

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ

Сергієнко І. В.
Литвин О. М.
Першина Ю.І.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В
КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ
ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ**

Харків 2009

УДК 519.876.5, 519.6

ББК 22.16

С 32

Рецензенти:

д-р техн. наук, професор, декан, завідувач кафедри ДНУ Сторожев В.І.

д-р техн. наук, професор, зав. кафедрой НТУ «ХП» Курпа Л.В.

Рекомендовано Вченою Радою Української інженерно-педагогічної академії

(Протокол № 3 від 19.11.08)

Сергієнко І.В., Литвин О.М., Першина Ю.І.

С 32 Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Монографія. – Харків, 2008. – 160 с.

ISBN _____

В монографії вперше побудовані оператори наближення функції трьох змінних – оператор поліноміальної інтерфлетації та сплайн-інтерфлетації. За допомогою побудованих операторів вперше запропоновано метод розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами, що лежать в системі трьох груп перерізаних площин (томограми поступають з комп'ютерного томографа). Розроблений метод дає більш високу точність, ніж методи, які використовують томограми, що лежать в площинах, паралельних тільки одній площині. Крім того запропонована програмна реалізація цього методу на прикладі головного мозку людини. Для прикладу взяті були томограми, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин.

Для науковців, викладачів вищих навчальних закладів, фахівців з обчислювальної та прикладної математики та спеціалістів з комп'ютерної томографії та з цифрової обробки багатовимірних сигналів.

ББК 22.16

ISBN _____

Сергієнко І.В., Литвин О.М., Першина Ю.І., 2009

ЗМІСТ.

Передмова	6
Глава 1. Деякі відомі алгоритми комп'ютерної томографії.	9
1.2. Постановка задачі радонівської комп'ютерної томографії.	9
1.3. Основні алгоритми 2D – томографії	15
1.3.1. Математичні методи, основані на використанні перетворення Радона	15
1.3.2. Алгебраїчні алгоритми відновлення	20
1.4. Методи розв'язання задач 3D – томографії	22
1.4.1. Метод відновлення функції трьох змінних за її інтегралами вздовж	
прямих, що перетинають задану криву	22
1.4.2. Метод томографічної реконструкції об'єкта в конусах променів	26
1.4.3. Методи спіральної томографії	30
1.4.4. Класична тривимірна комп'ютерна томографія	48
1.5. Відомі математичні моделі в комп'ютерній томографії.	50
1.5.1. Трансмісійна комп'ютерна томографія	51
1.5.2. Емісійна комп'ютерна томографія	54
1.5.3. Ультразвукова комп'ютерна томографія	56
1.5.4. Оптична комп'ютерна томографія	58
1.5.5. Магнітно резонансна томографія (МРТ)	59
Глава 2. Математична модель відновлення внутрішньої структури	
 тривимірного тіла на системі трьох груп перерізованих томограм за	
 допомогою інтерфлотації функцій	61
2.1. Задачі прикладного характеру, що приводять до інтерфлотації функцій	
трьох змінних	61

2.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлетації на M площинах в R^n , $n \geq 3$	62
2.2.1. Інтерфлетація функцій. Означення	62
2.2.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлетації на M площинах за відомими томограмами на цих площинах без збереження класу $C^r(R^3)$	64
2.2.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлетації за відомими томограмами, заданими на системі будь-яких площин із збереженням класу $C^r(R^3)$	68
2.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням оператора поліноміальної інтерфлетації функції трьох змінних, якщо відомі томограми на системі перерізаних площин	72
2.4. Відновлення тривимірної функції за допомогою економних схем інтерполяції функції, що побудовані за допомогою інтерфлетації	79
2.5. Відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції	86

Глава 3. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за томограмами на системі взаємно перпендикулярних площин	107
3.1. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням поліноміальної інтерфлетації за томограмами на системі площин, паралельних координатним	107
3.1.1. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням інтерфлетації за томограмами, заданими на системі площин, паралельних координатним	107
3.1.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням Лагранжевої інтерфлетації за томограмами, що лежать на	

системі площин, паралельних координатним	112
3.1.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням Ермітової інтерфлєтації за відомими томограмами, що лежать на системі площин, паралельних координатним	114
3.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням оператора сплайн – інтерфлєтації за томограмами, що лежать на системі площин, паралельних координатним	116
3.2.1. Ермітова сплайн – інтерфлєтація на системі томограм, які лежать на площинах, паралельних координатним	116
3.2.2. Математична модель комп'ютерної томографії з використанням сплайн – інтерфлєтації дефекту 1	121
3.3. Математична модель відновлення тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин	124
3.4. Похибка результату чисельного розв'язання задачі	126
Глава 4. Практична реалізація викладених вище методів	134
4.1. Представлення томограм у середовищі Matlab	134
4.2. Matlab – програми відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла між паралельними томограмами	137
4.3. Обчислювальний експеримент	139
Список використаних джерел	147
Найважливіші позначення	159

Передмова

Остання чверть 20-го століття ознаменувалась появою, інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень людства – комп'ютерної томографії. В основі комп'ютерної томографії лежать теоретичні результати німецького вченого Й. Радона [1], який ще на початку 20-го століття розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення тепер називається перетворенням Радона). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірному простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин (якщо кількість змінних більше двох). На практиці інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних інтегралів, отриманих по деякій скінченній множині ліній або поверхонь. Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп'ютерних томографів, що використовують опромінення об'єкта рентгенівськими променями, з'явилась лише в кінці 20-го століття. За останні три десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації. Значно зросла швидкість, точність та якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на екранах моніторів комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що витікають безпосередньо з праць Й. Радона – магнітно-резонансна томографія, ультразвукова томографія, оптична томографія та інші види томографічного відновлення внутрішньої структури, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями.

Відзначимо, що крім Й. Радона у розвиток комп'ютерної томографії значний вклад внесли Хермен Г. [2]; Хелгасон С. [3]; Луїтт Р.М. [4]; Наттерер Ф. [5], [6]; Рубашов І.Б., Тихонов А.Н., Арсенін В.Я., Тимонов А.А. [7] – [10]; Терновой К.С., Синьков М.В., Закидальский А.И. [11]; Губарени Н.М. [12];

Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. [13]; Лундин А.Г., Федин Э.И. [14]; Алексеев А.С., Лаврентьев М.М., Преображенский Н.Г. [15]; Хаунсфилд Г.Н., Кормак А.М. [16]; Bracewell R.N. [17], Riddle A.C. [18], [19]; Cormack A.M. [20], [21]; Hounsfield G.N. [22]; Shepp L.A., Logan B.F. [23]; Yang V.X.D, Gordon M.L. [24]; Gottlieb D., Gustafsson B. [25]; Введенская Н.Д. и Гиндикин С.Г. [26], [27]; Воскобойников Ю.Е. [28], Седельников А.И. [29], [30]; Kruger P.P., Morris R.A., Wecksung G.W. [31], Троицкий И.Н. [32]; Чернов Е.И., Гончар С.И. [33], [34]; G.-R. Tillack [35], [36], Попов А.Д. [37], [38]; Булыгин Ф.В. [39], Лент Р.М. [40], Луис А.К. [41], Пикалов В.В. [42] – [44], Deans S.R. [45], Richard J. [46], Трофимов О.С. [47], [48]; Литвин О.М. [49] – [58], Кравченко В.П. [59] та інші.

Не дивлячись на значні успіхи в комп'ютерній томографії, практична реалізація томографічного методу у вигляді рентгенівських комп'ютерних томографів ще далека від оптимальності. Однією з основних причин, які підтверджують таке твердження є недостатньо обґрунтована кількість проекцій (даних Радона), яку використовують сучасні рентгенівські комп'ютерні томографи для відновлення об'єкту у заданому перетині (тобто не обґрунтована доза опромінення об'єкта). Друга причина полягає у тому, що сучасні комп'ютерні томографи (не тільки рентгенівські) при відновленні об'єкта у заданому перетині демонструють на екранах дисплеїв артефакти – не властиві реальному об'єкту структури – тіні, нечіткість зображення, вкраплення тощо.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів [5]. Аналогічна задача виникає зокрема при дослідженні кори головного мозку піддослідних тварин.

Існують сучасні програмні пакети, такі як Adobe Illustrator [60], Digital Anatomy [61], 3D Max [62], в яких можна отримати перерізи тривимірного тіла. Підкреслимо, що всі ці програмні пакети відновлюють внутрішню структуру тривимірного тіла за допомогою томограм, які лежать на площинах,

паралельних одній площині. Тобто ці програмні пакети не дають можливість знайти перетин тривимірного поля за даними проекціями, отриманими при перетині тіла системою будь-яких перерізованих площин.

Сучасна обчислювальна математика на даний час приділяє значну увагу розвиткові оптимальних, або близьких до оптимальних методів відновлення функцій однієї та багатьох змінних за допомогою скінченного числа експериментальних даних про ці функції. Це стосується також і комп'ютерної томографії.

Таким чином, актуальною є розробка і дослідження методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами що лежать в системі трьох перерізованих площин. Під виразом „відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла” надалі будемо вважати відновлення просторово змінного коефіцієнта поглинання всередині тривимірного тіла.

Глава 1. Деякі відомі алгоритми комп'ютерної томографії.

1.2. Постановка задачі радонівської комп'ютерної томографії.

Нехай на площині, де введена прямокутна система координат Oxy , задана функція $f(x, y)$, яка може бути щільністю, електропровідністю, коефіцієнтом поглинання, затухання тощо. Проінтегруємо цю функцію вздовж прямої

$$\Gamma_{s,\varphi} : x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - s = 0$$

$$R(s, \varphi) = \int_{\Gamma_{s,\varphi}} f(x, y) d\ell,$$

де s - відстань від початку координат до вказаної прямої, φ - кут між віссю Ox і перпендикуляром до цієї прямої, опущеним з початку координат. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрується за всіма можливими напрямками, то функція $R(s, \varphi)$, як функція від двох змінних, називається перетворенням Радона функції $f(x, y)$, тобто перетворення Радона ставить у відповідність функції $f(x, y)$ на площині Oxy функцію $R(s, \varphi)$ на множині всіх прямих. Функція $R(s, \varphi)$ часто називається образом функції $f(x, y)$ в просторі Радона. Ще частіше про функцію $R(s, \varphi)$ говорять, як про проекцію функції $f(x, y)$, або як про функцію, що описує проекційні дані.

Згідно визначенню радонівського образу $R(s, \varphi)$ і з врахуванням того, що інтеграл від заданої функції вздовж прямої дорівнює інтегралові по всій площині від добутку цієї функції на дельта-функцію, аргументом якої є $x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - s$, можна записати

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) - s) dx dy. \quad (1.1)$$

Інтегрування по двох змінних зведемо до інтегрування по одній змінній.

Для цього введемо ще одну прямокутну систему координат $Ox'y'$, повернуту

відносно системи координат Oxy на кут φ і скористаємося наступними формулами, що встановлюють можливість переходу від однієї системи координат до іншої:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi), & y &= x' \sin(\varphi) + y' \cos(\varphi) \\ x' &= x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi), & y' &= -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Зробимо заміну (1.2) в інтегралі (1.1) (див. Рис.1.1). В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x' \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi), x' \sin(\varphi) + y' \cos(\varphi)) \delta(x' - s) dx' dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi), s \sin(\varphi) + y' \cos(\varphi)) dy' \end{aligned} \quad (1.3)$$

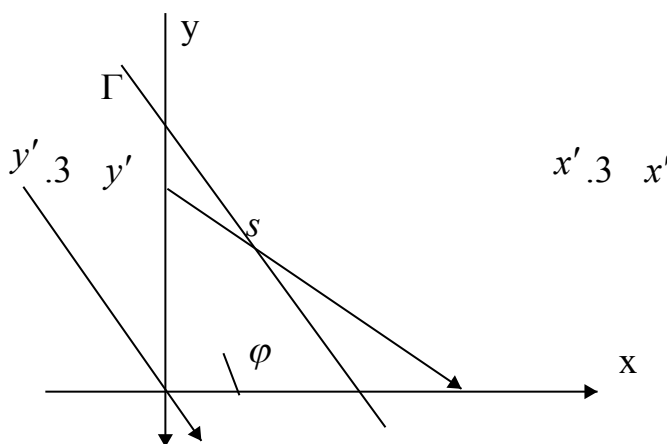


Рис. 1. 1. Лінія $\Gamma = \Gamma_{s, \varphi}$, за якою проводиться інтегрування

Для фінітної функції $f(x, y)$, відмінної від нуля в області $D = \{r_1(\varphi) \leq y' \leq r_2(\varphi)\}$, замість формули (1.3) будемо використовувати формулу

$$R(s, \varphi) = \int_{r_1(s)}^{r_2(s)} f(s \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi), s \sin(\varphi) + y' \cos(\varphi)) dy'$$

В загальному випадку функція, яка описує радонівський образ, має таку важливу властивість

$$R(-s, \varphi + \pi) = R(s, \varphi)$$

Для перевірки справедливості цієї формули достатньо у формулі (1.3)

зробити відповідну заміну. Геометричний зміст цієї властивості полягає в тому, що довільні пари (s, φ) і $(-s, \varphi + \pi)$ задають одну і ту ж пряму $\Gamma_{s, \varphi}$.

Звертаємо увагу, що $s \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, хоча на практиці зручно використовувати такі змінні: $-a \leq s \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

В комп'ютерній томографії задача ставиться таким чином: функція $f(x, y)$ невідома, але відома функція $R(s, \varphi)$, яка є образом функції $f(x, y)$ в просторі Радона. Треба по функції $R(s, \varphi)$ відновити функцію $f(x, y)$. Вперше таку формулу знайшов Йоганн Радон [1] в 1917 році, яку він опублікував в працях Саксонської академії наук. Ця формула має вигляд

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial R(t, \varphi)}{s - t} dt d\varphi, \quad s = x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi)$$

Вона називається оберненим перетворенням Радона. З її допомогою можна відновити функцію $f(x, y)$, якщо у нас відома функція $R(s, \varphi)$ з довільною точністю. Але на практиці функція $R(s, \varphi)$ відома тільки при деяких значеннях $s = s_i, \varphi = \varphi_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ і, як правило, з похибкою. Тому на практиці досліджуються також інші методи, не пов'язані безпосередньо з формулою Радона. Одним з методів, пов'язаних з оберненою формулою Радона, є метод фільтрованих обернених проекцій.

Автори багатьох публікацій відмічають, що комп'ютерна томографія (КТ) використовується у декількох галузях – медицині, неруйнівному контролі, астрономії та інших галузях науки та техніки для визначення та аналізу внутрішньої структури об'єкту або поля. Однак, ця процедура в цілому в обчислювальному плані дуже трудомістка. Для відновлення за допомогою КТ потрібно виконувати великі об'єми обчислень та багато часу. Це обмежує використання КТ у багатьох прикладах, де КТ зображення представлене у реальному часі. Паралельна обробка – це один з методів, що може набагато

зменшити час реконструкції. Існують багато різних схем сканування, деякі з них наведені на рис. 1.2 та рис. 1.3. Деякі методи побудови алгоритмів з паралельною схемою проведення обчислень досліджувались Н.М.Губарені [12] та І.М. Молчановим [70]. Автори стверджують, що паралельне проведення розрахунків є дуже зручним для КТ відновлення і в результаті, економить час. Спрощений алгоритм фільтрованих обернених проекцій був вперше запрограмований як серійний алгоритм, використовуючи Matlab на машині Sun Sparc 10. Цей алгоритм у Matlab займає приблизно 12 хвилин на відновлення, ті ж самі дані можуть бути розпаралелені на Intel Paragon і обчислені за 2,2 секунди та на CM5 за 3 секунди.

Перший КТ сканер було винайдено в 1972 G.N. Hounsfield [22] та Alan McCormac [20], [21]. Алгоритм згортки та фільтрації обернених проекцій вперше був описаний незалежно в працях Shepp L.A., Logan B.F. [23] в 1974 р. та Ramachandran, Lakshminarayanan [71] в 1971 р. Але ще раніше в 1967 р. він застосовувався в радіоастрономії в роботі Bracewell і Riddle [18]. Це - алгоритм, що зараз використовується майже всіма комерційними доступними КТ сканерами.

Декілька дослідників використовували алгебраїчні методи для реконструкції, Gordon R., Bender R., Herman G.T. [24], які істотно використовують ітераційний метод Kaczmarz S. [72] для розв'язання відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (про деякі інші методи та алгоритми комп'ютерної алгебри для СЛАР із поліноміальними коефіцієнтами див.[73]). Shepp і Logan [23] в 1974 році показали, що метод згортки і обернених фільтрованих проекцій на світло пропускний екран переважає інші методи (особливо алгебраїчні).

Для покращення швидкості алгоритмів було запропоновано декілька методів. Вони можуть бути грубо поділені на три категорії: а) вдосконалення алгоритмів; б) вдосконалення апаратних засобів ПЕОМ, що використовуються для того, щоб обчислювати реконструкції; с) паралельні методи обробки; сюди

відносяться роботи, що використовують мультипроцесорні системи, а також роботи, присвячені побудові алгоритмів з розпаралелюванням.

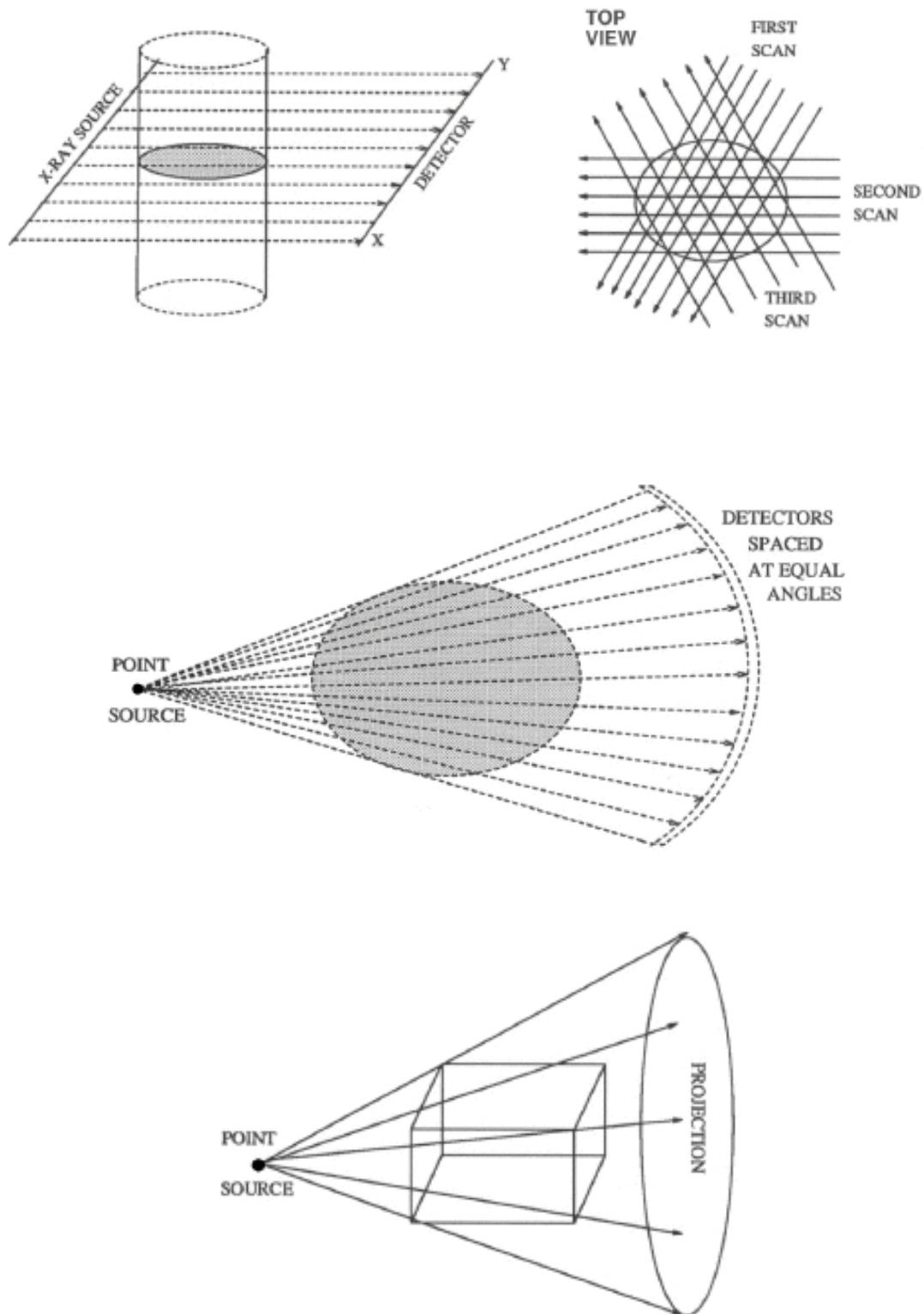


Рис. 1. 2. Деякі відомі схеми отримання проєкцій в 2D - томографії

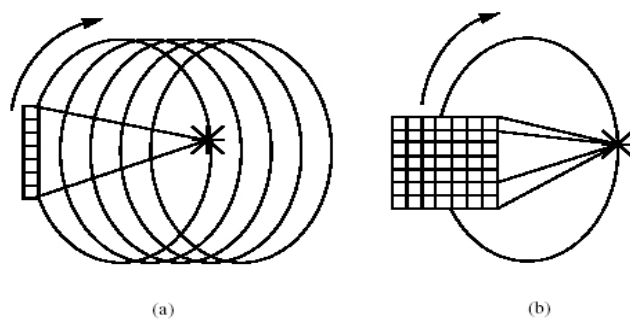
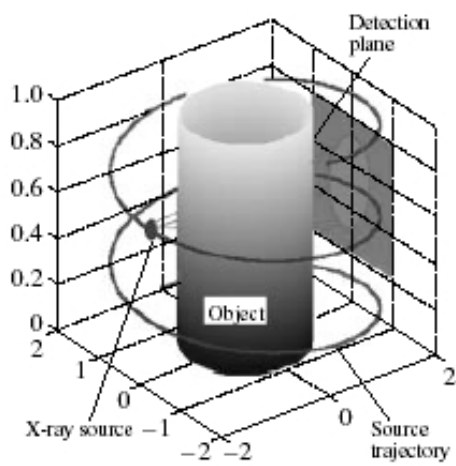
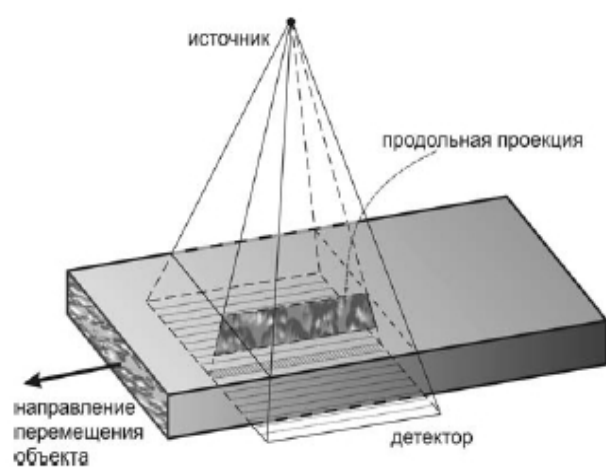
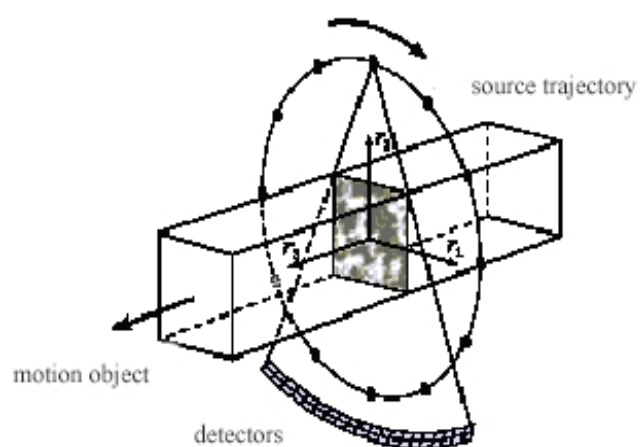


Рис. 1.3. Деякі відомі схеми отримання проєкцій в 3D – томографії

У роботі [29] Воскобойніков Ю.Є., Пікалов В.В., Седельніков А.І. досліджують алгоритм Фур'є – синтезу сумісно з регуляризацією, у роботі Луїтта Р.М. [4] досліджується алгоритм оберненого проектування з фільтрацією. У роботі А.І. Седельнікова та Е.І. Чернова [74] досліджується задача вимірювання газодинамічних полів щільності з використанням методів комп'ютерної томографії. У роботі Л.А. Халфіна [75] пропонується оригінальний підхід до розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії, що не використовує пряме та обернене перетворення Радона. У роботі Г.Г. Левина та Г.Н. Вишнякова [76] досліджено деякі аспекти оптичної томографії. У роботі И.Н. Троицкого [32] досліджуються статистичні методи в КТ.

1.3. Основні алгоритми 2D – томографії

1.3.1. Математичні методи, основані на використанні перетворення Радона

У РКТ найбільш розповсюджені математичні методи [77], що ґрунтуються на використанні прямого перетворення Радона [1]

$$R f(s, \theta) = p(s, \theta) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt = \int_{\Gamma} f dt, \quad \Gamma: x \cos \theta + y \sin \theta = s$$

та оберненого перетворення

$$f(x, y) = [R^{-1} p](x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} \frac{ds d\theta}{x \cos \theta + y \sin \theta - s}.$$

В останні роки набирають широкого розповсюдження алгоритми

розв'язання великих систем алгебраїчних рівнянь на комп'ютерах з розпаралелюванням [78]. Це дозволяє значно зменшити час на відновлення конкретних об'єктів і навіть відновлювати динамічні об'єкти (наприклад, рухоме серце) в реальному масштабі часу.

КТ використовується, якщо внутрішня структура об'єкта досліджується з допомогою деякого випромінювання, що поширюється вздовж прямої L з

інтенсивністю $I = I_0 \exp\left(-\int_L f(x)ds\right)$ де I_0 - початкова інтенсивність прямолінійного променя L ; I - інтенсивність після проходження променя через тіло; $f(x) = f(x, y, z)$ - коефіцієнт поглинання випромінювання (наприклад, рентгенівського). В результаті сканування отримуються значення лінійних

інтегралів $\int_L f(x)ds = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Задача трансмісійної КТ [79]: по сукупності інтегралів $\int_L f(x)ds$ треба відновити f .

Якщо ж джерела випромінювання знаходяться всередині досліджуваного об'єкта (це – емісійна комп'ютерна томографія [80] – ЕКТ, широко використовується в ядерній медицині), то потрібно знайти розподіл радіоактивного медичного препарату в тілі (в деякому зрізі тіла) по інтенсивності випромінювання, виміряній за межами тіла.

Відмітимо також деякі особливості томографічних методів дослідження:

1. Треба особливо підкреслити: томографічні методи відрізняються від традиційних перш за все тим, що в них використовується великий обсяг інформації про досліджуваний об'єкт (до $5 \cdot 10^5$ і більше проекцій, тобто експериментальних даних). Обробка та інтерпретація такого обсягу неможлива без сучасних методів обчислювальної математики, розвинутого програмного забезпечення, високоефективних засобів обчислювальної техніки.

2. У галузі створення та використання нових томографічних методів характерна відсутність вичерпної інформації про пакети програм для КТ

(автори обмежуються тільки описом цих пакетів). Це пояснюється, по-перше, тим, що кожний такий діючий пакет програм є ноу – хау і може принести його творцям чималі кошти. По – друге, кожний такий пакет є дорогою продукцією і далеко не всі можуть його купити. Тому той, хто хоче розробляти нові методи в томографії, повинен також самотужки створювати програмне забезпечення і для вже відомих „діючих” методів, щоб мати можливість порівняти їх ефективність.

3. Для збільшення точності томографів класичні схеми РКТ вимагають збільшення числа проекцій, тобто кількості опромінювань. З іншого боку, медичні томографи повинні опромінювати тіло лише в невеликих дозах. Крім того, в ряді випадків потрібно відновлювати внутрішню структуру досліджуваного об’єкта в реальному масштабі часу (наприклад, при дослідженні рухомого серця). Очевидно, збільшення кількості проекцій призводить до збільшення часу на сканування, обробку та візуалізацію. Тому актуальна задача оптимізації (зменшення) обсягу експериментальних даних (проекцій) для отримання результатів з потрібною точністю.

4. У більшості алгоритмів розв’язання плоскої задачі РКТ використовуються пряме та обернене перетворення Радона. Їх аналіз показує, що задачу оптимізації кількості проекцій для відновлення функцій із заданих класів (тобто відновлення об’єктів з характеристиками, що описуються функціями зі заданих класів) поки що не розв’язано.

Серед алгоритмів відновлення функцій за даними Радона найбільш відомі кілька алгоритмів.

1. Алгоритм згортки і оберненої проекції.

Введемо функцію

$$p^{\Pi}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s', \theta) \Pi(s - s') ds'$$

де $\Pi(s)$ - функція з властивостями

$$P \in L_1(R), \quad P(-s) = P(s), \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(s) ds = 1$$

На практиці P – локалізована в околі нуля функція. Наприклад,

$$P(s) = \frac{1}{h}, \text{ якщо } |s| < \frac{h}{2}; \quad P(s) = 0, \text{ якщо } |s| > \frac{h}{2}$$

або

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} e^{-\frac{s^2}{h^2}}$$

Тут параметр h є порядком апертури детектора томографа.

Будемо вважати відомими такі експериментальні дані [81] (проекції):

$$p^P(s_j, \theta_k), \quad s_j = j\Delta s, \quad j = \overline{-N_1, N_1}, \quad \theta_k = k\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{N_2}, \quad k = \overline{0, N_2 - 1}$$

Для алгоритму згортки і оберненої проекції зручно використовувати такий вираз для оберненої формули Радона:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \Psi(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta,$$

$$\Psi(a, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2p(a, \theta) - p(a+t, \theta) - p(a-t, \theta)}{t^2} dt$$

Стосовно негладких функцій ця формула втрачає сенс, і для побудови алгоритму використовується її регуляризований варіант [82]

$$f^*(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \tilde{\Psi}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta,$$

$$\tilde{\Psi}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} H(a-s') p(s', \theta) ds'$$

де H - регуляризація узагальненої функції $-\frac{1}{2\pi^2 a^2}$, причому

$$H(s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} |\lambda| R(\lambda) d\lambda$$

Функція $R(\lambda)$ називається ефективним регуляризатором і має такі властивості

$$R(\lambda) = 1 + O(|\lambda|) \quad (|\lambda| \rightarrow 0), \quad R(\lambda \rightarrow 0) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty)$$

Найпростіший варіант методу згортки і обернених проекцій полягає в застосуванні квадратурних формул прямокутників до інтегралів.

2. Фур'є- алгоритм.

Припустимо, що густина образу описується функцією $f(x, y)$ і її перетворення Радона $p(s, \theta)$ має компактний носій. Тоді $p(s, \theta)$ можна виразити формулою

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho s} d\rho$$

де

$$\hat{p}(s, \theta) = \int_{-d}^d p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds \quad (1.4)$$

одновимірне перетворення Фур'є функції $p(s, \theta)$ за змінною s . Фур'є – алгоритм [83] істотно використовує пряме перетворення Фур'є

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy$$

та обернене перетворення

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, \eta) e^{i2\pi(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (1.5)$$

Якщо підставити в (1.4) замість $p(s, \theta)$ формулу прямого перетворення

Радона і зробити заміну змінних

$$\begin{aligned}x &= s \cos \theta - t \sin \theta, \quad y = s \sin \theta + t \cos \theta, \\s &= x \cos \theta - y \sin \theta, \quad t = x \sin \theta + y \cos \theta,\end{aligned}$$

то отримаємо, враховуючи фінітність p, f

$$\begin{aligned}\hat{p}(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds = \int_{-d}^d p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds = \\&= \int_{-d}^d \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt e^{-i2\pi\rho s} = \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho[x \cos \theta + y \sin \theta]} dx dy = \hat{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\end{aligned}$$

Таким чином, маємо співвідношення

$$\hat{p}(\rho, \theta) = \hat{f}(\xi, \eta), \quad \xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta,$$

яке відоме під назвою теореми про центральний шар, або про центральний переріз.

Формула (1.5) дає можливість відновити функцію оригіналу f через її перетворення Радона P , використовуючи

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \hat{p}(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \arctg(\frac{\eta}{\xi}))$$

1.3.2. Алгебраїчні алгоритми відновлення

В них істотно використовується метод Kaczmarz S. для розв'язання інтегрального рівняння Радона. Різні способи дискретизації приводять до різних алгебраїчних методів. У випадку повної дискретизації припустимо, що $\text{supp } f(x, y) = G \subseteq \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Для проведення дискретизації [84] розіб'ємо Ω на малі квадрати $S_m, m = \overline{1, M}$ і замінимо f вектором $F \in R^m$, у котрого компонента F_m дорівнює деякому функціоналу від f на S_m . Наприклад

$$F_m = f(x_m, y_m),$$

де (x_m, y_m) - деяка точка S_m .

Нехай $L_j, j = \overline{1, N}$ - фіксована система прямих, що перетинають Ω, a_{jm} - довжина $L_j \cap S_m, a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jM})^T$. При розв'язанні системи рівнянь

$$\int_L f(x, y) ds = g_j, j = \overline{1, N},$$

де L_j - прями, запишемо її у вигляді

$$a_j^T F = g_j, j = \overline{1, N} \quad (1.6)$$

Згідно з методом Kaczmarz один крок ітерації алгебраїчного алгоритму відновлення можна описати такою послідовністю формул :

$$F^j = F^{j-1} + \frac{\omega}{|a_j|^2} (g_j + a_j^T F^{j-1}) a_j, j = \overline{1, N}.$$

Тут $\omega \in (0, 2)$. $\omega \in (0, 2)$ - параметр релаксації. При невеликій кількості кроків цей метод потребує такої ж кількості АО, як і метод згортки та оберненої проекції. Якщо система (1.6) сумісна (що малоймовірно), то її розв'язок F_ω має мінімальну норму.

Відмітимо, що математичний апарат, який використовується при розв'язанні задач комп'ютерної томографії, включає Фур'є – аналіз, інтегральне перетворення Гілберта, різні квадратурні та інтерполяційні формули, спеціальні функції, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є, сучасні алгоритми розв'язання великих систем алгебраїчних рівнянь, зокрема метод Kaczmarz тощо.

1.4. Методи розв'язання задач 3D – томографії

1.4.1. Метод відновлення функції трьох змінних за її інтегралами вздовж прямих, що перетинають задану криву

В комп'ютерній рентгенівській томографії тривимірний об'єкт представляється у вигляді набору тонких зрізів. Для відновлення щільності зрізу розв'язується задача обернення двовимірного перетворення Радона. Для дослідження ряду об'єктів більш природною є інша схема, коли джерело випромінювання рухається по деякій просторовій кривій. Кожній точці кривої відповідає конус променів, які проходять через цю точку. Вихідними даними є дані про послаблення випромінювання при проходженні через об'єкт.

Математична задача ставиться як задача відновлення функції трьох змінних за інтегралами вздовж прямих, що проходять через задану криву. Розв'язанню цієї задачі для різних класів функцій та для різних типів кривих присвячені роботи [85] – [92].

В [87] отримана формула обернення для функцій, які мають фінітний носій, та для кривих, що задовольняють відповідним умовам. Головним в цих умовах є те, що будь-яка площина, що перетинає об'єкт, перетинає криву, по якій рухається випромінювач. Приклад кривої, яка задовольняє умовам [87], - сукупність двох одиничних кіл, які лежать у взаємно перпендикулярних площинах. В роботі [92] приводиться вираз для перетворення Фур'є, що використовується та дозволяє при побудові чисельних алгоритмів застосовувати метод, запропонований в [93], [94].

