(r)E_{xr}+P_{yz}(f)E_{zf}+\\
&+P_{yz}(fa)E_{zfa}+P_{yx}(f)E_{xf}-P_{yy}(f)E_{yf}-P_{yz}(fr)E_{zfr}+P_{yz}(u)E_{zu}+\\
&+P_{yx}(bu)E_{xbu}+P_{yx}(u)E_{xu}-P_{yy}(u)E_{yu}-P_{yx}(ru)E_{xru}+P_{yz}(fu)E_{zfu}-P_{yx}(fu)E_{xfu}
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

або скорочено

$$L_y \equiv L_y\left(\begin{matrix} E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}, E_{zr}, E_{yb}, E_{xb}, E_{za}, E_{ya}, E_{xr}, E_{zf}, E_{zfa}, \\ E_{xf}, E_{yf}, E_{zfr}, E_{zu}, E_{xbu}, E_{xu}, E_{yu}, E_{xru}, E_{zfu}, E_{xfu} \end{matrix}\right). \tag{2.56}$$

В (2.55) позначено

$$\begin{aligned}
&P_{yx}(k)=\frac{BY}{z_k}+\frac{CY}{y_k}+\frac{DY}{z_f},\ P_{yy}(k)=\frac{AY}{z_k}+\frac{CY}{x_k}+\frac{EY}{z_f}+\frac{GY}{x_u},\\
&P_{yz}(k)=-\frac{AY}{y_k}+\frac{BY}{x_k}-\frac{FY}{x_u},\ P_{yz}(r)=\frac{AY}{y_k},\quad P_{yy}(b)=\frac{AY}{z_k},\\
&P_{yx}(b)=\frac{BY}{z_k},\quad P_{yz}(a)=\frac{BY}{x_k},\ P_{yy}(a)=\frac{CY}{y_k},\ P_{yz}(fa)=\frac{DY}{x_k},\\
&P_{yz}(f)=\frac{DY}{y_k}-\frac{EY}{x_k}-\frac{HY}{x_u},\ P_{yx}(f)=\frac{DY}{z_f},\ P_{yy}(f)=\frac{EY}{z_f},\\
&P_{yz}(fr)=\frac{EY}{y_k},\ P_{yz}(u)=\frac{FY}{x_u},\quad P_{yx}(bu)=\frac{FY}{z_k},\\
&P_{yx}(u)=\frac{GY}{y_k}+\frac{HY}{z_f}-\frac{FY}{z_k},\ P_{yy}(u)=\frac{GY}{x_u},\ P_{yx}(ru)=\frac{GY}{y_k},\\
&P_{yz}(fu)=\frac{HY}{x_u},\quad P_{yx}(fu)=\frac{HY}{z_f},\ P_{yx}(rl)=\frac{CY}{y_k},
\end{aligned} \tag{2.57}$$

де

$$\begin{aligned}
&AY=x_k\eta_{xx}^{k}+x_u\eta_{xx}^{u}+z_k\left(\eta_{zx}^{u}-\eta_{zx}^{k}\right),\quad BY=x_k\eta_{xy}^{k}-z_k\eta_{zy}^{k},\\
&CY=z_k\eta_{zz}^{k}+z_f\eta_{zz}^{f}+x_k\left(\eta_{xz}^{f}-\eta_{xz}^{k}\right),\quad EY=z_f\eta_{zy}^{f}+x_k\eta_{zy}^{f},\\
&DY=x_k\eta_{xx}^{f}+x_u\eta_{xx}^{fu}+z_f\left(\eta_{zx}^{f}-\eta_{zx}^{fu}\right),\quad FY=z_k\eta_{zy}^{u}+x_u\eta_{xy}^{u},\\
&GY=z_f\eta_{zz}^{fu}+z_k\eta_{zz}^{u}+x_u\left(\eta_{xz}^{u}-\eta_{xz}^{fu}\right),\quad HY=z_f\eta_{zy}^{fu}-x_u\eta_{xy}^{fu}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Аналогічно для інтегрального оператора L_z маємо:

