
УДК 517.9

А. М. БЛОХ

**О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ
РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. II**

Настоящая статья продолжает статью [1]. Обозначения и определения взяты из [1]. Напомним, что многообразиями мы называем одномерные разветвленные многообразия; ниже рассматриваются непрерывные отображения многообразий. В [2] доказаны следующая теорема и следствие.

Теорема I. Пусть $f: K \rightarrow K$ транзитивное отображение многообразия, $\text{Perf } f \neq \emptyset$. Тогда $K = \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i$, все K_i — связные компоненты, $K_i \cap K_j$ конечно при $i \neq j$, $fK_i \neq K_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-2$), $fK_{n-1} = K_0$, $f^n|_{K_i}$ обладает свойством спецификации.

Следствие I. Пусть $f: K \rightarrow K$ — транзитивно, $\text{Perf } f \neq \emptyset$. Тогда: 1) семейство $\{\nu \mid \nu \text{ — инвариантная мера, } \text{supp } \nu = \text{orb } p, p \in \text{Perf } f\}$ плотно в множестве всех инвариантных мер; 2) у любой инвариантной меры есть типичная точка; 3) семейство инвариантных эргодических неатомических мер с носителем K массивно в слабой топологии во всех инвариантных мерах.

Следствие 2. Для инвариантной неатомической меры μ равносильны такие свойства: а) $\exists x: \text{supp } \mu \subset \omega(x)$; б) y μ есть типичная точка; в) μ можно приблизить эргодическими мерами с носителями на циклах или $\text{supp } \mu = S(M_i)$ — окружностное множество.

Замечание. В настоящее время автором получено доказательство следствия 2 без предположения неатомичности μ .

Доказательство. Можно считать, что

$$\text{supp } \mu \cap \left(\bigcup_{i=1}^s S(M_i) \right) = \emptyset,$$

где $\{S(M_i)\}_{i=1}^s$ — все окружностные множества. Очевидно, что б) $\Rightarrow$ а). Далее, если $\exists x: \text{supp } \mu \subset \omega(x)$, то по доказанному в [1] нужно рассмотреть два случая: $\text{supp } \mu \subset B(M)$, где M — некоторое инвариантное подмногообразие или $\text{supp } \mu = \Omega'_\alpha$ для некоторого α . Во втором случае ввиду не более, чем двукратного полусопряжения между f/Ω'_α и минимальным сдвигом в компактной абелевой бесконечной группе очевидно, что любая точка Ω'_α типична для μ . Если же $\text{supp } \mu \subset B(M)$, то f/M полно и почти точно на $B(M)$ полусопряжено отображением ψ с транзитивным $g: M \rightarrow M$, где $\text{Per } g \neq \emptyset$. Пусть мера μ переходит при этом в g -инвариантную меру $\tilde{\mu}$; у $\tilde{\mu}$ по следствию 1 есть типичная точка $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Обе меры μ и $\tilde{\mu}$ в силу условия неатомичны, и так как $\tilde{A} = \{\tilde{y} \in \tilde{M} : \text{card } \{\psi^{-1}(\tilde{y})\} \geq 2\}$ не более, чем счетно, то $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(\psi^{-1}\tilde{A}) = 0$. Значит, если рассмотреть $\tilde{\psi}: \tilde{M} \rightarrow M$ со свойством $\tilde{\psi} \circ \tilde{\psi} = \text{id}/\tilde{M}$, то соответствующее $\tilde{\psi}$ отображение $T_{\tilde{\psi}}$ из пространства $\Gamma_{\tilde{M}}$ мер на $\tilde{M}$ в пространство Γ_M мер на M непрерывно в мере $\tilde{\mu}$ [3]. Поэтому, выбирая $\tilde{\psi}$ так, что

$$\{\tilde{\psi}(g^i \tilde{x})\}_{i=0}^\infty = \{f^i(\tilde{\psi}(\tilde{x}))\}_{i=0}^\infty,$$

получим, что типичность x под действием g для $\tilde{\mu}$ влечет типичность $\tilde{\psi}(x)$ под действием f для μ , т. е. а) $\Rightarrow$ б).