Нехай задані функція $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$, яка має фінітний носій, та просторова крива $\Phi(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \Phi_3(\lambda))$, параметр λ пробігає деякий інтервал Λ дійсної прямої. Для будь-якого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ та $\lambda \in \Lambda$ визначається функція

$$g(\alpha, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Phi(\lambda) + t\alpha) dt = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(\lambda) + t \frac{\alpha}{|\alpha|}) dt \quad (1.7)$$

Функція $g(\alpha, \lambda)$ є інтегралом від функції $f(x)$ вздовж прямої, яка проходить

через точку $\Phi(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \Phi_3(\lambda))$ у напрямку вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

В роботі [87] дається формула для відновлення функції $f(x)$ за функцією $g(\alpha)$:

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \frac{1}{2i\pi(\Phi'(\lambda), \beta)} \frac{\partial G(\beta, \lambda)}{\partial \lambda} d\varphi d\theta, \quad (1.8)$$

де $\beta = (\cos \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \varphi)$, а λ таке, що скалярний добуток (β, x) дорівнює $(\beta, \varphi(\lambda))$ та $(\beta, \Phi'(\lambda))$ не дорівнює нулю. Вважається, що таке λ існує для будь-якого x , що належить носію функції $f(x)$. Функція $G(\beta, \lambda)$ є тривимірним перетворенням Фур'є від функції $g(\alpha, \lambda)$ за змінною α . Але з рівності (1.9) виходить, що перетворення Фур'є від функції $g(\alpha, \lambda)$, яке розуміється у звичайному сенсі:

$$G(\xi, \lambda) = \int_{R^3} g(\alpha, \lambda) e^{-2i\pi(\alpha, \xi)} d\alpha,$$

може не існувати, оскільки на нескінченості $g(\alpha, \lambda)$ має порядок $1/|\alpha|$. Це пов'язано з переходом від вхідних даних, що задані на поверхні $|\alpha| = 1$, до однорідної функції, яка задана на всьому просторі. В [87] перетворення Фур'є розуміється в сенсі узагальнених функцій [95], тобто G_λ - перетворення Фур'є від $g(\alpha, \lambda)$ - такий функціонал, що його дія на $\psi(\xi)$ співпадає з дією $g(\alpha, \lambda)$ на перетворення Фур'є від $\psi(\xi)$:

$$\langle G_\lambda, \psi(\xi) \rangle = \langle g(\alpha, \lambda) \tilde{\psi}(\alpha) \rangle = \int g(\alpha, \lambda) \tilde{\psi}(\alpha) d\alpha.$$

Тут ψ - будь-яка нескінченно диференційована функція, яка спадає на нескінченості швидше будь-якої степені $1/|\xi|$, наприклад, гауссіда. Її перетворення Фур'є $\tilde{\psi}$ має ті ж властивості, та останній інтеграл збігається в звичайному сенсі. Для того, щоб розуміти в формулі (1.8) інтеграл в звичайному сенсі, треба знайти регулярну функцію $G(\xi, \lambda)$, за допомогою якої

задається функціонал G_λ , тобто функцію, яка задовольняє рівності

$$\langle G_\lambda, \psi(\xi) \rangle = \int G(\xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi.$$

В роботі [92] знаходиться $G(\xi, \lambda)$, що має наступний вигляд

$$G(\xi, \lambda) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{g(\beta, \lambda)}{(\beta, \xi)^2} d\varphi d\theta, \quad (1.9)$$

де $\beta = \beta(\varphi, \theta) = (\cos \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \varphi)$.

У відповідності з формулою (1.7) при будь-якому λ функція $g(\alpha, \lambda)$ задана для всіх α , таких, що $|\alpha| = 1$, чи, що теж саме, для всіх β . Це дозволяє обчислити $G(\xi, \lambda)$ для всіх ξ , відмінних від нуля, зокрема, для тих, які задовольняють рівності $|\xi| = 1$ та використовуються у формулі (1.8).

В роботах [88, 96] наводиться інший запис рівності (1.9).

$$G(\xi, \lambda) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|a|=1} \frac{(R_1 f)(\varphi(\lambda), a)}{(a, \xi)^2} d^2 a = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|a|=1} \frac{g(\alpha, \lambda)}{(a, \xi)^2} d^2 a. \quad (1.10)$$

Відмінність в множниках пояснюється тим, що в (1.10) інтегрування ведеться за всією сферою, а в (1.9) – за половиною, оскільки взята до уваги симетричність функції $g(\alpha, \lambda)$. Для виведення формул (1.9) та (1.10) бралось до уваги, що функція $g(\alpha, \lambda)$ задає променеві дані, тобто інтеграли за прямими від деякої функції. Але зв'язок, що виражається формулами (1.9) та (1.10), є більш загальним, він задає співвідношення між значеннями на одиничній сфері однорідної узагальненої функції та її перетворенням Фур'є [97]. Інтеграл в (1.10) розуміється в сенсі аналітичного продовження.

В роботі [88] отримані формули для знаходження перетворення Радона функції f , потім за відомими формулами можна відновити саму функцію f . Інший спосіб заключається у використанні формул (1.8) та (1.9) чи (1.10).

В роботі [96] задається дія узагальненої функції $1/x^2$ на основну :

$$\langle 1/x^2, \varphi(x) \rangle = \int \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx. \quad (1.11)$$

В роботах [93 – 95] для побудови чисельних алгоритмів звернення двовимірного перетворення Радона використовується спосіб, суть якого полягає в тому, що за вхідними даними, відомими на дискретній решітці, будується апроксимація, для якої збігається інтеграл в правій частині рівності (1.11). Чисельні експерименти та обробка реальних даних показують високу точність подібних алгоритмів. Цей метод може бути застосований й при відновленні функцій трьох змінних за інтегралами вздовж просторових прямих, якщо використовуються формули (1.8) та (1.9) чи (1.10). Для цього формулу (1.9) треба перетворити до вигляду, аналогічному формулі (1.11). Введемо позначення:

$$g(\beta(\varphi, \theta), \lambda) = q(\varphi, \theta, \lambda),$$

$$Q(\varphi, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\varphi, \theta, \lambda) d\theta.$$

Якщо $\xi = (0, 0, 1)$, то формулу (1.9) можна переписати у вигляді

$$G((0, 0, 1), \lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi Q(\varphi, \lambda)}{(\sin \varphi)^2} d\varphi. \quad (1.12)$$

При довільному ξ для отримання формули типу (1.12) треба перейти до сферичної системи координат, в якій полюсом є точка ξ . Через $q(\xi, \varphi, \theta, \lambda)$ будемо позначати функцію $q(\varphi, \theta, \lambda)$ в такій системі координат, а через $-2\pi Q(\xi, \varphi, \lambda)$ - її інтеграл за θ , тобто інтеграл від функції $q(\varphi, \theta, \lambda)$ по колу, яке лежить на одиничній сфері та в площині, перпендикулярній вектору ξ , що відстоїть від початку координат на відстані $\sin \varphi$. У вказаних позначення формула (1.12) приводиться до вигляду

$$G(\xi, \lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi Q(\xi, \varphi, \lambda)}{(\sin \varphi)^2} d\varphi. \quad (1.13)$$

Канонічна регуляризація функції $1/(\sin \varphi)^2$ побудована в [95]:

$$\left\langle \frac{1}{(\sin \varphi)^2}, \alpha(\varphi) \right\rangle = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\alpha(\varphi) + \alpha(-\varphi)}{(\sin \varphi)^2} - \frac{2\alpha(0)}{\varphi^2} \right) d\varphi. \quad (1.14)$$

Оскільки $g(\alpha, \lambda) = g(-\alpha, \lambda)$, то $Q(\xi, \varphi, \lambda) = Q(\xi, -\varphi, \lambda)$ та рівність (1.13) можна записати у вигляді

$$G(\xi, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi Q(\xi, \varphi, \lambda)}{(\sin \varphi)^2} d\varphi.$$

Використовуючи (1.14), отримаємо

$$G(\xi, \lambda) = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos \varphi Q(\xi, \varphi, \lambda)}{(\sin \varphi)^2} - \frac{Q(\xi, 0, \lambda)}{\varphi^2} \right] d\varphi. \quad (1.15)$$

Різниця між рівностями (1.13) та (1.15) заключається в тому, що в (1.13) інтеграл розуміється в сенсі аналітичного продовження чи узагальнених функцій, а інтеграл в (1.15) для достатньо гладких функцій Q збігається в звичайному сенсі, що дозволяє його обчислювати за дискретними даними. Для побудови чисельних алгоритмів необхідні формули, які зв'язують функцію $q(\xi, \theta, \varphi, \lambda)$ з функцією $q(\theta, \varphi, \lambda)$ та вектором ξ .

1.4.2. Метод томографічної реконструкції об'єкта в конусах променів

Задача томографічної реконструкції в конусах променів полягає у відновленні щільності тривимірного об'єкта в заданій точці. Вихідними даними є значення на плівці чи двовимірній матриці детекторів, отримані при різних

положеннях випромінювача, що дискретно рухається за деякою тривимірною траєкторією. Математично розв'язується задача визначення функції трьох змінних за її інтегралами вздовж прямих, що лежать в тривимірному просторі.

При використанні методу тривимірної томографічної реконструкції вважається, що для досліджуваного об'єкту та траєкторії руху випромінювача виконується умова Кирилова – Туя [86, 87]: будь-яка площа, яка перетинає носій функції, перетинає траєкторію руху випромінювача. Цій умові задовольняють траєкторія, яка складається з двох перерізаних кіл, що лежать у взаємно перпендикулярних площинах, та носій функції – сфера.

Для формул обернення тривимірної томографічної реконструкції в роботі [98] наводяться чисельні алгоритми та результати моделювання томографічної реконструкції, коли траєкторія руху випромінювача складається з двох перерізаних кіл; вхідними даними є значення функції, задані на поверхні сфери.

В роботі [99] розглядається випадок, коли траєкторія складається з двох перерізаних кіл, що лежать у взаємно перпендикулярних площинах, а вхідними даними є значення функцій, задані на поверхні плоского детектора. (рис.1.4).

Формула обернення тривимірної томографічної реконструкції для побудови чисельних алгоритмів наведена в [98, 100] в наступному вигляді:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \frac{1}{(\gamma'(\lambda), \beta)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{S(\beta)} L(\beta, D) g^+(\lambda, \xi) \Omega(\xi) \right] d\theta d\varphi,$$

де $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ - шукана функція; $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \gamma_3(\lambda))$ - траєкторія руху випромінювача; $g^+(\lambda, \xi)$ - інтеграл від функції $f(x)$ вздовж променя, який проходить через точку $\gamma(\lambda)$ у напрямку вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cdot \cos \varphi, \cos \theta \cdot \sin \varphi, \sin \theta)$ (де θ - кут між вектором та площиною $z=0$, а φ - кут між проекцією вектора на площину $z=0$ та віссю OX); $\lambda = \lambda(\theta, \varphi) = \lambda(x, \beta)$ таке, що $(\beta, x) = (\beta, \gamma(\lambda))$ та $(\beta, \gamma'(\lambda)) \neq 0$; $S(\beta)$ - коло, яке є перерізом одиничної сфери та площини $P(\beta)$.

Площина $P(\beta)$ проходить через початок координат та ортогональна вектору β . Символ $\Omega(\xi)$ означає інтегрування за колом, оператор $L(\beta, D)$ - диференціювання функції $g^+(\lambda, \xi)$ в напрямку β .

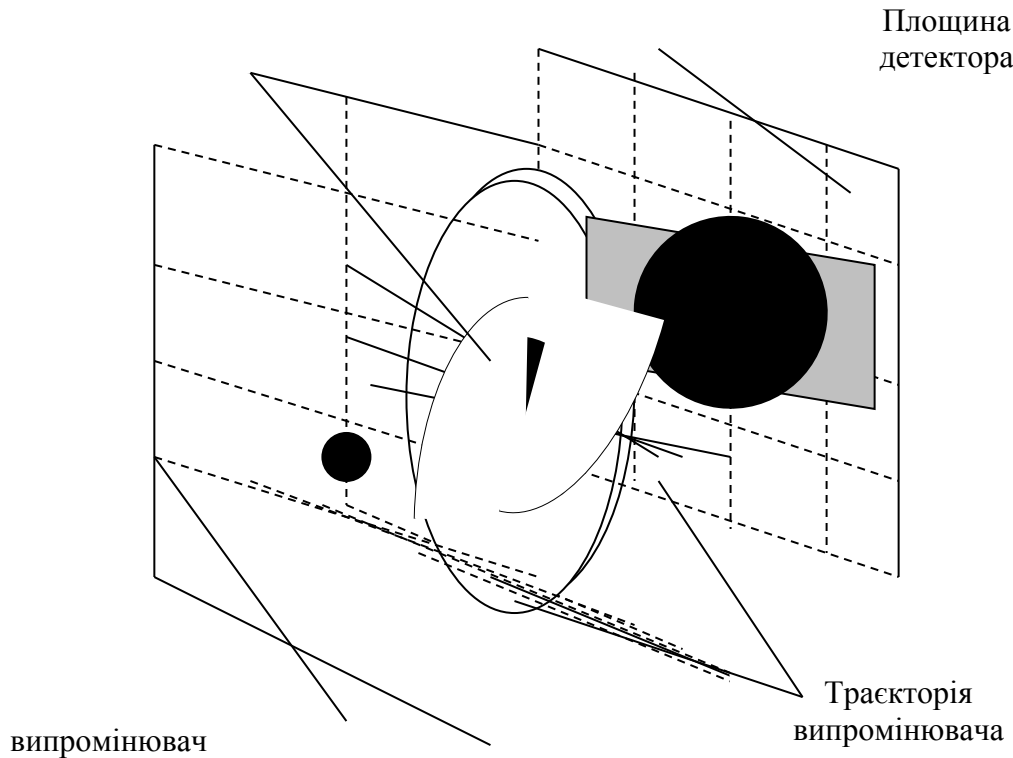


Рис. 1.4. Можлива схема отримання даних при тривимірній томографічній реконструкції: траєкторія руху випромінювача – два перерізані кола, що лежать у взаємно перпендикулярних площинах, плоский детектор

Оскільки траєкторія руху випромінювача складається з двох кіл, що лежать у взаємно ортогональних площинах, то можливий перетин обох кіл площиною $P(\beta(\varphi, \theta))$, яка проходить через точку $x = (x_1, x_2, x_3)$. В таких випадках вибір кола дає суттєвий вплив на результати реконструкції. Якщо точку положення випромінювача обирати на колі, площина якої складає з вектором $x = (x_1, x_2, x_3)$ більший кут, то такий алгоритм вибору точки положення випромінювача дозволяє отримати більш точні результати. При цьому

найбільш точні результати отримуються в точках, які належать прямим, ортогональним площинам, в яких лежать кола, що складають траєкторію випромінювача.

В роботі [101] було показано на базі комп'ютерного моделювання, що методи тривимірної конусообразної X – променевої томографії можуть бути використані для аналізу схем в оптичній спектральній галузі. Метод може бути використаний, коли відстань між апаратом і об'єктом велика, коли ми вивчаємо об'єкти кристалічного типу за допомогою рентгенівських променів, коли вивчається рідина та газу з твердою часткою.

В [87] даються аналітичні обернені формули для відновлення тривимірного об'єкту за допомогою X-променів.

Нехай $f(x)$ - дійсна інтегровна функція в R^3 . Будемо використовувати функцію:

$$(R_1^+ f)(z, \alpha) = \int_0^{\infty} f(z + t\alpha) dt$$

де $z \in R^3$, $\alpha \in S^2$ (S^2 - одинична сфера з центром в початку координат).

Функція $(R_1^+ f)(z, \alpha)$ є інтегралом вздовж піввісі $t \geq 0$. Нехай маємо криву ϕ в R^3 , яка є неперервною функцією $\phi(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \phi_3(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$, де Λ - інтервал дійсної вісі R . Якщо $\alpha \in R^3$ та $\overline{\lambda} \in \Lambda$, маємо функцію

$$g^+(\alpha, \lambda) = (R_1^+ f)(\phi(\lambda), \alpha) = \int_0^{\infty} f(\phi(\lambda) + t\alpha) dt$$

Для $f(x)$, носій якої Ω обмежений, в [2] дається формула:

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \frac{1}{2i\pi(\phi'(\lambda), \beta)} \frac{\partial G^+(\lambda, \beta)}{\partial \lambda} d\theta d\varphi \quad (1.16)$$

де $G^+(\beta, \lambda)$ - перетворення Фур'є від $g^+(\alpha, \lambda)$ в сенсі розподілення

$\beta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$, (α, β) – скалярний добуток двох векторів $\alpha, \beta \in R^3$, $\lambda = \lambda(x, \beta)$, $(\beta, x) = (\beta, \phi(\lambda))$ і $\beta, \phi(\lambda) \neq 0$. Допускається, що крива ϕ задовольняє умовам Туя [87] і λ існує для всіх $\beta, x \in \Omega \times S^2$.

Ця формула використовує перетворення Фур'є розподілу $G^+(\beta, \lambda)$, і чисельні алгоритми на базі формули складні, тому що класичне перетворення Фур'є для функцій, які використовуються в формулі, не існує.

Для моделювання об'єктів на основі процесів конусоподібної томографії використовується $G^+(\beta, \lambda)$, яка дається в [102]:

$$IMG^+(\beta, \lambda) = \left(\frac{i}{4\pi}\right) \int_{S(\xi)} L(\xi, D) g^+(\gamma, \lambda) d\gamma \quad (1.17)$$

де $S(\xi) = \left\{ \gamma \in S^2 \mid (\xi, \gamma) = 0 \right\}$ $L(\xi, D) = \sum \xi_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}$.

Якщо $f(x)$ це дійсна функція, то в (1.16) використовується тільки $IMG^+(\beta, \lambda)$. В оптичній спектральній галузі використовуються формули (1.16), (1.17), але замість функції $g^+(\alpha, \lambda)$ використовується функція $s(g^+(\alpha, \lambda)) = 1$, якщо $g^+(\alpha, \lambda) > 0$ і $s(g^+(\alpha, \lambda)) = 0$, якщо $g^+(\alpha, \lambda) = 0$.

1.4.3. Методи спіральної томографії

В роботі [103] розглядається задача томографії для проєкційних схем з випромінювачем, що рухається за спіраллю. Така геометрія збору даних зараз є актуальною, оскільки вона широко використовується в медичних томографах. В першу чергу було поставлене питання про повноту набору проєкційних даних, який отримується при русі випромінювача вздовж спіралі, тобто чи можливо точно відновити внутрішню структуру об'єкта за таким даними. В основоположній роботі Туя [87] були виведені достатні умови, яким повинна

задовольняти траєкторія руху випромінювача для того, щоб була можлива точна реконструкція. Найбільш важливим з них є наступне: будь-яка площина, яка перетинає носій відновлюваної функції, також повинна перетинати траєкторію руху випромінювача хоча б в одній точці. Взагалі кажучи, спіраль, яка охоплює повністю об'єкт як по радіусу, так й по висоті, задовольняє умовам достатності Туя. З цього виходить, що для даного випадку в принципі можливо отримати точну формулу обернення.

Побудові алгоритмів розв'язання задачі томографії, оснований на цій формулі обернення, присвячена велика кількість робіт. В більшості ці алгоритми є наближеними в тому сенсі, що деякі частини точної формули замінюються в них більш простими та легко реалізованими операторами. Умовно такі алгоритми можна поділити на два класи. До першого відносяться алгоритми, в яких з сукупності конусних проекцій, зареєстрованих при русі випромінювача за спіральною траєкторією, шляхом інтерполяції отримується набір віяльних проекцій. За цими проекціями можлива двовимірна реконструкція паралельних шарів об'єкта, які, як правило, обираються перпендикулярними вісі спіралі [104 – 106]. В англійській літературі такий підхід називається *rebinning* метод, нижче він буде називатися методом пересортування. В другий клас входять алгоритми оберненого проектування з фільтрацією (англійський еквівалент – *filtered backprojection*; далі згідно англійській аббревіатурі, вони будуть називатися FBR - алгоритми). Вже сама назва пояснює принцип дії таких алгоритмів: двовимірні конусні проекції фільтруються будь-яким чином, а потім виконується процедура оберненого проектування. Остання є стандартною та не викликає значних теоретичних утруднень. Вона здійснюється як інтегрування проекційних даних за параметром, змінною якого задається спіраль. Найбільший інтерес визиває спосіб фільтрації. Саме він характеризує точність алгоритму. Існує декілька підходів до побудови фільтрів. В першу чергу, це різні модифікації фільтрації, яка запропонована Smith B.D. [106] для випромінювача, який рухається за

криволінійною траєкторією, чи авторами роботи [107] – для кругового руху випромінювача. Як правило, така фільтрація зводиться до обчислювання одномірної згортки з сингулярним ядром перетворення Гілберта. В [108] розглянуто один з таких алгоритмів.

Більш складні FBR – алгоритми базуються на ідеї, яка була викладена в роботі [109]. Суть цієї роботи полягає в тому, щоб з проекційних даних, які представляють собою інтеграли від шуканої функції вздовж прямих, зібрати інтеграли від цієї ж функції за площинами. Точніше, в [109] було виведено співвідношення, що зв'язує радіальну похідну тривимірного перетворення Радона від деякої функції трьох змінних з інтегралом вздовж прямої від двовимірної променевої проекції цієї функції. Фільтри, отримані виходячи з цієї формули, є двовимірними та забезпечують більш високу якість відновлення, ніж одномірні фільтри. Методи їх побудови можна знайти, наприклад, в [110 – 113].

Згадані вище алгоритми в своїй більшості є складними, особливо це стосується FBR – алгоритмів з двовимірною фільтрацією проекцій. Крім цього, методи, які основані на точних формулах обернення інтегральних перетворень, потребують великої кількості проекційних даних для того, щоб отримати допустимий розв'язок. В якості альтернативи можуть бути застосовані алгебраїчні методи. З досвіду застосування таких алгоритмів для томографічної реконструкції слід очікувати, що в деяких випадках для їх успішного застосування потребується значно менше проекційних даних, ніж, наприклад, для FBR – алгоритмів. Є підстава вважати, що ітераційні методи будуть ефективними для відновлення достатньо простих, висококонтрасних (в тому числі бінарних) об'єктів. В той же час, складні низькоконтрасні біологічні об'єкти будуть краще відновлюватися більш точними алгоритмами, які реалізують формули обернення інтегральних перетворень.

1.4.3.1. Одномірна фільтрація проекцій

В роботі [103] розглядається наступна задача трансмісійної томографії. Нехай треба відновити внутрішню структуру деякого непрозорого об'єкта. Останній вважається достатньо протяжним в одному з напрямків. Виберемо в тривимірному просторі систему координат $(0, x, y, z)$ так, щоб вісь z співпадала з цим напрямком. Далі вважається, що проекційні дані для томографічної реконструкції реєструються за допомогою обладнання, в якому випромінювач проникаючого випромінювання та детектор нерухомі один відносно одного. Позначимо відстань між ними через D . Випромінювач рухається вздовж спіралі, вісь якої лежить на вісі z . При цьому площа детектора завжди залишається паралельною їй. Геометрію збору проекційних даних пояснює рис.1.5.

Нехай R - радіус спіралі, $\frac{H}{2\pi}$ - її крок. Рівняння такої спіралі має вигляд

$$\alpha(\lambda) = (R \cos \lambda, R \sin \lambda, H\lambda)^T. \quad (1.18)$$

Позначимо через $g(x, y, z)$ розподіл коефіцієнта поглинання всередині об'єкта. Введемо на детекторі двовимірну систему координат $(0_1, u, v)$. Початок координат покладемо в точку ортогональної проекції випромінювача на площину, в якій розташований детектор. Ось v напрямимо паралельно вісі z обраної системи координат в тривимірному просторі. При цьому ось u буде обертатися в площині xy при русі детектора разом з випромінювачем вздовж спіралі. Через $f(u, v, \lambda)$ позначимо розподіл інтегрального поглинання по детектору при фіксованому положенні випромінювача, який визначається параметром λ . В подальшому функцію двох змінних $f_\lambda(u, v) \equiv f(u, v, \lambda)|_{\lambda=const}$ будемо називати двовимірною конусною проекцією, чи просто проекцією функції $g(x, y, z)$. Зв'язок між функціями $g(x, y, z)$ та $f(u, v, \lambda)$ визначається наступним чином:

$$f(u, v, \lambda) = \int_0^\infty g(\alpha(\lambda) + l\beta(u, v, \lambda)) dl. \quad (1.19)$$

В рівнянні (1.19) $\alpha(\lambda)$ - точка, в якій знаходиться випромінювач, її координати в системі $(0, x, y, z)$ визначаються згідно (1.18); $\beta(u, v, \lambda)$ - одиничний вектор в напрямку променя, що з'єднує випромінювач та точку з координатами (u, v) на детекторі (рис.1.5).

Задача трансмісійної томографії, що розглядається, полягає в наступному. Нехай відомі двовимірні проекції (1.19) для ряду значень параметра λ з інтервалу $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. За цими даними треба визначити функцію трьох змінних $g(x, y, z)$. Відмітимо, що проекції можуть бути усіченими, на яких відображається тільки частина об'єкта.

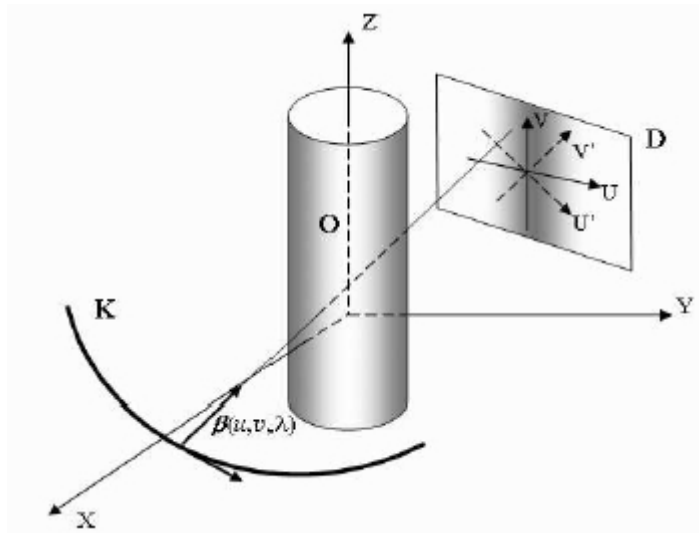


Рис.1.5. Схема збору проекційних даних для задачі трансмісійної томографії. K - частина спіралі, по якій рухається випромінювач, D - плоский детектор, O - досліджуваний об'єкт

Звичайно FBR – алгоритми, здійснюючі реконструкцію за проекційними даними, що зареєстровані в системах зі спіральним рухом випромінювача, будуються наступним чином. На першому етапі робиться поворот системи координат на детекторі $(O_1, u, v) \rightarrow (O_1, u', v')$ таким чином, щоб ось u' стала паралельною та спів напрямленою дотичному вектору до спіралі в точці положення випромінювача

Для круглої спіралі з рівномірним кроком кут повороту γ не залежить від місця випромінювача, тобто є постійним для будь-якої точки траєкторії. Він дорівнює

$$\gamma = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Поворот системи координат робиться для кожної двовимірної проекції. При цьому отримується набір даних $f(u', v', \lambda)$.

На другому етапі кожна з проекцій помножується на вагову функцію, яка враховує геометричний фактор. В результаті отримується зважена проекція, яка потім буде позначатися через $f_1(u', v', \lambda)$. Для спіралі, яка розглядається, зважена проекція виражається за допомогою рівняння

$$f_1(u', v', \lambda) = \frac{D}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + D^2}} f(u', v', \lambda). \quad (1.20)$$

Наступним кроком є фільтрація кожної з функцій $f_1(u', v', \lambda)$. Фільтрація може бути або одномірною за змінною u' , або двовимірною. В роботі [108] була запропонована одномірна фільтрація у вигляді згортки із сингулярним при $\varepsilon \rightarrow 0$ ядром

$$f^F(u', v', \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_1(u', v', \lambda) * E_\varepsilon(u')), \quad E_\varepsilon(u') = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}, & u' < \varepsilon \\ \frac{1}{u'^2}, & u' \geq \varepsilon \end{cases}. \quad (1.21)$$

Для кожної проекції згортка (1.21) застосовується послідовно для кожного рядка при фіксованому значенні змінної v' . В якості реалізації ядра $E_\varepsilon(u')$ в цій роботі був використаний інший відомий фільтр – Шеппа-Логана [23]. У дискретному вигляді він визначається наступним рівнянням:

$$E_{SL} = \frac{4}{h_u^2 (4k^2 - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (1.22)$$

У виразі (1.22) $h_{u'}$ - крок сітки за змінною u' .

На останньому етапі FBR – алгоритмів робиться обернене проектування фільтрованих проєкцій $f^F(u', v', \lambda)$, в результаті якого отримується оцінка шуканої функції $g(x, y, z)$. Для спіральної геометрії реєстрації даних обернене проектування задається формулою

$$g(x, y, z) \approx \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{D\sqrt{R^2 + H^2}}{(x \cos \lambda + y \sin \lambda - R)^2} f^F(u', v', \lambda) d\lambda.$$

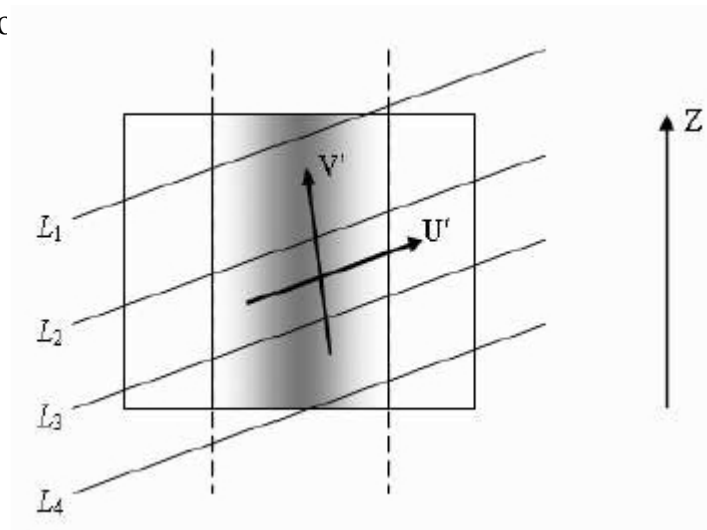
Координати (u', v') поверненої системи на детекторі пов'язані з координатами (x, y, z) в тривимірному просторі наступними співвідношеннями:

$$u' = \frac{y \cos \lambda - x \sin \lambda}{R - x \cos \lambda - y \sin \lambda} D \cos \gamma + \frac{(z - H\lambda)}{\sqrt{(x - R \cos \lambda)^2 + (y - R \sin \lambda)^2}} D \sin \gamma,$$

$$v' = \frac{y \cos \lambda - x \sin \lambda}{R - x \cos \lambda - y \sin \lambda} D \sin \gamma + \frac{(z - H\lambda)}{\sqrt{(x - R \cos \lambda)^2 + (y - R \sin \lambda)^2}} D \cos \gamma.$$

Розглянемо застосування одномірної фільтрації (1.21) у випадку усічених проєкцій. Така проєкція зображена на рис.1.6. На ньому показано декілька прямих, вздовж яких береться згортка. Для її правильного обчислення інтегрування повинно братися за всією областю перетину носія повної (не усіченої) проєкції з прямою. На рис.1.6 видно, що для прямих L_1, L_4 частина цього перетину знаходиться за межами детектора. Тому фільтрація вздовж них через формули (1.21) буде невірною.

Рис. 1.6. До однс



1.4.3.2. Двовимірна фільтрація проекцій

Суть двовимірної фільтрації зводиться до того, щоб отримати похідну тривимірного перетворення Радона від шуканої функції згідно методу Grangeat Р. [109]. У випадку, якщо проекції не усічені, формула реконструкції, яка виведена в [109], може бути застосована для будь-якої траєкторії руху випромінювача, яка задовольняє умовам Туя, в тому числі й для спіралі. Для випадку спіральної геометрії з усіченими проекціями ця формула була модифікована [110, 111]. При цьому було виведене поняття так званої області B на детекторі. (Тут слідуюмо за термінологією роботи [111]; в більш пізніших публікаціях область B частіше називають π - областю.) Ця область визначається наступним чином. Нехай випромінювач знаходиться в точці траєкторії, яка задана параметром λ_0 . Тоді верхня межа області B утворюється шляхом проектування витка спіралі, що розташований вище поточного положення випромінювача, тобто при $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + 2\pi]$ відповідно; нижня межа утворюється при проектуванні витка спіралі з $\lambda \in [\lambda_0 - 2\pi, \lambda_0]$. В системі координат (O_1, u, v) верхня межа області B задається рівнянням

$$V(u) = \frac{DH}{R} \left(1 + \frac{u^2}{D^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{u}{D} \right),$$

а нижня межа задається кривою - $V(-u)$. Відмітимо, що в розглянутій постановці можна вважати, що $u \in (-\infty, +\infty)$, оскільки проекції усічені тільки в напрямку вісі спіралі.

На основі поняття області B з використанням методу Grangeat Р. був розроблений ряд алгоритмів реконструкції для спіральної геометрії з усіченим за висотою детектора проекціями. Характерною особливістю цих алгоритмів є те, що для того щоб знайти одне значення радіальної похідної тривимірного перетворення Радона, використовуються дані, що належать різним проекціям

(відмітимо, що винятки тут складають алгоритми, які розробляються Кацевичем [113, 114]), в той час як в оригінальній формулі Grangeat Р. при обчисленні радіальної похідної в будь-якій точці використовується тільки одна двовимірна проекція (більш детально див. наприклад, в роботі [111]).

Алгоритм, який описується в [111] також відноситься до класу FBR – алгоритмів з двовимірною фільтрацією. Алгоритм будується за тією ж схемою, що була описана в розділі 1.3.3.1, але замість одномірного фільтру (1.21) використовується більш складний двовимірний фільтр. Спочатку для кожної проекції обчислюються допоміжні функції:

$$f_u^{tr}(u', v', \lambda) = \chi_B(u', v') \frac{\partial}{\partial u'} f_1(u', v', \lambda), \quad f_v^{tr}(u', v', \lambda) = \chi_B(u', v') \frac{\partial}{\partial v'} f_1(u', v', \lambda). \quad (1.23)$$

В рівняннях (1.23) $f_1(u', v', \lambda)$ – зважена проекція (1.20), $\chi_B(u', v')$ – характеристична функція області B . Далі від допоміжних функцій (1.23) береться двовимірне перетворення Радона:

$$\begin{aligned} \psi_u(s, \varphi, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_u^{tr}(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi, \lambda) dt, \\ \psi_v(s, \varphi, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_v^{tr}(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Потім функції $\psi_u(s, \varphi, \lambda)$ та $\psi_v(s, \varphi, \lambda)$ помножуємо на ваги $\cos \varphi$ та $\sin \varphi$ відповідно. Після цього робиться їх обернене проектування в площині детектування, а від результату береться частинна похідна за змінною u' :

$$\begin{aligned}
f_u^{tr}(u', v', \lambda) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial u'} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_u(u' \cos \varphi + V' \sin \varphi, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi, \\
f_v^{tr}(u', v', \lambda) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial u'} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_v(u' \cos \varphi + V' \sin \varphi, \varphi, \lambda) \sin \varphi d\varphi
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Фільтрована проекція отримується шляхом сумування функцій $f_u^{tr}(u', v', \lambda)$, $f_v^{tr}(u', v', \lambda)$ і так названого межового члена $f_{bound}(u', v', \lambda)$:

$$f^F(u', v', \lambda) = f_u^F(u', v', \lambda) + f_v^F(u', v', \lambda) + f_{bound}(u', v', \lambda). \tag{1.26}$$

Межовий член в рівнянні (1.26) виникає внаслідок того, що використовуються усічені проекції. Формули для його обчислення виведені в роботі [111].

Послідовність операцій, яка задається формулами (1.24) та (1.25), може бути замінена фільтрацією функцій $f_u^{tr}(u', v', \lambda)$ та $f_v^{tr}(u', v', \lambda)$ в частотній області:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_u^F(v_u, v_v, \lambda) &= -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{v_u |v_u|}{v_u^2 + v_v^2} \cdot \tilde{f}_u^{tr}(v_u, v_v, \lambda) \\
\tilde{f}_v^F(v_u, v_v, \lambda) &= -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{v_v |v_u|}{v_u^2 + v_v^2} \cdot \tilde{f}_v^{tr}(v_u, v_v, \lambda)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Проведений в [108] обчислювальний експеримент показав, що використання формули (1.27) замість (1.24) та (1.25) значно зменшує час рахунку.