$$
\begin{aligned}
2ik_0 L_z = {} & P_{zx}(k)E_{xk} + P_{zy}(k)E_{yk} - P_{zz}(k)E_{zk} + P_{zz}(r)E_{zr} - P_{zy}(b)E_{yb} - \\
& - P_{zx}(b)E_{xb} + P_{zz}(a)E_{za} + P_{zy}(a)E_{ya} - P_{zx}(r)E_{xr} - P_{zy}(l)E_{yl} + P_{zy}(lb)E_{ylb} + \\
& + P_{zz}(l)E_{zl} - P_{zy}(la)E_{yla} - P_{zx}(l)E_{xl} + P_{zz}(u)E_{zu} + P_{zx}(bu)E_{xbu} - \\
& - P_{zx}(u)E_{xu} - P_{zy}(u)E_{yu} - P_{zx}(ru)E_{xru} + P_{zx}(ul)E_{xul} - P_{zy}(ul)E_{yul}
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Тут позначено

$$
\begin{aligned}
& P_{zz}(k) = \frac{BZ}{z_k} + \frac{CZ}{y_k} + \frac{EZ}{y_l},\ P_{zy}(k) = \frac{AZ}{z_k} - \frac{CZ}{x_k} + \frac{GZ}{x_u}, \\
& P_{zz}(k) = \frac{AZ}{y_k} + \frac{BZ}{x_k} + \frac{DZ}{y_l} + \frac{FZ}{x_u},\ P_{zz}(r) = \frac{AZ}{y_k},\ \ P_{zy}(b) = \frac{AZ}{z_k}, \\
& P_{zx}(b) = \frac{BZ}{z_k},\ \ P_{zz}(a) = \frac{BZ}{x_k},\ P_{zy}(a) = \frac{CZ}{x_k},\ P_{zx}(r) = \frac{CZ}{y_k}, \\
& P_{zy}(l) = \frac{DZ}{z_k} - \frac{EZ}{x_k} - \frac{HZ}{x_u},\ P_{zy}(lb) = \frac{DZ}{z_k},\ P_{zz}(l) = \frac{DZ}{y_l}, \\
& P_{zz}(la) = \frac{EZ}{x_k},\ P_{zx}(l) = \frac{EZ}{y_l},\ \ P_{zz}(u) = \frac{FZ}{x_u},\ P_{zx}(bu) = \frac{FZ}{z_k}, \\
& P_{zx}(u) = \frac{FZ}{z_k} - \frac{GZ}{y_k} + \frac{HZ}{y_l},\ P_{zy}(u) = \frac{GZ}{x_u},\ P_{zx}(ru) = \frac{GZ}{y_k}, \\
& P_{zx}(ul) = \frac{HZ}{y_l},\ P_{zy}(ul) = \frac{HZ}{x_u},
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

де

$$
\begin{aligned}
& AZ = x_k\eta_{xx}^k + x_u\eta_{xx}^u + y_k\left(\eta_{yx}^u - \eta_{yx}^k\right),\ HZ = y_l\eta_{yz}^{ul} - x_u\eta_{xz}^{ul}, \\
& CZ = x_k\eta_{xz}^k - y_k\eta_{yz}^k,\ \ DZ = x_k\eta_{xx}^l + x_u\eta_{xx}^{ul} + y_l\left(\eta_{yx}^l - \eta_{yx}^{ul}\right), \\
& EZ = y_l\eta_{yz}^l + x_k\eta_{xz}^l,\ \ FZ = y_k\eta_{yy}^u + y_l\eta_{yy}^{ul} + x_u\left(\eta_{xy}^u - \eta_{xy}^{ul}\right), \\
& GZ = x_u\eta_{xz}^u + y_k\eta_{yz}^u,\ \ BZ = y_k\eta_{yy}^k + y_l\eta_{yy}^l + x_k\left(\eta_{xy}^l - \eta_{xy}^k\right).
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Співвідношення (2.59) більш загально:

$$
L_z \equiv L_z\left(\begin{matrix} E_{xk}, E_{yk}, E_{zk}, E_{zr}, E_{yb}, E_{xb}, E_{za}, E_{ya}, E_{xr}, E_{yl}, E_{ylb}, \\ E_{zl}, E_{yla}, E_{xl}, E_{zu}, E_{xbu}, E_{xu}, E_{yu}, E_{xru}, E_{xul}, E_{yul} \end{matrix}\right).
\tag{2.62}
$$