Покажем, что а) $\Rightarrow$ в). Пусть $\text{supp } \mu = \Omega_\alpha \subset \bigcap_{n>0} M_n$, где $M_n = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)}$, все $M_n^{(i)}$ связны, компактны, попарно не пересекаются, и можно считать, что

$$fM_n^{(i)} = M_n^{(i+1)} (0 \leq i \leq m_n - 2), fM_n^{(m_n-1)} = M_n^{(0)},$$

причем $m_n \rightarrow \infty$. Для больших n можно считать все $M_n^{(0)}$ дугами, в которых, значит, есть точка $x_n: f^{m_n} x_n = x_n$. Так как все

$\{M_n^{(i)}\}_{i=0}^{m_n-1}$ попарно не пересекаются, то для некоторого

$$c < \infty \sum_{i=0}^{m_n-1} \text{diam } M_n^{(i)} \leq c (\forall n),$$

что, очевидно, влечет возможность приближения меры μ мерами ν_n : $\text{supp } \nu_n \subset \text{orb } x_n$. Пусть $\text{supp } \mu \subset B(M)$. Пользуясь обозначениями предыдущего абзаца, будем считать, что $\tilde{\nu}_n \rightarrow \mu$. Здесь $\text{supp } \tilde{\nu} = \text{orb}_g(\tilde{x}_n)$, где $\tilde{x}_n \in \text{Per } g$, причем период $\tilde{x}_n$ равен q_n . Из неатомичности μ $q_n \rightarrow \infty$, так что можно считать $\psi^{-1}(\tilde{x}_n)$ дугой или точкой, и, пользуясь этим, найти $\tilde{\psi}: \tilde{M} \rightarrow M$ так, что $\psi \circ \tilde{\psi} = \text{id}/\tilde{M}$, причем $\tilde{\psi}(\text{orb}_g \tilde{x}_n) = \text{orb}_f x_n$, где $x_n \in \text{Per } f$, период x_n равен q_n . Как и выше, это и [3] влечет, что мера μ аппроксимируется мерами ν_n : $\text{supp } \nu_n = \text{orb } x_n$, т. е. а) $\Rightarrow$ в).

Пусть верно в), т. е. $\nu_n \rightarrow \mu$ (слабо), где $\text{supp } \nu_n = \text{orb}_f x_n$, $x_n \in \text{Per } f$, D — производное множество для $\text{orb } x_n$, т. е.

$$D = \{z : \forall U \ni z \exists n_k \rightarrow \infty : \text{orb } x_{n_k} \cap U \neq \emptyset\}.$$

Тогда, очевидно, $\text{supp } \mu \subset D$; если $z \in \text{supp } \mu$, то для любой окрестности $U \ni z$ $\overline{\text{orb } U} \supset \text{supp } \mu$. Если есть $x \in \text{supp } \mu \cap \bigcap_{n \geq 0} M_n$, то для любого n есть $y_n \in \text{supp } \mu \cap \text{int } M_n$, откуда $\text{supp } \mu \subset \bigcap_{n \geq 0} M_n$,

т. е. $\text{supp } \mu = \Omega'_\alpha$ (см. [1]). Значит, т. к. по условию $\text{supp } \mu$ бесконечно и из свойств пролонгации (см. лемму 1 [1]) можно считать, что $\text{supp } \mu \subset \bigcap_{i=0}^{m-1} P(y) = M = \bigcap_{i=0}^{m-1} M^{(i)}$, где $M^{(i)}$ связны, компактны, $fM^{(i)} = M^{(i+1)}$ ($0 \leq i \leq m-2$), $fM^{(m-1)} = M^{(0)}$, причем

$$\text{int } M \cap \text{supp } \mu \subset E(M, f/M),$$

и в силу бесконечности $\text{supp } \mu$ окончательно $\text{supp } \mu \subset B(M)$, что и требовалось доказать.

Лемма 1. Пусть M — замкнутое инвариантное невырожденное подмногообразие в K , $x \in \text{Per } f \cap \partial M$, U — сторона T такая, что $M = \bigcap_{V_T(x)} \text{orb } V_T(x)$. Тогда, если $U_M(x)$ — окрестность x в M , то $\overline{\text{orb } U_M(x)} = M$.

Доказательство. Если для малых $V_T(x)$ $M \supset V_T(x)$ ($\equiv$ сторона T ведет в M), то лемма очевидна. Пусть T не ведет

в M , для некоторой $U_M^{(0)}(x) \overline{\text{orb } U_M^{(0)}(x)} \subset M$, n — период x . Выберем u точек $fx, \dots, f^{n-1}x$ окрестности $U_M^{(1)}(fx), U_M^{(2)}(f^2x), \dots, U_M^{(n-1)}(f^{n-1}x)$ в M так, что

$$fU_M^{(1)}(fx) \subset U_M^{(2)}(f^2x), \dots, fU_M^{(n-1)}(f^{n-1}x) \subset U_M^{(0)}(f^n x),$$