Двовимірний фільтр (1.23) - (1.27) при деяких припущеннях може бути зведено до одномірного фільтру. Замінімо в (1.23) характеристичну функцію $\chi_B(u', v')$ одиницею. Таке можливо, наприклад, у випадку, якщо область B повністю покриває детектор. Тоді фільтрація (1.24), (1.25) чи (1.27) буде безпосередньо застосовуватися до частинної похідної зваженої проекцій

$f_1(u', v', \lambda)$. Як відомо, похідна еквівалентна в просторі Фур'є множенню на $i2\pi v$; з цього виходить, що (1.27) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{f}_u^F(v_u, v_v, \lambda) &= \frac{v_u^2 |v_u|}{v_u^2 + v_v^2} \cdot \tilde{f}_1(v_u, v_v, \lambda) \\ \tilde{f}_v^F(v_u, v_v, \lambda) &= \frac{v_v^2 |v_v|}{v_u^2 + v_v^2} \cdot \tilde{f}_1(v_u, v_v, \lambda).\end{aligned}\tag{1.28}$$

При підстановці (1.28) в (1.27) сума перших двох членів дає фільтрація функції $f_1(u', v', \lambda)$ одномірним фільтром $|v_u|$. Але фільтр Шеппа – Логана є однією з реалізацій в просторовій області частотного фільтру $|v|$. Таким чином, якщо знехтувати межевим членом $f_{bound}(u', v', \lambda)$ та замінити функцію $\chi_B(u', v')$ одиницею, то описаний в цьому розділі двовимірний фільтр зведеться до одномірного фільтру [2] в напрямку u' .

1.4.3.3. Алгебраїчні методи. Алгоритми ART

В умовах відносно невеликої кількості проекційних даних томографічну реконструкцію треба робити переважно за допомогою алгебраїчних методів. При цьому на першому етапі робиться дискретизація відновлюваної функції та проекційних даних. Питанням дискретизації задач томографії присвячені, наприклад, декілька глав монографій [2, 5]. В результаті отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь $Ag = f$, яка пов'язує шуканий вектор $g \in R^J$ з вектором вимірювань $f \in R^I$. Матриця цієї системи A , проектуюча матриця, залежить від схеми збору даних та способу дискретизації. В наближенні променевої томографії елемент проектуючої матриці a_{ij} часто визначають як довжину перетину i -го променя з j -м вокселем. (Воксели -це елементарні об'єми, на які розбивається область реконструкції.) Таким чином, в даному випадку проектуюча матриця виявляється сильно розрідженою. Для розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь подібного роду існують спеціальні

ітераційні алгоритми. В роботі [103] використано один з них – ART (Algebraic Reconstruction Technique). Він часто застосовується в задачах томографічної реконструкції. Згідно [2], $(k+1)$ - крок для ART дається формулою

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \mu \frac{f^{i(k)} - (a^{i(k)}, g^{(k)})}{\|a^{i(k)}\|^2} a^{i(k)}. \quad (1.29)$$

Тут $a^{i(k)-i(k)}$ -ий рядок матриці A , μ - так званий параметр релаксації, який впливає на швидкість збіжності алгоритму; $i(k) = [k(\text{mod } I) + 1]$, тобто рядки матриці перебираються циклічно; $(\circ, \circ)$ - скалярний добуток; $\|\circ\|$ - евклідова норма в R^J . В [2] було показано, що ітераційний процес (1.29) збігається для будь-якого початкового наближення $g^{(0)} \in R^J$, якщо $0 < \mu < 2$. Якщо, крім того, наближення $g^{(0)}$ належить лінійній оболонці векторів $a^i, i = 1, 2, \dots, I$, тоді процес (1.29) збігається до розв'язку системи рівнянь з мінімальною нормою, якщо вона сумісна, та до узагальненого розв'язку для несумісної системи.

1.4.3.4. Алгоритм пошарової реконструкції

В роботі [103] реалізовано алгоритм, оснований на найпростішій схемі отримання даних для реконструкції об'єкта в шарі, перпендикулярному вісі спіралі. Нехай потрібно відновити структуру об'єкта в перетині $z = z_0$. З рівняння спіралі обчислюється параметр λ_0 , при якому спіраль перетинає цей перетин. Далі робиться двовимірна реконструкція за даними, отриманими при русі випромінювача в інтервалі $[\lambda_0 - \pi, \lambda_0 + \pi]$. При цьому з кожної двовимірної проекції береться один рядок – той, який лежить в площині $z = z_0$. Отриманий результат приписується перетину $z = z_0$. Окрім простоти перевага даного методу полягає в тому, що для відновлення шуканої функції в перетині використовуються виміряні дані, а не отримані в результаті інтерполяції, яка завжди вносить додаткові викривлення. Для двовимірної реконструкції за

отриманим набором одномірних віяльних проєкцій використовувався наступний FBR – алгоритм (див., наприклад, [115]):

$$g(r, \phi, z_0) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0 - \pi}^{\lambda_0 + \pi} U^2(r, \phi, \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, \lambda) \Big|_{v=z_0} E_{SL}(s(r, \phi, \lambda) - u) \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2}} du d\lambda. \quad (1.30)$$

В рівнянні (1.30) шукана функція записана в циліндричних координатах, E_{SL} - фільтр Шеппа-Логана (1.22),

$$U^2(r, \phi, \lambda) = \frac{RD}{(R + r \sin(\lambda - \phi))^2}, \quad s(r, \phi, \lambda) = \frac{Dr \cos(\lambda - \phi)}{R + r \sin(\lambda - \phi)}. \quad (1.38)$$

Очевидно, що для того, щоб зібрати описаним вище способом віяльні проєкції зі всіх азимутальних напрямків, необхідно, щоб для всіх $\lambda \in [\lambda_0 - \pi, \lambda_0 + \pi]$ детектор перетинав площину $z = z_0$. Таким чином, розмір детектора повинен дорівнювати хоча б кроку спіралі (нагадаємо, що за умовами геометрії, яка розглядається, випромінювач завжди проєктується в центр детектора).

1.4.3.5. π - метод

Первісний Пі – метод [116] – це метод апроксимаційного відновлення для гвинтової конуснопроменевої геометрії (рис.1.7). Джерело рухається по гвинтовій траєкторії радіуса R з висотою витка P навколо вісі Z . Визначається висота витка як відстань між двома послідовними поворотами спіралі. Область двовимірного детектора обмежена по висоті променевим вікном між двома послідовними поворотами первісної спіралі (рис.1.7 b). Фізична побудова і геометрія детектора може змінюватися поки всі розміри обмежені цим вікном, Пі – вікном. Конусно променеві проєкції $p^C(\beta, \gamma, s)$ і відповідні промені всередині Пі-вікна параметризуються так, щоб β - проєкційний кут, γ - віяльний кут і $2s$ – координати висоти детектора на детекторі, який повернуто на траєкторію циліндра. Головні границі Пі – вікна мають висоту $s = P/4$ та

границі основи $s = -\frac{P}{4}$.

Перший крок Пі – методу – це крок переходу від конусних променів до псевдо паралельних, як показано у формулі

$$p(\theta, t, s) = p^C(\beta, \gamma, s) = p^C\left(\theta - \arcsin \frac{t}{R}, \arcsin \frac{t}{R}, s\right) \quad (1.32)$$

Координата висоти детектора s не змінюється. В роботі [116] відмічається, що результуючий промінь, показаний на рис.1.7с, є розбіжним, коли дивимося зі сторони, і є паралельним, коли дивимося вздовж вісі обертання. На рис.1.7с також показаний віртуальний плоский ортогональний детектор у напрямку проектування, яким є вісь обертання. Псевдо паралельний промінь перетинає цей плоский детектор на декартовій сітці, яка лежить у прямокутнику. Горизонтальні рядки цього детектора мають постійну величину s .

Пі – метод продовжується з ваговим косинусом конусного кута для кожного променя. Це супроводжується одномірним фільтруванням даних по горизонтальним лініям дійсного плоского детектора. Значення величин отримуються за допомогою тривимірного методу обернених проекцій фільтрованих даних.

Для того, щоб відсліддити неточність Пі – методу, вивчається набір об'єктних точок, які лежать у прямокутному вікні детектора в один і той же момент. Ці точки лежать на поверхні, яка називається Пі – поверхнею. Можна показати, що кожна об'єктна точка належить одній і тільки одній площині [117]. Повний набір Пі – поверхонь нахилена до вісі обертання і заповнює повний об'єм, який буде відновлений. (Рис.1.7d).

Припускається, що система проектування обертається вверх, коли точки Пі – поверхні вступають у прямокутне вікно детектора на лінії верхніх меж одночасно. У той час коли обертання системи проектування продовжується, проектування з Пі – поверхні переміщується вниз детектора. Воно починає відхилятися від лінійної форми та перетворюється у подовжену область з

негоризонтальною середньою лінією. Однак, після обертання всі точки на Π_i – поверхні знову вибудовуються в горизонтальну лінію, тепер вздовж нижчої границі вікна, і виходять з прямокутного вікна одночасно.

Одномірне променеве фільтрування в цих алгоритмах виконуються вздовж цих похилих ліній або кривих. Фільтровані дані – дані, отримані методом обернених проекцій в двох вимірах на похилих площинах або в трьох вимірах на об'ємі. Факт, що деякі об'єктні точки на похилих поверхнях проектується вище, ніж така похила лінія, а деякі – нижче, - необроблений крок фільтрування цих алгоритмів, і буде оброблюватися за допомогою нового швидкого Π_i – методу.

Розглянемо околи точок на Π_i – поверхні. Вони проектується в околи на детекторі. Значення проектування цих детекторних околів забруднене об'єктними точками, які належать іншим Π_i –поверхням. Але на детекторі проекції цих забруднених точок мають різну швидкість у t – напрямку.

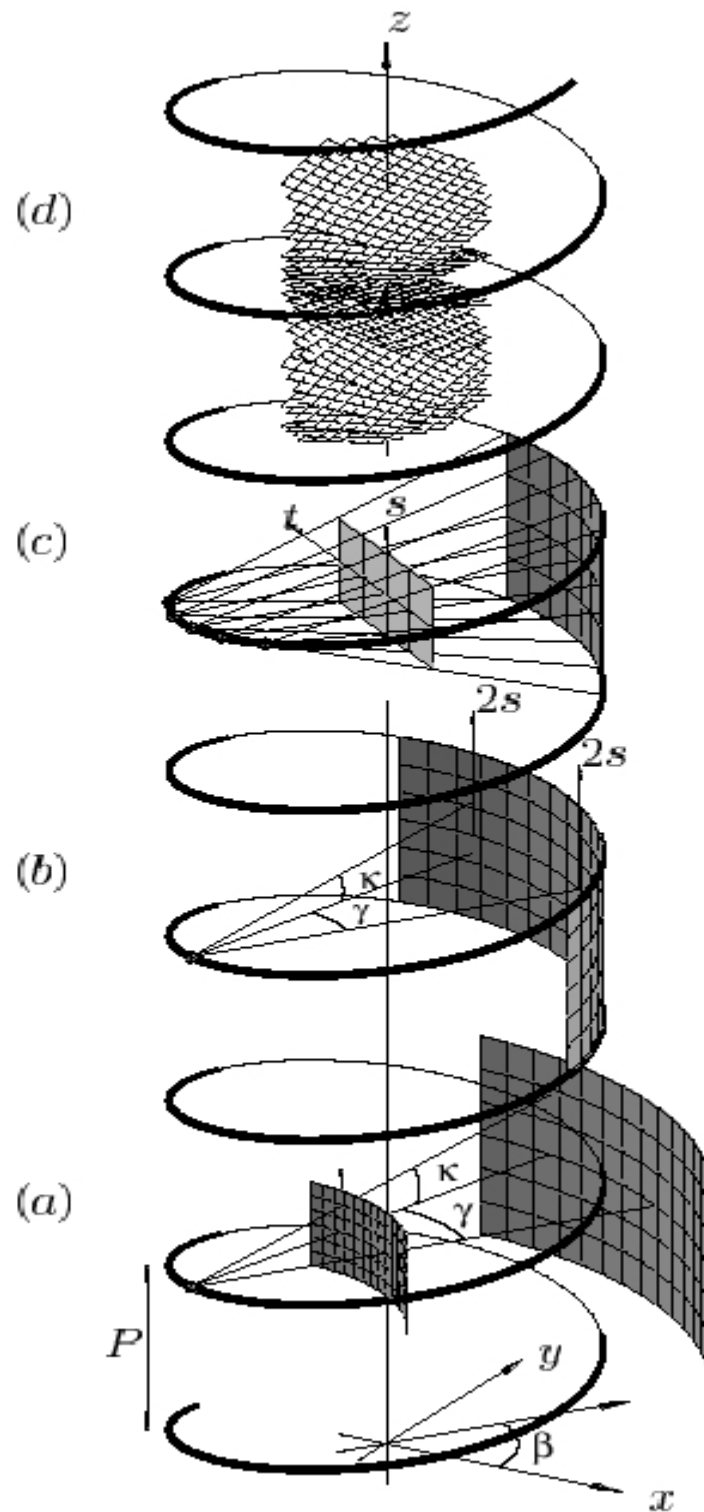


Рис.1.7. Геометрія для гвинтового конуса. (a) Приклад детектора, що знаходиться в центрі, (b) детектор на Π – вікні, (c) Псевдопаралельні промені разом з площиною віртуального детектора, (d) Множина Π – поверхонь

Тільки зв'язки, подібні нахилу $\frac{d}{n}$ мають подібну проективну t – швидкість. Мета швидкого Пі – методу – зменшити небажані взаємодії між сусідніми Пі – поверхнями на протязі фільтрування.

Для кожної Пі – поверхні можна будувати повну множину значень зв'язків $I(\theta, t, d)$. Зв'язки розміщені в тривимірному (θ, t, d) проекційному просторі. (θ, t) – координати зв'язків ідентичні двовимірному випадку, оскільки ми можемо розглядати відновлення як двовимірне, коли дивимось вздовж вісі обертання. S – координати потребують подальшого розглядання.

Враховуючи Пі-поверхню та значення $\theta_{i_A}, t_A, \theta_{i_B}, t_B$, ми використовуємо (1.31) для того, щоб координати точки (x, y) на Пі – поверхні відповідали зв'язку. Знаючи (x, y) , z – координата точки дає єдине рівняння Пі – поверхні. Координати кінцевої точки зв'язку s_A, s_B можуть бути пораховані за допомогою проектування точки (x, y, z) на віртуальний плоский детектор по проекційним кутам $\theta_{i_A}, \theta_{i_B}$ відповідно. Аналітичні викладки можна знайти в [116].

Повний набір зв'язків для Пі-поверхні буде приблизно слідувати проекційним слідам точок на Пі – поверхні від їх рухів на місті проектування (Рис.1.8). Під вхідним кутом проектування $\theta_{i_{in}}$ Пі – поверхні всі зв'язки почнуться в $s = P/4$, під вихідним кутом проектування $\theta_{i_{in}} + \pi$ всі зв'язки закінчатся у точці $s = -P/4$.

Коли кінцеві точки зв'язків вже пораховані, тоді стає можливим порахувати значення зв'язку вздовж лінійних сегментів між кінцевою точкою зв'язку так

$$I(\theta_{i_A}, t_A, d) = \sum_{i=i_A}^{i_A+n-1} p(\theta_i, t_A + d \frac{i - i_A}{n}, s_A + (s_B - s_A) \frac{i - i_A}{n}) \quad (1.33)$$

Неявна одномірна інтерполяція у t – напрямку для двовимірного випадку

тут стала неявною двовимірною інтерполяцією для кожної (t, s) площини

Якщо вставимо (1.32) у (1.33), можна будувати значення зв'язків безпосередньо по конуснопроменевим даним $p^c(\beta, \gamma, s)$ без проміжного ланцюга (1.32). Існуючі точки умов сумування (1.33) тоді не будуть співпадати з проекційними даними точок навіть по напрямку кута проектування. Неявна тривимірна інтерполяція, таким чином, необхідна для кожного доданка в (1.33).

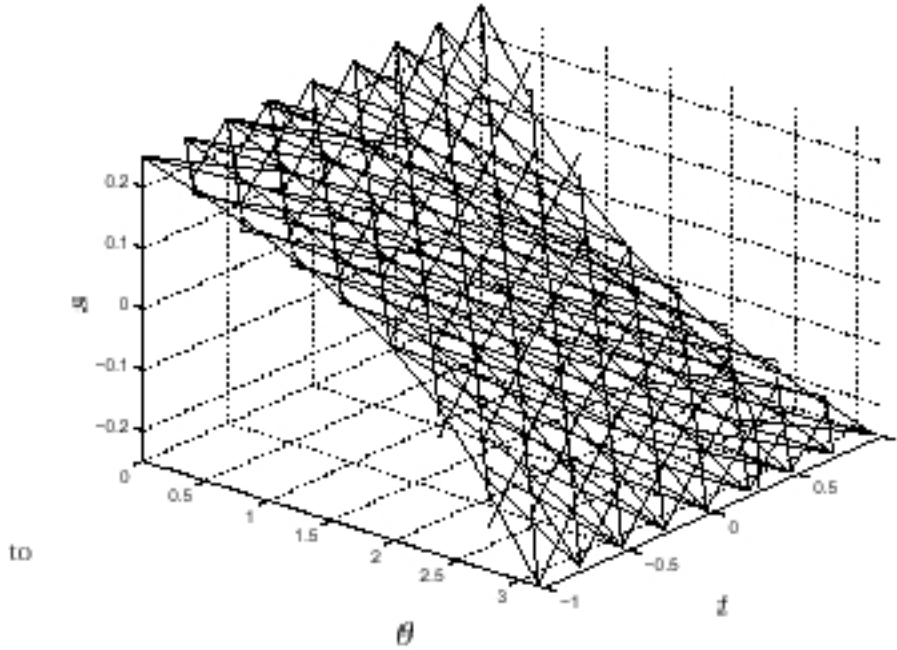


Рис.1.8. Зв'язки, необхідні для Пі – поверхні спіралі з висотою витка $P=1$

Як тільки значення зв'язків Пі – поверхні будуть пораховані, їх можна буде фільтрувати. Фільтровані зв'язки потім об'єднуються в піксельні значення, відповідно формулі

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^{N_\theta/n} (w_l (w_{l+1} \tilde{J}_l + (1 - w_{l+1}) \tilde{K}_l) + (1 - w_l) (w_{l+1} \tilde{L}_l + (1 - w_{l+1}) \tilde{M}_l))$$

де w_l - інтерполяційний множник, $\tilde{J}_l, \tilde{K}_l, \tilde{L}_l, \tilde{M}_l$ - значення зв'язків. Цей крок методу обернених проекцій ідентичний двовимірному випадку, але він виконує тривимірний метод обернених проекцій. Пікселі на Пі – поверхнях

інтерполуються на заключній тривимірній сітці, наприклад, кубічній сітці, для представлення і аналізу. Ця інтерполяція виконується тільки за z – напрямками, оскільки пікселі на Π – поверхнях вже розміщені на декартовій сітці.

1.4.4. Класична тривимірна комп'ютерна томографія

Постановка класичної тривимірної комп'ютерної томографії: відновлюється функція a за величинами

$$g(\theta, v) = \int a(v + t\theta) dt,$$

де v пробігає через всі точки кривої V , а $\theta \in S^2$ (S^2 – одиничне коло). Більшість формул відновлення використовують проміжну функцію

$$G(\theta, v) = \int_{S^2} g(\omega, v) h(\omega \cdot \theta) d\omega, \quad (1.34)$$

де h – гармонічна функція, а функція F на $S^2 \times R^1$ отримується з G за допомогою

$$F(\theta, v \cdot \theta) = G(v, \theta). \quad (1.35)$$

Формула відновлення переписеться так

$$a(x) = \frac{1}{16\pi^3} \int_{S^2} (F * k)(\theta, \theta \cdot x) d\theta \quad (1.36)$$

Можна показати, що з (1.34) - (1.36) виходить, що

$$\hat{h}(\sigma) \hat{k}(\sigma) = \sigma^2 + \text{odd function of } \sigma \quad (1.37)$$

Це отримується з виразу $G(\theta, v) = (h * Ra)(\theta, v \cdot \theta)$ та з 3D перетворення Радона [120], одже $F = h * Ra$. Тепер (1.36) порівнюємо з перетворенням Радона для $n = 3$, тобто

$$a(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (Rf)''(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

Це збігається з (1.36), якщо (1.37) виконується.

Найпростіший вибір для h, k - це $\hat{h} = -(-2\pi)^{-\frac{1}{2}} i\sigma$, $\hat{k} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} i\sigma$. В цьому випадку $h = -\delta'$, $k = 2\pi\delta'$ є локальними. Ми отримали обернену формулу Grangeat [119]

$$G(\theta, v) = \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \frac{\partial}{\partial \theta} g(v, \omega) d\omega$$

$$a(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} F'(\omega, \omega \cdot x) d\omega \quad (1.38)$$

де $\frac{\partial}{\partial \theta}$ похідна за напрямком θ , F' - частинна похідна по відношенню до другого аргументу.

Обернена формула Туя [87], Сміта [121] та Гельфанда і Гончарова [122]

може бути отримана, поклавши $\hat{h}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} (|\sigma| - \sigma)$, $\hat{k}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \sigma$ та $\hat{h}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\sigma|$, $\hat{k}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \sigma$.

На практиці $g(v, \cdot)$ вимірюється на детекторній площині $D_v = p_v - v + (p_v - v)^\perp$, де p_v - ортогональна проекція v на D_v . Поклавши $g_v(y) = g(v, y - v)$, (1.34) перетвориться в наступну рівність

$$G(v, \theta) = |p_v - v| \int_{D_v} g_v(y) h(\theta \cdot (y - v)) dy$$

Якщо вводиться ортогональна система $W_v = (w_1, w_2)$ в $(p_v - v)^\perp$, то можна

отримати у випадку Grangeat (1.37)

$$G(v, \theta) = \frac{|p_v - v|}{|\theta_v|^3} \theta_v \cdot (Rg'_v) \left(\frac{\theta_v}{|\theta_v|}, \frac{(v - p_v) \cdot \theta}{|\theta_v|} \right),$$

де $\theta_v = w^T \theta$, R - це 2D перетворення Радона і g'_v - градієнт g_v . Таким чином, формула Grangeat здійснюється за допомогою обчислення лінійних інтегралів на детекторній площині, тобто за допомогою 3D обернених проекцій (1.38).

1.5. Відомі математичні моделі в комп'ютерній томографії.

Таблиця 1.1

Сучасні методи томографії

Діяння та метод	Фізичний характер зображення	Застосування
Рентгенівське опромінювання. Рентгенівська комп'ютерна томографія (РКТ)	Коефіцієнт послаблення рентгенівського опромінювання	РКТ застосовують для діагностики, планування хірургії та променевої терапії
Гама – опромінювання. Однофотонна емісійна комп'ютерна томографія	Концентрація речовини, яка помічена радіоактивним ізотопом.	ОЕКТ застосовується для функціональної діагностики
Позитронне опромінювання. Позитронна двохфотонна емісійна комп'ютерна томографія (ПЕКТ)	Концентрація речовини, яка помічена позитронами	ПЕКТ застосовується для функціональної діагностики

Продовження табл. 1.1

Комп'ютерна томографія на основі ядерного магнітного резонансу (МР - томографія)	Протонна щільність, час релаксації	МРТ застосовується для загальної та спеціальної діагностики
Ультразвук. Ультразвукова комп'ютерна томографія (УКТ)	Акустичний опір. Перерізи розсіювання, поглинання	Трансмісійна УКТ проходить клінічні випробування.
Інфрачервоне опромінювання (ІЧ томографія)	Об'ємний розподіл температури	Експериментальні дані про застосування ІЧ томографії в мамології
СВЧ - опромінювання	Послаблення СВЧ опромінювання органами та тканинами	З'явилися ідеї технічної реалізації методу
КТ - імпедансометрія	Розподіл діелектричної проникливості та електропровідності	Експериментальні примірники
Магнітометрія	Понад слабкі магнітні поля, двомірний розподіл електричного опору	Картування мозку, серця, клінічна апробація. Створені експериментальні примірники

1.5.1. Трансмісійна комп'ютерна томографія

Це - початковий і найпростіший випадок КТ. У трансмісійній томографії досліджується об'єкт за допомогою приломлюючого випромінювання, наприклад, X – промені (рентгенівські промені) для тіла людини. Якщо I_0 - це інтенсивність випромінювача, $a(x)$ - лінійний коефіцієнт послаблення випромінювання в точці x , L - промінь, вздовж якого розповсюджується

випромінювання, та I - інтенсивність випромінювання на виході з об'єкту, тоді

$$I = I_0 e^{-\int_L a(x) dx} \quad (1.39)$$

Математична задача трансмісійної томографії – визначити a для великої множини осей L . Якщо L проста пряма лінія, яка з'єднує випромінювач x_0 з детектором x_1 , (1.39) перетворюється так

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \int_{x_0}^{x_1} a(x) dx \quad (1.40)$$

де dx - це звуження по L Лебегової міри в R^n . Треба обчислити a в області $\Omega \subseteq R^n$ із виразу (1.40).

Для $n = 2$, (1.40) це просто параметризація перетворення Радона

$$(Ra)(\theta, s) = \int_{x\theta=s} a(x) dx$$

де $\theta \in S^{n-1}$. Таким чином, отримуємо обернену формулу Радона

$$a = R^* Kg, \quad g = Ra \quad (1.41)$$

де

$$(R^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

є так званою оберненою проекцією та

$$K = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} H \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}, & n - \text{парні} \\ (-1)^{(n-1)/2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}, & n - \text{непарні} \end{cases} \quad (1.42)$$

Тут H - перетворення Гільберта [6]. Чисельна реалізація (1.41) проводиться за

допомогою алгоритму фільтрованих обернених проекцій, який є стандартним алгоритмом в комерційних КТ сканерах.

Для $n = 3$, автор роботи [6] вважає доречним інтегральне X – променеве перетворення

$$(Pa)(\theta, x) = \int_{R^1} a(x + s\theta) ds$$

де $\theta \in S^{n-1}$ та $x \in \theta^\perp$. P - це подібне до R обернене перетворення,

$$a = P^* Kg, \quad g = Pf \quad (1.43)$$

K визначається формулою (1.42) та $(P^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta$, де E_θ - ортогональна проекція до $\theta^\perp$. Але (1.43) не є такою корисною, як (1.41). Причиною є те, що (1.43) потребує g для всіх θ та $y \in \theta^\perp$. Це не практично. Отже, не є необхідним для відновлення a . Дійсно, можна показати, що a може бути відновлено за допомогою (1.40) з випромінювачем x_0 на колі, яке оточує $\sup p(a)$, та $x_1 \in S^{n-1}$. Але знайдене a в такому розміщенні є дуже нестабільним. Умова стабільності наступна: кожна площина, яка відповідає $\sup p(a)$ з $\sup p(a)$ повинна складатися хоча б з одного випромінювача [78]. Ця умова очевидно порушується для випромінювача на колі. Випадки, в яких умова задовольняється, включають спіраль та пару ортогональних кругів.

Нехай $u(x, \theta)$ - густина часток x , що рухається в напрямку θ . Тоді,

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + a(x)u(x, \theta) = \int_{S^{n-1}} \eta(x, \theta, \theta') d\theta' + \delta(x - x_0) \quad (1.44)$$

Тут, $\eta(x, \theta, \theta')$ ймовірність того, що частка x , що переміщується в напрямку θ , а розсіюється в напрямку θ' . δ - це дельта функція Дірака, яка моделює силу випромінювача. (1.44) розповсюджується на область Ω з R^n ($n = 2$ або 3), та $x_0 \in \partial\Omega$. Оскільки ніякого випромінювання немає ззовні, маємо

$$u(x, \theta) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \nu_x \cdot \theta \leq 0 \quad (1.45)$$

де ν_x - зовнішня нормаль до $\partial\Omega$ по $x \in \partial\Omega$. (1.39) замінюється так

$$\begin{aligned} I(x_1, x_0, \theta) &= I_0 u(x_1, \theta), \\ x_1 &\in \partial\Omega, \quad \nu_{x_1} \cdot \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Задача відновлення a по (1.44) – (1.46) є більш складнішою. Явна формула для a , така як (1.41), невідома та навряд існує. Але існують чисельні методи, які розроблені для спеціального вибору η [79], [80]. Ситуація стає більш складною, якщо взяти до уваги те, що, строго кажучи, $\eta(x, \theta, \theta')$ - залежний об'єкт і тому невідомий наперед. (1.44) – (1.46) типовий приклад оберненої задачі для диференційного рівняння з частинними похідними. В оберненій задачі маємо визначити коефіцієнти диференціального рівняння – в нашому випадку a , η - з інформації про розв'язок – в нашому випадку (1.46).

1.5.2. Емісійна комп'ютерна томографія

В емісійній томографії визначається розповсюдження f джерел випромінювання усередині об'єкта за допомогою вимірювання випромінювання зовні об'єкта в томографічному образі. Нехай $u(x, \theta)$ - густина часток по x , які переміщуються у напрямку θ , та нехай a - коефіцієнт послаблення розповсюдження об'єкту. (Це є величина, яка шукається в трансмісійній КТ.) Тоді

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + a(x)u(x, \theta) = f(x) \quad (1.47)$$

Це рівняння справедливе для об'єкта в області $\Omega \subseteq R^n$ для кожного $\theta \in S^{n-1}$. Тут теж не існує випромінювання ззовні, тобто

$$u(x, \theta) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \nu_x \cdot \theta \leq 0 \quad (1.48)$$

а внутрішнє випромінювання

$$u(x, \theta) = g(x, \theta), \quad x \in \nabla\Omega, \quad \nu_x \cdot \theta \geq 0 \quad (1.49)$$

виміряне, тому відоме. (1.47) – (1.49) – легко розв’язується

$$u(x, \theta) = \int_{x-\infty \cdot \theta}^x e^{-\int_y^x a ds} f(y) dy$$

Таким чином, (1.49) – це інтегральне рівняння

$$g(x, \theta) = \int_{x-\infty \cdot \theta}^x e^{-\int_y^x a ds} f(y) dy \quad (1.50)$$

для f . (1.50) – ідентично до інтегрального рівняння в трансмісійній КТ.

Вище описано так звана SPECT (одночасткова емісійна КТ). В PET (позитронна емісійна томографія) випромінювачі випромінюють частки парами в протилежних напрямках. Вони виявляються при співпаданні, тобто події з двома частками, які досягають протилежних датчиків в той же час підраховані. (1.50) замінюється так

$$g(x, \theta) = \int_{x-\infty \cdot \theta}^x e^{-\int_y^x a ds - \int_{x-\infty \cdot \theta}^y a ds} f(y) dy = e^{-\int_{x-\infty \cdot \theta}^x a ds} \int_{x-\infty \cdot \theta}^x f(y) dy$$

Основні задачі в емісійній КТ – знаходження затухання, шуму та розсіювання. Для задачі затухання ідеальним математичним розв’язком буде метод визначення f та a в (1.47) – (1.49) одночасно. Згідно з обмеженням на a (наприклад, a – константа у відомій області [81], a – афінне перетворення образу [82], a близьке до відомого розподілення [83]), очікуваний результат був отриманий.

Таким чином, основні моделі використовують інтегральні рівняння.

1.5.3. Ультразвукова комп'ютерна томографія

Рентгенівські промені рухаються вздовж прямих ліній. Для інших джерел випромінювання, таких як ультразвукові та мікрохвильові, шляхи руху променів – не прямі лінії, а їх точні форми, що залежать від внутрішньої структури об'єкта.

В роботі [6] розглядається об'єкт, розміщений в області $\Omega \subseteq R^n$. Об'єкт досліджується за допомогою хвильової площини

$$e^{-ikt} u_{\theta}(x), \quad u_{\theta}(x) = e^{ikx \cdot \theta}$$

з хвильовим числом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ - довжина хвилі, яка рухається у напрямку θ . Результуюча хвиля $e^{-ikt} u(x)$ задовольняє наступному хвильовому рівнянню

$$\Delta u + k^2(1 + f)u = 0, \quad f = n^2 - 1, \quad (1.51)$$

плюс відповідні граничні умови на нескінченності. Обернена задача полягає в наступному. Вважається, що

$$g(x, \theta) = u(x), \quad \theta \in S^{n-1} \quad (1.52)$$

відомо за межами Ω . Визначимо f всередині Ω .

Єдиність та стабільність оберненої задачі (1.15) була доведена. Але стабільність – тільки логарифмічна, тобто похибка даних розміром δ при

відновленні дає похибку $\frac{1}{\log(\frac{1}{\delta})}$.

Чисельні методи для (1.51) – (1.52) базуються на лінійаризаціях, таких як апроксимація Борна та Ритова [85]. Для апроксимації Борна рівність (1.51) переписується наступним чином

$$u(x) = u_\theta(x) - k^2 \int_{\Omega} G(x-y) f(y) u(y) dy \quad (1.53)$$

де G - відповідна функція Гріна. Для $n=3$, маємо

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Апроксимація Борна отримується за допомогою переходу $u \rightarrow u_\theta$ в інтегралах (1.53). Тоді (1.52) перепишеться так

$$g(x, \theta) = u_\theta(x) - k^2 \int_{\Omega} G(x-y) u_\theta(y) f(y) dy, \quad x \notin \Omega \quad (1.54)$$

Це – лінійне інтегральне рівняння для f , яка є дійсною для всіх x , за межами об'єкту та для визначених напрямків θ .

Чисельні методи, основані на (1.54) відомі як дифракційна томографія.

Можна використати (1.54) для того, щоб отримати деяку інформацію про стабільність. Для великих $|x|$, (1.54) приймає форму

$$\begin{aligned} g(x, \theta) &= u_\theta(x) - \frac{k^2}{4\pi|x|} e^{ik|x|} \int e^{ik(\theta - \frac{x}{|x|}) \cdot y} f(y) dy = \\ &= u_\theta(x) - \frac{k^2}{4\pi|x|} e^{ik|x|} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \hat{f}(k(\frac{x}{|x|} - \theta)) \end{aligned} \quad (1.55)$$

з Фур'є перетворенням $\hat{f}$. (1.55) визначає $\hat{f}$ в межах кулі радіуса $\sqrt{2}k$ за даними (1.52). Тобто стабільність оберненої задачі (1.51) – (1.52) краща ніж логарифмічна.

1.5.4. Оптична комп'ютерна томографія

Вона використовує лазери, близькі до інфрачервоних, для ілюстрації тіла. Процес можна побачити за допомогою транспортного рівняння (переносу).

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, \theta, t) + \theta \cdot \nabla u(x, \theta, t) + a(x)u(x, \theta, t) = b(x) \int_{S^{n-1}} \eta(\theta \cdot \theta') u(x, \theta', t) d\theta' + f(x, \theta, t) \quad (1.56)$$

для щільності $u(x, \theta, t)$ частинок $x \in \Omega$, що рухаються у напрямку $\theta \in S^{n-1}$ в момент часу t . a, b - тканинні параметри, що шукаються. Розсіювання ядра η вважається відомим. Разом з початковими та граничними умовами

$$\begin{aligned} u(x, \theta, 0) &= 0, \quad \text{в } \Omega \times S^{n-1}, \\ u(x, \theta, t) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times S^{n-1} \times R^1, \quad \nu \cdot x \leq 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

(1.56) має єдиний розв'язок при природніх умовах на a, b, η, f . Далі розглянемо обернену задачу. Вважається, що ми знаємо зовнішнє випромінювання

$$g(x, \theta, t) = u(x, \theta, t) \quad \text{на } \partial\Omega \times S^{n-1} \times R^1, \quad \nu_x \cdot \theta \geq 0 \quad (1.58)$$

Існує по суті два методи для освітлення об'єкту, тобто для вибору функції f в (1.56) – (1.58). В стаціонарному випадку вважається $f = \delta(x - x_0)$, де $x_0 \in \partial\Omega$ - це точка випромінювання. Друга можливість – це легкий спалах $f = \delta(x - x_0)\delta(t)$. Останній метод також використовує часові гармонійні освітлення, в цьому випадку $f = \delta(x - x_0)e^{i\omega t}$. В усіх трьох методах функція g з (1.58) є зваженою за $x \in \partial\Omega$, можливо усереднення за однією чи двома змінними θ, t .