Для випадку середовища з анізотропією магнітних властивостей оператори R_x, R_y, R_z задаються виразами (2.23), (2.29), (2.35), які скорочено запишемо так:

$$4R_x = S_{xx}\left(k\right)E_{xk},$$

$$4R_y = S_{yy}\left(k\right)E_{yk},$$

$$4R_z = S_{zz}\left(k\right)E_{zk},$$

де

$$S_{xx}\left(k\right) = y_k z_k \varepsilon_k + y_l z_k \varepsilon_l + y_l z_f \varepsilon_{fl} + y_k z_f \varepsilon_f,$$

$$S_{yy}\left(k\right) = x_k z_k \varepsilon_k + x_k z_f \varepsilon_f + x_u z_f \varepsilon_{fu} + x_u z_k \varepsilon_u,$$

$$S_{zz}\left(k\right) = x_k y_k \varepsilon_k + x_k y_l \varepsilon_l + x_u y_k \varepsilon_u + x_u y_l \varepsilon_{ul}. \qquad (2.63)$$

Оператори L_x, L_y, L_z набудуть вигляду

$$2ik_0 L_x = P_{xx}\left(k\right)E_{xk} + P_{xy}\left(k\right)E_{yk} - P_{xz}\left(k\right)E_{zk} - F_x,$$

$$2ik_0 L_y = P_{yx}\left(k\right)E_{xk} + P_{yy}\left(k\right)E_{yk} - P_{yz}\left(k\right)E_{zk} - F_y,$$

$$2ik_0 L_z = P_{zx}\left(k\right)E_{xk} + P_{zy}\left(k\right)E_{yk} - P_{zz}\left(k\right)E_{zk} - F_z, \qquad (2.64)$$

Тут F_x, F_y, F_z визначаються компонентами поля, відмінними від E_{xk}, E_{yk}, E_{zk} .

Остаточно для середовища з анізотропією магнітних властивостей матимемо таку систему рівнянь:

$$\left(2P_{xx} - k_0{}^2 S_{xx}\right)E_{xk} + 2P_{xy}E_{yk} - 2P_{xz}E_{zk} = 2F_x, \tag{2.65}$$

$$-2P_{yx}E_{xk} + \left(2P_{yy} - k_0{}^2 S_{yy}\right)E_{yk} + 2P_{yz}E_{zk} = 2F_y, \tag{2.66}$$

$$-2P_{zx}E_{xk} - 2P_{zy}E_{yk} + \left(2P_{zz} - k_0{}^2 S_{zz}\right)E_{zk} = 2F_z. \tag{2.67}$$

Отже ми отримали дискретизовану систему рівнянь Максвелла для середовища з анізотропією магнітної проникності.

2.8 Загальна система дискретизированих рівнянь Максвелла для середовища з анізотропією змішаного типу

Наведений підхід працює для достатньо загальної постановки задачі, коли вставка є неоднорідною і анізотропною, при цьому анізотропія може бути одночасно електричного і магнітного типів, а її матеріальні параметри визначаються довільними тензорами $\hat{\varepsilon}$ та $\hat{\mu}$. Для такого загального випадку дискретизирована СЛАР (2.39)-(2.41), отримана як результат дискретизації інтегральних рівнянь Максвелла, виглядає так:

$$\left(2P_{xx} - k_0{}^2 S_{xx}\right)E_{xk} - \left(2P_{xy} + k_0{}^2 S_{xy}\right)E_{yk} - \left(2P_{xz} + k_0{}^2 S_{xz}\right)E_{zk} = 2F_x, \tag{2.68}$$

$$-\left(2P_{yx} + k_0{}^2 S_{yx}\right)E_{xk} + \left(2P_{yy} - k_0{}^2 S_{yy}\right)E_{yk} - \left(2P_{yz} + k_0{}^2 S_{yz}\right)E_{zk} = 2F_y, \tag{2.69}$$

$$-\left(2P_{zx} + k_0{}^2 S_{zx}\right)E_{xk} - \left(2P_{zy} + k_0{}^2 S_{zy}\right)E_{yk} + \left(2P_{zz} - k_0{}^2 S_{zz}\right)E_{zk} = 2F_z. \tag{2.70}$$