причем $\bigcup_{i=0}^{n-1} \text{orb } U_M^{(i)}(f^i x) \subset M$. Затем выберем у $\text{orb } x$ окрестность W так, что $W \cap M \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} U_M^{(i)}(f^i x) = U$ и для любого $y \in W \setminus M$, $fy \in W \setminus M$, ..., $f^l y \in W \setminus M$, $f^{l+1} y \in M$ влечет $f^{l+1} y \in U$. Пусть $V_T(x) \subset W$ — малая связная полуокрестность x . Найдется

$$r: f^r V_T(x) \cap (\partial W \setminus M) \neq \emptyset$$

(иначе $\overline{\text{orb } V_T(x)} \subset \overline{\text{orb } U} \cup W$, а по выбору $\{U_M^{(i)}(f^i x)\}_{i=0}^{n-1}$ и W $\overline{\text{orb } U} \cup W \not\subset M$, так что $\overline{\text{orb } V_T(x)} \not\subset M$ — противоречие). Значит, $\overline{\text{orb } V_T(x)} \cap (\partial W \setminus M)$ для любой $V_T(x)$ — противоречие с условием. Лемма доказана.

Введем обозначения. Множество сторон точки x обозначим $\text{Si}(x)$. Пусть $f: K \rightarrow K$; пара $\equiv \langle p, R \rangle$, где

$$R \in \text{Si}(p); f \langle p, R \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle fp, S \rangle : S \in \text{Si}(fp), S$$

принадлежит образу $R \}$, $\tilde{O}(K, f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K: \text{есть сторона } T \in \text{Si}(x): \text{ для любой } V_T(x) \text{ в } K \overline{\text{orb } V_T(x)} = K\}$,

$$\tilde{O}_S(K, f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, T \rangle : \forall V_T(x) \overline{\text{orb } V_T(x)} = K \}.$$

Ясно, что $\tilde{O}(K, f) \subset E(K, f)$, а если $E(K, f)$ бесконечно, то по утверждению А из доказательства теоремы 2 в [1] $\tilde{O}(K, f) = E(K, f)$. Пусть M — инвариантное многообразие. Если $\tilde{O}(K, f)$ конечно, обозначим его $O(K, f)$. Если ясно, о каком многообразии или отображении идет речь, ссылка на них опускается.

Лемма 2. Если M — инвариантное подмногообразие, $O(M, f/M) \neq \emptyset$, то $O(M, f/M)$ — цикл.

Доказательство. Всегда $f/\tilde{O}(M, f/M)$ сюръективно. Действительно, пусть $x \in \tilde{O} = \tilde{O}(M, f/M)$, $T \in \text{Si}(x)$ ведет в M , для малых $V_T(x) \overline{\text{orb } V_T(x)} = M$. Пусть для любого $y \in M$ и любой ведущей в M $S \in \text{Si}(y)$ есть $V_S(y): fV_S(y)$ не содержит T — полуокрестности x . Тогда у любого $y \in M$ есть окрестность в M с тем же свойством, откуда, очевидно, $f(M)$ не содержит некоторой T -полуокрестности x — противоречие. Значит, есть ведущая в M сторона S точки $y \in M$ такая, что $\langle x, T \rangle \in f \langle y, S \rangle$, причем $y \in \tilde{O}(M, f/M)$, $fy = x$, $\langle y, S \rangle \in \tilde{O}_S(K, f)$ (из определения). Мы доказали, что в смысле наших определений $\tilde{O}_S(K, f) - f^{-1}$ — инвариантно. Отсюда, если $\tilde{O}(M, f/M) \setminus \text{Per } f \neq \emptyset$, то $\tilde{O}(M, f/M)$ бесконечно и совпадает с $E(M, f/M)$. Если же $\tilde{O}(M, f/M) = O$

конечно, то $O = \bigcup_{i=1}^n \text{orb } p_i$, где все $p_i \in \text{Per } f$, $\tilde{O}_S(K, f) = O_S$ конечно.

Пусть $\langle p, R \rangle \in O_S$, $f \langle p, R \rangle$ содержит $\langle fp, S \rangle$, $\langle fp, T \rangle$. Тогда очевидно, в любой полукрестности $V_R(p)$ есть точки $x_S \neq p$ и $x_T \neq p$ со сторонами Q_S и Q_T такие, что

$$\langle fp, S \rangle \in f \langle x_S, Q_S \rangle, \langle fp, T \rangle \in f \langle x_T, Q_T \rangle -$$

противоречие с тем, что $O = \bigcup_{i=1}^n \text{orb } p_i$, где $p_i \in \text{Per } f$. Отсюда $\text{card } \{f \langle p, R \rangle\} = 1$ ($\forall \langle p, R \rangle \in O_S$), так что f/O_S — подстановка, и достаточно доказать, что она циклическая.