1.5.5. Магнітно резонансна томографія (МРТ)

Фізичний феномен, який розглядається в [6] – це процес обертання протона в магнітному полі сили H навколо напрямку цього поля. Намагнічування $M(x, t)$, визване магнітним полем $H(x, t)$ задовольняє рівнянню Блоха

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \gamma M \times H - \frac{1}{T_2}(M_1 e_1 + M_2 e_2) - \frac{1}{T_1}(M_3 - M_0) e_3. \quad (1.59)$$

Тут M_i - i -та компонента M , e_i - i -тий одиничний вектор $i = 1, 2, 3$. Значення T_1, T_2, M_0 стають очевидними, якщо ми будемо розв'язувати (1.59) з постійним полем $H = H_0 e_3$ та з початковою величиною $M(x, 0) = M^0(x)$. Ми отримаємо з $\omega_0 = \gamma H_0$

$$\begin{aligned} M_1(x, t) &= e^{-\frac{t}{T_2}} (M_1^0 \cos(\omega_0 t) + M_2^0 \sin(\omega_0 t)) \\ M_2(x, t) &= e^{-\frac{t}{T_2}} (-M_1^0 \sin(\omega_0 t) + M_2^0 \cos(\omega_0 t)) \\ M_3(x, t) &= e^{-\frac{t}{T_1}} M_3^0 + (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) M_0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Таким чином, намагнічування обертається в $x_1 - x_2$ - площині з частотою Лармора ω_0 та повертається до умови рівноваги $(0, 0, M_0)$ зі швидкістю, яка контролюється за допомогою T_2 в $x_1 - x_2$ площині та за допомогою T_1 в x_3 - напрямку.

В МРТ – сканерах створюється магнітне поле

$$H(x, t) = (H_0 + G(t) \cdot x) e_3 + H_1(t) (\cos(\omega_0 t) e_1 + \sin(\omega_0 t) e_2)$$

де G та H_1 - знаходяться під контролем. $H_0 e_3$ - статичне поле, G - градієнт, H_1 - частотне відношення поля. Введені G, H_1 створили детекторні системи сканування з сигналом виводу

$$S(t) = -\frac{d}{dt} \int_{R^3} M(x, t) B(x) dx$$

де B характеризує детекторну систему. Залежно від вибору H_1 , можемо отримати апроксимацію S .

У випадку, якщо H_1 - константа в маленькому інтервалі $[0, \tau]$ та

$$\gamma \int_0^{\tau} H_1 dt = \frac{\pi}{2},$$

$$S(t) = \int_{R_3} M_0(x) e^{-i\gamma \int_0^t G(t') dt' \cdot x - \frac{t}{T_2(x)}}.$$

Обираючи G константою для $\tau \leq t \leq \tau + T$ та нулем в іншому випадку, ми отримаємо для $T \ll T_2$

$$S(t) = \int_{R_3} M_0(x) e^{-i\gamma(t-\tau)G \cdot x} dx = (2\pi)^{3/2} \widehat{M}_0(\gamma(t-\tau)G)$$

де $\widehat{M}_0$ - це тривимірне перетворення Фур'є від M_0 .

З цього бачимо, що можна піти кількома шляхами. Можна використати (1.60)

для отримання тривимірного перетворення Фур'є $\widehat{M}_0$ від M_0 , та обчислити M_0 за допомогою оберненого тривимірного перетворення Фур'є. Можемо також використати теорему про центральний перетин для отримання тривимірного перетворення Радона RM_0 від M_0 за допомогою ряду одновимірних перетворень Фур'є. M_0 - відновлюється в свою чергу за допомогою оберненого тривимірного перетворення Радона.

Глава 2. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла на системі трьох груп перерізаних томограм за допомогою інтерфлетації функцій

2.1. Задачі прикладного характеру, що приводять до інтерфлетації функцій трьох змінних

В теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню та деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N на M ($M \geq 2$) m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхнях в R^n . У випадку $m=0$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках (полюсах) і такі оператори наближення називаються операторами інтерполяції (inter - між, pol - полюс, точка). У випадку $m=1$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами f та її частинних похідних

$\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, s = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq s \leq N$ на M лініях і такі оператори будемо

називати операторами інтерлінації (inter - між, line - лінія). У випадку $n \geq 3, 2 \leq m < 3$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами f та

$\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, s = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq s \leq N$ на M поверхнях в R^n ($n \geq 3$) і такі оператори

наближення будемо називати операторами інтерфлетації (inter-між, flat-поверхня плоска). В зарубіжній літературі для операторів інтерлінації та інтерфлетації використовується назва “blending function interpolation” - “мішана інтерполяція функцій”.

Враховуючи, що інтерлінація є природним узагальненням інтерполяції, в теорії інтерлінації використовується термінологія з теорії інтерполяції (інтерполуюча функція - інтерлінуюча функція - інтерфлетуюча функція, вузли

інтерполяції - лінії інтерлінації - поверхні інтерфлетації тощо).

Одним із застосувань інтерфлетації є наближення функцій трьох змінних за допомогою проекцій або томограм, що надходять з комп'ютерного томографа. Така задача виникає при аналізі отриманих томограм, який проводився після того, як пацієнт залишив томограф, коли лікареві для уточнення діагнозу потрібно отримати зображення внутрішньої структури тіла пацієнта в інших перетинах (в інших площинах).

Серед інженерних задач, які приводять до інтерлінації та інтерфлетації, слід відмітити наступні:

- Картографія дна океану за даними гідролокації;
- Побудова поверхні космічного тіла за даними радіолокації;
- Проектування корпусів літаків, суден, автомобілів та деякі інші.

2.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлетації на M площинах в R^n , $n \geq 3$

2.2.1. Інтерфлетація функцій. Означення

Нехай $n, M \in \mathbb{N}$; $m, N \in \mathbb{N}$ - задані числа; $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ - задані m - вимірні ($0 \leq m < n$) множини в R^n ; $\varphi_{k,s}(x)|_{\Pi_k} = L_{k,s} f(x)|_{\Pi_k}, k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ - задані сліди деякої послідовності операторів $L_{k,s} f(x), k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ на множинах $\Pi_k, k = \overline{1, M}$. Часто позначають $L_{k,0} f(x) = f(x)$. Скалярнозначна функція $f(x)$ може бути невідомою. Оператори $L_{k,s} f(x)$ можуть бути частинними (або нормальними) похідними $L_{k,s} f(x)|_{\Pi_k} = \frac{\partial^s f}{\partial v_k^s} \Big|_{\Pi_k}, k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ (тут v_k - вектор нормалі до Π_k , якщо $n \geq 2, 1 \leq m \leq n-1$). Диференціальні оператори

$L_{k,s}f(x)$ можуть мати також більш загальний вигляд.

Означення 2.1. Оператори

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = O(\{L_{k,s}\}; \{\Pi_k\}; \{\varphi_{k,s}\}; x)$$

називатимемо операторами інтерфлетації, якщо

$$L_{l,q} O(\{\varphi_{k,s}\}; x) \Big|_{\Pi_l} = \varphi_{l,q}(x) \Big|_{\Pi_l}, \quad l = \overline{1, M}, \quad q = \overline{0, N}.$$

Очевидно, оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ відновлюють (можливо наближено) функції $f(x)$ багатьох змінних за допомогою вказаної інформації. У випадку $m = 0$ множини $\Pi_k \in R^n$ є точками в R^n і сліди $\varphi_{k,s}(x) \Big|_{\Pi_k}$ є значеннями функції $f(x)$ та її похідних в точках Π_k . Тоді оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називають інтерполяційними операторами на M точках.

Якщо $m = 1, n \geq 2$, то множини Π_k є лініями в R^n і $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називатимемо операторами інтерлінації.

У випадку $2 \leq m \leq n-1, n \geq 3$, $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ будемо називати операторами інтерфлетації.

Якщо оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ лінійно залежать від слідів $\varphi_{k,s}(x)$, $k = \overline{1, M}, s = \overline{1, N}$, тобто

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^N L_{k,s}(\varphi_{k,s}; \{\Pi_k\}; x) h_{k,s}(x),$$

де $h_{k,s}(x) = h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ – деякі допоміжні функції, що не залежать від наближуваної функції $f(x)$, а залежать лише від параметрів геометричних об'єктів $\{\Pi_k\}$ і від типу операторів $L_{k,s}$, сліди яких $\varphi_{k,s}$ використовують для наближення. То такі оператори називають лінійними операторами інтерфлетації. В іншому випадку їх називають нелінійними операторами

інтерфлетації, або просто нелінійними інтерфлетантами.

Означення 2.2. Якщо допоміжні функції $h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ є раціональними, поліноміальними, тригонометричними функціями, або сплайнами, то таку інтерфлетацію називають відповідно раціональною, поліноміальною, тригонометричною, сплайн - інтерфлетацією.

Це означення повністю поширюється на випадок довільної системи поверхонь в R^n різної розмірності.

Зауважимо, що сліди $\varphi_{k,s}(x)$ є функціями m змінних (параметрів), бо стільки змінних (параметрів) потрібно для визначення точки на m - вимірній поверхні Π_k .

2.2.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлетації на M площинах за відомими томограмами на цих площинах без збереження класу $C^r(R^3)$

Для побудови математичної моделі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла будемо використовувати поняття раціональної інтерфлетації, яке наведено в роботі О.М. Литвина [53], та поняття томограми в математичному сенсі, яке дається нижче. Під виразом „відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла” надалі будемо вважати відновлення просторово змінного коефіцієнта поглинання всередині тривимірного тіла.

Нехай функцією $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in R^3$ задається щільність тривимірного тіла, яку треба відновити, якщо відомі зображення (томограми) цієї функції на системі M площин, що задаються нормальними рівняннями

$$\Pi_k : \omega_k(x) := \sum_{i=1}^3 a_{ki} x_i - c_k = 0, \quad \text{EMBED Equation.3} \quad \sum_{i=1}^3 a_{ki}^2 = 1.$$

Означення 2.3. Томограмою $T_k(\bar{x})$ (див. рис. 2.1) (слідом функції $f(x)$) на

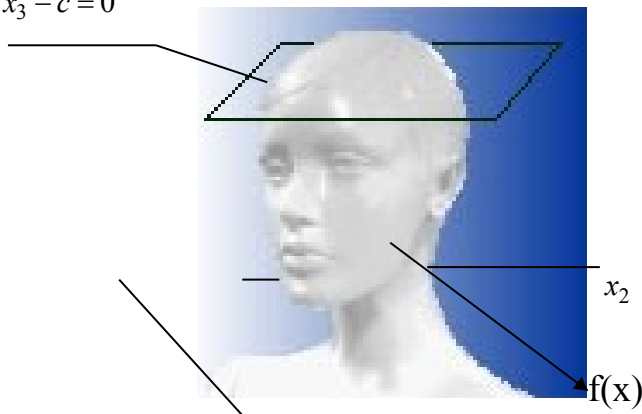
площині $\omega_k(x) = 0$ за умови, що коефіцієнти $a_{ki}, i = \overline{1,3}$ або $b_{kj}, j = \overline{1,3}$ або $c_{kl}, l = \overline{1,3}$, не дорівнюють нулю, будемо називати одну з трьох функцій

$$T_k(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3)/a_{k1}, x_2, x_3), a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3)/a_{k2}, x_3), a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_2, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2)/a_{k3}), a_{k3} \neq 0 \end{cases},$$

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2), & x_3 = 0 \\ (x_1, x_3), & x_2 = 0 \\ (x_2, x_3), & x_1 = 0 \end{cases}$$

де $x_k = x_{kp}, k = \overline{1,3}$ - вирази, що отримуються розв'язанням рівняння $\omega_k(x) = 0$ відносно змінної x_p . Якщо $\omega_k(x) = 0$ залежить від однієї або двох змінних, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на Π_k будемо називати, відповідно, дві або одну функції. Наприклад, якщо $\Pi_k : \omega_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 - \gamma_k = 0$, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на цій площині буде функція $f(a_{k1}^{-1}(\gamma_k - a_{k2}x_2), x_2, x_3)$ або функція $f(x_1, a_{k2}^{-1}(\gamma_k - a_{k1}x_1), x_3)$. Якщо $\Pi_k : \omega_k(x) = a_{k1}x_1 - \gamma_k = 0, a_{k1} \neq 0$, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на цій площині буде одна функція $f(a_{k1}^{-1}\gamma_k, x_2, x_3)$.

$$\omega_k(x) : x_3 - c = 0$$



$$T_k(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c)$$

Рис. 2.1. Графічна ілюстрація поняття томограми

Таким чином, поняття томограми включає до себе площину і функцію,

задану в точках цієї площини. Але за виглядом $T_k(\bar{x})$ не можна відновити просторово змінний коефіцієнт поглинання всередині тривимірного тіла (внутрішню структуру).

Уведемо позначення :

$$\begin{aligned} v_k &= (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}) = \nabla \omega_k(x); \\ \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad D_0^{(k)} = I, \\ D_s^{(k)} &= (v_k, \nabla)^s = \left(a_{k1} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{k2} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{k3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^s, \\ D_1^{(k)} \omega_l &= \nabla_{lk} = \nabla_{kl} = \sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{li}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що оператори $D_s^{(k)} f(x) = \partial^s f(x) / \partial v_k^s$ є операторами s -кратного диференціювання за нормаллю до поверхні Π_k . Уведемо систему функцій

$$\begin{aligned} H_{kN}(x) &= \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\bar{N}} \omega_i}{\sum_{\mu=1}^M \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{\bar{N}} \omega_i}, \quad k = \overline{1, M}, \\ \bar{N} &= \begin{cases} N+1, & \text{якщо } N = 2m+1, \\ N+2, & \text{якщо } N = 2m \end{cases}, \\ \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. (О.М.Литвин [53], с. 381) Нехай $T_{ks}(\bar{x}) \in C^{r-s}(R^3)$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, \bar{N}}$, $r > 2N$, $G = \bigcap_{k=1}^M \Pi_k$. Тоді оператор

$$O_{MN}(\{T_{ks}\}; x) = \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) \sum_{s=0}^N T_{ks}(x - \omega_k(x) \nabla \omega_k(x)) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} \quad (2.3)$$

має властивості

$$O_{MN}(\{T_{ks}\}; x) \in C^{r-N}(R^3 \setminus G), \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial^p O_{MN}(\{T_{ks}\}; x)}{\partial v_q^p} \right|_{\Pi_q} = T_{qp}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_q}, \quad q = \overline{1, M}, \quad p = \overline{0, N} \quad (2.5)$$

При цьому, якщо $f(x) \in C^r(R^2)$, $r \geq 2N$ - довільна функція, котра задовольняє умові

$$\left. \frac{\partial^s f(x)}{\partial v_k^s} \right|_{\Pi_k} = T_{ks}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_k}, \quad k = \overline{1, M}, \quad s = \overline{0, N},$$

то для залишку

$$r_{MN}f(x) = (I - O_{MN})f(x) \quad (O_{MN}f(x) =: O_{MN}(\{T_{ks}\}; x))$$

справедлива рівність

$$r_{MN}f(x) = \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k(x) - t) \nabla \omega_k(x)) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt \quad (2.6)$$

Наслідок. Із формули (2.6) для залишку випливає, що оператор $O_{MN}f(x)$ є точним на поліномах степеня до N включно (при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}$):

$$O_{MN}x^\alpha \equiv x^\alpha,$$

$$0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq N.$$

Для функції $f(x) = \omega_1^{N+1} \cdots \omega_M^{N+1}$ маємо $O_{MN} f(x) \equiv 0$. Отже, цей оператор не є точним на поліномах степеня $M(N+1)$.

Зауважимо, що при побудові функцій $H_{kN}(x)$ можна вважати $\bar{N}$ довільним числом (навіть не натуральним), більшим за N : $\bar{N} \geq N$. При цьому $0 \leq H_{kN}(x) \leq 1$ лише при $\bar{N}$ парному, або лише в точках $x: \omega_i(x) > 0, i = \overline{1, M}$.

Можна показати, що існують такий набір $\mathfrak{R}$ мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathfrak{R}$ і такий набір лінійних функціоналів $C_\alpha(f)$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, що оператор

$$\bar{O}_{MN} f(x) = O_{MN} f(x) + \frac{\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} C_\alpha(f) x^\alpha \prod_{k=1}^M \omega_k^{\bar{N}}(x)}{\sum_{i=1}^M \prod_{k \neq i} \omega_k^{\bar{N}}(x)}$$

буде мати максимально можливу алгебраїчну точність

$$O_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq MN - 1.$$

Отже, математична модель відновлення внутрішньої структури тіла з використанням раціональної інтерфлєтації має вигляд (2.3).

2.2.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням раціональної інтерфлєтації за відомими томограмами, заданими на системі будь-яких площин із збереженням класу $C^r(R^3)$

Нехай задана система M площин $\Pi_k: \omega_k(x, y, z) = a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1, M}$ EMBED Equation.3, $v_k = (a_k, b_k, c_k)$ – вектор нормалі до Π_k , $|v_k|^2 = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1$, $(\tau_{k1}, \tau_{k2}, v_k)$ – система трьох взаємно

ортогональних ортів, відповідних місцевій системі координат (u_k, v_k, ω_k) .
Кожну функцію $f(x, y, z)$ можна зобразити у новій системі координат у вигляді

$$f(x, y, z) \equiv F_k(u_k, v_k, \omega_k) := f(x(u_k, v_k, \omega_k), y(u_k, v_k, \omega_k), z(u_k, v_k, \omega_k))$$

$$u_k = u_k(x, y, z) = u_{k1}x + u_{k2}y + u_{k3}z,$$

$$v_k = v_k(x, y, z) = v_{k1}x + v_{k2}y + v_{k3}z,$$

$$\omega_k = \omega_k(x, y, z) = a_kx + b_ky + c_kz - \gamma_k,$$

де можна зокрема покласти

$$u_{k1} = b_k, \quad u_{k2} = 0, \quad u_{k3} = -a_k,$$

$$a_k u_{k1} + c_k u_{k3} = -b_k,$$

$$u_{k2} = 1.$$

Поклавши, наприклад,

$$u_{k1} = -\frac{a_k b_k}{a_k^2 + c_k^2}, \quad u_{k3} = -\frac{b_k c_k}{a_k^2 + c_k^2},$$

отримаємо такі формули переходу від системи $Oxyz$ до системи $O_k u_k v_k \omega_k$:

$$u_k = c_k x - a_k z,$$

$$v_k = -\frac{a_k b_k}{a_k^2 + c_k^2} x + y - \frac{b_k c_k}{a_k^2 + c_k^2} z, \quad a_k^2 + c_k^2 \neq 0,$$

$$\omega_k = a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k,$$

і навпаки

$$x = \frac{c_k}{a_k^2 + c_k^2} u_k - \frac{a_k b_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{a_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{a_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2},$$

$$y = \frac{a_k^2 + c_k^2}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{b_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{b_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2},$$

$$x = -\frac{a_k}{a_k^2 + c_k^2} u_k - \frac{b_k c_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{c_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{c_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}.$$

У випадку $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1$ останні вирази спрощуються.

Це дає змогу написати формули для операторів раціональної інтерфлотації функцій трьох змінних зі збереженням класу диференційованості на довільній системі площин

$$\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0, \quad k = \overline{1, M},$$

$$\omega_k(x, y, z) = a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k, \quad a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1.$$

Сформулюємо алгоритм побудови раціонального оператора по кроках, вважаючи $N \geq 1$.

Крок 1. Будуємо оператори $D_{k,N} f(x, y, z)$ у вигляді узагальнення формули

$$\begin{aligned} D_{k,N} f(x, y, z) &= L_{2,3,N} F_k(u_k, v_k, \omega_k) = \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq N} \lambda_{0,i,j} F_k(u_k + \beta_i \omega_k, v_k + \beta_i \omega_k, 0) + \\ &+ \sum_{0 \leq s \leq N} \sum_{0 \leq i+j \leq N} \lambda_{s,i,j} \int_0^{\omega_k} F_k^{(0,0,s)}(u_k + t\beta_i, v_k + t\beta_j, 0) \frac{(\omega_k - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt. \end{aligned}$$

Тут використано позначення

$$F_k^{(0,0,s)}(u_k, v_k, 0) = \left. \frac{\partial^s F_k(u_k, v_k, \omega_k)}{\partial \omega_k^s} \right|_{\omega_k=0}.$$

Числа $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N$, $\lambda_{s,i,j}$, $0 \leq s \leq N$, $0 \leq i+j \leq N$ знаходимо з умов (якщо це можливо)

$$f(x, y, z) \in C^r(R^3),$$

$$\left. \frac{\partial^p D_{k,N} f(x, y, z)}{\partial \omega_k^p} \right|_{\omega_k=0} = F_k^{(0,0,p)}(u_k, v_k, 0), \quad 0 \leq p \leq N.$$

Крок 2. Будуємо систему раціональних функцій

$$H_{Nk}(x, y, z) = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y, z)}{\sum_{\mu=1}^M \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^M \omega_i^{\hat{N}}(x, y, z)}.$$

$$\hat{N} = \begin{cases} N+1, & N = 2m+1 \\ N+2, & N = 2m \end{cases}.$$

Крок 3. Будуємо оператор у вигляді

$$O_{MN} f(x, y, z) = \sum_{k=1}^M H_{Nk}(x, y, z) D_{Nk} f(x, y, z)$$

з властивостями

$$\left. \frac{\partial^p O_{MN} f(x, y, z)}{\partial \omega_k^p} \right|_{\omega_k=0} = \left. \frac{\partial^p f(x, y, z)}{\partial \omega_k^p} \right|_{\omega_k=0}.$$

Оператор, побудований на кроці 3, є оператором раціональної інтерфлотації із збереженням класу $C^r(R^3)$ та представляє собою математичну модель відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на M площинах.

2.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням оператора поліноміальної інтерфлотації функції трьох змінних, якщо відомі томограми на системі перерізаних площин

Побудуємо оператор, який дозволить відновити просторово змінний коефіцієнт поглинання $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in R^3$ всередині тривимірного тіла за відомими його зображеннями (томограмами) $T_k(\bar{x})$ на системі будь-яких M перерізаних площин, які задаються наступними рівняннями

$$\Pi_k : \omega_k(x) =: \sum_{p=1}^3 a_{kp} x_p - \gamma_k = 0, \quad k = \overline{1, M}$$

Для подальшого викладення введемо деякі позначення:

$$\nabla \omega_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}) = a_{k1} \vec{i} + a_{k2} \vec{j} + a_{k3} \vec{k},$$

$$|\nabla \omega_k| = \sqrt{\sum_{p=1}^3 a_{kp}^2} = 1,$$

$$M = \{1, \dots, M\}$$

$$\tau_{ik} = \nabla \omega_i \times \nabla \omega_k = (\tau_{ik1}, \tau_{ik2}, \tau_{ik3}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}; \quad \tau_{ik}^0 = \frac{\tau_{ik}}{|\tau_{ik}|},$$

$$D_0^{(k)} = U_0^{ik} = I,$$

$$D_s^{(k)} = (\nabla \omega_k, \nabla)^s = \left(\sum_{p=1}^3 a_{kp} \frac{\partial}{\partial x_p} \right)^s,$$

$$U_s^{ik} = (\tau_{ik}^0, \nabla)^s = \frac{1}{|\tau_{ik}|} (\tau_{ik}, \nabla)^s, \quad s \in N,$$

$$\Gamma_{ik} = \Pi_i \cap \Pi_k \neq \emptyset, \quad M_1 = \{(i, k, l) | \Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l = A_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset\}$$

EMBED Equation.3 $i, k, l \in M, i \neq k \neq l\}$,

$$D_1^{(k)} \omega_l = (\nabla \omega_k, \nabla \omega_l) = a_{k1} a_{l1} + a_{k2} a_{l2} + a_{k3} a_{l3} = \nabla_{kl} = \cos(\Pi_k, \Pi_l),$$

$$U_1^{ik} \omega_l = (\tau_{ik}^0, \nabla \omega_l) = \frac{1}{|\tau_{ik}|} \Delta_{ikl} =: \frac{1}{|\tau_{ik}|} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix} = \sin(\Gamma_{ik}, \Pi_l),$$

$$v_i = v_i^{kl}(x) =: x - \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{ikl}} \omega_i(x) \in \Pi_i, \quad \omega_p(v_i^{kl}(x)) = \omega_p(x), \quad p = k, l,$$

$$\omega_i(v_i^{kl}(x)) = 0, \quad u_{ik} = u'_{ik}(x) =: A_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) \in \Gamma_{ik},$$

$$\omega_p(u'_{ik}(x)) = 0, \quad p = i, k; \quad \omega_l(u'_{ik}(x)) \equiv \omega_l(x),$$

$$z =: A_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x) + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) \equiv x, \quad (2.8)$$

$$U_1^{ik} \omega_q(x) \equiv 0, \quad q = i, k. \quad (2.9)$$

Лема 2.1. [О.М. Литвин [53], с.406] Нехай три площини Π_i, Π_k, Π_l перетинаються в єдиній точці A_{ikl} ,

$$u_{ik}^l(x) := A_{ikl} + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x) \equiv x - \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) =: v_i^{ik}(x) \quad (2.10)$$

$$w_i(x) := A_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega_i(x).$$

Для існування функції $L_{ikl}(x) \in C^{r-2N}(R^3)$ з умовами

$$\left. \frac{\partial^s L_{ikl}(x)}{\partial v_q^s} \right|_{\Pi_k} = T_{qs}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_q} \quad (q = i, k, l; \quad s = \overline{0, N}; \quad v_q = \nabla \omega_q) \quad (2.11)$$

необхідно і достатньо, щоб томограми $T_{qs}(\bar{x})$ задовольняли умови

$$T_{qs}(\bar{x}) \in C^{r-N}(R^3), \quad r \geq 3N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad s = \overline{0, N} \quad (2.12)$$

та умови С.М. Нікольського $Y_{A_{ikl}}^N$, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$\begin{aligned} I_{kl}^{sp}(w_i(x)) &:= D_p^{(l)} \sum_{j=0}^s (-1)^j C_s^j D_j^{(k)} [T_{k,s-j}(u_{li}^k(x))] \Big|_{\omega_l(x)=0} = \\ &= D_s^{(k)} \sum_{m=0}^p (-1)^m C_p^m D_m^{(l)} [T_{l,p-m}(u_{ik}^l(x))] \Big|_{\omega_k(x)=0} := I_{lk}^{ps}(w_i(x)), \quad 0 \leq s, p \leq N. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik} та Γ_{li} . В точці A_{ikl} умови $Y_{A_{ikl}}^N$ зводяться до перевірки рівностей (при $0 \leq s, p, q \leq N$)

$$\begin{aligned} I_{ikl}^{qsp} &:= D_q^{(i)} D_s^{(k)} \sum_{m=0}^p (-1)^m C_p^m D_m^{(l)} [T_{l,p-m}(u_{ik}^l(x))] \Big|_{\omega_i(x)=0, \omega_k(x)=0} = \\ &= I_{lik}^{pqs} := D_p^{(l)} D_q^{(i)} \sum_{j=0}^s (-1)^j C_s^j D_j^{(k)} [T_{k,s-j}(u_{li}^k(x))] \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_i(x)=0} = \\ I_{kli}^{spq} &:= D_s^{(k)} D_p^{(l)} \sum_{n=0}^q (-1)^n C_q^n D_n^{(i)} [T_{i,q-n}(u_{kl}^i(x))] \Big|_{\omega_k(x)=0, \omega_l(x)=0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Оператор $L_{ikl}(x)$ будуємо у вигляді

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T_{qs}\}; x) &:= [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^k L_{ik}^l + \\ &+ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](\{T_{qs}\}; x), \end{aligned} \quad (2.15)$$

де

$$\begin{aligned}
L_{ik}^l(\{T_{qs}\}; x) &= \sum_{p=0}^N \frac{\omega_l^p(x)}{p!} \sum_{m=0}^p (-1)^m C_p^m D_m^{(l)}[T_{l,p-m}(u_{ik}^l(x))] = \\
&= \sum_{p=0}^N \frac{\omega_l^p(x)}{p} (U_p^{ik} f)(u_{ik}^l(x)),
\end{aligned}$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i(\{T_{qs}\}; x) = \sum_{p,q=0}^N \frac{\omega_l^p(x) \omega_i^q(x)}{p! q!} I_{li}^{pq},$$

$$I_{li}^{pq} := \Delta_{ikl}^{-p} \Delta_{ikl}^{-q} (U_p^{ik} U_q^{kl})(w_k(x)),$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{qs}\}; x) = \sum_{s,p,q=0}^N \frac{\omega_l^p(x) \omega_i^q(x) \omega_k^s(x)}{p! s! q!} I_{lik}^{pqs},$$

$$I_{lik}^{pqs} := \Delta_{ikl}^{-p} \Delta_{ikl}^{-q} \Delta_{ikl}^{-s} (U_p^{ik} U_q^{kl} U_s^{li} f)(A_{ikl}).$$

Аналогічно визначаються оператори $L_{kl}^i, L_{li}^k, L_{kl}^i L_{li}^k, L_{li}^k L_{ik}^l$.

Теорема 2.2. [О.М. Литвин [53], с.408] Нехай $f(x) \in C^r(R^3)$ ($r \geq 3N+3$) задовольняє умови

$$\left. \frac{\partial^s f(x)}{\partial v_\alpha^s} \right|_{\Pi_\alpha} = T_{\alpha s}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_\alpha}, \quad \alpha = i, k, l; \quad s = \overline{0, N}. \quad (2.16)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
L_{ikl}(x) &= L_{ikl} f(x), \\
f(x) &= L_{ikl} f(x) + R_{ikl} f(x),
\end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
R_{ikl} f(x) &= \int_0^{\omega_i} \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \left[\frac{\partial^{3N+3}}{\partial t_i^{N+1} \partial t_k^{N+1} \partial t_l^{N+1}} f \left(A_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) \right] \times \\
&\quad \times \frac{(\omega_i - t_i)^N (\omega_k - t_k)^N (\omega_l - t_l)^N}{N! N! N!} dt_i dt_k dt_l.
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Якщо в одній точці A_{ikl} перетинаються три площини $\Pi_k, k = \overline{1, M}$, тоді

можна побудувати систему допоміжних поліномів:

$$h_{ikl}(x) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i,k,l}}^{N+1} \omega_m^{N+1}(x) \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N \sum_{s_3=0}^N a_{s_1,s_2,s_3} \omega_i^{s_1}(x) \omega_k^{s_2}(x) \omega_l^{s_3}(x),$$

коефіцієнти якої знаходяться с умов

$$h_{ikl}(A_{ikl}) = 1, h_{ikl}(A_{i'k'l'}) = 0, A_{ikl} \neq A_{i'k'l'} \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\partial^{q+s+p} h_{ikl}}{\partial x_1^q \partial x_2^s \partial x_3^p} \right|_{A_{i'k'l'}} = 0 \quad \forall (i', k', l' \in M), 1 \leq q + s + p, 0 \leq q, s, p \leq N, \quad (2.20)$$

Крім того, ця система функцій є розкладом одиниці

$$\sum_{\substack{i,k,l \in M \\ i \neq k \neq l}} h_{ikl}(x) \equiv 1. \quad (2.21)$$

Приклад 2.1. Допоміжні поліноми можуть мати наступний вигляд

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(A_{ikl})}, \quad i, k, l \in M$$

і задовольняють властивостям

$$h_{ikl}(A_{ikl}) = 1, h_{ikl}(A_{i'k'l'}) = 0, A_{ikl} \neq A_{i'k'l'}.$$

Дійсно,

$$h_{ikl}(A_{ikl}) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(A_{ikl})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(A_{ikl})} = 1$$

$$h_{ikl}(A_{i'k'l'}) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(A_{i'k'l'})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^M \omega_j(A_{ikl})} = 0, \quad A_{ikl} \neq A_{i'k'l'}$$

Остання рівність справедлива, якщо врахувати $A_{i'k'l'} = \Pi_{i'} \cap \Pi_{k'} \cap \Pi_{l'}$, тобто $\omega_p(A_{i'k'l'}) = 0$; $p = i', k', l'$.

Система функцій $\{h_{ikl}(x)\}$ (при $i, k, l \in M$)

$$h_{ikl}(x) = \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq i,k,l}} \omega_m^{N+1}(x) \left\{ \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq i,k,l}} \omega_m^{-N-1}(x) \right\}_{A_{ikl}}^{(N,N,N)}, \quad (2.22)$$

де використано позначення

$$\{g(x)\}_{A_{ikl}}^{(N,N,N)} = \sum_{q,s,p=0}^N \frac{(\omega_i / \Delta_{kli})^q (\omega_k / \Delta_{lik})^s (\omega_l / \Delta_{ilk})^p}{q! s! p!} (U_q^{kl} U_s^{li} U_p^{ik} g)(A_{ikl}),$$

є поліномами від трьох змінних степеня $M(N+1)-3$, що є розкладом одиниці з властивостями

$$h_{ikl}(A_{ikl}) = 1, \quad h_{ikl}(A_{i'k'l'}) = 0, \quad A_{ikl} \neq A_{i'k'l'}, \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial^{q+s+p} h_{ikl}}{\partial x_1^q \partial x_2^s \partial x_3^p} \right|_{A_{i'k'l'}} = 0 \quad \forall (i', k', l') \in M, \quad 1 \leq q+s+p, \quad q, s, p = \overline{0, N}, \quad (2.24)$$

$$\sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) \equiv 1.$$

Теорема 2.3. [О.М. Литвин [53], с.411] Нехай томограми $T_{ks}(\bar{x}) \in C^{r-N}(R^2)$, $r \geq 3N$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$.

$T_{ks}(\bar{x}) \in C^{r-N}(R^2)$, $r \geq 3N$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$ задовольняють умови С.М.

Нікольського $Y_{A_{ikl}}^N \forall (i, k, l) \in M$. 3 $Y_{A_{ikl}}^N \forall (i, k, l) \in M$. Тоді функція

$$L_{MN}(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \quad .3 \quad L_{MN}(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \quad (2.25)$$

є поліноміальним інтерфлетантом з властивостями

$$L_{MN}(x) \in C^{r-2N}(R^3),$$

$$\left. \frac{\partial L_{MN}(x)}{\partial v_q^s} \right|_{\Pi_q} = T_{qs}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_q}, \quad q = \overline{1, M}, \quad s = \overline{0, N}. \quad (2.26)$$

При цьому $\forall f(x) \in C^r(R^3)$, $r \geq 3N+3$, що задовольняють умови (2.16), тобто

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial v_k^s} \right|_{\Pi_k} = T_{ks}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_k}, \quad k = \overline{1, M}, \quad s = \overline{0, N},$$

виконується рівність

$$L_{MN}(x) = L_{MN}f(x): \quad f(x) = L_{MN}f(x) + R_{MN}f(x),$$

$$R_{MN}f(x) = \sum_{(i,k,l) \in M} h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x), \quad (2.27)$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначаються формулою (2.18).

Зауваження. Для ефективної оцінки залишку $R_{MN}f(x)$ треба розглядати наближення в областях, обмежених кількома площинами (тобто в симплексах паралелепіпедах тощо).

Формула (2.25) визначає математичну модель комп'ютерної томографії за

відомими томограмами, що лежать на системі M перерізаних площин, за допомогою поліноміальної інтерфлетації, тобто за допомогою формули (2.25) можна відновити коефіцієнт поглинання всередині тривимірного тіла, якщо відомі томограми, що лежать на системі перерізаних площин

2.4. Відновлення тривимірної функції за допомогою економних схем інтерполяції функції, що побудовані за допомогою інтерфлетації

Однією з актуальних проблем комп'ютерної томографії є зменшення дози опромінення. В цьому підрозділі наводиться оператор інтерфлетації, за допомогою якого можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла за зменшеною кількістю томограм.