Наявні тут коефіцієнти $P_{xx} \ldots P_{zz}$, а також вирази для правих частин $F_x \ldots F_z$

введено у розділі 2.7, а величини $S_{xx} \dots S_{zz}$ визначатимуться в такий спосіб:

$$S_{xx} = y_k z_k \varepsilon_{xx}^k + y_l z_k \varepsilon_{xx}^l + y_l z_f \varepsilon_{xx}^{fl} + y_k z_f \varepsilon_{xx}^f + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^l}\left(\varepsilon_{yx}^k - \varepsilon_{yx}^l\right)\left(z_f \varepsilon_{xy}^{fl} + z_k \varepsilon_{xy}^l\right) + \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^f}\left(\varepsilon_{zx}^k - \varepsilon_{zx}^f\right)\left(y_l \varepsilon_{xz}^{fl} + y_k \varepsilon_{xz}^f\right), \quad (2.71)$$

$$S_{xy} = y_k z_k \varepsilon_{xy}^k + y_k z_f \varepsilon_{xy}^f + \frac{z_f}{\varepsilon_{zz}^f}\left(\varepsilon_{zy}^k - \varepsilon_{zy}^f\right)\left(y_k \varepsilon_{xz}^f + y_l \varepsilon_{xz}^{fl}\right) + \frac{y_l \varepsilon_{yy}^k}{\varepsilon_{yy}^l}\left(z_f \varepsilon_{xy}^{fl} + z_k \varepsilon_{xy}^l\right), \quad (2.72)$$

$$S_{xz} = y_k z_k \varepsilon_{xz}^k + y_l z_k \varepsilon_{xz}^l + \frac{y_l}{\varepsilon_{yy}^l}\left(\varepsilon_{yz}^k - \varepsilon_{yz}^l\right)\left(z_k \varepsilon_{xy}^l + z_f \varepsilon_{xy}^{fl}\right) + \frac{z_f \varepsilon_{zz}^k}{\varepsilon_{zz}^f}\left(y_l \varepsilon_{xz}^{fl} + y_k \varepsilon_{xz}^f\right). \quad (2.73)$$

Величини $S_{yx} \dots S_{yz}$ визначаються шляхом заміни $z \to x, f \to u, l \to f, fl \to fu$, в $S_{xx} \dots S_{zz}$, а заміна $z \leftrightarrow x, f \to u, fl \to fu$ надасть нам коефіцієнти $S_{zx} \dots S_{zz}$.

СЛАР (4.65)-(4.67) та (4.68)-(4.70) залежать від геометрії тривимірної задачі, матеріальних параметрів вставки, а також компонент збуджуючих полів на границях вставки і порожнього хвилеводу. За умови, що ці поля дорівнюють нулю (електричні стінки), задача перетворюється на задачу про вільні коливання.

За відсутності у вставці втрат всі елементи матриці СЛАР є дійсними, а сама матриця містить всі три компоненти поля E_x, E_y, E_z в кожній з введених до розгляду N комірок, тому система складатиметься з $3N$ рівнянь.

Якщо втрати наявні, то всі компоненти поля набудуть комплексних значень, і

система рівнянь стане комплексною:

$$[C]\vec{E} = \vec{E}_r \tag{2.74}$$

Її можна перетворити на дійсну, сформулювавши рівняння окремо для дійсних та уявних величин. В такий спосіб отримаємо дійсну систему з $6N$ рівнянь, відповідно і матриця системи матиме розмірність $6N \times 6N$:

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{vmatrix} . \\ E_{x,k}^{RE} \\ E_{x,k}^{IM} \\ E_{y,k}^{RE} \\ E_{y,k}^{IM} \\ E_{z,k}^{RE} \\ E_{z,k}^{IM} \\ . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . \\ E_{xr,k}^{RE} \\ E_{xr,k}^{IM} \\ E_{yr,k}^{RE} \\ E_{yr,k}^{IM} \\ E_{zr,k}^{RE} \\ E_{zr,k}^{IM} \\ . \end{vmatrix}. \tag{2.75}$$

Матриці систем рівнянь (2.68)-(2.70) є розрідженоими, тобто містить велику кількість нульових елементів. Тому для її числового розв’язання було використано метод спряжених градієнтів [12]-[13].