Пусть $\langle p, R \rangle \in O_S \setminus \text{orb}_f(\langle q, S \rangle)$, где $\langle q, S \rangle \in O_S$. Пусть период $\langle p, R \rangle$ под действием f есть n , период $\langle q, S \rangle$ — m . Далее, пусть $V_R^{(0)}(p)$, $W_S^{(0)}(q)$ — малые полукрестности, $V^{(0)} = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i V_R^{(0)}(p)$, $W^{(0)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i W_S^{(0)}(q)$. Тогда, очевидно, $fV^{(0)} \supset V^{(0)}$, $fW^{(0)} \supset W^{(0)}$, причем $fV^{(0)} \setminus V^{(0)}$ состоит из n непересекающихся дуг, $fW^{(0)} \setminus W^{(0)}$ — из m непересекающихся дуг. Из условия есть $x \in V^{(0)}$ такое, что для некоторого l $f^l x \in W^{(0)}$, так что $f^l V^{(0)}$ содержит одну из дуг, составляющих $fW^{(0)} \setminus W^{(0)}$. Из условия очевидно, в ней есть точка y такая, что для некоторого r $f^r y \in V^{(0)}$. Окончательно имеем: есть $z \in V^{(0)}$ такое, что $y = f^l z \in fW^{(0)}$, $f^{l+r} z \in V^{(0)}$. Выбирая $\{V_R^{(j)}(p)\}_{j=0}^\infty$ и $\{W_S^{(j)}(q)\}_{j=0}^\infty$ так, что $V_R^{(j)}(p)$ сжимаются к p , $W_S^{(j)}(q)$ сжимаются к q , и, рассмотрев

$$\left\{ V^{(j)} = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i V_R^{(j)}(p) \right\}_{j=0}^\infty \text{ и } \left\{ W^{(j)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i W_S^{(j)}(q) \right\}_{j=0}^\infty,$$

найдем по доказанному $z^{(j)} \in V^{(j)}$, $l_j \rightarrow \infty$, $r_j \rightarrow \infty$ так, что $f^{l_j} z^{(j)} \in W^{(j)}$ (поскольку $fW^{(j)}$ сжимаются к $\text{orb } q$ вместе с $W_S^{(j)}(q)$, то можно писать $W^{(j)}$ вместо $fW^{(j)}$) $f^{l_j+r_j}(z^{(j)}) \in V^{(j)}$.

Компактность влечет, что выбирая, если надо, подпоследовательность j , можно найти $\{t_j\}$ так, что $f^{t_j}(z^{(j)}) \rightarrow z$ ($t_j \leq l_j$), где $z \in \text{int } M \setminus O$. Если любая окрестность $U \ni z$ не есть сильно блуждающая, то $\text{orb } \bar{U}$ — инвариантное подмножество, содержащее по выбору z некоторую полукрестность вида $f^i W_S^{(j)}(q)$, т. е. $\text{orb } \bar{U} = M$; поэтому если таких z бесконечно много, то есть множество $B(M) \supset O$ — противоречие. Но точек z , для которых найдется (возможно, после выбора подпоследовательности j) последовательность $\{t_j\} : f^{t_j}(z^{(j)}) \rightarrow z$ ($t_j \leq l_j$), очевидно, бесконечно много, так что есть $z = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{t_j}(z^{(j)}) \in \text{int } M \setminus O$ и сильно блуждающая окрестность $U \ni z$. Но отсюда $\omega(z) \supset \text{orb}_f p \cup \text{orb}_f q$, так что по доказанному в [1] есть базисное множество $B(\tilde{M}) \supset \text{orb}_f p \cup \text{orb}_f q$, где $\tilde{M} \subset M$. Больше того, для j больших $f^{l_j+r_j} f^{-t_j}(z)$ лежит в $V^{(j)}$.

а с другой стороны, для N больших $f^N(z) \in \text{int } \tilde{M}$, так что по свойствам $V^{(0)}$ имеем: $\tilde{M} = M$, это противоречит условию ввиду существования множества $B(M)$, что и требовалось доказать.