Припустимо, що $u(x, y, z) \in C^{(r, r, r)}(G)$, $G \subset R^3$, $r = 1, 2$ - це функція, яку треба відновити. Тоді

$$\left| u^{(p, q, r)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 \leq p, q, r \leq r,$$

$$G = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

Якщо цю функцію відновлювати за допомогою оператора сплайн – інтерполяції L_n

$$L_n u(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) h(nx - i) h(ny - j) h(nz - k),$$

де

$$h(t) = \frac{|t-1| - 2|t| + |t+1|}{2},$$

то нам потрібно буде n^3 значень функції (томограм), а похибка відновлювання буде мати вигляд

$$|u - L_n u| = O(n^{-r}) \quad r = 1, 2 \quad (2.28)$$

Оператор сплайн – інтерполяції має властивість

$$L_n u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) = u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), i, j, k = \overline{0, n}. \quad (2.29)$$

Побудуємо інший кусково – трилінійний інтерполянт, який відновлює функцію $u(x, y, z) \in C^{(r, r, r)}(G)$, $r = 1, 2$ з точністю, яка має той же самий порядок відносно величини $1/n$, але потребує меншої кількості значень цієї функції.

Нехай

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 u(x, y, z) = & (i+1-nx) \left\{ \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^{3/2}y-j) h(n^3z-k) + \right. \\ & + \sum_{j=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^3y-j) h(n^{3/2}z-k) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^{3/2}y-j) h(n^{3/2}z-k) \right\} + \\ & + (nx-i) \left\{ \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^{3/2}y-j) h(n^3z-k) + \right. \\ & + \sum_{j=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^3y-j) h(n^{3/2}z-k) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^{3/2}y-j) h(n^{3/2}z-k) \right\}, \\ & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, i = \overline{0, n-1}, y, z \in [0, 1]; \end{aligned}$$

$$\tilde{I}_2 u(x, y, z) = (j+1-ny) \left\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^{3/2}x-i) h(n^3z-k) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^3 x - i) h(n^{3/2} z - k) - \\
& - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^{3/2} z - k) \Big\} + \\
& + (ny - j) \Big\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^3 z - k) + \\
& + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^3 x - i) h(n^{3/2} z - k) - \\
& - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^{3/2}}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^{3/2} z - k) \Big\}, \\
& \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, j = \overline{0, n-1}, x, z \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_3 u(x, y, z) &= (k+1-nz) \Big\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^3 y - j) + \\
& + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n}\right) h(n^3 x - i) h(n^{3/2} y - j) - \\
& - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^{3/2} y - j) \Big\} + \\
& + (nz - k) \Big\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^3 y - j) + \\
& + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^3 x - i) h(n^{3/2} y - j) - \\
& - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^{3/2} x - i) h(n^{3/2} y - j) \Big\}, \\
& \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, k = \overline{0, n-1}, x, y \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 u(x, y, z) &= (i+1-nx) \left[(j+1-ny) \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^3 z - k) + \right. \\
&\quad \left. + (ny-j) \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^3 z - k) \right] + \\
&\quad + (nx-i) \left[(j+1-ny) \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^3 z - k) + \right. \\
&\quad \left. + (ny-j) \sum_{k=0}^{n^3} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3}\right) h(n^3 z - k) \right], \\
\frac{i}{n} &\leq x \leq \frac{i+1}{n}, \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, i, j = \overline{0, n-1}, z \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 \tilde{I}_3 u(x, y, z) &= (i+1-nx) \left[(k+1-nz) \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n}\right) h(n^3 y - j) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^3 y - j) \right] + \\
&\quad + (nx-i) \left[(k+1-nz) \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^3 y - j) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{j=0}^{n^3} u\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^3 y - j) \right], \\
\frac{i}{n} &\leq x \leq \frac{i+1}{n}, \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, i, k = \overline{0, n-1}, y \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) &= (j+1-ny) \left[(k+1-nz) \sum_{i=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) h(n^3 x - i) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{i=0}^{n^3} u\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n}\right) h(n^3 x - i) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (ny - j) \left[(k + 1 - nz) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) h(n^3x - i) + \right. \\
& \quad \left. + (nz - k) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3x - i) \right], \\
& \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, j, k = \overline{0, n-1}, x \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{n,1} I_{n,2} I_{n,3} u(x, y, z) &= \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) = (i + 1 - nx) \times \\
&\times \left\{ (j + 1 - ny) \left[(k + 1 - nz) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] + \right. \\
&+ (ny - j) \left[(k + 1 - nz) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] \Big\} + \\
&+ (nx - i) \left\{ (j + 1 - ny) \left[(k + 1 - nz) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] + \right. \\
&+ (ny - j) \left[(k + 1 - nz) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] \Big\}, \\
&(x, y, z) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right].
\end{aligned}$$

Теорема 2.4. [О.М. Литвин [53, с.419] Нехай $n \geq 4$, $\sqrt{n} \in N$. Інтерполянт

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n u(x, y, z) &= \tilde{I}_1 u(x, y, z) + \tilde{I}_2 u(x, y, z) + \tilde{I}_3 u(x, y, z) - \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 u(x, y, z) - \\
&- \tilde{I}_1 \tilde{I}_3 u(x, y, z) - \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) + \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

має властивості:

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right) = u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^{3/2}}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) = u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right) = u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) = u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n^3}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right) = u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\tilde{K}_n u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right) = u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n^3}, \quad j = \overline{0, n^{3/2}}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\|u - \tilde{K}_n u\|_{C(G)} = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right) u \in C^{r,r,r}(G), \quad r = 1, 2. \quad .3$$

$$\|u - \tilde{K}_n u\|_{C(G)} = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right) u \in C^{r,r,r}(G), \quad r = 1, 2. \quad (2.31)$$

Наслідок. Інтерполянт $(\tilde{K}_n u(x, y, z))$, що визначається формулою (2.30), для наближення функції $u(x, y, z)$ на G з похибкою $\varepsilon_2 = O(n^{-3r})$ потребує інтерполяційних даних у точках

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^{3/2}}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n^3}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right), i = \overline{0, n^3}, j = \overline{0, n^{3/2}}, k = \overline{0, n}.$$

Число таких точок має (при $n \rightarrow \infty$) головний член $Q_2 = 6(n+1)(n^{3/2}+1)(n^3+1) \approx 6n^{11/2}$.

Знаходимо звідси, що $n \approx Q_2^{2/11}$. В результаті отримуємо

$$\varepsilon_2 = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right) = O\left(\frac{1}{Q_2^{6r/11}}\right), \frac{6r}{11} = r \cdot 0.545454\dots$$

Для порівняння відмітимо, що сплайн – інтерполянт $L_{n^3}u$ для досягнення похибки наближення $\varepsilon_1 = \|u - L_{n^3}u\|_{C[0,1]^3} \approx \varepsilon_2$ потребує $Q_1 = (n^3+1)^3 \approx n^9$ значень функції у вузлах $(i/n^3, j/n^3, k/n^3)$, $i, j, k = \overline{0, n^3}$. Враховуючи, що $n = (Q_1)^{1/9}$, отримаємо

$$\varepsilon_1 = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right) = O\left(\frac{1}{Q_1^{r/3}}\right), r/3 = r \cdot 0.333333\dots$$

Тобто у випадку $Q_1 = Q_2 = Q$ маємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \approx \frac{Q^{6r/11}}{Q^{r/3}} \approx Q^{7r/33} \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty, 7r/33 = r \cdot 0.212121\dots, r = 1, 2$$

Зауваження. Всі твердження можна поширити на випадки, коли в основі побудови інтерполяційних операторів лежать оператори сплайн-інтерфлетації, допоміжні функції яких є сплайнами степеня 2, 3, 4, ... за умови, що наближувала функція належить до більш високого порядку диференційованості. Крім того, вища (порівняно із застосуваннями класичних сплайнів від трьох змінних) ефективність запропонованого методу сплайн-інтерполяції зберігається також для функцій, що належать класу Ліпшиця.

Отже, оператор інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації, у вигляді формули (2.30), представляє математичну модель відновлення просторово змінного коефіцієнта поглинання всередині тривимірного тіла та дозволяє зменшувати дозу опромінення пацієнта, тобто кількість вхідних даних (томограм чи рентгенівських знімків).

2.5. Відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції

Розглядається задача відновлення коефіцієнта поглинання всередині тривимірного об'єкту за його томограмами, що лежать на системі трьох груп паралельних площин, які не обов'язково є перпендикулярними координатним осям. Крім того, вперше будується оператор інтерфлетації на системі площин, кожна з яких не обов'язково перетинається з усіма іншими.

Нехай скалярнозначна функція $f(x)$, $x \in R^3$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x)$, тобто про внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин, а також набір томограм, які лежать на цих площинах. Нехай тривимірне тіло, яке треба відновити, обмежено деякою областю $\Omega \subset R^3$. Для подальшого викладення нам необхідно сформулювати деякі твердження.

Нехай задані три групи томограм. В кожній групі томограми лежать на паралельних площинах. Томограми розташовуються на площинах, які задаються рівняннями наступного вигляду. Група площин П1 задається

$$\omega 1_i(x) = \sum_{p=1}^3 a_{ip} x_p - \gamma 1_i, \quad i = \overline{1, n}$$

рівняннями:

, група П2 задається рівняннями

$$\omega 2_k(x) = \sum_{p=1}^3 b_{kp} x_p - \gamma 2_k, \quad k = \overline{1, m}$$

і група П3 задається так

$$\omega 3_l(x) = \sum_{p=1}^3 c_{lp} x_p - \gamma 3_l, \quad l = \overline{1, s}$$

де n, m, s - кількість паралельних площин в

групах П1, П2, П3 відповідно, числа $\gamma 1_i, \gamma 2_k, \gamma 3_l, a_{ip}, b_{kp}, c_{lp}$ задані.

Вважається, що в кожній групі площини паралельні між собою, тобто $a_{ip} = a_{i'p}$, $b_{kp} = b_{k'p}$, $c_{lp} = c_{l'p}$, $i \neq i', k \neq k', l \neq l'$. Введемо наступні позначення:

$$1. \quad \tau_{ik}^{\omega 1, \omega 2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix} \quad - \text{вектор, направлений вздовж лінії перетину}$$

площин $\omega 1_i = 0, \omega 2_k = 0$;

$$2. \quad M = \{(i, k, l) \mid \Pi 1_i \cap \Pi 2_k \cap \Pi 3_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset, i \neq k \neq l\},$$

де V_{ikl} - точка перетину i -ої площини з групи П1, k -ої площини з групи П2 та l -ої площини з групи П3;

3. $\Gamma_{ik} = \Pi 1_i \cap \Pi 2_k \neq \emptyset$, $\Gamma_{il} = \Pi 1_i \cap \Pi 3_l \neq \emptyset$, $\Gamma_{kl} = \Pi 2_k \cap \Pi 3_l \neq \emptyset$ - ребра, за якими перетинаються дві площини, на яких лежать відповідні томограми;

$$4. \quad \Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix} \quad - \text{визначник, складений із коефіцієнтів рівняння}$$

заданих площин;

5. $T_{1,k}(\bar{x})$ – томограма, яка лежить на площині Π_k .

Лема 2.2. Якщо томограми $T_{1,i}(\bar{x}), T_{2,k}(\bar{x}), T_{3,l}(\bar{x}), i = \overline{1,n}, k = \overline{1,m}, l = \overline{1,s}$ лежать на не компланарних площинах, тобто $\Delta_{ikl} \neq 0$, то справедлива рівність

$$V_{ikl} = \frac{\tau_{ik}^{\omega 1, \omega 2}}{\Delta_{ikl}} \gamma 3_l + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2, \omega 3}}{\Delta_{kli}} \gamma 1_i + \frac{\tau_{li}^{\omega 3, \omega 1}}{\Delta_{lik}} \gamma 2_k \quad (2.33)$$

Доведення. Дійсно, координати точки V_{ikl} є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\omega 1_i(V_{ikl}) = 0, \quad \omega 2_k(V_{ikl}) = 0, \quad \omega 3_l(V_{ikl}) = 0,$$

яку можна записати також у вигляді

$$(\nabla \omega 1_i) x = \gamma 1_i, \quad (\nabla \omega 2_k) x = \gamma 2_k, \quad (\nabla \omega 3_l) x = \gamma 3_l.$$

Її розв'язок можна представити у векторній формі

$$x = V_{ikl} = \frac{(\nabla \omega 2_k \times \nabla \omega 3_l) \gamma 1_i + (\nabla \omega 3_l \times \nabla \omega 1_i) \gamma 2_k + (\nabla \omega 1_i \times \nabla \omega 2_k) \gamma 3_l}{\Delta_{ikl}},$$

$$\begin{aligned} x_{ikl1} \vec{i} + x_{ikl2} \vec{j} + x_{ikl3} \vec{k} = & \frac{\gamma 3_l}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix} + \frac{\gamma 2_k}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix} + \\ & + \frac{\gamma 1_i}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тобто

$$V_{ikl} = \begin{pmatrix} x_{ikl1} \\ x_{ikl2} \\ x_{ikl3} \end{pmatrix} = \frac{\tau_{ik}^{\omega 1, \omega 2}}{\Delta_{ikl}} \gamma 3_l + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2, \omega 3}}{\Delta_{kli}} \gamma 1_i + \frac{\tau_{li}^{\omega 3, \omega 1}}{\Delta_{lik}} \gamma 2_k.$$

Таким чином, рівність (2.33) доведена.

Лема 2.2 доведена.

Нехай томографи $T_{1,i}(\bar{x}), T_{2,k}(\bar{x}), T_{3,l}(\bar{x})$ перетинаються в точці V_{ikl} .
Позначимо

$$u_{li}^k = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}^{\omega 1, \omega 2}}{\Delta_{ikl}} \omega 3_l(x) + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2, \omega 3}}{\Delta_{kli}} \omega 1_i(x),$$

$$w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2, \omega 3}}{\Delta_{kli}} \omega 1_i(x).$$

Теорема 2.5. Для існування функції $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega)$ із заданими томографами $T_{1,i}(\bar{x}), i = \overline{1, n}, T_{2,k}(\bar{x}), k = \overline{1, m}, T_{3,l}(\bar{x}), l = \overline{1, s}$, для якої виконуються умови

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x)|_{\Pi 1_i} &= T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi 1_i}, \\ L_{ikl}(x)|_{\Pi 2_k} &= T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi 2_k}, \\ L_{ikl}(x)|_{\Pi 3_l} &= T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi 3_l}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

необхідно та достатньо, щоб сліди $T_{q,d}(\bar{x}), q = 1, 2, 3, d = i, k, l, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, s}$ задовольняли умові $T_{q,d}(\bar{x}) \in C^r(R^2), r \geq 0$ та умовам С.М. Нікольського, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$T_{2,k}(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_{3l}(x)=0} = T_{3,l}(u_{il}^l(x))\Big|_{\omega_{2k}(x)=0},$$

тобто значення томограм, на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li} .

В точці V_{ikl} умови Нікольського зводяться до перевірки рівностей

$$\begin{aligned} T_{3,l}(u_{ik}^l(x))\Big|_{\omega_{1i}(x)=0, \omega_{2k}(x)=0} &= T_{2,k}(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_{3l}(x)=0, \omega_{1i}(x)=0} = \\ &= T_{1,i}(u_{kl}^i(x))\Big|_{\omega_{2k}(x)=0, \omega_{3l}(x)=0}, \end{aligned}$$

тобто значення томограм в точці перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються.

Доведення. Оператор $L_{ikl}(x)$ побудуємо у вигляді

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T_{q,d}\}x) &= [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^l - L_{li}^k L_{ik}^l + \\ &+ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k] \{T_{q,d}\}x, \end{aligned} \quad (2.35)$$

де

$$L_{ik}^l(\{T_{q,d}\}x) = T_{3,l}(u_{ik}^l(x)) = f(u_{ik}^l(x)),$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i(\{T_{q,d}\}x) = f(w_k(x)).$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{T_{q,d}\}x) = f(V_{ikl}), \quad q = 1, 2, 3, \quad d = i, k, l.$$

Аналогічно визначаються оператори $L_{kl}^i, L_{li}^k, L_{kl}^i L_{li}^k, L_{li}^k L_{ik}^l$.

У роботі С.М. Нікольського [123] доведено, що для того, щоб існувала функція

$f(x_1, x_2, x_3) \in C^r(\Omega)$, яка має сліди

$$\left. \frac{\partial^\beta f(x_1, x_2 x_3)}{\partial x_s^p} \right|_{x_s=0} = \varphi_{s,p} \Big|_{x_s=0}, s=1,2,3, \quad p=\overline{0,r},$$

необхідно та достатньо, щоб граничні функції $\varphi_{s,p}(\bar{x})$ задовольняли в точці $(0,0,0)$ умовам вигляду

$$\left. \frac{\partial^\beta \varphi_{s,\alpha}(\bar{x})}{\partial x_p^\beta} \right|_{x_p=0} = \left. \frac{\partial^\alpha \varphi_{s,\beta}(\bar{x})}{\partial x_s^\alpha} \right|_{x_s=0}, \quad s,p=1,2,3, \quad \alpha,\beta=\overline{0,r}$$

Цей факт дозволяє будувати оператори $L_{ikl}(x)$ у вигляді (2.35).

Теорема 2.5 доведена.

Розповсюдження результатів на випадок більшої кількості площин ніж три проводиться в теоремі 2.10 завдяки використанню розкладу одиниці.

Приклад 2.2. Нехай в просторі задано три площини, які мають рівняння

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y, z) &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 0, \\ \omega_2(x, y, z) &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \\ \omega_3(x, y, z) &= z = 0. \end{aligned}$$

Томографи, які лежать на цих площинах, відповідно можуть мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} T_1(x, z) &= f(x, y, z) \Big|_{\omega_1=0} = f(x, -2z - \sqrt{3}x, z), \\ T_2(y, z) &= f(x, y, z) \Big|_{\omega_2=0} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3}y, y, z\right), \end{aligned}$$

$$T_3(x, y) = f(x, y, z)|_{\omega_3=0} = f(x, y, 0).$$

Умови С.М. Нікольського на ребрі, утвореному площинами $\omega_1 = 0$ та $\omega_3 = 0$, будуть мати вигляд:

$$f(x, y, z)|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_3=0}} = T_{30} = T_{10}.$$

де

$$f(x, y, z)|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_3=0}} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0),$$

$$T_{30} = f(x, y, 0)|_{x=-\frac{y}{\sqrt{3}}} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0),$$

$$T_{10} = f(\frac{-2z-y}{\sqrt{3}}, y, z)|_{z=0} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0).$$

Аналогічно можна записати умови С.М. Нікольського на інших двох ребрах.

Теорема 2.6. Припустимо, внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x) \in C^r(\Omega)$ ($r \geq 3$), яка має томографи $T_{1,i}(\bar{x}), i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x}), k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x}), l = \overline{1, s}$, задані на площинах $\Pi_{1,i}, \Pi_{2,k}, \Pi_{3,l}$ відповідно, та задовольняє умови

$$f(x)|_{\Pi_{1,i}} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi_{1,i}},$$

$$f(x)|_{\Pi_{2,k}} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi_{2,k}},$$

$$f(x)|_{\Pi_{3,l}} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi_{3,l}},$$

Тоді для похибки $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ наближеного відновлення

внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}f(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_{1_i}} \int_0^{\omega_{2_k}} \int_0^{\omega_{3_l}} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_{2,\omega_3}}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_{3,\omega_1}}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega_{1,\omega_2}}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l \quad (2.36)$$

Доведення. Візьмемо до уваги тотожність

$$\begin{aligned} (I - L_{ikl})f(x) &= (I - L_{ik}^l - L_{kl}^i - L_{li}^k + L_{li}^k L_{kl}^i + L_{kl}^i L_{li}^k + L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k)f(x) = \\ &= (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l)f(x), \end{aligned}$$

а також тотожність типу

$$(I - L_{kl}^i)f(x) = \int_0^{\omega_{1_i}(x)} \frac{\partial f}{\partial t_i} \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_{2,\omega_3}}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_{3,\omega_1}}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) + \frac{\tau_{ik}^{\omega_{1,\omega_2}}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) \right) dt_i.$$

Підставимо цей інтегральний вираз, а також аналогічні вирази для $(I - L_{li}^k)f(x)$, $(I - L_{ik}^l)f(x)$ в попередню формулу

$$\begin{aligned} R_{ikl}f(x) &= (I - L_{ikl})f(x) = (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l)f(x) = \\ &= \int_0^{\omega_{1_i}} \int_0^{\omega_{2_k}} \int_0^{\omega_{3_l}} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_{2,\omega_3}}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_{3,\omega_1}}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega_{1,\omega_2}}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \end{aligned}$$

Теорема 2.6 доведена.

Теорема 2.7. Нехай множина трьох груп паралельних томограм, які знаходяться на площинах, що задаються рівняннями:

$$\Pi 1_i : \omega 1_i(x) = 0, i = \overline{1, n},$$

$$\Pi 2_k : \omega 2_k(x) = 0, k = \overline{1, m},$$

$$\Pi 3_l : \omega 3_l(x) = 0, l = \overline{1, s},$$

задовольняє дві умови:

- 1) в одній точці $V_{ikl} = \Pi 1_i \cap \Pi 2_k \cap \Pi 3_l$ перетинаються рівно три томограми;
- 2) кожна томограма однієї групи перетинається з кожною томограмою інших двох груп (а всередині групи томограми паралельні, тобто не перетинаються).

Тоді система функцій

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(V_{ikl})}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s}$$

має властивості

$$h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad i, i' = \overline{1, n}, \quad k, k' = \overline{1, m}, \quad l, l' = \overline{1, s}.$$

Доведення. Врахуємо, що $V_{i'k'l'} = \Pi 1_{i'} \cap \Pi 2_{k'} \cap \Pi 3_{l'}$, тобто $\omega 1_{i'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 2_{k'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 3_{l'}(V_{i'k'l'}) = 0$.

$$h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(V_{i'k'l'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(V_{i'k'l'})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(V_{ikl})} = \begin{cases} 1, & i = i', k = k', l = l' \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} = \\ = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad i, i' = \overline{1, m}, \quad k, k' = \overline{1, n}, \quad l, l' = \overline{1, s}.$$

Теорема 2.7 доведена.

Лема 2.5. Нехай томограми $T_{1,i}(\bar{x}), i = \overline{1, n}, T_{2,k}(\bar{x}), k = \overline{1, m}, T_{3,l}(\bar{x}), l = \overline{1, s}$ задовольняють умовам теореми 2.9. тоді система функцій $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^s h_{ikl}(x) = 1$$

Доведення. Рівність для $h_{ikl}(x)$ можна записати у вигляді

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega 1_{\Pi 1_\mu}(x) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \omega 2_{\Pi 2_\nu}(x) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega 3_{\Pi 3_\beta}(x)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega 1_{\Pi 1_\mu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \omega 2_{\Pi 2_\nu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega 3_{\Pi 3_\beta}(V_{ikl})} = \\ = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{\Pi 1_\mu}(x)}{\omega 1_{\Pi 1_\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \frac{\omega 2_{\Pi 2_\nu}(x)}{\omega 2_{\Pi 2_\nu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{\Pi 3_\beta}(x)}{\omega 3_{\Pi 3_\beta}(V_{ikl})}.$$

Тепер просумуємо цей вираз

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \neq k}}^s \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi_\mu}(x)}{\omega_{1\Pi_\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi_v}(x)}{\omega_{2\Pi_v}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi_\beta}(x)}{\omega_{3\Pi_\beta}(V_{ikl})} \right] = \\
& = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi_\mu}(x)}{\omega_{1\Pi_\mu}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi_v}(x)}{\omega_{2\Pi_v}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi_\beta}(x)}{\omega_{3\Pi_\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1
\end{aligned}$$

Тут враховується, що

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi_\mu}(x)}{\omega_{1\Pi_\mu}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi_v}(x)}{\omega_{2\Pi_v}(V_{\mu\nu\beta})}, \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi_\beta}(x)}{\omega_{3\Pi_\beta}(V_{\mu\nu\beta})}$$

є базисними поліномами Лагранжа. З цього виходить, що

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega_{1\Pi_\mu}(x)}{\omega_{1\Pi_\mu}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \\
& \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega_{2\Pi_v}(x)}{\omega_{2\Pi_v}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \\
& \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega_{3\Pi_\beta}(x)}{\omega_{3\Pi_\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.
\end{aligned}$$

Лема 2.5 доведена.

Теорема 2.8. Нехай томограми $T_{1,i}(\bar{x}), T_{2,k}(\bar{x}), T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$ задовольняють умовам С.М. Нікольського на ребрах і в точці перетину площин. Тоді функція

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x)$$

є поліноміальним інтерфлетантом із властивостями

$$L(x) \in C^r(\Omega),$$

$$L(x)|_{\Pi_{1_i}} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi_{1_i}},$$

$$L(x)|_{\Pi_{2_k}} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi_{2_k}} \quad (2.37)$$

$$L(x)|_{\Pi_{3_l}} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi_{3_l}}$$

$$i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, s}.$$

При цьому $\forall f(x) \in C^r(\Omega)$, $r \geq 3$, що задовольняє умовам теореми 2.5, виконується рівність

$$L(x) = Lf(x), \quad f(x) = Lf(x) + Rf(x),$$

$$R(x)f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x)$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначається формулою (2.36), а $h_{ikl}(x)$ – допоміжні поліноми, що визначаються в теоремі 2.7.

Доведення. Згідно формули (2.35) при побудові операторів $L_{ikl}(x)$ використовуються функції

$$T_{1,i}(\bar{x}), T_{2,k}(\bar{x}), T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2), \quad r \geq 3.$$

Тому

$$L(x) \in C^r(R^3)$$

або, якщо $\Omega \subset R^3$, то $L(x) \in C^r(\Omega)$. Доведення співвідношень (2.37) проводиться так (використовуються умови теореми 2.5 і те, що система функцій $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці):

$$L(x)|_{\Pi 1_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 1_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 1_i} L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 1_i} = T_{1,i}(x) \Big|_{\Pi 1_i}$$

$$L(x)|_{\Pi 2_k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 2_k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 2_k} L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 2_k} = T_{2,k}(x) \Big|_{\Pi 2_k},$$

$$L(x)|_{\Pi 3_l} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 3_l} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 3_l} L_{ikl}(x) \Big|_{\Pi 3_l} = T_{3,l}(x) \Big|_{\Pi 3_l}.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = 1,$$

формула

$$L_{ikl} f(x) + R_{ikl} f(x) = f(x),$$

перепишеться наступним чином

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) [L_{ikl} f(x) + R_{ikl} f(x)]$$

Звідси отримуємо

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl} f(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl} f(x) = \quad .3$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl} f(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl} f(x) = \\ &= (L(x) + R(x))f(x) . \end{aligned}$$

Теорема 2.8 доведена.

Отже, за допомогою оператора поліноміальної інтерфлетації, який визначається в теоремі 2.8, можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла (просторово змінний коефіцієнт всередині тривимірного тіла) за відомими томограмами, що лежать на системі трьох груп перерізаних площин, з більш високою точністю (ε^3), ніж це можна зробити за відомими томограмами, які лежать на одній групі паралельних площин (ε) (як це робиться в класичній томографії). Тобто цей оператор представляє собою математичну модель процесу комп'ютерної томографії з використанням оператора поліноміальної інтерфлетації за відомими томограмами, що лежать на системі трьох груп паралельних площин.

Приклад 2.3. Нехай кожна з трьох груп площин має по дві площини. Наведемо загальний вигляд оператора поліноміальної інтерфлетації $Lf(x, y, z)$, за допомогою якого можна відновити функцію трьох змінних $f(x, y, z)$.

Нехай площини груп П1, П2, П3 задаються наступними нормальними рівняннями (рис. 2.2):

$$\text{П1:} \left\{ \begin{aligned} \omega 1_1(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z + 1 = 0 \\ \omega 1_2(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z + 2 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Pi_2: \begin{cases} \omega_{2_1}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0 \\ \omega_{2_1}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Pi_3: \begin{cases} \omega_{3_1}(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z + 2 = 0 \\ \omega_{3_1}(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z + 3 = 0 \end{cases}$$

Ці площини є взаємно перпендикулярними. Як видно з рис. 2.2 утворюються вісім точок перетину, які мають наступні координати:

$$V_{111} = \Pi_{1_1} \cap \Pi_{2_1} \cap \Pi_{3_1} = \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}, \frac{-3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} \right)$$

$$V_{112} = \Pi_{1_1} \cap \Pi_{2_1} \cap \Pi_{3_2} = \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}, \frac{-3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} \right)$$

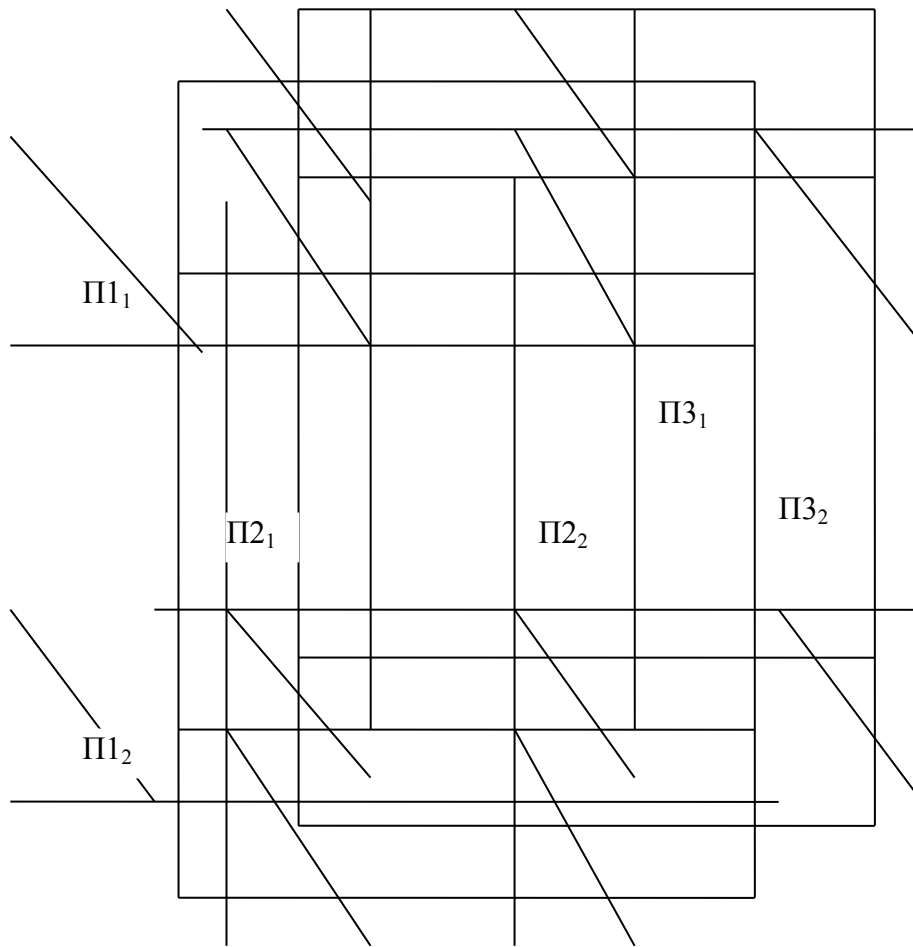


Рис. 2.2. Геометричне представлення площин у випадку, якщо вони взаємно перпендикулярні

$$V_{122} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \left(-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} V_{222} &= \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \\ &= \left(\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{-6}, \frac{-2\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}{6}, \frac{-3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{-6} \right) \end{aligned}$$

$$V_{211} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \left(\frac{2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{6}, \frac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$V_{121} = \Pi 1_1 \cap \Pi 2_2 \cap \Pi 3_1 = \left(\frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}, \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$V_{212} = \Pi 1_2 \cap \Pi 2_1 \cap \Pi 3_2 = \left(\frac{3\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}{3}, \frac{3\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$V_{221} = \Pi 1_2 \cap \Pi 2_2 \cap \Pi 3_1 = \left(\frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{6}, -\frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{6} \right)$$

На вказаних групах площин лежать томограми $T_{p,q}(\bar{x})$, $p = 1, 2, 3$, $q = 1, 2$ (тобто q - та томограма, яка лежить на площині з групи Πp).

Оператор поліноміальної інтерфлєтації, який відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла, що описана функцією $f(x, y, z)$, має вигляд:

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_{ikl}(\tilde{x}) L_{ikl}(\tilde{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (h_{ik1}(\tilde{x}) L_{ik1}(\tilde{x}) + h_{ik2}(\tilde{x}) L_{ik2}(\tilde{x})) = \\ &= \sum_{i=1}^2 (h_{i11}(\tilde{x}) L_{i11}(\tilde{x}) + h_{i12}(\tilde{x}) L_{i12}(\tilde{x}) + h_{i21}(\tilde{x}) L_{i21}(\tilde{x}) + h_{i22}(\tilde{x}) L_{i22}(\tilde{x})) = \\ &= h_{111}(\tilde{x}) L_{111}(\tilde{x}) + h_{112}(\tilde{x}) L_{112}(\tilde{x}) + h_{121}(\tilde{x}) L_{121}(\tilde{x}) + h_{122}(\tilde{x}) L_{122}(\tilde{x}) + \\ &+ h_{211}(\bar{x}) L_{211}(\bar{x}) + h_{212}(\bar{x}) L_{212}(\bar{x}) + h_{221}(\bar{x}) L_{221}(\bar{x}) + h_{222}(\bar{x}) L_{222}(\bar{x}), \quad (2.38) \end{aligned}$$

де

$$\tilde{x} = (x, y, z)$$

Знайдемо вигляд допоміжних функцій (поліномів) $h_{ikl}(\tilde{x})$:

$$h_{111}(x, y, z) = \frac{\omega 1_2(x, y, z) \cdot \omega 2_2(x, y, z) \cdot \omega 3_2(x, y, z)}{\omega 1_2(V_{111}) \cdot \omega 2_2(V_{111}) \cdot \omega 3_2(V_{111})} =$$

$$= \frac{9(x+y+z+2\sqrt{3}) \cdot (x-y+\sqrt{2}) \cdot (-x+2y-z+3\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{6}-6) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}-6) \cdot (7\sqrt{6}-2\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned} h_{112}(x, y, z) &= \frac{\omega 1_2(x, y, z) \cdot \omega 2_2(x, y, z) \cdot \omega 3_1(x, y, z)}{\omega 1_2(V_{112}) \cdot \omega 2_2(V_{112}) \cdot \omega 3_1(V_{112})} = \\ &= \frac{9(x+y+z+2\sqrt{3}) \cdot (x-y+\sqrt{2}) \cdot (-x+2y-z+2\sqrt{6})}{(7\sqrt{3}-4\sqrt{6}-8) \cdot \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{6}-2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{121}(x, y, z) &= \frac{\omega 1_2(x, y, z) \cdot \omega 2_1(x, y, z) \cdot \omega 3_2(x, y, z)}{\omega 1_2(V_{121}) \cdot \omega 2_1(V_{121}) \cdot \omega 3_2(V_{121})} = \\ &= \frac{(x+y+z+2\sqrt{3}) \cdot (x-z) \cdot (-x+2y-z+3\sqrt{6})}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{122}(x, y, z) &= \frac{\omega 1_2(x, y, z) \cdot \omega 2_1(x, y, z) \cdot \omega 3_1(x, y, z)}{\omega 1_2(V_{122}) \cdot \omega 2_1(V_{122}) \cdot \omega 3_1(V_{122})} = \\ &= \frac{64(x+y+z+2\sqrt{3}) \cdot (x-z) \cdot (-x+2y-z+2\sqrt{6})}{(3\sqrt{3}-3\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3}-4\sqrt{2}-3\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{6})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{211}(x, y, z) &= \frac{\omega 1_1(x, y, z) \cdot \omega 2_2(x, y, z) \cdot \omega 3_2(x, y, z)}{\omega 1_1(V_{211}) \cdot \omega 2_2(V_{211}) \cdot \omega 3_2(V_{211})} = \\ &= \frac{(x+y+z+3\sqrt{3}) \cdot (x-z+\sqrt{2}) \cdot (-x+2y-z+3\sqrt{6})}{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{212}(x, y, z) &= \frac{\omega 1_1(x, y, z) \cdot \omega 2_2(x, y, z) \cdot \omega 3_1(x, y, z)}{\omega 1_1(V_{212}) \cdot \omega 2_2(V_{212}) \cdot \omega 3_1(V_{212})} = \\ &= \frac{(x+y+z+\sqrt{3}) \cdot (x-z+\sqrt{2}) \cdot (-x+2y-z+2\sqrt{6})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3}-\sqrt{6})} \end{aligned}$$

$$h_{221}(x, y, z) = \frac{\omega 1_1(x, y, z) \cdot \omega 2_1(x, y, z) \cdot \omega 3_2(x, y, z)}{\omega 1_1(V_{221}) \cdot \omega 2_1(V_{221}) \cdot \omega 3_2(V_{221})} =$$

$$= \frac{(x+y+z+\sqrt{3}) \cdot (x-z) \cdot (-x+2y-z+3\sqrt{6})}{6}$$

$$\begin{aligned} h_{222}(x, y, z) &= \frac{\omega_1(x, y, z) \cdot \omega_2(x, y, z) \cdot \omega_3(x, y, z)}{\omega_1(V_{222}) \cdot \omega_2(V_{222}) \cdot \omega_3(V_{222})} = \\ &= \frac{36(x+y+z+\sqrt{3}) \cdot (x-z) \cdot (-x+2y-z+2\sqrt{6})}{(-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2})} \end{aligned}$$

Тепер визначимо вигляд функції $L_{ikl}(x, y, z)$, $i, k, l = 1, 2$. Для прикладу визначимо $L_{111}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{\mathcal{T}_{q,d}\}\bar{x}) &= [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^l - L_{li}^k L_{ik}^l + \\ &+ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k] \{\mathcal{T}_{q,d}\}\bar{x}), i = k = l = 1 \end{aligned}$$

Для цього спочатку знайдемо напрямні вектора ребер, за якими перетинаються томограми:

$$\tau_{11}^{\omega_1, \omega_2} = \tau_{12}^{\omega_1, \omega_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$$

$$\tau_{11}^{\omega_2, \omega_3} = \tau_{12}^{\omega_2, \omega_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\tau_{11}^{\omega 3, \omega 1} = \tau_{12}^{\omega 3, \omega 1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Наступним кроком буде визначення оператору

$$L_{li}^k(\{T_{q,d}\}\tilde{x}) = T_{3,l}(u_{li}^k(\tilde{x})) = f(u_{li}^k(\tilde{x})),$$

де

$$\begin{aligned} u_{li}^k &= V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}^{\omega 1, \omega 2}}{\Delta_{ikl}} \omega 3_l(x, y, z) + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2, \omega 3}}{\Delta_{kli}} \omega 1_i(x, y, z). \\ u_{li}^k \Big|_{k=l=i=1} &= V_{111} + \frac{\left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z + 2 \right) + \\ &+ \frac{\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z + 1 \right) = \\ &= V_{111} + \left\{ \frac{1}{6}x - \frac{2}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{6}x + \frac{4}{6}y - \frac{2}{6}z - \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{6}x - \frac{2}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{2}{\sqrt{6}} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} = \\
& = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + \frac{2-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, y - \frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}.
\end{aligned}$$

Підставимо знайдений вираз для u_{li}^k в формулу, яка визначає L_{li}^k :

$$L_{li}^k f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + \frac{2-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, y - \frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Тепер визначимо оператор

$$L_{ik}^l L_{kl}^i (\{T_{q,d}\} \tilde{x}) \Big|_{i=k=l=1} = f(w_k(\tilde{x})) \Big|_{k=1},$$

де

$$w_k(x, y, z) = V_{ikl} + \frac{\tau_{il}^{\omega 1, \omega 3}}{\Delta_{ilk}} \omega 2_k(x, y, z).$$

Тобто u_{li}^k – це вектор – функція, де всі компоненти визначені вище.
Ця функція також є вектор-функцією.

$$w_1(x, y, z) = V_{ikl} + \frac{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z \right) =$$

$$= \left\{ -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, -\frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \right\}$$

Підставимо знайдений вираз для w_k в формулу, яка визначає $L_{ik}^l L_{kl}^i$:

$$\begin{aligned} & L_{ik}^l L_{kl}^i f(x, y, z) \Big|_{i=k=l=1} = \\ & = f \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, -\frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \right) \end{aligned}$$

Останній оператор, який входить до оператора поліноміальної інтерфлєтації має вигляд:

$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k (\{T_{q,d}\} \tilde{x}) = T_{1,i}(V_{ikl}) = f(V_{ikl}), \quad q = 1, 2, 3, \quad d = i, k, l.$$

Всі інші оператори, які входять до складу оператора поліноміальної інтерфлєтації знаходяться аналогічно знайденим.