3. Результати розрахунків

На основі алгоритму, наведеному у попередньому розділі, було проведено числові розрахунки. Отримано числові результати для розподілу тривимірного електромагнітного поля у поперечному перерізі неоднорідної анізотропної вставки у прямокутному хвилеводі. Були досліджені випадки різного типу анізотропії матеріалу вставки, а саме магнітоанізотропного, а також змішаного типу анізотропії, тобто середовищу одночасно притаманна як електрична, так і магнітна анізотропія. Розрахунки проводились для поперечного перерізу $z = c/2$ за умови, що довжина вставки $c = 0{,}6$ см (див. рис. 2.1).

Як приклад першого окремого випадку магнітоанізотропного матеріалу вставки було отримано розподіл електричного поля для магнітоанізотропної вставки, яку виконано з одновісного магнітодіелектрика. Відповідно до [16], [17] магнітну проникність вставки було представлено у вигляді

$$\hat{\mu} = \mu_{||}\vec{d}\vec{d} + \mu_{\perp}\left(\hat{I} - \vec{d}\vec{d}\right), \tag{3.1}$$

де $\vec{d}$ – це дійсний одиничний вектор, який визначає напрямок оптичної осі:

$$d_x = \sin\theta\cos\varphi, \quad d_y = \sin\theta\sin\varphi, \quad d_z = \cos\theta. \tag{3.2}$$

У співвідношеннях (3.1), (3.2) застосовані такі позначення: $\hat{I}$ – це одинична діада; кути θ та φ характеризують нахил оптичної осі анізотропного матеріалу вставки, при цьому кут φ відлічується від осі Ox у площині xOy, а кут θ відповідає куту нахилу оптичної осі відносно цієї площини. Величини $\mu_{||}$ та $\mu_{\perp}$ відповідають головним значенням тензора магнітної проникності вставки відповідно вздовж та в поперечному напрямку відносно оптичної осі.

Обраний для розгляду окремий випадок одновісного магнітодіелектрика відповідає багатьом практично важливим анізотропним матеріалам штучного і природного походження. Для спрощення розрахунків, не порушуючи загальності розгляду, вставка всюди вважалась однорідною. Досліджувались електричні поля

хвиль TM_{11} та TE_{11}.

При розрахунках вважалось, що анізотропна вставка розташована у порожньому хвилеводі. В ході розрахунків анізотропну вставку було розбито на 10, 20 і 7 комірок вздовж осей декартової системи координат Ox, Oy, Oz відповідно. Система рівнянь, яку було розв'язано в числовий спосіб, мала 4200 невідоімих.

На рисунку 3.1 наведено картини полів для хвиль *TM11* (а, б) та *TE11* (в, г), які відповідають різним середовищам з анізотропією магнітних властивостей досліджуваного матеріалу вставки. При розрахунках хвильове число вакууму було обрано $k_0 = 2, \theta = 0°, \varphi = 30°$. Рис. 3.1а містить силові лінії електричного поля хвилі *TM11* для анізотропної вставки з параметрами $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1$, $\mu_\perp = 2$, $\mu_\parallel = 3$, а рис. 3.1б – $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1$, $\mu_\perp = 2$, $\mu_\parallel = 4$. Рис. 3.1в та 3.1г наводять розподіл електричного поля хвилі *TE11* для матеріалу вставки з $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1, \mu_\perp = 1, \mu_\parallel = 2$ і $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1, \mu_\perp = 2, \mu_\parallel = 3$ відповідно.