Обозначим $\tilde{O}'(M, f/M)$ множество, получающееся добавлением к $\tilde{O}(M, f/M)$ тех точек $x \in (M \cap \Omega(f)) \setminus \tilde{O}(M, f/M)$, у которых есть сторона S и число n такие, что $f^n < x, S > \exists < y, T >$, где $< y, T > \in \tilde{O}_S(M, f/M)$. Ясно, что S не ведет в M , так что $\tilde{O}'(M, f/M) \setminus \tilde{O}(M, f/M) \subset \partial M$. Далее, если $\bigcap_{n \geq 0} M_n$ — сильно соленоидально, то пусть $\Omega''' = \left(\bigcap_{n \geq 0} M_n \right) \cap \Omega(f)$.

Лемма 3. Если $x \in \Omega(f) \setminus \omega(f)$, то либо $x \in \tilde{O}'(M, f/M)$ для некоторого M , либо $x \in \Omega'''$ для некоторого сильно соленоидального Ω''' .

Доказательство. Можно считать, что $x \notin \Omega'''$ ни для какого сильно соленоидального Ω''' . Рассмотрим частично упорядоченное по включению семейство A инвариантных подмногообразий $M \ni x$ таких, что если $M = M_1 \cup \dots \cup M_{l(M)}$ — разложение M на компоненты связности, то можно считать, что $fM_1 \subset M_2, \dots, fM_{l(M)} \subset M_1$. Из предположения $\max_{M \in A} l(M) = l < \infty$

и A удовлетворяет лемме Цорна, так что в A есть минимальный элемент $\tilde{M}$, $l(\tilde{M}) = \tilde{l}$. Пусть $f^n x \in \text{int } \tilde{M}$. Выберем у $f^n x$ сторону T так, что для любой $V_T(f^n x) \text{ orb } f(V_T(f^n x)) \ni x$, причем есть

$$S \in \text{Si}(x): < f^n x, T > \in f^n < x, S >$$

(это возможно, так как $x \in \Omega(f)$). Очевидно, $\overline{\text{orb } f(V_T(f^n x))}$ — подмногообразие, компоненты связности которого циклически переставляются под действием f , так что $\overline{\text{orb } f(V_T(f^n x))} = \tilde{M}$ для любой $V_T(f^n x) \subset \tilde{M}$ и $f^n x \in \tilde{O}(\tilde{M}, f/\tilde{M})$, откуда $x \in \tilde{O}'(\tilde{M}, f/\tilde{M})$.

Пусть $\text{orb } x \in \partial \tilde{M}$. Пусть $n \geq 1$ — наименьшее такое, что $f^n x \in \text{Per } f$. Поскольку $x \in \Omega(f)$, то у x есть сторона S , у $f^n x$ — сторона T , причем $f^n < x, S > \exists < f^n x, T >$ и для любой $V_T(f^n x) x \in \text{orb } V_T(f^n x)$. Пусть $M_T = \bigcap_{V_T(f^n x)} \text{orb } V_T(f^n x)$. Так как x не при-

надлежит никакому сильно соленоидальному множеству, то $M_T \in A$.

Если T ведет внутрь M_T , то, взяв $M = M_T$, имеем: $f^n x \in \tilde{O}(M_T, f/M_T)$, и лемма доказана. Если T не ведет внутрь M_T , то по лемме 1 для любой окрестности W точки $f^n x$ в $M_T \text{ orb } W = M_T$. Значит, у $f^n x$ есть сторона T_1 , ведущая внутрь M_T и такая, что $x \in \text{orb } V_{T_1}(f^n x)$ для любой $V_{T_1}(f^n x)$; очевидно, можно считать, что

для некоторого N_1 $f^{N_1} \langle f^n x, T \rangle \ni \langle f^n x, T_1 \rangle$. Для T_1 построим инвариантное подмногообразие $M_{T_1} = \bigcap_{V_{T_1}(f^{N_1} x)}$, для него

повторим проведенные рассуждения и т. д. Окончательно придем к ситуации, когда инвариантное подмногообразие M' содержит x , из точки $f^n x$ внутрь M' ведет сторона T' такая, что для любой полукрестности

$$V_{T'}(f^n x) \subset M' \overline{\text{orb } V_{T'}(f^n x)} = M' \text{ и } f^{N'} \langle f^n x, T \rangle \ni \langle f^n x, T' \rangle,$$

откуда $f^{n+N'} \langle x, S \rangle \ni \langle f^n x, T' \rangle$, что завершает доказательство.