Оператор поліноміальної інтерфлєтації функцій трьох змінних, визначений формулою (2.38), представляє математичну модель відновлення просторово змінного коефіцієнта всередині тривимірного тіла, якщо відомі томограми, що лежать на трьох групах перерізованих площин (в кожній групі знаходиться по дві паралельні площини).

Глава 3. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за томограмами на системі взаємно перпендикулярних площин

3.1. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням поліноміальної інтерфлетації за томограмами на системі площин, паралельних координатним

3.1.1. Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням інтерфлетації за томограмами, заданими на системі площин, паралельних координатним

Нехай задана фіксована система площин, перпендикулярних координатним вісям, тобто заданих рівняннями

$$x_i = \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 3.$$

та задані томограми – сліди функції $f(x)$ на цих площинах, тобто

$$T_\mu = f|_{x_\mu = \alpha_\mu}, \quad \mu = \overline{1, n}$$

Оператор інтерфлетації $P_n f(x)$, що відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла, заданого функцією $f(x) \in C(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$, буде мати вигляд

$$P_n f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} f(x)|_{x=a_{k_i}} \quad (3.1)$$

та буде задовольняти умови

$$P_n f|_{x_\mu = \alpha_\mu} = T_\mu, \mu = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

Якщо ж $f(x) \in C^r(R^n)$, $r \geq n(m-1)$, тоді оператор інтерфлетації (3.1) перепишеться у вигляді

$$P_{m,n} f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} \sum_{s_{k_1}, \dots, s_{k_i}=0}^{m-1} \prod_{j=1}^i \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} D_{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_i}}^{s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_i}} f(x) \Big|_{x=a_{k_i}}$$

а умова (3.2) буде мати наступний вигляд

$$D_{x_\mu}^p P_n f(x)|_{x_\mu = a_\mu} = D_{x_\mu}^p f(x)|_{x_\mu = a_\mu}, \quad p = \overline{0, m-1}, \mu = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Тоді для залишку $r_{m,n} f(x) = (I - L_{m,n}) f(x)$ буде виконуватись рівність

$$r_{m,n} f(x) = \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} D_{t_1, \dots, t_n}^{m, \dots, m} f(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n \frac{(x_j - t_j)^{m-1}}{(m-1)!} dt_1 \dots dt_n.$$

Ця рівність отримується, якщо згадати залишковий член формули Тейлора в інтегральній формі (при $j = \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} f(x) - L_j f(x) &= r_j(x) = f(x) - \sum_{s_j=0}^{m-1} \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_j}^{s_j} f(x) \Big|_{x_j=a_j} = \\ &= \int_{a_j}^{x_j} D_{t_j}^m f(\dots, t_j, \dots) \frac{(x_j - t_j)^{m-1}}{(m-1)!} dt_j \end{aligned}$$

та формулу

$$r_{m,n}f(x) = \prod_{j=1}^n (I - L_j)f(x) \quad (3.4)$$

Якщо підставити у формулу (3.4) вираз для $r_i(x)$, то отримаємо формулу для залишкового члена $r_{m,n}f(x)$.

Зауваження. Хоч у формулі (3.2) для оператора $P_{m,n}f(x)$ використовуються частинні похідні різних порядків у точках перерізу різних площин $x_j = a_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ або в кутовій точці (при $(a_1, \dots, a_n)$)

$$D_{x_{k_1}, \dots, x_{k_l}}^{s_{k_1}, \dots, s_{k_l}} f(x) \Big|_{x=a_k^i},$$

але насправді всі ці дані можна отримати з $m \cdot n$ слідів

$$g_{j,p}(x) = D_{x_j}^p f(x) \Big|_{x_j=a_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{0, m-1}.$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} D_{x_1, x_2}^{s_1, s_2} f(x) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} &= D_{x_2}^{s_2} g_{1, s_1}(a_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \Big|_{x_2=a_2} = \\ &= D_{x_1}^{s_1} g_{2, s_2}(x_1, a_2, x_3, \dots, x_n) \Big|_{x_1=a_1}, \quad s_1, s_2 = \overline{0, m-1} \end{aligned}$$

Приклад 3.1. Для практики важливим є випадок $m=1, n=3$. У цьому випадку:

$$\begin{aligned} P_{1,2}f(x_1, x_2) &= f(a_1, x_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2), \\ P_{1,2}f(x_1, x_2) \Big|_{x_j=a_j} &= f(x_1, x_2) \Big|_{x_j=a_j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$P_{1,3}f(x_1, x_2, x_3) = f(a_1, x_2, x_3) + f(x_1, a_2, x_3) + f(x_1, x_2, a_3) - f(x_1, a_2, a_3) -$$

$$-f(a_1, x_2, a_3) - f(a_1, a_2, x_3) + f(a_1, a_2, a_3),$$

$$P_{1,3}f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_j=a_j} = f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_j=a_j}, \quad j = \overline{1,3}$$

А для неперервно диференційованих 2 рази функцій оператор відновлення $P_{m,3}f(x)$ буде мати вигляд

$$P_{m,3}f(x) = \sum_{1 \leq k_1 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^2 \frac{(x_{k_1} - a_{k_1})^{s_{k_1}}}{s_{k_1}!} D_{x_{k_1}}^{s_{k_1}} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_{k_1}=a_{k_1}} -$$

$$= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^2 \sum_{s_{k_2}=0}^2 \prod_{j=1}^2 \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} D_{x_{k_1}, x_{k_2}}^{s_{k_1}, s_{k_2}} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_{k_1}=a_{k_1}, x_{k_2}=a_{k_2}} +$$

$$+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^2 \sum_{s_{k_2}=0}^2 \sum_{s_{k_3}=0}^2 \prod_{j=1}^3 \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} D_{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}}^{s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{\substack{x_{k_1}=a_{k_1} \\ x_{k_2}=a_{k_2} \\ x_{k_3}=a_{k_3}}},$$

Оператор інтерфлетації $P_{m,3}f(x)$ буде задовольняти умову (3.3), дійсно

$$D_{x_1}^p P_{m,3}f(x)\Big|_{x_1=a_1} = D_{x_1}^p \left[\sum_{s_1=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} D_{x_1}^{s_1} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_1=a_1} + \right.$$

$$+ \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_2}^{s_2} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_2=a_2} +$$

$$+ \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_3}^{s_3} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_3=a_3} -$$

$$- \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{s_1, s_2} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} -$$

$$- \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{s_1, s_3} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_2, x_3}^{s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=a_2, x_3=a_3} + \\
& + \sum_{s_1, s_2, s_3=0}^{m-1} \prod_{j=1}^3 \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_1, x_2, x_3}^{s_1, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3} \prod_{i=1}^3 \mathbb{I}_{x_i=a_i} = \\
& = D_{x_1}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{p, s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} + \\
& + \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{p, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} - \\
& - \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{p, s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} - \\
& - \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{p, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} - \\
& - \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_2, x_3}^{p, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3} + \\
& + \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_2, x_3}^{p, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3} = \\
& = D_{x_1}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1}, \quad p = \overline{0, m-1}.
\end{aligned}$$

Аналогічно перевіряється, що

$$D_{x_j}^p P_{m,3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_j=a_j} = D_{x_j}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_j=a_j}, \quad j = 2, 3, \quad p = \overline{0, m-1}.$$

3.1.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням Лагранжевої інтерфлотації за томограмами, що лежать на системі площин, паралельних координатним

Проаналізуємо тепер загальний випадок, коли по кожній змінній $x_i, i = \overline{1, n}$

томограми тривимірного тіла (сліди), внутрішня структура якого визначається функцією $f(x)$, задаються на кількох площинах, паралельних координатним.

Нехай $f(x) \in C(E^3)$, $x \in R^3$, $E = [0,1]$. Розіб'ємо E^3 на паралелепіпеди площинами $x_i = x_{i,j_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Уведемо до розгляду базисні інтерполяційні поліноми Лагранжа

$$l_{i,j}(x_i) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{N_i+1} \frac{x_i - x_{i,r}}{x_{i,j} - x_{i,r}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0, N_i+1}$$

і систему інтерполяційних операторів

$$Lag_i f(x) = \sum_{j=0}^{N_i+1} l_{i,j}(x_i) T_{i,j}(x), \quad i = \overline{1,n}$$

з властивостями

$$Lag_i f(x)|_{x_i=x_{i,r}} = T_{i,r}(x), \quad r = \overline{0, N_i+1}, \quad i = \overline{1,n} \quad (3.5)$$

де $T_{i,r}(x)$ – томограма, яка є слідом функції $f(x)$ на площину, що задається рівняннями

$$x = x_{i,r}, \quad r = \overline{0, N_i+1}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді оператор

$$Pl_{N+1} f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} Lag_{k_1} \dots Lag_{k_i} f(x) \quad (3.6)$$

є оператором лагранжевої інтерфлетації, тобто має такі властивості:

$$Pl_{N+1}f(x)|_{x_\mu=x_{\mu,j_\mu}} = T_{\mu,j_\mu}, j_\mu = \overline{0, N_\mu + 1}, \mu = \overline{1, n} \quad (3.7)$$

Для залишку $r_{N+1}f(x) = (I - Pl_{N+1})f(x)$ виконується рівність

$$r_{N+1}f(x) = \prod_{i=1}^n r_i f(x) \quad (3.8)$$

$$r_{i_i}f(x) = \sum_{j_i=0}^{N_i+1} l_{i,j_i}(x_i) \int_{x_{i,j_i}}^{x_i} f(x_{i-1}, t_i, x_{i+1}) dt_i \quad (3.9)$$

Зокрема, якщо $N+2 = (N_1+2, \dots, N_n+2), f(x) \in C^{N+2}(E^n)$, то

$$\exists \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in E^n : r_N f(x) = [D^{(N+2)} f](\eta) \prod_{i=1}^n \frac{\omega_i(x_i)}{(N_i+2)!}, \quad (3.10)$$

$$\omega_i(x_i) = \prod_{j=0}^{N_i+1} (x_i - x_{i,j})$$

Рівність (3.9) встановлюється інтегруванням частинами за змінною t_i під знаками інтегралів. Рівність (3.10) є наслідком формули Лагранжа через похідну, порядок якої на одиницю вищий, ніж порядок інтерполяційного полінома.

Рівність (3.6) і представляє собою математичну модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта, якщо відомі зображення тривимірного тіла (томограми) на заданій системі площин, паралельних координатним.

3.1.3. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням Ермітової інтерфлєтації за відомими томограмами, що лежать на системі площин, паралельних координатним

Нехай треба відновити внутрішню структуру тривимірного тіла, заданого

функцією $f(x) \in C(\Omega)$, $x \in R^3$, $\Omega \subset R^3$. Інформацію про цю функцію несуть її томограми $T_{i,j}(x)$, які отримуються зрізом тіла площинами $x_i = x_{i,j}$, паралельними координатним площинам.

Уведемо до розгляду базисні інтерполяційні поліноми Ерміта

$$e_{i,j}(x_i) = \prod_{r=0; r \neq j}^{N_i+1} (x_i - x_{i,r})^m \left\{ \prod_{r=0, r \neq j}^{N_i+1} (x_i - x_{i,r})^{-m} \right\},$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, N_i + 1}, \quad p = \overline{0, m-1}$$

з властивостями

$$e_{i,j}(x_{i,j'}) = \delta_{j,j'}, \quad j, j' = \overline{0, N_i + 1}.$$

Тоді оператори

$$E_i f(x) = \sum_{j=0}^{N_i+1} e_{i,j}(x_i) T_{i,j}(x), \quad i = \overline{1, n} \quad (3.11)$$

є операторами поліноміальної інтерполяції Ерміта за змінною x_i з властивостями

$$f(x)|_{x_i=x_{i,j'}} = f(x)|_{x_i=x_{i,j}}, \quad j' = \overline{0, N_i + 1}, \quad i = \overline{1, n},$$

тобто

$$T(i, j') = T(i, j).$$

А оператор

$$E_{N+1, m} f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} F e_i(x), \quad (3.12)$$

$$F e_i(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} E_{k_q} \dots E_{k_i} f(x)$$

задовольняє властивості

$$E_{N+1,m}f(x)|_{x_i=x_{i,j}} = T_{i,j}(x), \quad j = \overline{0, N_i + 1}, i = \overline{1, n}$$

Тобто оператор, визначений формулою (3.12) є оператором ермітової інтерфлетації і представляє математичну модель відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами на заданій системі площин, паралельних координатним.

Для залишку $RE_{N+1,m}f(x) = (I - E_{N+1,m})f(x)$ виконується рівність

$$RE_{N+1,m}f(x) = \prod_{i=1}^n re_i f(x), \quad (3.13)$$

$$re_i f(x) = (I - E_i)f(x) = \sum_{j=0}^{N_i+1} e_{i,j}(x_i) \int_{x_{i,j}}^{x_i} f(x_{i-1}, t_i, x_{i+1}) dt_i \quad (3.14)$$

Формула (3.13) випливає з того, що

$$RE_{N+1,m}f(x) = (I - E_{N+1,m})f(x) = \prod_{i=1}^n (I - E_i)f(x)$$

Тут треба врахувати, що під знаком інтегралів кожний оператор re_i діє на функцію $f(t_1, t_2, t_3)$, по змінній t_i , тобто ці оператори є переставними.

Якщо взяти у формулі (3.13) $r_i = N_i + 2$, можна дійти висновку, що оператори $E_{N+1,m}f(x)$ є точними на функціях вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^n P_{i,m-1}(x_i) g_i(x_i),$$

де $P_{i,m-1}$ - довільні поліноми степеня не вищого $m-1$ від одної змінної x_i ; g_i - довільні функції $(n-1)$ -ї змінної, $g_i \in C(R^2)$.

3.2. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням оператора сплайн – інтерфлетації за томограмами, що лежать на системі площин, паралельних координатним

3.2.1. Ермітова сплайн – інтерфлетация на системі томограм, які лежать на площинах, паралельних координатним

Нехай система кусково – поліноміальних функцій $S_{i,j_i,q}(t)$ визначається формулами

$$S_{i,0,q}(t) = \frac{(t - x_{i,0})^q}{q!} \times \begin{cases} h_q\left(\frac{t - x_{i,1}}{x_{i,0} - x_{i,1}}\right) & \text{якщо } t \in [x_{i,0}, x_{i,1}], \\ h_q(1) & \\ 0, & \text{якщо } t \notin [x_{i,0}, x_{i,1}], \end{cases}$$

$$S_{i,j_i,q}(t) = \frac{(t - x_{i,j_i})^q}{q!} \times \begin{cases} h_q\left(\frac{t - x_{i,j_i-1}}{x_{i,j_i} - x_{i,j_i-1}}\right) / h_q(1), & \text{якщо } t \in [x_{i,j_i-1}, x_{i,j_i}], \\ h_q\left(\frac{t - x_{i,j_i+1}}{x_{i,j_i} - x_{i,j_i+1}}\right) / h_q(1), & \text{якщо } t \in [x_{i,j_i}, x_{i,j_i+1}], \\ 0, & \text{якщо } t \notin [x_{i,j_i-1}, x_{i,j_i+1}], \quad j_i = \overline{1, N_i}, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$S_{i,j_i,q}(t) = \frac{(t - x_{i,N_i+1})^q}{q!} \times \begin{cases} h_q\left(\frac{t - x_{i,N_i}}{x_{i,N_i+1} - x_{i,N_i}}\right) / h_q(1), & \text{якщо } t \in [x_{i,N_i}, x_{i,N_i+1}] \\ 0, & \text{якщо } t \notin [x_{i,N_i}, x_{i,N_i+1}], \end{cases}$$

де

$$h_q(u) = \int_0^u v^{m-1} (1-v)^{m-1-q} dv = \sum_{p=0}^{m-1-q} (-1)^p C_{m-1-q}^p \frac{u^{m+p}}{m+p}, \quad q = \overline{0, m-1}.$$

Відмітимо такі властивості цих функцій:

$$S_{i,j_i,q}(t) \in C^{m-1}(R),$$

$$S_{i,j_i,q}^{(\alpha)}(x_{i,\mu}) = \delta_{j_i,\mu} \delta_{q,\alpha}, \quad j_i, \mu \in \{0, 1, \dots, N_i + 1\}, \quad q, \alpha = \overline{0, m-1}.$$

Уведемо до розгляду систему операторів

$$S_{p_i} f(x) = \sum_{j_i=0}^{N_i+1} \sum_{p=0}^{m-1} S_{i,j_i,p}(x_i) D_{x_i}^p f(x) \Big|_{x_i=x_{i,j_i}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.16)$$

Оператор $SPL_{m,\pi} f(x)$

$$SPL_{m,\pi} f(x) = \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} SP_v(x), \quad (3.17)$$

де

$$SP_v(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_v \leq n} Sp_{k_1} \cdots Sp_{k_v} f(x),$$

задовольняє властивості (при $i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{0, m-1}$)

$$D_{x_i}^p SPL_{m,\pi} f(x) \Big|_{x_i=x_{i,j}} = D_{x_i}^p T_{i,j} \Big|, \quad j = \overline{0, N_i + 1}. \quad (3.18)$$

де $T_{i,j}(x)$ – томограми тривимірного тіла, заданого функцією $f(x)$, тобто переріз тіла площиною $x_i = x_{i,j}$. Тобто оператор (3.17) є математичною моделлю відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, заданими на відомих площинах, паралельних координатним.

Якщо $f(x) \in C^{r_1, \dots, r_n}(E^n)$, $m \leq r_i \leq 2m$, $i = \overline{1, n}$, $E = [0, 1]$. Тоді для залишку

$$SPLR_{m, \pi} f(x) = (I - SPL_{m, \pi}) f(x)$$

виконується рівність

$$\begin{aligned} SPLR_{m, \pi} f(x) &= \prod_{i=1}^n resp_{i, j_i} f(x), \quad x \in \Pi_j \subset E^n, \\ \Pi_j &= \prod_{k=1}^n [x_{k, j_k}, x_{k, j_k+1}], \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad j_i = \overline{0, N_i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ resp_{i, j_i} f(x) &= (I - Sp_{i, j_i}) f(x) = \sum_{j=j_i}^{j_i+1} \sum_{p=0}^{m-1} sp_{i, j, p}(x_i) \times \\ &\times \int_{x_{i, j}}^{x_i} D_{t_i}^{r_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \frac{(x_{i, j} - t_i)^{r_i-p-1}}{(r_i - p - 1)!} dt_i, \\ x &\in [x_{i, j_i}, x_{i, j_i+1}], \quad j_i = \overline{0, N_i}, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формула (3.19) випливає з того, що

$$RE_{N+1, m} f(x) = (I - E_{N+1, m}) f(x) = \prod_{i=1}^n (I - Sp_{i, j_i}) f(x).$$

При цьому треба врахувати що під знаком інтегралів кожний оператор $resp_{i, j_i}$ діє на функцію $f(t_1, \dots, t_n)$ по змінній t_i .

В точках паралелепіпеда $\Pi_j = \prod_{i=1}^n [x_{i, j_i}, x_{i, j_i+1}], j = (j_1, \dots, j_n)$ зробимо оцінку залишку $SPLR_m f(x) = (I - SPL_{m, \pi}) f(x)$.

Зауважимо, що цю інтерфлєтацію природно називати кусково – ермітовою, бо вона будується на основі використання операторів доточкової ермітової сплайн – інтерполяції за кожною із змінних $x_i, i = \overline{1, n}$. Тому якщо на кожній з

площин $x_i = x_{i,j}, i = \overline{1, n}, j = \overline{0, N_i + 1}$ задаються сліди $D_{x_i}^p f(x) \Big|_{x_i = x_{i,j}},$
 $p = \overline{0, m-1}$, то на кожному проміжку $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$ наближуючи функція
 $LSP_m f(x) \in C^{m-1, \dots, m-1}$ є алгебраїчним поліномом степеня $2m-1$ за змінною x_i .

І для оцінки похибки треба оцінити її на кожному з проміжків $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$. Для цього спочатку знаходимо оцінку для залишку $e_{(0,1)}g(t) = g(t) - E_{2,m}g(t)$ наближення деякої функції g від однієї змінної на інтервалі $[0,1]$. Залишок наближення функції $g(t) \in C^r[0,1]$, $m \leq r \leq 2m$ інтерполяційним двоточковим ермітовим поліномом степеня $2m-1$ можна зобразити у вигляді

$$g(t) - \sum_{i=0}^1 \sum_{s=0}^{m-1} g^{(s)}(i) e_{2m-1,i,s}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^1 \sum_{s=0}^{m-1} e_{2m-1,i,s}(t) \int_i^t g^{(r)}(\tau) \frac{(i-\tau)^{r-s-1}}{(r-s-1)!} d\tau = \int_0^1 g^{(r)}(\tau) G_{r,m}(t, \tau) d\tau.$$

Тому для похибки наближення отримаємо нерівність

$$\|e_{(0,1)}g(t)\|_{L_\infty[0,1]} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)| \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_{r,m}(t, \tau)| d\tau = M_r G_{r,m,1},$$

$$G_{r,m,1} = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_{r,m}(t, \tau)| d\tau,$$

$$M_r = M_r(g) := \max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)|.$$

Якщо функція $f(x)$ кількох змінних наближується двоточковим ермітовим поліномом за змінною x_i на інтервалі $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$, то аргумент t_i у функції $g(\dots, t_i, \dots) = f(\dots, x_{i,j} + t_i(x_{i,j+1} - x_{i,j}), \dots)$ буде належати одиничному інтервалу $t_i \in [0,1]$. Тому, застосувавши до цієї функції написану вище оцінку, отримаємо,

з урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned}
 M_r(f)_{\{x_{i,j}, x_{i,j+1}\}} &= \max_{0 \leq t_i \leq 1} \left| \frac{\partial^{r_i}}{\partial t_i^{r_i}} g(\dots, t_i, \dots) \right| = \\
 &= \max_{0 \leq t_i \leq 1} \left| \frac{\partial^{r_i}}{\partial t_i^{r_i}} f(\dots, x_{i,j} + t_i(x_{i,j+1} - x_{i,j}), \dots) \right| = \\
 &= \Delta_{i,j}^{r_i} \max_{x_{i,j} \leq x_i \leq x_{i,j+1}} \left| (D_{x_i}^{(r_i)} f)(\dots, x_i, \dots) \right|,
 \end{aligned}$$

нерівність

$$\begin{aligned}
 \exists C_i &= \max_{0 \leq x_i \leq 1} \left| D_{x_i}^r f(\dots, x_i, \dots) \right| G_{i,m,r,1} : \\
 \|resp_{i,j_i} f\|_{L_\infty[0,1]} &\leq C_i \Delta_i^r, \quad i = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

де

$$\Delta_i = \max_{1 \leq j_i \leq N_i+1} \Delta_{i,j_i} = x_{i,j_i+1} - x_{i,j_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad C_r = C_{r_1, \dots, r_n} - \text{ стала, що не залежить від } f;$$

$$M = M_r(f) = \|D^{r, \dots, r}\|_{L_\infty[0,1]^n}.$$

Якщо врахувати цю оцінку у формулі (3.19), то отримаємо доведення формули (3.20) зі сталими

$$M = M(f) = \max_{x \in [0,1]^n} \left| D^{r, \dots, r} f(x) \right|, \quad C_r = \prod_{i=1}^n C_{i,m,r,1}.$$

отримаємо наступну оцінку

$$\|SPLR_m f(x)\|_{C[0,1]^n} \leq C_r M \prod_{i=1}^n \frac{\Delta_i^{r_i}}{r_i!}, \quad x \in \Pi_j, \quad j = (j_1, \dots, j_n). \quad (3.20)$$

3.2.2. Математична модель комп'ютерної томографії з використанням сплайн – інтерфлетації дефекту 1

Ермітові інтерполяційні сплайни степеня $2m-1$ є сплайнами степеня $2m-1$ дефекту m за кожною змінною: $f(x) \in C^r(R^n) (r \geq m-1) \Rightarrow S_{i,j,q}(x_i) \in C^{m-1}(R) \Rightarrow Sp_i f(x) \in C^{m-1}(R^n)$.
 $S_{i,j,q}(x_i) \in C^{m-1}(R) \Rightarrow Sp_i f(x) \in C^{m-1}(R^n)$. У них використовується інформація про функцію $T_{i,j}(x) = f(x)|_{x_i=x_{i,j}}$ (томограми) та її похідні $D_{x_i}^s f(x)|_{x_i=x_{i,j}}$, $s = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{0, N_j + 1}$, $i = \overline{1, n}$.

Уведемо інтерполяційні сплайни $Sp_i f(x)$ змінної x_i степеня $2m-1$ дефекту 1:

$$S_{i,j}(x_i) \in C^{2m-2}(R) \Rightarrow Sp_i(x_i) \in C^{2m-2}(R^n),$$

$$Sp_i f(x) = \sum_{j_i=0}^{N_i+1} S_{i,j_i}(x_i) f(x)|_{x_i=x_{i,j_i}}, i = \overline{1, n},$$

$$Sp_i f(x)|_{x_i=x_{i,j}} = f(x)|_{x_i=x_{i,j}}, j = \overline{0, N_i + 1}, i = \overline{1, n}.$$

Оператор

$$SP_{m,\pi} f(x) = \sum_{v=1}^n (-1)^{v+1} SP_v(x), \quad (3.21)$$

де

$$SP_v(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_v \leq n} Sp_{k_1} \dots Sp_{k_v} f(x),$$

має властивості

$$SP_{m,\pi} f(x) \in C^{2m-2, \dots, 2m-2}(R^n),$$

$$SP_{m,\pi} f(x) \Big|_{x_i=x_{i,j}} = f(x) \Big|_{x_i=x_{i,j}}, \quad j = \overline{0, N_i + 1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.22)$$

При цьому для похибки

$$RSP_{m,\pi,r} f(x) = (I - SP_{m,\pi}) f(x)$$

Виконується рівність аналогічно формули (3.19)

$$RSP_{m,\pi,r} f(x) = \prod_{i=1}^n rsp_i f(x), \quad x \in E^n, \quad (3.23)$$

$$rsp_{i,r} f(x) = (I - Sp_i) f(x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\|RSP_{m,\pi,r} f\|_{C(E^n)} = O\left(\prod_{i=1}^n \Delta_i^r\right), \quad \forall f(x) \in C^{r,\dots,r}(R^n), \quad 1 \leq r \leq 2N + 3,$$

$$\Delta_i = \max_{1 \leq j \leq N_i + 1} (x_{i,j} - x_{i,j-1}), \quad j = \overline{1, N_i + 1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тобто за допомогою оператора (3.21) можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими томограмами, заданими на системі площин, паралельних координатним.

Приклад 3.2. Нехай сплайни

$$sp_{2q-1,i,j_i,p_i}(x_i) \in C^{q-1}(E), \quad q \geq m + 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad j_i = \overline{0, N_i + 1}$$

мають такі властивості:

$$sp_{2q-1,i,j_i,p_i}^{(p_i')} (x_{i,j_i}) = \delta_{j_i,j_i'} \delta_{p_i,p_i'}, \quad j_i, j_i' = \overline{0, N_i + 1}, \quad p_i, p_i' = \overline{0, q-1}.$$

Побудова таких сплайнів може бути проведена на основі B - сплайнів

степеня $2q-1$, $q > m$. Підставивши у формулу (3.16) для оператора $Sp_i f(x)$ замість допоміжних функцій $S_{i,j_i,p}(x_i)$ функції $sp_{2q-1,i,j_i,p_i}(x_i)$, отримаємо оператор $SPL_{m,q,\pi} f(x) \in C^{q-1,\dots,q-1}(E^n)$ із такими ж властивостями (3.18) – (3.19). Очевидно, що такого типу оператори будуть давати краще наближення для функцій з більш високим порядком диференційованості. Це впливає з відомого в теорії сплайнів факту: на функціях з неперервними похідними порядків $r_i \geq q-1 > m-1$ вищих, ніж $m-1$, сплайни $Sp_{i,m,q,\pi_i} f(x_i)$ степеня $2q-1 > 2m-1$ від однієї змінної x_i з властивостями $Sp_{i,m,q,\pi_i}^{(q)} f(x_{i,j}) = f^{(q)}(x_{i,j})$, $j = \overline{0, N_{i+1}}$, $q = \overline{0, m-1}$ дають краще наближення для $f(x_i \in C^r[0,1])$ із більшим значенням r . Але якщо $f(x) \in C^{r_1,\dots,r_n}(E^n)$, $m \leq r_k \leq 2q$, $k = \overline{1, n}$, то порядок наближення відносно кроків розбиття $\Delta_i = \max_{j=\overline{0, N_i}} \Delta_{i,j}$, $i = \overline{1, n}$ істотно залежить від степеня сплайна і від значень r_k , $k = \overline{1, n}$. Цей порядок наближення не залежить від q . Від q залежить лише значення сталої $C = C(q, m, r)$ в оцінці похибки

$$|f(x) - Sp_{m,q,\pi_i} f(\dots, x_i, \dots)| \leq C(q, m, r_i) \Delta_i^{r_i} M_{r_i}$$

$$M_{r_i} = \|D_{x_i}^{r_i} f(\dots, x_i, \dots)\|_{C(E)} \leq r_i \leq 2q, \quad i = \overline{1, n}.$$

Цей загальновідомий факт широко використовується на практиці при знаходженні наближень сплайнами: для наближення функцій з невисоким порядком диференційованості використовуються, як правило, сплайни невисокого степеня. Сплайни степеня $2r-1$ дефекту 1 збігаються до неперервної функції $f \in C(E^n)$ лише за умови $\frac{\max \Delta_i}{\min \Delta_i} \leq C_r$, де C_r - деякі числа, неоднакові для різних сплайнів. Цю властивість мають і оператори

сплайн – інтерфлетації.

3.3. Математична модель відновлення тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин

Тривимірне тіло будемо вважати без обмеження загальності розташованим в одиничному кубі $D = [0,1]^3$.

Інформацією про функцію $f(x, y, z)$, тобто про просторово змінний коефіцієнт поглинання всередині тривимірного тіла (внутрішню структуру тіла), є набір томограм $X_k.bmp, k = \overline{1, M_1}, Y_l.bmp, l = \overline{1, M_2}, Z_p.bmp, p = \overline{1, M_3}$, які лежать на площинах, перпендикулярних координатним вісям OX, OY, OZ відповідно. Кожній томограмі ставимо у відповідність функцію:

$$\begin{aligned} X_k.bmp &\mapsto A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1}, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c; \\ Y_l.bmp &\mapsto B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c; \\ Z_p.bmp &\mapsto S(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \end{aligned}$$

Тобто, наприклад, $A(k, y, z)$ визначає інтенсивність кольору в пік селі (y, z) X_k -того малюнку.

При переході до функціонального запису томограм треба зробити пере

масштабування $x = \frac{x}{a}, y = \frac{y}{b}, z = \frac{z}{c}$.

Для подальшого викладення сформулюємо теорему 3.1.

Теорема 3.1. Нехай оператори $In1 f, In2 f, In3 f$ є операторами сплайн – інтерполяції функції $f(x, y, z)$ за змінними x, y, z відповідно:

$$In1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{M_1} Sp_{M_1, \kappa}(x) A(k, y, z),$$

$$\text{In2 } f(x, y, z) = \sum_{l=1}^{M_2} Sp_{M_2, l}(y) B(x, l, z),$$

$$\text{In3 } f(x, y, z) = \sum_{p=1}^{M_3} Sp_{M_3, p}(z) C(x, y, p),$$

де $Sp_{M_1, k}(x)$ – базисні сплайни степеня m ($m = 1, 2, 3$) з такими властивостями:

$$Sp_{M_1, k}\left(\frac{p}{M_1}\right) = \delta_{k, p}, \quad k, p = \overline{0, M_1}$$

Аналогічно визначаються сплайни $Sp_{M_2, l}, Sp_{M_3, p}$.