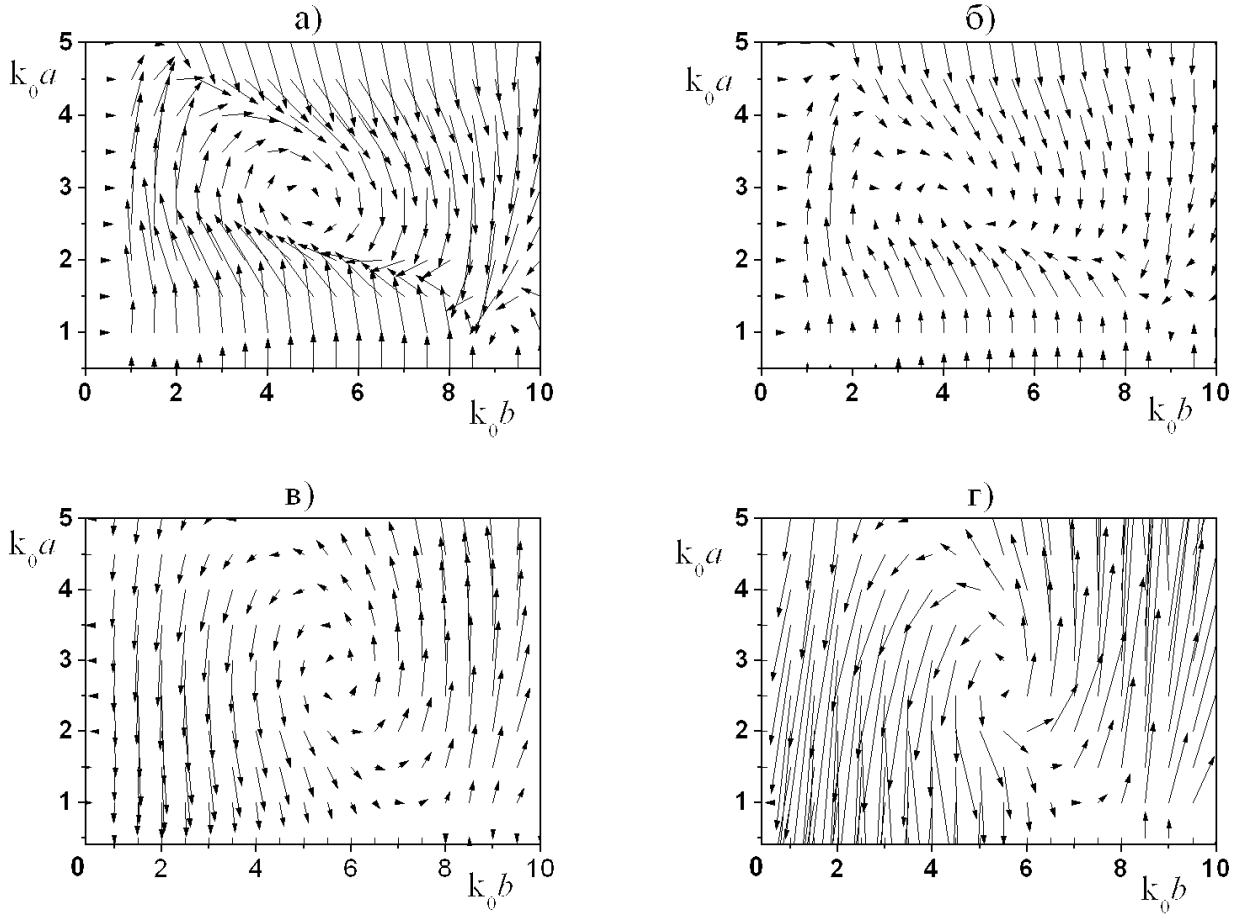


Рис. 3.1. Розподіл силових ліній електричного поля в поперечному перерізі однорідної вставки у прямокутному хвилеводі з анізотропією магнітних

властивостей для хвиль: а, б) TM_{11}; в, г) TE_{11}.

На рис. 3.2 наведено графічні результати розрахунку силових ліній поля для випадку, якщо анізотропія хвилевідної вставки має змішаний характер (тобто йому притаманна одночасно анізотропія електричних і магнітних властивостей). Діелектрична проникність для одновісного середовища визначається подібно до того, як визначалася магнітна проникність (3.1), (3.2)

$$\hat{\mu} = \mu_{||}\vec{d}\vec{d} + \mu_{\perp}\left(\hat{I} - \vec{d}\vec{d}\right),$$
$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{||}\vec{d}\vec{d} + \varepsilon_{\perp}\left(\hat{I} - \vec{d}\vec{d}\right). \tag{3.3}$$