Пусть $\psi: S^1 \rightarrow K$ непрерывно; под замкнутой кривой будем понимать $\psi(S^1)$ при условии, что в S^1 нет невырожденных дуг I_1, I_2 , где $\psi(I_1) = \psi(I_2)$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Перейдем к доказательству конечности семейства $\{O'(M)\}$.

Лемма 4. Пусть $f: K \rightarrow K$ непрерывно, $\tilde{O}(K, f) = O$ конечно, в K нет замкнутой кривой, содержащей полукрестность e ида

$V_S(p)$, где $\langle p, S \rangle \in \tilde{O}_S(K, f) = O_S$. Тогда $O f^{-1}$ — инвариантно.

Доказательство. Пусть $\text{card } O_S = n$, т. е. для любой пары $\langle p, S \rangle \in O_S$ $f^n \langle p, S \rangle = \langle p, S \rangle$ (см. лемму 2, в которой доказано, что в нашем случае f/O_S — циклическая перестановка). Для каждой пары $\langle q, T \rangle \in O_S$ пусть

$$P(\langle q, T \rangle) = \bigcap_{V_q(T)} \overline{\text{orb}_{f^n} V_q(T)};$$

тогда ясно, что $P(\langle q, T \rangle) — f^n$ — инвариантное связное подмногообразие в K и $fP(\langle q, T \rangle) = P(f \langle q, T \rangle)$. Пусть $\langle q, T \rangle \in O_S$, r минимальное положительное такое, что $f^r q \in P(\langle q, T \rangle)$, причем $q \neq f^r q$ (так что если m — период q , то $r < m$). Значит, всегда $\langle q', T' \rangle \in O_S$ влечет $P(\langle q', T' \rangle) \ni f^r q'$, где $f^r q' \neq q'$. Поэтому найдется такое m , что

$$f^r q \in P(\langle q, T \rangle), f^{2r} q \in P(f^r \langle q, T \rangle), \dots, f^{mr} q = q \in P(f^{(m-1)r} \langle q, T \rangle),$$

причем $f^{ir} q \neq q (1 \leq i \leq m-1)$.

Выберем дугу γ_0 , содержащую T — полукрестность q и соединяющую q и $f^r q$. Чтобы показать, что это возможно, достаточно показать, что $P(\langle q, T \rangle)$ не содержит никакой полукрестности $V_S(q)$, где $S \neq T$. В противном случае для любой $V_T(q)$ есть $N: f^{nN} V_T(q) \cap V_S(q) \neq \emptyset$. Ясно, что при малой $V_T(q)$ $\alpha = f^n(V_T(q)) \setminus V_T(q)$ — дуга, $\beta = \bigcup_{i=0}^{N-1} f^{ni} \alpha$ связно, причем

так как $\tilde{O}_S(P(\langle q, T \rangle), f^n) = \langle q, T \rangle$, то для некоторой $W_T(q)$ $\beta \cap W_T(q) = \emptyset$, а с другой стороны, $\beta \cap V_S(q) \neq \emptyset$. Отсюда, дополняя β соответствующими S - и T -полукрестностями q , найдем замкнутую кривую, содержащую T -полукрестность q — противоречие.

Итак, γ_0 — дуга, содержащая q и f^r и содержащая T -полуокрестность q . Если $f^r < q, T \rangle = \langle f^r q, T_1 \rangle$, то аналогично найдем дугу γ_1 , соединяющую $f^r q$ с $f^{2r} q$ и содержащую T_1 -полуокрестность $f^r q$ и т.д. Наконец, пусть дуга γ_{m-1} соединяет $f^{(m-1)r} q$, $f^{mr} q = q$ и содержит T_{m-1} -полуокрестность $f^{(m-1)r} q$, где $f^{(m-1)r} < q, T \rangle = \langle f^{(m-1)r} q, T_{m-1} \rangle$. Тогда ясно, что ни одна дуга γ_i ($2 \leq i \leq m-1$) не содержит T -полуокрестность q . Дуги $\{\gamma_i\}$ могут пересекаться и не только в своих концах-точках $\{f^{ir} q\}$; пусть $x \in \gamma_i \cap \gamma_j$, причем $i < j$, $x \neq f^{(i+1)r} q$, $x \neq f^{ir} q$ и никакие другие дуги γ_t ($i \leq t \leq j$) не имеют дополнительных по сравнению с концами точек пересечения (ясно, что такие γ_i, γ_j найдутся). Считая $f^{ir} < q, T \rangle = \langle f^{ir} q, T_i \rangle$, $f^{ir} < q, T \rangle = \langle f^{ir} q, T_j \rangle$, имеем: γ_i не содержит некоторой $V_{T_i}(f^{ir} q)$, γ_j не содержит некоторой $V_{T_j}(f^{ir} q)$. Поскольку x можно выбрать так, что δ_i (часть дуги γ_i , соединяющая x и $f^{(i+1)r} q$) не пересекается с γ_j , δ_j (часть дуги γ_j , соединяющая $f^{ir} q$ и x) не пересекается с γ_i , и по выбору γ_i, γ_j получаем, что кривая, составленная из $\delta_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}, \delta_j$ — замкнутая кривая, содержащая, например, T_{i+1} -полуокрестность $f^{(i+1)r} q$ (где $f^{(i+1)r} < q, T \rangle = \langle f^{(i+1)r} q, T_{i+1} \rangle$) — противоречие. Если же дуги $\{\gamma_i\}$ попарно пересекаются лишь в своих концах, то $\gamma = \bigcup_{i=0}^{m-1} \gamma_i$ — замкнутая кривая, содержащая T -полуокрестность q , что противоречит условию. Значит, $q = f^r q$.