Якщо функції $A(k, y, z), k = \overline{1, M_1}, B(x, l, z), l = \overline{1, M_2}, C(x, y, p), p = \overline{1, M_3}$ задовольняють такі умови:

$$A(k, y_l, z) = A(x_k, l, z); \quad B(x, l, z_p) = B(x, y_l, p); \quad C(k, y, z_p) = C(x_k, y, p),$$

тобто значення томограм на лініях перетину співпадають для всіх томограм, що перетинаються, то оператор сплайн – інтерфлетації

$$Lf(x, y, z) = (\text{In1} + \text{In2} + \text{In3} - \text{In1In2} - \text{In1In3} - \text{In2In3} + \text{In1In2In3})f(x, y, z)$$

має наступні властивості

$$Lf(k, y, z) = A(k, y, z), k = \overline{1, M_1}; \quad Lf(x, l, z) = B(x, l, z), l = \overline{1, M_2};$$

$$Lf(x, y, p) = C(x, y, p), p = \overline{1, M_3}.$$

Доведення проводиться безпосередньою перевіркою.

3.4. Похибка результату чисельного розв'язання задачі

При описі внутрішньої структури тривимірного тіла істотно використовуються експериментальні дані – томограми $(T_q, q = \overline{1, M})$ та площини $(\Pi_k, k = \overline{1, M})$, на яких лежать ці томограми. Нижче проаналізуємо вплив похибок задання експериментальних даних на похибку відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. Для цього спочатку відмітимо деякі відомі результати з теорії похибок.

Перш за все, відмітимо, що вказані похибки при заданні величин T_q та Π_k згідно з теорією похибок відносяться до неусувних похибок. Похибка відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою експериментальних даних та сплайнів або поліномів відноситься до похибки методу наближення. Враховуючи, що всі обчислення на ПЕОМ проводяться із скінченною кількістю розрядів розрядної сітки, при виконанні всіх операцій на кожному кроці проводиться заокруглення результатів. Похибка, яка виникає при цьому, називається обчислювальною похибкою (або похибкою заокруглення).

Визначимо похибку заокруглення для методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин.

Якщо розрахунки ведуться на ПЕОМ у режимі з плаваючою комою з τ двійковими розрядами у мантиси числа та з класичним правилом округлення, справедливими є наступні оцінки похибки заокруглення виконання основних арифметичних операцій ($f(\cdot)$ – результат обчислення на даній ПЕОМ вирізу, що стоїть у дужках):

$$f(x_1 \pm x_2) = (x_1 \pm x_2)(1 + \varepsilon_1), \quad |\varepsilon_1| \leq 2^{-\tau};$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2)(1 + \varepsilon_2), \quad |\varepsilon_2| \leq 2^{-\tau};$$

$$fl\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1}{x_2} \cdot (1 + \varepsilon_3), \quad |\varepsilon_3| \leq 2^{-\tau};$$

$$fl(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n (1 + E_1),$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{q-1} \leq 1 + E_1 \leq (1 + 2^{-\tau})^{q-1};$$

$$fl\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n}\right) = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} (1 + E_2),$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{q+n-1} \leq 1 + E_2 \leq (1 + 2^{-\tau})^{q+n-1};$$

$$fl(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1(1 + \xi_1) + x_2(1 + \xi_2) + \dots + x_n(1 + \xi_n);$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{q-1} \leq 1 + \xi_1 \leq (1 + 2^{-\tau})^{q-1};$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{q+1-i} \leq 1 + \xi_i \leq (1 + 2^{-\tau})^{q+1-i}, \quad i = \overline{2, n};$$

$$fl(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = x_1 y_1 (1 + \eta_1) + x_2 y_2 (1 + \eta_2) + \dots + x_n y_n (1 + \eta_n);$$

$$(1 - 2^{-\tau})^q \leq 1 + \eta_1 \leq (1 + 2^{-\tau})^q;$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{q+2-i} \leq 1 + \eta_i \leq (1 + 2^{-\tau})^{q+2-i}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Якщо виконана умова $(n + 2 - i) \cdot 2^{-\tau} \leq 0.1$, що практично завжди справедливо, то

$$(1 - 2^{-\tau})^{q+2-i} < 1 - 1.06(n + 2 - i) \cdot 2^{-\tau},$$

$$(1 + 2^{-\tau})^{q+2-i} < 1 + 1.06(n + 2 - i) \cdot 2^{-\tau}.$$

Зробивши заміну

$$1.06 \cdot 2^{-\tau} = 2^{-\tau_1}$$

$$\tau_1 = \tau - \log_2 1.06 = \tau - 0.08406$$

в останньому із співвідношень, отримаємо

$$1 - (n + 2 - i)2^{-\tau_1} \leq 1 + \eta_i \leq 1 + (n + 2 - i)2^{-\tau_1}, \quad i = \overline{2, n}$$

$$|\eta_i| \leq (n + 2 - i)2^{-\tau_1}.$$

Оператор сплайн – інтерфлетації, який відновлює внутрішню структуру, має вигляд

$$Lu(x, y, z) = (In1 + In2 + In3 - In1In2 - In1In3 - In2In3 + In1In2In3)u(x, y, z),$$

де

$$In1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{M_1} Sp_{M_1, k}(x) A(k, y, z),$$

$$In2 f(x, y, z) = \sum_{l=1}^{M_2} Sp_{M_2, l}(y) B(x, l, z),$$

$$In3 f(x, y, z) = \sum_{p=1}^{M_3} Sp_{M_3, p}(z) S(x, y, p)$$

Тоді, виходячи з всього попередньо сказаного, отримаємо

$$fl(In1In2 + In1In3 + In2In3) = In1In2(1 + \eta_1) + In1In2(1 + \eta_2) + In2In3(1 + \eta_3);$$

$$(1 - 2^{-\tau}) \leq (1 + \eta_1) \leq (1 + 2^{-\tau})^3;$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{5-i} \leq (1 + \eta_i) \leq (1 + 2^{-\tau})^{5-i}, \quad i = \overline{2, 3};$$

$$fl(In1In2In3) = In1In2In3(1 + E_1);$$

$$(1 - 2^{-\tau})^3 \leq 1 + E_1 \leq (1 + 2^{-\tau})^3.$$

Тоді похибка заокруглення для всього оператора поліноміальної інтерфлетації $Lu(x, y, z)$ має вигляд:

$$fl(In1 + In2 + In3 - In1In2 - In1In3 - In2In3 + In1In2In3) =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln 1(1 + \xi_1) + \ln 2(1 + \xi_2) + \ln 3(1 + \xi_3) - \\
&- (\ln 1 \ln 2(1 + \eta_1) + \ln 1 \ln 2(1 + \eta_2) + \ln 2 \ln 3(1 + \eta_3))(1 + \xi_4) + \\
&\quad \ln 1 \ln 2 \ln 3(1 + E_1)(1 + \xi_5)
\end{aligned}$$

EMBED Equation.3

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{-\tau})^4 &\leq 1 + \xi_1 \leq (1 + 2^{-\tau})^4 \\
(1 - 2^{-\tau})^{6-i} &\leq 1 + \xi_i \leq (1 + 2^{-\tau})^{6-i}, \quad i = \overline{2,5}
\end{aligned}$$

Для того, щоб оцінити неусувну похибку, сформулюємо наступне твердження.

Твердження 3.1. Якщо є похибка вхідних даних (томограм), тобто томограма не лежить на заданій площині: $A(k, y, z) + \varepsilon 1_k$, $B(x, l, z) + \varepsilon 2_l$, $S(x, y, p) + \varepsilon 3_p$, то

$$Lu(x, y, z) = u(x, y, z) + r_1 + r_2,$$

де r_1 – похибка методу, r_2 – похибка вихідних даних. Тоді похибку вихідних даних можна оцінити так

$$|r_2| \leq \max_{\substack{k=\overline{1,n} \\ l=\overline{1,m} \\ p=\overline{1,s}}} \{\varepsilon 1_k, \varepsilon 2_l, \varepsilon 3_p\}$$

Знайдемо оцінку методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою оператора поліноміальної інтерфлотації.

Теорема 3.2. Нехай $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}(D)$, $r_1, r_2, r_3 = \overline{1, 2}$. Тоді для залишку $RLf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z)$ виконується рівність

$$RLf(x, y, z) = (I - \ln 1)(I - \ln 2)(I - \ln 3)f(x, y, z), \quad (3.28)$$

де $In1, In2, In3$ - оператори, що визначені в теоремі 3.1.

$$\begin{aligned}
 RLf(x, y, z) = \\
 = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{M_2} \sum_{p=1}^{M_3} [Sp_{M_1, k}(x) Sp_{M_2, l}(y) Sp_{M_3, p}(z) \times \\
 \times \int_{x_k}^x \int_{y_l}^y \int_{z_p}^z \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3} f(x, y, z)}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2} \partial t_3^{r_3}} \frac{(x_k - t_1)^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \frac{(y_l - t_2)^{r_2-1}}{(r_2-1)!} \frac{(z_p - t_3)^{r_3-1}}{(r_3-1)!} dt_1 dt_2 dt_3
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Доведення. Спочатку доведемо формулу (3.28).

$$\begin{aligned}
 I - (I - In1)(I - In2)(I - In3)f(x, y, z) = I - (I - In1 - In2 - In3 + In1In2 + \\
 + In1In3 + In2In3 - In1In2In3)f(x, y, z) = (In1 + In2 + In3 - In1In2 - \\
 - In1In3 - In2In3 + In1In2In3)f(x, y, z) = Lf(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Тоді похибка набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 RLf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z) = (I - I + (I - In1)(I - In2)(I - In3))f(x, y, z) = \\
 = (I - In1)(I - In2)(I - In3)f(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Рівність (3.28) доведена.

Рівності (3.29) встановлюються інтегруванням частинами за змінними t_1, t_2, t_3 під знаками інтегралів.

Теорему 3.13 доведено.

Теорема 3.3. Нехай $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}(D)$, $r_1, r_2, r_3 = \overline{1, 2}$. Тоді для залишку

$RLf(x, y, z) = (I - L)f(x, y, z)$ виконується нерівність

$$\|RLf(x, y, z)\|_{C[0,1]^3} \leq C M \Delta 1^{r_1} \Delta 2^{r_2} \Delta 3^{r_3},$$

$$\Delta 1 = \max_{1 \leq k \leq M_1} |x_{k+1} - x_k|,$$

$$\Delta 2 = \max_{1 \leq l \leq M_2} |y_{l+1} - y_l|,$$

$$\Delta 3 = \max_{1 \leq p \leq M_3} |z_{p+1} - z_p|,$$

$$M = \max_{x, y, z \in [0,1]} \left| \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}} f(x, y, z) \right|.$$

Доведення. Нехай функція від однієї змінної $g(x) \in C[0,1]$, $0 = x_1 < \dots < x_n = 1$ наближається сплайном першого степеня (кусково – лінійним сплайном)

$$sp(x) = g(x_{k-1}) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + g(x_k) \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Цей сплайн має такі властивості ($\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$):

$$sp(x_k) = g(x_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

$$g(x) \in C^1[0,1] \Rightarrow \|Rn(x)\|_{\infty} =: \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - sp(x)| \leq \frac{\Delta}{2} \|g'(x)\|_{L_{\infty}[0,1]}, \quad (3.30)$$

$$g(x) \in C^2[0,1] \Rightarrow \|Rn(x)\|_{\infty} =: \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - sp(x)| \leq \frac{\Delta^2}{8} \|g''(x)\|_{\infty}. \quad (3.31)$$

Залишок наближення функції $g(t) \in C^r[0,1]$ сплайном $sp(x)$ можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned}
 Rg(t) &= g(t) - \sum_{i=0}^1 g(i)sp(t) = \\
 &= \sum_{i=0}^1 sp(t) \int_i^t g^{(r)}(\tau) \frac{(i-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau = \int_0^1 g^{(r)}(\tau) G_r(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

$$\text{EMBED Equation.3} \quad \|Rg(t)\|_{L_\infty[0,1]} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)| \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_r(t, \tau)| d\tau = M_r G_{r,1},$$

$$\text{EMBED Equation.3} \quad G_{r,1} = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_r(t, \tau)| d\tau,$$

$$M_r = \max_{0 \leq t \leq 1} |g^{(r)}(t)|.$$

Якщо функція $f(x, y, z)$ трьох змінних наближається сплайном першого степеня за змінною x на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$ або за змінною y на інтервалі $[y_l, y_{l+1}]$, або за змінною z на інтервалі $[z_p, z_{p+1}]$, то, наприклад, аргумент $t1$ у функції $g(t1, y, z) = f(x + t1(x_{k+1} - x_k), y, z)$ буде належати одиничному інтервалу $t1 \in [0, 1]$. Тому, застосувавши до цієї функції написану вище оцінку, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \exists C = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial x^{r1} \partial y^{r2} \partial z^{r3}} f(x, y, z) \right| \times \\
 \text{EMBED Equation.3} \quad G_{r1,1} G_{r2,1} G_{r3,1} \\
 \|RLf(x, y, z)\|_{L_\infty[0,1]} \leq C \Delta 1^{r1} \Delta 2^{r2} \Delta 3^{r3}.
 \end{aligned}$$

Якщо врахуємо ці оцінки у формулі (3.28), то отримаємо доведення наслідку зі сталими

$$\begin{aligned}
& M_{r1,r2,r3}(f)_{\substack{[x_k, x_{k+1}] \\ [y_l, y_{l+1}] \\ [z_p, z_{p+1}]}} = \\
& \text{EMBED Equation.3} \quad \max_{\substack{0 \leq t1 \leq 1 \\ 0 \leq t2 \leq 1 \\ 0 \leq t3 \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial t1^{r1} \partial t2^{r2} \partial t3^{r3}} f(t1, t2, t3) \right| = \\
& = \max_{\substack{0 \leq t1 \leq 1 \\ 0 \leq t2 \leq 1 \\ 0 \leq t3 \leq 1}} \left| \frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial t1^{r1} \partial t2^{r2} \partial t3^{r3}} f(x_k + t1(x_{k+1} - x_k), y_l + t2(y_{l+1} - y_l), z_p + t3(z_{p+1} - z_p)) \right| = \\
& \text{EMBED Equation.3} \quad = \Delta 1^{r1} \Delta 2^{r2} \Delta 3^{r3} \times \max_{\substack{x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ y_l \leq y \leq y_{l+1} \\ z_p \leq z \leq z_{p+1}}} \left| \left(\frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial x^{r1} \partial y^{r2} \partial z^{r3}} f \right) (x, y, z) \right|, \\
& C = G_{r1,1} \cdot G_{r2,1} \cdot G_{r3,1}.
\end{aligned}$$

Теорема 3.3 доведена.

Зауваження. За допомогою формул (3.30) та (3.31) можна визначити коефіцієнт C .

Якщо $r1 = r2 = r3 = 1$ (тобто відома перша похідна), тоді з нерівності (3.30)

виходить, що $C = \frac{1}{8}$, а якщо відомі ще й другі похідні, то завдяки (3.31) можемо

встановити, що $C = \left(\frac{1}{8}\right)^3$.

Глава 4. Практична реалізація викладених вище методів

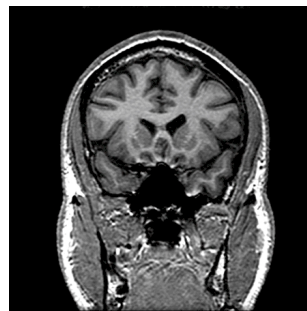
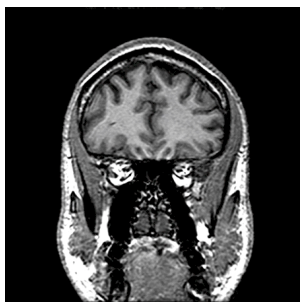
За викладеною методикою був розроблений комплекс програм в системі комп'ютерної математики *Matlab*. Результати її тестування демонструють високу точність.

4.1. Представлення томограм у середовищі Matlab

Кожний малюнок Matlab має площину (*Figures*) для рисування, яка, по суті, являється двовимірним масивом пікселів. Кожному елементу цього масива, в свою чергу, ставиться у відповідність атрибут, тобто колір. Відмітимо, що при програмуванні в Matlab використовується RGB модель кольору, у відповідності до якої будь – який колір можна представити як суперпозицію трьох основних кольорів – червоного (Red), зеленого (Green) та синього (Blue). Кожна з компонент Red, Green, Blue задається одним байтом і відповідає $2^8 = 256$ відтінків кольорів (значення інтенсивності змінюється від 0 до 255, число 255 відповідає кольору найбільшої інтенсивності). Повна кількість кольорів, яку можна задати трьома байтами, складає $256^3 = 16777216$, що є близьким до кольорової здатності ока людини (ця модель має назву TrueColor).

Комп'ютерний томограф видає томограми у спеціальному форматі, який є доступним лише для томографів. Існує спеціальна програма, яка переводить цей формат у формат .bmp, який розпізнає і комп'ютер.

Нехай задані п'ять томограм (рис. В.1), які представляються у вигляді файлів у форматі .bmp - x1.bmp, x2.bmp, x3.bmp, x4.bmp, x5.bmp (розмір томограм повинен бути однаковим, в цьому випадку – 450*450 пікселів).



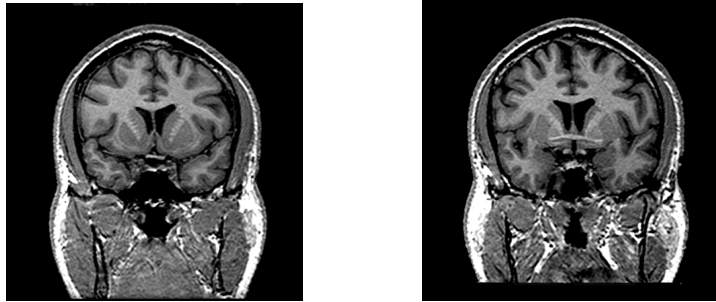


Рис.4.1. Набір томограм, які отримані з комп'ютерного томографу.

Ці томограми представимо, як одномірний масив у вигляді наступної функції

1. *function A = A(i)*

Тут i – номер малюнку.

2. *if i == 1*

3. *c = imread('x1.bmp');*

Функція `imread('x1.bmp')` – читає графічний файл `x1.bmp`, тобто виводить матрицю чисел. Кожний елемент матриці інтерпретується як значення RGB, тобто відповідає інтенсивності кольору у відповідному пікселі.

4. *elseif i == 2*

5. *c = imread('x2.bmp');*

6. *elseif i == 3*

7. *c = imread('x3.bmp');*

8. *elseif i == 4*

9. *c = imread('x4.bmp');*

10. *elseif i == 5*

11. *c = imread('x5.bmp');*

12. *end*

13. *A = image(c);*

Функція `image(c)` перетворює матрицю чисел в малюнок.

Результат роботи функції `A(5)`

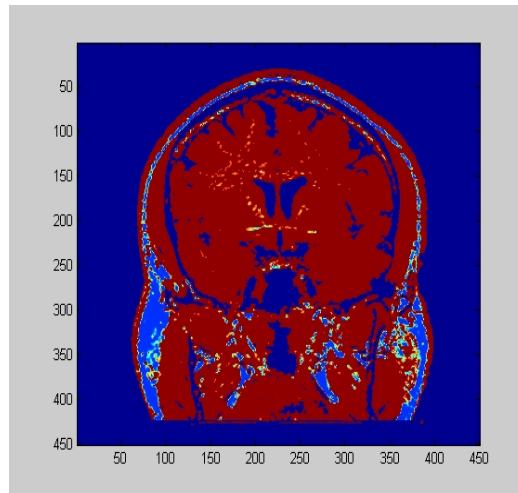


Рис. 5.2. Результат роботи функції $A(5)$.

Тобто ми представили набір томограм у вигляді функції $A(i)$.

Якщо треба працювати не з цілими малюнками, а з окремими пікселями, то наведена вище функція набуде наступний вигляд

1. *function* $A = A(i,y,z)$

Тут i – номер малюнка, (y,z) – координати пікселя, з яким треба працювати.

2. *if* $i == 1$

3. $c = \text{imread}('x1.bmp');$

4. *elseif* $i == 2$

5. $c = \text{imread}('x2.bmp');$

6. *elseif* $i == 3$

7. $c = \text{imread}('x3.bmp');$

8. *elseif* $i == 4$

9. $c = \text{imread}('x4.bmp');$

10. *elseif* $i == 5$

11. $c = \text{imread}('x5.bmp');$

12. *end*

13. $A=c(y,z)$

Наприклад, функція $A(5, 100, 100)$ видає в результаті число 96. Тобто

інтенсивність кольору в пікселі з координатами (100, 100) п'ятого малюнку дорівнює 96

4.2. Matlab – програми відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла між паралельними томограмами

Нехай треба відновити внутрішню структуру головного мозку людини між томограмами, які лежать на паралельних площинах. Тобто треба знайти значення тривимірної функції між паралельними площинами.

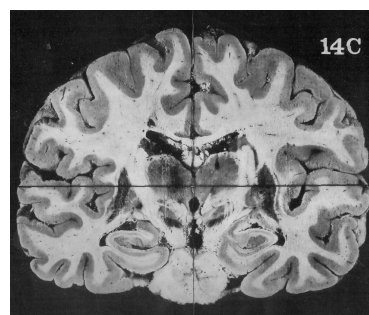
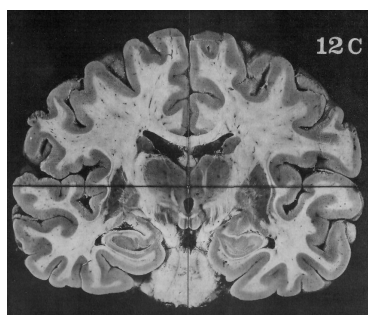
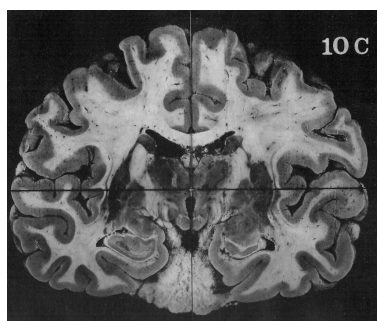
Нехай задані тривимірні функції $f(x, y, z)$ і $f(x, y, z)$ і рівняння площин: $x = x_1$ та $x = x_2$. Відновлювати значення функції $f(x, y, z)$ між заданими площинами будемо за допомогою оператора лінійної інтерполяції

$$P(f(x, y, z)) = f(x_1, y, z) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$P(f(x, y, z)) = f(x_1, y, z) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{Ж.1})$$

Продемонструємо роботу цього оператора на прикладі головного мозку людини.

Вхідними даними є набір томограм, які лежать на системі паралельних площин (рис.Ж.1).



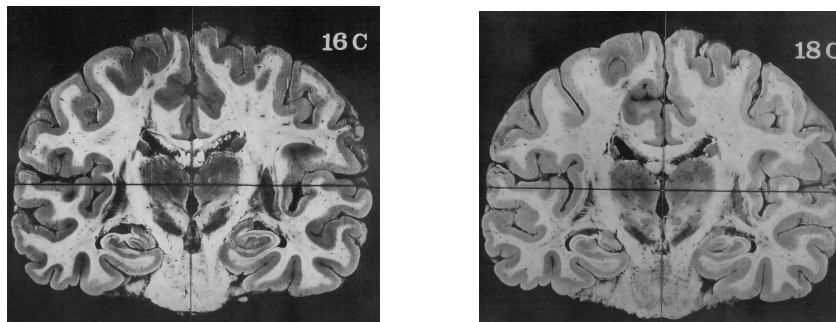


Рис.Ж.1. Томограми, що лежать на системі площин, які паралельні осі Oz.

Набір томограм представляється у вигляді функції $A(i)$, як це показано у додатку В

Функція, яка відновлює внутрішню структуру головного мозку між паралельними площинами, має вигляд:

1. ***function brainz = brainz(z)***

Тут z – число від 0 до 1. Тобто задається рівняння площини, в якій треба відновити внутрішню структуру (без обмеження загальності вважаємо, що тривимірне тіло лежить всередині одиничного куба).

2. **$M = 5$;** (M – кількість заданих томограм)

3. **$k = \text{floor}(M * z)$;**

Функція $\text{floor}(A)$ округляє число A до найближчого цілого в меншу сторону, тобто $\text{floor}(0,2)=0$ і $\text{floor}(0,8)=0$. Ця функція необхідна для того, щоб зробити перемасштабування, тобто помістити заданий тривимірний об'єкт в одиничний куб.

4. **$r1 = A(k)$;**

5. **$r2 = A(k + 1)$;**

На кроці 4 та 5 визначається, між якими томограмами лежить введена площина.

6. **$R1 = \text{immultiply}(r1, (k + 1 - z * M))$;**

7. **$R2 = \text{immultiply}(r2, (k - z * M))$;**

8. **$R = \text{imsubtract}(R1, R2)$;**

Кроки 6 – 8 відповідають формулі (Ж.1).

Оператор $\text{immultiply}(X, a)$ визначає добуток зображення X , тобто масиву

значень від 0 до 255, на число a . Якщо значення добутку перевищує заданий діапазон, то воно усікається, а дробові значення округляються.

Оператор $imsubtract(X, Y)$ визначає різницю двох зображень X та Y , тобто двох масивів значень від 0 до 255. Розмірність матриць X та Y повинна бути однаковою.

9. **$brainz = image(R);$**

Функція $image(R)$ перетворює отриману матрицю значень в малюнок.

Результати роботи функції $brainz(z)$ представлені на рис Ж.2.

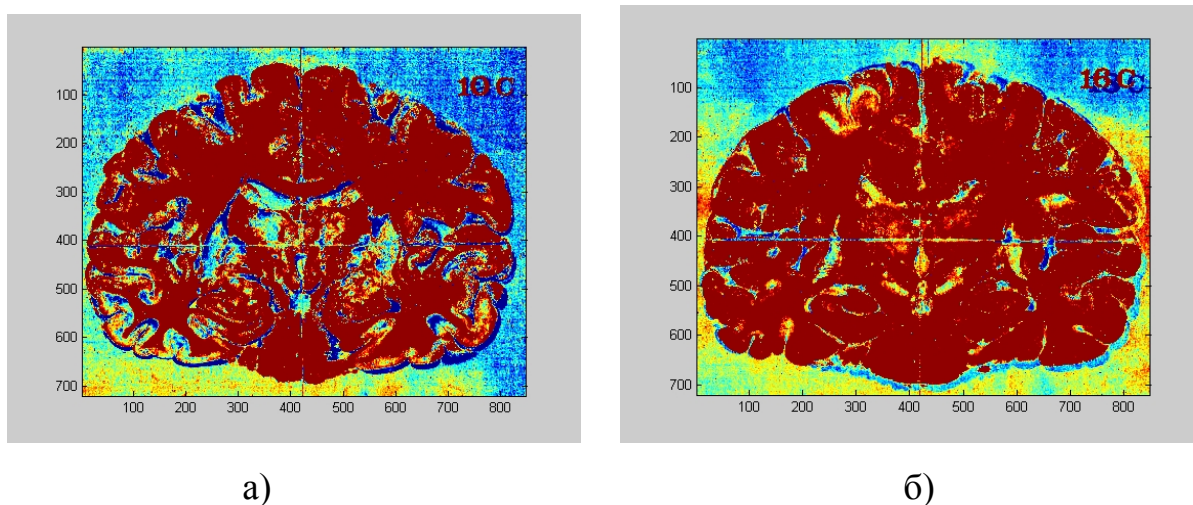


Рис. Ж.2. Результати роботи програми $brainz(z)$.

а) $brainz(0,3)$ – переріз головного мозку площиною $z = 0.3$, тобто відновлено зображення тривимірного тіла між першою та другою томограмою (Рис. Ж.1);

б) $brainz(0,9)$ – переріз головного мозку площиною $z = 0.9$, тобто відновлено зображення тривимірного тіла між четвертою та п'ятою томограмою (Рис. Ж.1).

4.3. Обчислювальний експеримент

Продемонструємо результати роботи програми, яка дозволяє знайти перетини тривимірного тіла в будь – якій площині за відомими томограмами на системі трьох взаємно перпендикулярних площинах ($Brain.m$), а також за

томограмами, перпендикулярними тільки одній вісі OX (*Brainox.m*) або тільки вісі OY (*Brainoy.m*), або тільки вісі OZ (*Brainoz.m*).

Вихідними даними програми є сукупність томограм (файлів у форматі *bmp*), які зображають перетини цього тіла на системі трьох груп взаємно перпендикулярних площин. Тобто ця сукупність файлів є масивом томограм, причому належність файлу до однієї з груп паралельних томограм визначається його назвою (наприклад, *A1.bmp*, *A2.bmp*, *A3.bmp* – томограма, які належать першій групі площин, *B1.bmp*, *B2.bmp*, *B3.bmp* – томограми, які належать другій групі площин, *C1.bmp*, *C2.bmp*, *C3.bmp* – належать третій групі площин).

Оператори сплайн-інтерфлетації реалізовані в програмі у вигляді окремих функцій $L1(i, k, l, x)$, $L2(k, l, i, x)$, $L3(l, i, k, x)$, $LL1(k, l, i, x)$, $LL2(l, i, k, x)$, $LL3(i, k, l, x)$, $LLL(i, k, l, x)$. Ці функції відповідають операторам, визначеним в теоремі (3.12). Кожна з цих функцій обчислює номери томограм, найближчих до точки з координатами (x_1, x_2, x_3) , та за цими номерами звертається до конкретних елементів тривимірного масива томограм.

Пропонуються результати візуалізації точного розв'язку та отриманого експериментально для випадку, коли відома точна функція.

Нехай є функція, наприклад, такого вигляду:

$$f(x, y, z) = A \cdot x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot g3(z) + x \cdot z \cdot g2(y) + z \cdot y \cdot g1(x) + x \cdot h1(y, z) + y \cdot h2(x, z) + z \cdot h3(x, y) \quad (3.32)$$

де

$$\begin{aligned} h1(y, z) &= (y - a) + (z - a), \\ h2(x, z) &= (x - a) + (z - a), \\ h3(x, y) &= (x - a) + (y - a), \\ g1(x) &= x - a, \\ g2(y) &= y - a, \end{aligned}$$

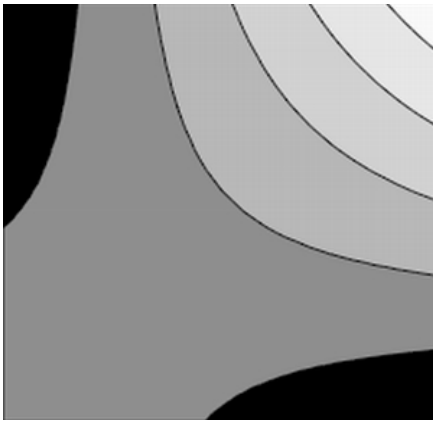
$$g_3(z) = z - a,$$

$$A = 2,$$

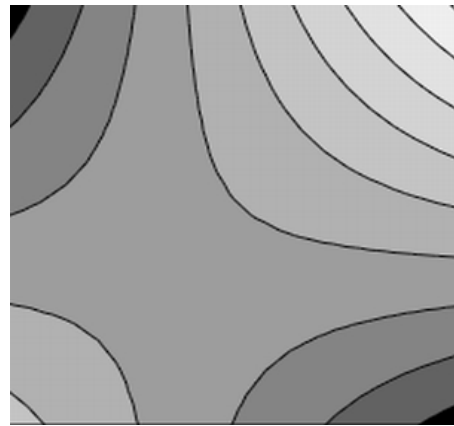
$$a = 0.25$$

Згідно з теоретичними твердженнями на функціях такого вигляду похибка наближення дорівнює нулю або постійній, тобто точний та експериментально отримані розв'язки повинні практично співпадати.

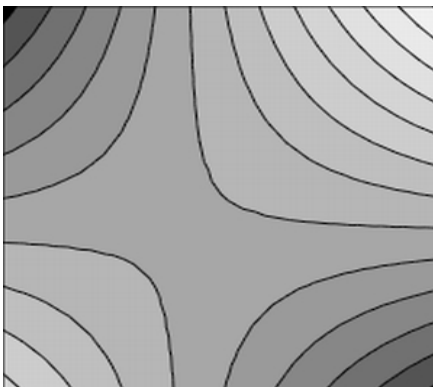
З цієї функції були отримані вихідні дані – перерізи функції площинами $x = 0.2, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.8$, які представлені на рис. 3.1.



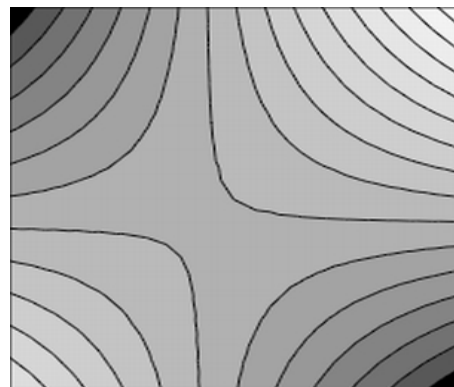
$x = 0.2$



$x = 0.4$



$x = 0.6$



$x = 0.8$

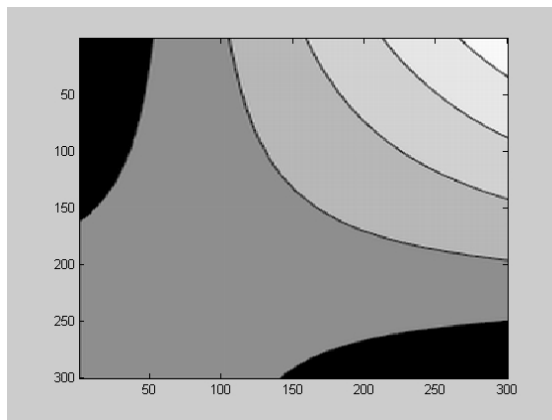
Рис. 3.1. Зображення перерізів функції (3.31) площинами $x = 0.2, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.8$

Оскільки отримане тіло буде симетричне, то зображення перерізів площинами, перпендикулярними осям y та z будуть аналогічними.

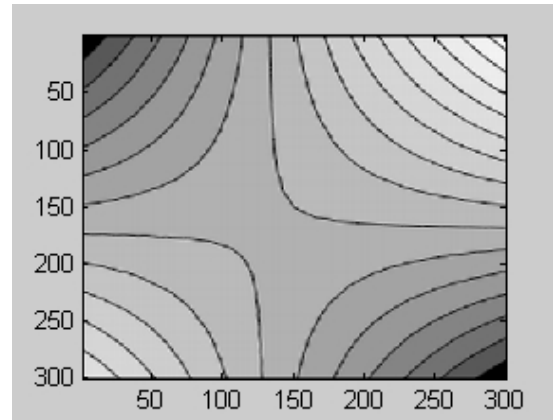
Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики Mathcad. Була складена програма $brain(a,b,c,d)$, за допомогою якої можна знайти зображення перерізу тривимірного тіла площиною, що має рівняння:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Результати роботи програми представлені на рис. 3.2 – 3.5.