Рисунки а та б тут відповідають полям хвилі *TE11*, а в та г – *TM11*. Для результатів, наведених на рис. 3.2а, були обрані такі параметри: $\varepsilon_{\perp} = 1,\ \varepsilon_{\parallel} = 2,\ \mu_{\perp} = 1,\ \mu_{\parallel} = 2,\ k_0 = 3,\ \varphi = 30°$; рис. 3.2б відповідає таким параметрам – $\varepsilon_{\perp} = 2,\ \varepsilon_{\parallel} = 3,\ \mu_{\perp} = 2,\ \mu_{\parallel} = 3,\ k_0 = 2,\ \varphi = 10°$; рис. 3.2в – $\varepsilon_{\perp} = 1,\ \varepsilon_{\parallel} = 2,\ \mu_{\perp} = 1,\ \mu_{\parallel} = 2,\ k_0 = 2,\ \theta = 0°, \varphi = 30°$; а рис. 3.2г – $\varepsilon_{\perp} = 2,\ \varepsilon_{\parallel} = 3,\ \mu_{\perp} = 1,\ \mu_{\parallel} = 2,\ k_0 = 3, \theta = 0°,\ \varphi = 30°$.

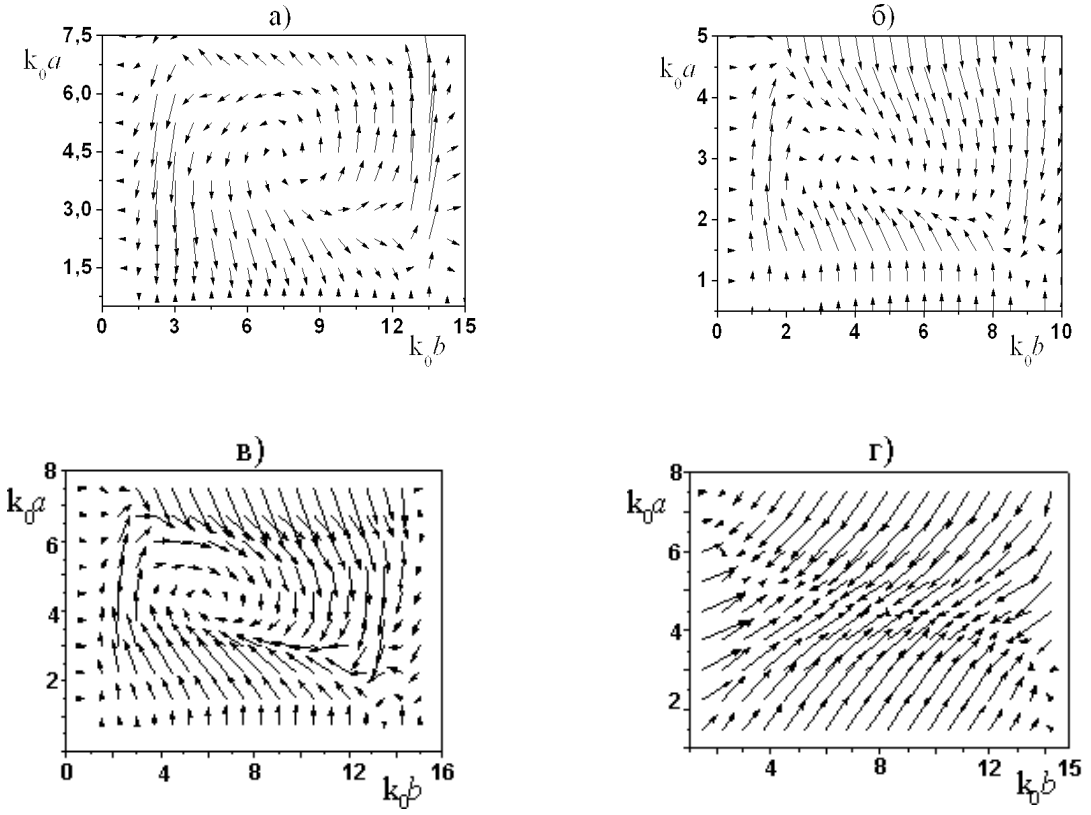


Рис. 3.2. Розподіл силових ліній електричного поля в поперечному перерізі однорідної вставки у прямокутному хвилеводі зі змішаним типом анізотропії: а, б) хвиля *TE11*; в, г) хвиля *TM11*.