Пусть $x \in K$, $f^n(x) = q \in O$. Тогда, так как при $\langle q', T' \rangle \in O_S$ $f^n P(\langle q', T' \rangle) = P(\langle q', T' \rangle)$, из доказанного $x \in P(\langle q, T \rangle)$ для некоторой пары $\langle q, T \rangle \in O_S$. Но $P(\langle q, T \rangle)$ не содержит по доказанному некоторого множества вида $W = \bigcup_{S \in \text{Si}(q), S \neq T} W_S(q)$,

откуда следует, что есть точка $x' \in P(\langle q, T \rangle)$ и сторона $S' \in \text{Si}(x')$ такие, что $f^n \langle x', S' \rangle = \langle q, T \rangle$, $x' \neq q$, а это противоречит тому, что $\tilde{O}(P(\langle q, T \rangle), f^n) = q$. Лемма доказана.

Итак, каждому конечному множеству $O(M)$, которое не является $(f/M)^{-1}$ -инвариантным, соответствует замкнутая кривая $\gamma(M)$, причем разным $O(M)$ соответствуют разные $\gamma(M)$. Всего разных замкнутых кривых (в смысле нашего определения) у K — конечное число. Далее, если есть множество $O'(M)$, то $O(M)$ не $(f/M)^{-1}$ — инвариантно; значит, число множеств $O'(M)$ не больше числа $o(K)$ разных замкнутых кривых в K ; с учетом теоремы 4 из [1] получаем теперь следующую теорему (напомним, что X_f — объединение всех максимальных по включению среди ω — предельных множеств циклов).

Теорема 2. *Существует не более, чем счетное семейство пар множеств $\{B(M_i) = B_i \subset B'(M_i) = B'_i\}_{i=1}^b$, конечное семейство пар множеств $\{S(\tilde{M}_i) = S_i \subset S'(\tilde{M}_i) = S'_i\}_{i=1}^s$, конечное семейство множеств $\{O'(\hat{M}_i)\}_{i=1}^q = \{O_i\}_{i=1}^q$ и семейство троек сильно соленоидаль-*

ных множеств $\{\Omega'_\alpha \subset \Omega''_\alpha \subset \Omega'''_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $\Omega''_\alpha \neq \Omega'_\alpha$ для не более, чем счетного набора индексов, такие, что:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Perf} &= \left(\bigcup_{i=1}^b B_i \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha \right) \cup X_f; \\ C(f) &= \left(\bigcup_{i=1}^b B_i \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s S_i \right) \cup X_f; \\ \omega(f) &= \left(\bigcup_{i=1}^b B_i \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Omega''_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s S_i \right) \cup X_f; \\ \Omega(f) &= \left(\bigcup_{i=1}^b B_i \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Omega'''_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s S_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^q O_i \right) \cup X_f. \end{aligned}$$

2) существуют зависящие только от топологии K числа $s(K)$, $o(K)$ и $c(K)$ такие, что $s \leq s(K)$, $q \leq o(K)$, пересечение в нашем разложении $\Omega(f)$ возможно лишь между множествами B_i , O_i конечно и никакие $c(K)$ множеств разложения не пересекаются в одной точке.