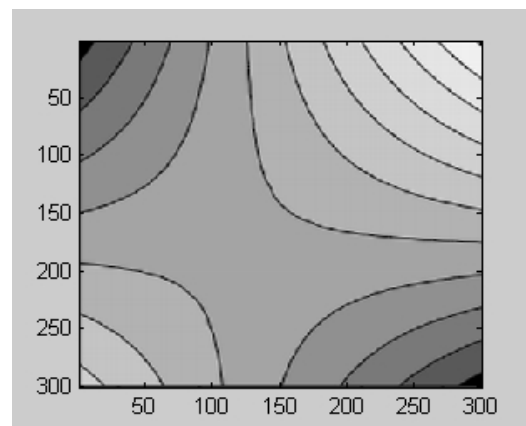
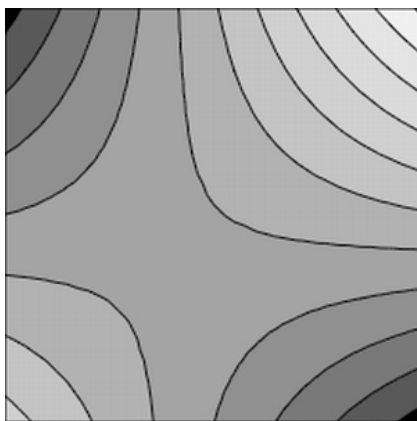


$brain(1,0,0,-0.2)$



$brain(1,0,0,-0.8)$

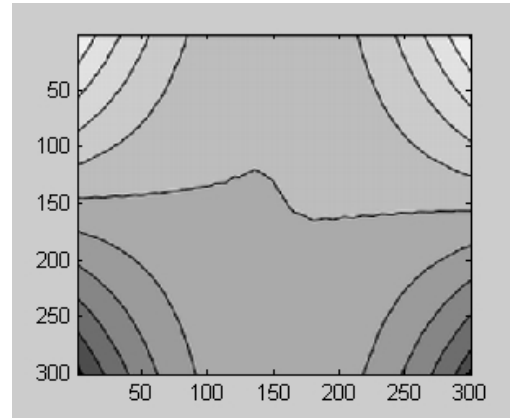
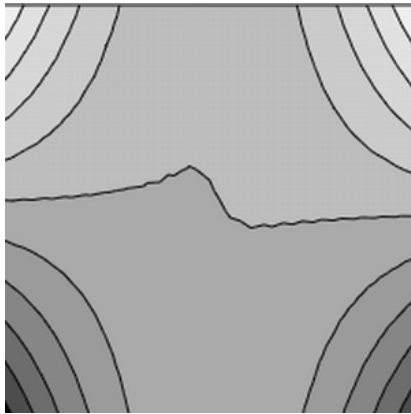
Рис. 3.2. Перерізи тривимірного тіла, заданого рівнянням (3.31) площинами $x = 0,2$ та $x = 0,8$



$$y=0.5$$

$$\text{brain}(0,1,0,-0.5)$$

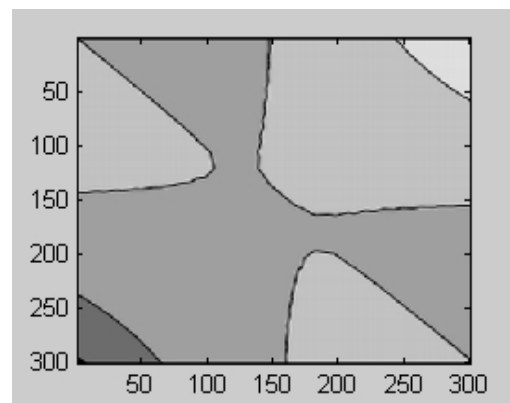
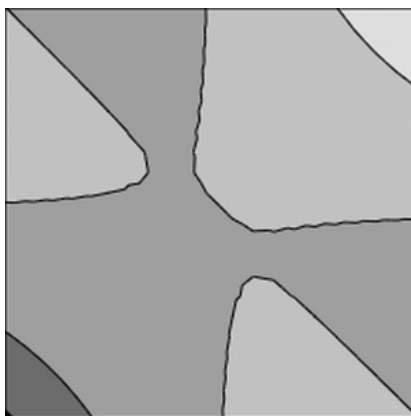
Рис. 3.3. Переріз тривимірного тіла, заданого рівнянням (3.31) площиною $y = 0,5$ (точний розв'язок) та переріз тією ж площиною, отриманий наближено



$$x + y = 0$$

$$\text{brain}(1,1,0,0)$$

Рис. 3.4. Переріз тривимірного тіла, заданого рівнянням (3.31) площиною $x+y = 0$ (точний розв'язок) та переріз тією ж площиною, отриманий наближено



$$x + y + z = 0$$

$$\text{brain}(1,1,1,0)$$

Рис. 3.5. Переріз тривимірного тіла, заданого рівнянням (3.31) площиною $x+y+z = 0$ (точний розв'язок) та переріз тією ж площиною, отриманий наближено

З цих всіх малюнків видно, що точні розв'язки співпадають з

експериментально отриманими, тобто підтверджується викладена вище теорія.

Продемонструємо обчислювальний експеримент для невідомого тривимірного тіла на прикладі головного мозку людини.

Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики Matlab. Було складено програми:

Brain.m - дозволяє знайти перетини тривимірного тіла у будь-якій площині за томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин ,

Brainox.m - знаходить перетини тривимірного тіла за томограмами, що лежать на площинах, перпендикулярних тільки вісі OX ,

Brainoy.m – знаходить перетини тривимірного тіла за томограмами, що лежать на площинах, перпендикулярних тільки вісі OY ,

Brainoz.m – знаходить перетини тривимірного тіла за томограмами, що лежать на площинах, перпендикулярних тільки вісі OZ .

Для прикладу в якості даних Радона були взяті малюнки, отримані з пакета програм “Digital Anatomist” (100 малюнків, перпендикулярних вісі x , 110 малюнків, перпендикулярних вісі y , 35 малюнків, перпендикулярних вісі z). Усі знімки взяті з постійним кроком 1,3 мм (рис. 3.6 – 3.8.).

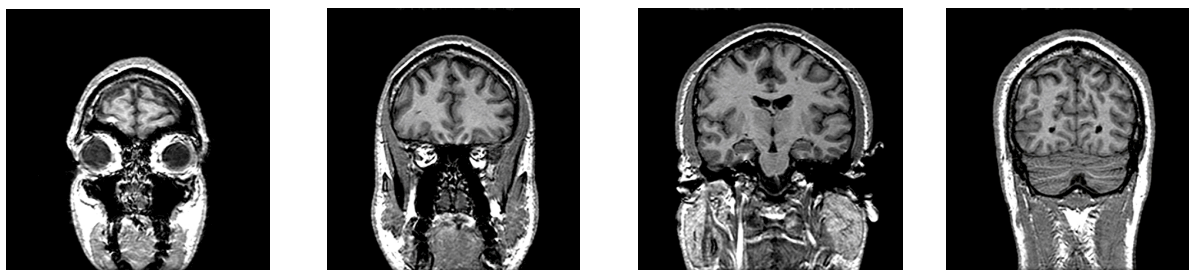


Рис. 3.6. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OX

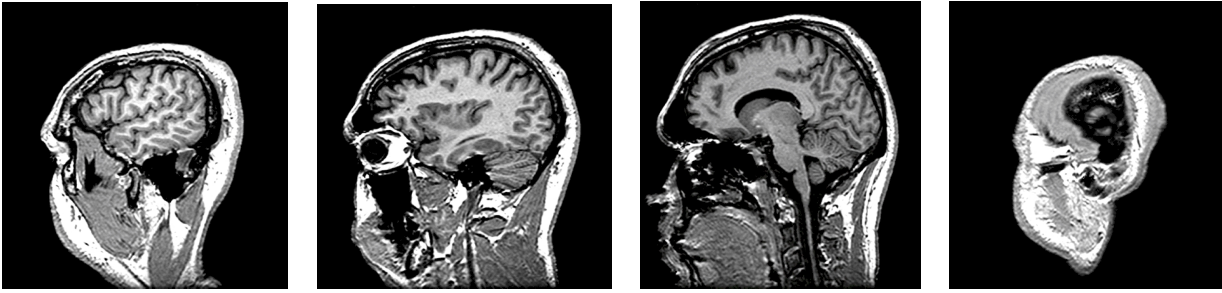


Рис. 3.7. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OY

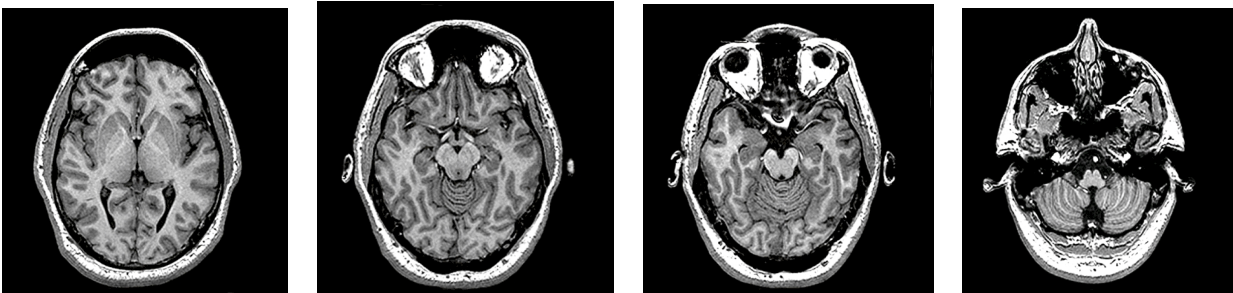
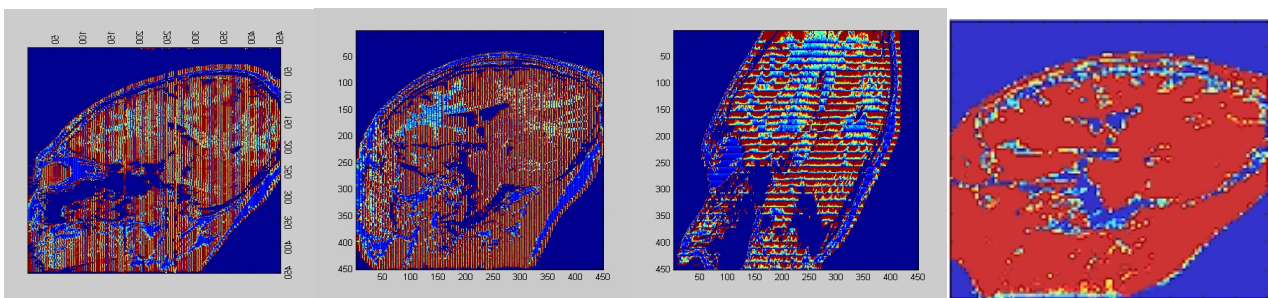


Рис. 3.8. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OZ

В усіх чотирьох програмах шукався переріз головного мозку площиною, заданою рівнянням: $x+y+10z+1=0$. Були отримані результати, представлені на рис. 3.9.



а)

б)

в)

г)

Рис. 3.9. а) результат програми Brainox;
б) результат програми Brainoy;
в) результат програми Brainoz;

г) результат програми Brain.

З рисунків 3.8 видно, що четвертий малюнок дає більш точний результат, ніж інші. Тобто можна зауважити, що оператор інтерфлетації функцій трьох змінних на системі взаємно перпендикулярних площин має похибку $O(\varepsilon^3)$.
 $O(\varepsilon^3)$, якщо вони використовують оператори класичних методів (інтерполяції) за кожною із змінною, що мають похибку $O(\varepsilon)$.
 $O(\varepsilon)$.

Протестуємо ці результати в залежності від кроку вхідних даних. Представлені на рис. 3.8 результати отрималися, якщо крок вхідних даних дорівнює 0.01 продемонструємо результати програм *brain* та *brainx*, якщо крок вхідних даних збільшити.

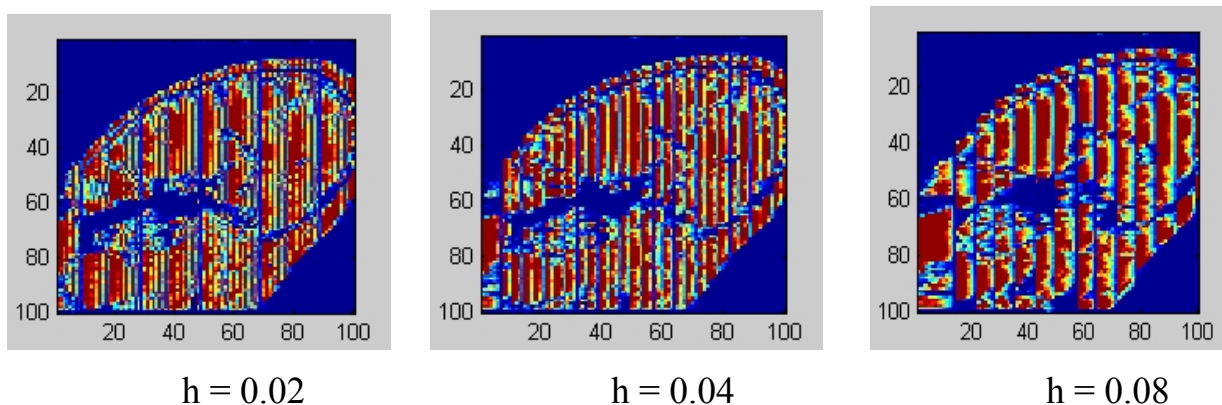


Рис. 3.10. Тестування програми *brainx* в залежності від кроку вхідних даних.

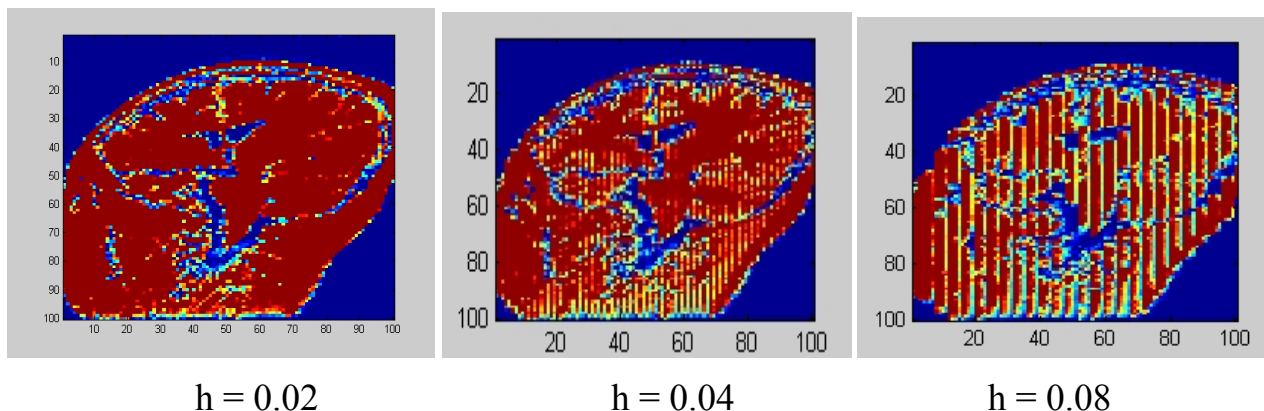


Рис. 3.11. Тестування програми *brain* в залежності від кроку вхідних даних.

З рисунків 3.10 та 3.11 видно, що чим менше крок, з яким беруться вхідні дані, тим точніше результат відновлення ($O(h^6)$ для *brain* та $O(h^2)$ для *brainx*).

Список використаних джерел

1. Radon J. Uber die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralvertheilung gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften. Leipzig, Mathem. – Phys. Kl, 69, 1917. – P. 262 -267.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. Пер. с англ.– М.: Мир, 1983. – 350 с.
3. Хелгасон С. Преобразование Радона: Пер. с англ. - М: Мир, 1983. – 152 с.
4. Луитт Р.М. Алгоритм реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР. – 1983. – Т. 71, №3. – С.125 – 148.
5. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. – М: Мир, 1990. – 279 с.
6. Natterer F. Mathematische methoden in der tomography. Proc. 9-th Conf “Probl. And meth. Math. Phys.”- Karl – Marx – Stadt. -1988. – P. 207 – 216.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Рубашов И.Б., Тимонов А.А. О постановке основных задач компьютерной томографии.- 1982.- 19 с. (Препринт № 141. – М: Ин-т прикладной математики АН СССР).
8. Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Некоторые аспекты математического моделирования рентгеновских томографов. Математическое моделирование. Современные проблемы матем.физики и вычислительной математики. Сб. научн. тр. М.: Наука, 1989. – с. 33 – 39.
9. Тихонов А.Н., Тимонов А.А., Арсенин В.Я. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. – 159 с.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
11. Терновой К.С., Синьков М.В., Закидальский А.И. и др. Введение в современную томографию. Под ред. К.С.Тернового и М.В. Синькова. – Киев: Наукова думка, 1983.– 231 с.

12. Губарени Н.М. Вычислительные методы и алгоритмы малоракурсной компьютерной томографии. – К: Наукова думка, 1997. – 326 с.
13. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с нею вопросы теории представлений. – М: Физматгиз, 1962. – 656 с.
14. Лундин А.Г., Федин Э.И. ЯМР – спектроскопия. – М.: Наука, 1986. – 210 с.
15. Вопросы реконструктивной томографии. Сб. Научн. Трудов/ Под ред. А.С.Алексеева, М.М.Лаврентьева, Н.Г.Преображенского. – Новосибирск: ВЦ АН СССР, 1985. – 187 с.
16. Власов П.В., Свиридов Н.Н. Лауреаты Нобелевской премии за 1979 г. По медицине. – Г.Н.Хаунсфилд и А.М. Кормак. Природа. №1. 1980.
17. Bracewell R.N. Two-Dimensional Imaging. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey 07632. 1995.– 595 p.
18. Bracewell R.N., Riddle A.C. Strip integration in radio astronomy. Aust. J. Phys., 1956.– Vol. 9.– P. 198 – 217.
19. Bracewell R.N., Riddle A.C. Inversion of fan-beam scans in radio astronomy. The astrophysical Journal.– 1967, Vol.150.– P. 427 – 434.
20. Cormack A.M. Representation of a function by its line integral, with some radiological applications. J. Appl. Phys.–1963. – Vol. 34.– P.2722-2727.
21. Cormack A.M. Mathematics: The Unifying Thread in Science.// Notices of the Amer. Math. Soc.– 1986. –Vol.33, № 5.– P. 716 – 720.
22. Hounsfield G.N. Computerized transverse axial scanning (tomography). 1. Description of system. Brit. J. Radiol. –1973.–Vol.46, N 552.– P.1016-1022.
23. Shepp L.A., Logan B.F. The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-21.–1974.– P. 21-43.
24. Yan V.X.D., Gordon M.L., Mok A., Zhao Y., Chen Z., Wilson B.C. Improved phase-resolved optical Doppler tomography using Kasai velocity

- estimator and histogram segmentation // Optics Communications. – 2002.–208, №4-6. – P.209 – 214.
25. Gottlieb D., Gustafsson B. On the direct Fourier method for computer tomography. Upsala University, Department of Scientific Computing, March 28, 1998.– P.1-31. <http://www.tdb.uu.se/archive/reports/index.html> № 207.
 26. Введенская Н.Д., Гиндикин С.Г. Формула Пуассона для преобразования Радона и ее численный метод реконструкции // ДАН СССР.– 1984.– Т.279, №4.– С.1221-1222
 27. Введенская Н.Д., Гиндикин С.Г. Дискретное преобразование Радона и реконструкция изображений // М.: Вопросы кибернетики, 1990.–№ 157.– С. 57 – 99.
 28. Воскобойников Ю.Е. Построение сглаживающих кубических сплайнов при машинной обработке результатов эксперимента // Автометрия.– 1979. – № 2.–С. 110-117.
 29. Воскобойников Ю.Е., Пикалов В.В., Седельников А.И. Регуляризирующий алгоритм Фурье – реконструкции // Материалы второго всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии (4 – 7 июля 1986 г.).– Куйбышев, 1986. – С. 40 - 41.
 30. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984.
 31. Kruger P.P., Morris R.A., Wecksung G.W. Application of industrial computerized tomography at Los Alamos Sci. Lab // IEEE Trans. Nucl. Sci. – 1981. – V. NS – 28
 32. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. – М: Радио и связь, 1989.– 239 с.
 33. Гончар С.И. Приближение функций при помощи дискретного обращения их преобразования Радона: Автореф. дис... д.ф.м.н.– М., 1987.

34. Гончар С.И. Приближение разрывных функций с помощью дискретного обращения их преобразования Радона // Теория функций и ее приложения. – М., 1986.– С. 24 – 27.
35. Tillack G.-R., Samadurau Г, Artemiev V.M., Naumov A.O. Statistical characterization of multi-phase flow by dynamic tomography // Review of Progress in QNDE.–2003.–Vol.22.–P.643–650
36. Tillack G.-R., Goebbels J., Illerhaus B., Artemiev V.M., Naumov A.O. Statistical characterization of complex object structure by dynamic tomography // Review of Progress in QNDE.–2002.–Vol.21.–P.764–771.
37. Попов Д.А. Исследование алгоритма свертки и обратной проекции. Вопросы реконструктивной томографии. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1985.– С.136 – 152.
38. Попов Д.А. Сходимость класса алгоритмов численного обращения преобразования Радона // Вопросы кибернетики.–1990.– № 157. – С. 140 - 200.
39. Булыгин Ф.В. Особенности спектротомографии в четырехмерном пространстве // Автометрия.– 2005.–Т.41, №3.–С.70 –79.
40. Лент Р.М. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований.// ТИИЭР, 1983.–Т.71, №3. – С. 21-29.
41. Луис А.К., Наттерер Ф. Математические проблемы реконструктивной томографии // ТИИЭР, 1983.– Т.71, №3. – С. 111-125.
42. Пикалов В.В., Непомнящий А.В. Итерационный алгоритм с вейвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // Вычислительные методы и программирование.– 2003.–Т.4.–С. 244 -253.
43. Пикалов В.В., Лихачев А.В. Применение метода Гершберга – Папулиса в трехмерной доплеровской томографии // Вычислительные методы и программирование.–2004.–Т.5.–С. 146-153.
44. Likhachev A.V., Pickalov V.V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography //

Computational Mathematics and Mathematical Physics.–2002.–Vol. 42, № 3.–P.341–352.

45. Deans S. R. The Radon Transform and some of its applications. N.-Y. Jony Wiley and Sons. 1983. – 289 p.
46. Richard J. Gardner. Geometric tomography. Cambridge University Press. – 1995. – 424 p.
47. Трофимов О.Е. Преобразование Фурье лучевых данных // Автометрия, 1993.– №4.– С.110 -112.
48. Трофимов О.Е. Алгоритм построения виртуальных рентгеновских проекций // Автометрия.–2005.–Т.41, №3.–С. 64–69.
49. Литвин О.М., Міхалкін В.В. Чисельна реалізація методу розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії з використанням кусково-сталих сплайнів // Доп. НАН України, 2002.–№3.- С.25-29.
50. Литвин О.М., Міхалкін В.В. Побудова кубатурних формул для функцій двох змінних з використанням кусково-сталих сплайнів і даних Радона // Наук. Праці XXXVIII науково-практичної конференції УПА. Секція 8. Фізико-матем. науки, Харків, 2004.– С.45-49.
51. Литвин О.М. Інтерлінація функцій. – Харків: Основа , 1992. –235 с.
52. Литвин О.М. Интерполирование функций. Учебное пособие. К.:УМКВО, 1988. –31 с.
53. Литвин О.Н. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа , 2002. –544 с.
54. Литвин О.М. Оператори плоскої задачі обчислювальної томографії, точні на поліномах // Доповіді АН УРСР.– 1991.– № 3. – С. 38-41.
55. Литвин О.М. Явні формули, що відновлюють функції $f(x, y, z)$ за їх проекціями на $M (M \geq 3)$ прямих // Доповіді АН УРСР. – 1993.–№ 4. –С. 35-39.
56. Литвин О.М., Литвин О.О. Метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Доповіді НАН України – 1998. -

№ 11.– С. 29-35.

57. Литвин О.М., Литвин О.О. Про один підхід до розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. –Київ, 1996. – С. 170 - 175.
58. Литвин О.М., Рвачов В.Л. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. - Київ: Наукова думка, 1973. – 122 с.
59. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. –М.: Радиотехника, 2003.– 510 с.
60. Бурлаков М. Adobe Illustrator 9: Справочник. – Спб: "Питер", 2002. – 608с.
61. Agoncillo, A.V., Mejino, J.L., Rosse C. Influence of the Digital Anatomist Foundational Model on Traditional Representations of Anatomical Concepts: In Proceedings, American Medical Informatics Association Fall Symposium. – 2002. – P. 2 – 6.
62. Келли Л. М. Autodesk 3ds Max 9. Библия пользователя. 3D Studio Max 9: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Диалектика», 2006.–1344 с.
63. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлєтації функцій. // Доповіді НАНУ. -2005. – №1. - С. 20-24.
64. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізованих площин з використанням інтерфлєтації функцій. // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. - С. 67-71.
65. Литвин О.Н., Першина Ю.І. Восстановление внутренней структуры трехмерных объектов по их следам на системе трех групп пересекающихся плоскостей с использованием интерфлєтации функции. // Компьютерная математика. – Киев, 2006. – №1. –С.70 – 79.
66. Литвин О.Н., Першина Ю.І. Восстановление внутренней структуры

трехмерного объекта по его томограммам, лежащим в системе трех групп пересекающихся плоскостей // Автометрия. – 2006. –Т.42, №2. – С.107 – 118

67. Литвин О.М., Першина Ю.І. Відновлення тривимірних об'єктів за їх слідами на системі перерізаних площин з використанням інтерфлетації функцій.// Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів: Праці сьомої міжнародної всеукраїнської конференції (11-15 жовтня 2004 р.). – Київ. - 2004р. –С.221-224
68. Oleg N. Lytvyn, Yulia I. Pershina Reconstruction of 3 – D objects with use interflation of functions. // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів: Proceeding of the Second IASTED International Multi – Conference on Automation, Control, and Information Technology (June 20 – 24 2005). – Novosibirsk. – 2005. – P.274 – 279.
69. Литвин О.М., Першина Ю.І. Про метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інтерфлетації. // Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXII): Праці міжнародної конференції (19-23 вересня 2005р.). – Київ. – 2005. – С.128 – 129..
70. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. –К.: Наукова думка, 1990. – 128 с.
71. Ramachandran G.N., Lakshminarayanan A.V. Three-dimensional reconstruction from radiograph and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. // Proc. Nat. Acad. Sci. US. – 1971.– P. 2236 – 2240.
72. Kaczmarz S. Angenagerte Auflosung fon Systemen linearer Gleichungen // Bull. Acad. Poll. Sci. Lett., A35. – 1937. – P. 335-357.
73. Недашковський М.О. Методи та алгоритми комп'ютерної алгебри для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з поліноміальними елементами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. Наук: 01.05.02/ Ін-тут проблем машинобудування НАН України. – Харків, 1995. – 43 с.

74. Седельников А.И., Чернов Е.И. Измерение газодинамических полей плотности с использованием методов вычислительной томографии // Новосибирск, 1988. – 42с. (Препр. / АН СССР. Ин-т теор. и прикл. механики; 20 – 88).
75. Халфин Л.А. Об одной альтернативе традиционной вычислительной томографии // Зап. Научн. Семина. ЛОМИ. – 1990. –С. 271 – 278.
76. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. – М: Радио и связь, 1989. – 224 с.
77. Блинов НН. Современные методы компьютерной томографии и их применение // Томография: Научно – техническая конференция (22 марта 2005г). – Москва, 2005. – С. 3.
78. Finch D.V. Cone Beam Reconstruction with Sources on a Curve // SIAM J. Appl. Math. –1985. –№45. – P. 665 – 673.
79. Anilonov D.S., Prokhorov I.V., Kovtanyuk E.E. Investigation of Scattering and Absorbing Media by the Methods of the X – ray Tomography // J. Inv. Ill – Posed Problems. 1993. –№1. – P. 259 – 281.
80. Bondarenko A., Antyufeev V. X-ray Tomography in Scattering Media // Institute of Mathematics. – Novosibirsk – 1990. –P.63.
81. Hertle A. The Identification Problem for the Constantly Attenuation Radon Transform // Math. Z. – 1988. – №198. – P.13 – 19.
82. Natterer F. Determination of Tissue Attenuation in Emission Tomography of Optically Dense Media // Inverse Problem 9. – 1993. – №9. – P. 731 – 736.
83. Bronnikov A.V. Degradation Transform in Tomography // Pattern Recognition Letters. – 1983. – №15. – P. 527 – 592.
84. Green P.J. Bayesian Reconstruction from Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm // IEEE Transaction on Medical Imaging. – 1990, № 9(1). – P. 84 – 93.
85. Devaney A.J. Filtered Backpropagation algorithm for Diffraction

- Tomography // Ultrasonic Imaging. – 1982. – №4. – P. 336 – 350.
86. Кириллов А.А. Об одной задаче И.М. Гельфанда // ДАН СССР. – 1961. – № 2. – С. 22 –26.
87. Tuy H.K An inversion formular for cone-beam reconstruction // SIAM. J. Appl. Math. – 1983. – Vol.43, №3. – P.546.
88. Гельфанд И.М., Гончаров А.Б. Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР. – 1986. –Т. 290, №4. – С.31 – 34.
89. Орлов С.С. Теория трехмерной реконструкции. Оператор восстановления // Кристаллография. – 1975. – Т. 20, №4. – С. 22 –35.
90. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1978. – 156 с.
91. Благовещенский А.С. О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. Заметки. – 1986. – Т.39, №6. – С.52 –58.
92. Трофимов О.Е. К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия. – 1991. – №5. – С.57 – 67.
93. Смирнов К.К., Трофимов О.Е. Восстановление функции по ее интегралам на прямых // Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ: Материалы всесоюз. конф. – Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1979. – С.152 – 154.
94. Жирнов В.Т., Смирнов К.К., Трофимов О.Е. О численных методах решения задач томографии // Методы и средства обработки изображений. – Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1982.
95. Трофимов О.Е., Тюренкова Л.В. Об одном способе восстановления изображения по многокурсовой томогамме / Новосибирск, 1989. – 28с. (Препр./ ИАиЭ СО АН СССР;440).

96. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 196с.
97. Семянников В.И. Однородные функции и некоторые задачи интегральной геометрии в пространствах постоянной кривизны // ДАН СССР. – 1961. – Т.136, № 2. – С.57 – 60.
98. Касьянова С.Н., Трофимов О.Е. Компьютерное моделирование алгоритма трехмерной томографии для траектории источника, состоящей из двух пересекающихся окружностей // Автометрия. – 1996. – № 6. – С. 50 –56.
99. Шапошникова Е.В. О точности определения границ объекта при томографической реконструкции в конусах лучей // Автометрия. – 2004. – Т.40, № 1. – С.36 – 40.
100. Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е. Численное моделирование в томографии и условно – корректные задачи. –Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999. – 169 с.
101. Trofimov O.E. Instrumentation and Data Processing // Optoelectronics. – 1996. – N 2. – P. 65-67.
102. Trofimov O.E. The modeling of the computer tomography // The Lecture Notes in Computer Science. – 1993. – №19.– P. 564-571.
103. Пикалов В.В., Лихачев А.В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии // Вычислительные методы и программирование. – 2004. –№5. – С. 170 – 183.
104. Noo F., Defrise M., Clackdoyle R. Single – slice rebinning method for helical cone- beam Ct // Phys. Med. Biol. – 1999. – №44. –P. 561 – 570.
105. Defrise M., Noo F., Kudo H. Improved two- dimensional rebinning of helical cone – beam computerized tomography data Using John’s equation // Inverse Problems. – 2003. – №19.–P. 41 – 54.
106. Smith B.D. Cone – beam tomography: recent advances and tutorial review // J. Optical Engineering. –1990. – Vol.29, № 5.–P. 524 – 534.

107. Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W. Practical cone – beam algorithm // J. Opt. Soc. Am (A). – 1984. –Vol.1, № 6. –P.612 – 619.
108. Yan X., Leahy R.M. Cone – beam tomography with circular, elliptical and spiral orbits // Phys. Med. Biol. – 1992. – Vol.37, № 3. – P.493 – 506.
109. Grangeat P. Mathematical framework of cone – beam 3D – reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Mathematical Methods in Tomography: Proc. Of a Conf. – Germany. –1990. – P.66 – 97.
110. Tam K.C., Samarasekera S., Sauer F. Exact cone beam CT with spiral scan // Phys. Med. Biol. – 1998. – №43. – P. 1015 – 1024.
111. Kudo H., Noo F., Defrise M. Cone – beam filtered – backprojection algorithm for truncate helical data // Phys. Med. Biol. – 1998. –№43. – P.2885 – 2909.
112. Defrise M., Noo F., Kudo H. A solution to the long – object problem in helical cone – beam tomography // Phys. Med. Biol. – 2000.–№ 45. – P. 623 – 643.
113. Katsevich A. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone – beam CT // Phys. Med. Biol. – 2002. –№47. –P. 2583 – 2598.
114. Katsevich A. On two Versions of a 3π algorithm for spiral CT // Phys. Med. Biol. – 2004. – №49. – P. 2129 – 2143.
115. Kak A.C., Slaney M. Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988. – 232p.
116. Henrik T., Per-Erik Danielsson. Helical Cone-Beam Tomography // International Journal of Imaging Systems and Technology. – 2000. – Vol. 11, №1. – P. 91–100.
117. Defrise M., Noo F., Kudo H. A solution to the long object problem in helical CB tomography // Physics in Medicine and Biology. – 2000. – Vol. 45. – P. 623–643.
118. Kachelriess M., Schaller S., Kalender W. Advanced Single-Slice Rebinning in Cone-Beam Spiral CT // Medical Physics. – 2000. – Vol.27, № 4. – P.

754–772.

119. Grangeat P. Mathematical framework of cone – beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // *Mathematical Methods in Tomography: Proceedings of conference (Oberwokfach, Germany, 5 – 11 June, 1990).* – Berlin: Springer – Verlag, 1991. – P. 356 – 361.
120. Smith K.T., Solomon D.C., Wegner S.L. Practical and Mathematical Aspect of the Problem of Reconstruction Objects From Radiographs // *All AMS* 83. – 1977. – Vol. 23. – p. 1227 – 1270.
121. Smith B.D. Image Reconstruction from Cone – Beam Projections. Necessary and Sufficient Conditions and Reconstruction Methods // *IEEE Transections on medical Imaging.* – 1985. – № 4. - P. 14 – 25.
122. Gelfand I.M., Goncharov A.B. Recovery of a Compactly Supported Function Starting from Its Integrals over Line Interesting a Given Set of Points in Space // *Inverse problem.* – 1998. – №15. – P. 373 – 376.
123. Никольский С.М.. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками // *Математический сборник.* – 1958. – Т.45(87), №2. – С. 181 – 194.

Найважливіші позначення

$\forall$	– квантор загальності „для всіх”
$\exists$	– квантор існування „існує”
$\exists!$	– існує і єдиний
$\Rightarrow$	– впливає
$\Leftrightarrow$.3 $\Leftrightarrow$	– еквівалентно
$\wedge$	– логічне „і”
$\vee$	– логічне „або”
R	– множина дійсних чисел $x \in R \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$
R^n .3 R^n	– евклідів n - вимірний простір
$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow x_i \in R, i = \overline{1, n}$
N	– множина натуральних чисел, $N = \{1, 2, \dots\}$
$\overset{0}{N}$.3 $\overset{0}{N}$	– $N \cup \{0\}$
$\emptyset$.DSMT4 $\emptyset$	– пуста множина
$\{x : P_x\}, \{x P_x\}$.3 $\{x : P_x\}, \{x P_x\}$	– сукупність елементів x з властивістю P_x
$x \in A$.3 $x \in A$	– елемент x належить множині A
$x \notin A, \bar{x} \in A$.3 $x \notin A, \bar{x} \in A$	– елемент x не належить множині A
$A \cap B$	– переріз множин A і B (їхня спільна частина)
$A \cup B$	– об’єднання множин A і B
$A \subset B$	– множина A є частиною множини B
$A \setminus B$	– $\{x \in A : x \notin B\}$ різниця множин A і B
$\bar{A}$.3 $\bar{A}$	– замикання множини A
$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$.3 $\delta_{ij}, \delta_{i,j}$	– символ Кронекера, $\delta_{i,i} = 1, \delta_{i,j} = 0$, якщо $i \neq j$

I	– тотожний оператор
$C(G) \text{ .3 } C(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \in R^n$
$C^r(G) \text{ .3 } C^r(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \in R^n$ разом із частинними похідними порядку r
$C^{(r,m,n)}(G)$	– простір функцій, неперервних у $G \subset R^3$ разом із частинними похідними порядку r по першій змінній, m - по другій, n - по третій
РКТ	– радонівська комп'ютерна томографія
АО	– арифметичні операції

Монографія

СЕРГІЄНКО Іван Васильович

ЛИТВИН Олег Миколайович

ПЕРШИНА Юлія Ігорівна

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В
КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇЗ ВИКОРИСТАННЯМ
ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ**

Комп'ютерний набір: *Ю.І Першина*

Підписано до друку 12.10.2008 г. Формат 60 × 84 1/16. Папір офсетний.
Усл. печ. л. 9,5. Зам. № 92. Тираж 300 экз.

Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей, изготовителей
и распространителей издательской продукции
Серия ДК № 1356 от 15.05.2003 г.

E-mail: academ@kharkov.ua, yulia_pershina@mail.ru

© І.В. Сергієнко, О.М.Литвин, Ю.І. Першина
2009