ВИСНОВКИ

У пропонованій роботі наведено теоретичний алгоритм дискретизації інтегральних рівнянь Максвелла в неоднорідному анізотропному середовищі, обмеженому ідеально провідними стінками прямокутного хвилеводу. Пропонований підхід є застосовним до будь-якого типу анізотропії матеріального середовища. Як результат отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора напруженості електричного поля, яку було розв’язано в числовий спосіб за методом спряжених градієнтів.

На основі пропонованого алгоритму було проведено числові експерименти, які продемонстрували вплив анізотропії вставки у хвилеводі на просторовий розподіл силових ліній електричного поля. Як ілюстрація наведено картини розподілу силових ліній електричного поля для різних типів хвиль і параметрів анізотропного середовища. Було продемонстровано істотний вплив анізотропних характеристик вставки на характер розподілу поля. Наведені результати можуть бути корисними при визначення характеристик розсіювання неоднорідностей хвилеводів та резонаторів, подальшому аналізі збудження анізотропної пластини в прямокутному хвилеводі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. // IEEE Trans. Antennas Propagat., –May 1966. – Vol. AP-14, N 5. – P. 302 – 307.
2. Samarskii, A. A., & Gulin, A. V. Numerical Methods: Theoretical Foundations and Applications to Engineering Problems. Taylor & Francis, 2001.
3. Samarskii, A. A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001.
4. D.H. Choi, W.J.R. Hoefer. A graded mesh FD-TD algorithm for eigenvalue problems // In Proc. European Microwave Conf. Rome. – 1987. – P. 413 – 417
5. J.F. Lee, R. Palandech, R. Mittra. Modelling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Feb. 1992 – Vol. MTT-40, N2 – P. 346 – 352.
6. M.A. Fusco, M.V. Smith, L.W. Gordon. A three-dimensional FDTD algorithm in curvilinear coordinates. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1991. – Vol. AP-39, – P. 1463 – 1471.
7. S. Haffa, D. Hollman and W. Wiesbeck. The finite difference method for S – parameter calculation of arbitrary three-dimensional structures // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., – Aug. 1988. – Vol. MTT-40, N 8. – P. 1602 – 1610.
8. D.H. Choi and W. Hoefer. The finite-difference time-domain method and its application to eigenvalue problems //IEEE Trans. Microwave Theory Tech., – Dec. 1986. – Vol. MMT-34, N12. – P.1464 – 1470.
9. Christ, Y. Hartnagel. Three-dimension finite-difference method for the analysis for microwave-device embedding //IEEE Trans. Microwave Theory Tech., – Aug. 1987. – Vol. MMT-35, N 8. – P. 688 – 696.
10. Jin H., Vahldieck R. The frequency-domain transmission line matrix method – a new concept // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Dec. 1992. – Vol. MTT-40, N 12. – P. 220 – 223.
11. Lindell, I. V. Methods for Electromagnetic Field Analysis in Complex Media. IEEE Press, 1992.
12. Daniel J.M. The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator

equations // Siam J. Numer. Anal. 1967. Vol. – 4, N 1. P. 10 – 20.

13. Korn, G. A., & Korn, T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications, 2000.
14. Collin, R. E. Foundations for Microwave Engineering, 2nd Edition. Wiley-IEEE Press, 2001.
15. Weiglhofer W. Reduction of dynamic Green's functions to scalar Hertz potentials for gyrotropic media // Radio Sci. – 1987. – Vol. 22, N 6. – P. 209 – 215.
16. Hayata K., Miura K., Koshiba M. Full vectorial finite element formalism for lossy anisotropic waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – May. 1989. – Vol. MTT-37, N 5. – P. 875 – 883.
17. Born, M., & Wolf, E. Principles of Optics, 7th Edition. Cambridge University Press, 1999.
18. Фесенко В.І. Розрахунок коефіцієнтів відбиття та пропускання для неоднорідної анізотропної діелектричної пластини за допомогою методу кінцевих різниць. // V Всеукраїнська наукова конференція «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики». Київ – 2000. – С. 184.