Доказательство. Часть пункта 1), не относящаяся к $\Omega(f)$, доказана [1, теорема 4]. Там же доказано, что если $s(K)$ — максимальное число попарно не пересекающихся замкнутых кривых в K , то $s \leq s(K)$. Из рассуждений, проведенных перед теоремой 2, следует, что если $o(K)$ — максимальное число попарно различных замкнутых кривых в K , то $q \leq o(K)$. Часть пункта 1), относящаяся к $\Omega(f)$, следует из леммы 3. Далее, свойства сильно соленоидальных множеств Ω'''_α и окружностных множеств влекут, что пересечение между ними и другими элементами разложения невозможно. Так как $\Omega'''_\alpha \cap \text{Perf} = \emptyset$, $S'_i \cap \text{Perf} = \emptyset$, то достаточно рассмотреть случай пересечения с B_i , а оно невозможно, поскольку по определению никакой $x \in B_i$ не может лежать в $\bigcap_{n \geq 0} M_n$, порождающем Ω'''_α или в $\tilde{M}_i$, порождающем $S(M_i)$.

Пусть $c(K) - 1$ — максимальное число сторон у точки $x \in K$. Если x принадлежит пересечению некоторых множеств B_i или O_i , то рассматривая $x' = f^N x$ для достаточно большого N , имеем: x' принадлежит пересечению множеств B_i и O_i . Но из их свойств следует, что каждому B_i или O_i соответствует сторона $S \in \text{Si}(x')$ такая, что для любой $V_S(x') \text{ orb } V_S(x')$ совпадает с подмножеством, порождающим соответствующее B_i или O_i . Значит, разным множествам соответствуют разные стороны x , а всего их не больше $c(K) - 1$, что и требовалось доказать.

Как обычно, кусочно-монотонным назовем непрерывное отображение f многообразия K в себя, для которого есть разложение K на связные множества $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ такие, что $f|_{\gamma_i}$ монотонно (т.е. для любого x множество $f^{-1}(x) \cap \gamma_i$ связно). В этом

случае в теореме 2 можно сделать уточнение. Если f/M монотонно, где $M = \bigcup_{i=0}^{n-1} M^{(i)}$ и $M^{(0)}$ — дуга, то $f^n: M^{(0)} \rightarrow M^{(0)}$ монотонно, что в силу свойств отображений отрезка влечет отсутствие у f/M сильно соленоидальных множеств. Значит, если $\bigcap_{n \geq 0} M_n$ сильно соленоидально, то f/M_n не монотонно ($\forall n$), т. е. всегда есть компоненты M_n , на каждой из которых f не монотонно. Обозначая их объединение M'_n , имеем:

$$M'_n \supset M'_{n+1} \neq \emptyset \quad (\forall n) \Rightarrow \bigcap_{n \geq 0} M'_n \neq \emptyset,$$

т. е. есть $x \in \bigcap_{n \geq 0} M_n^{(i_n)}$, где $f/M_n^{(i_n)}$ не монотонно ($\forall n$). Значит, если K представлено в виде объединения дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ так, что f/γ_j монотонно ($1 \leq j \leq m$) и множество концов этих дуг имеет минимальную по всем таким представлениям мощность $m(f)$, то $\bigcap_{n \geq 0} M_n^{(i_n)}$ содержит один из таких концов, откуда следует, что у f — не более $m(f)$ сильно соленоидальных множеств.

Второе уточнение сформулируем как

Утверждение 1. Пусть $f: K \rightarrow K$ транзитивно, кусочно-монотонно, $\text{Per } f \neq \emptyset$. Тогда на K можно задать длину l так, что если γ связно и f/γ монотонно, то $l(f(\gamma)) = e^{h(f)} l(\gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi: K \rightarrow [0, 1]$, биективное и кусочно-разрывное. Очевидно, что $g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ транзитивно, кусочно-разрывно и кусочно-монотонно.

Больше того, по доказанному в [2] есть n и $\tilde{K} \subset K: f^n \tilde{K} = \tilde{K}$, $f^n/\tilde{K}$ обладает свойством спецификации, из которого, как известно, следует $h(f) > 0$. Значит, у f есть инвариантная мера μ с $h_\mu(f) > 0$; очевидно тогда, что и у g есть инвариантная мера ν с $h_\nu(g) > 0$. В силу доказанного в [4] (см. также [5]) это влечет, что g сопряжено с помощью φ с отображением постоянного угла наклона $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ причем для любого интервала монотонности $\tilde{g}I$ имеем: $\lambda(\tilde{g}I) = e^{h(\tilde{g})} \lambda(I) = e^{h(f)} \lambda(I)$, где λ — мера Лебега на $[0, 1]$, $h(\tilde{g}) = \sup h_\nu(\tilde{g})$ по всем $\tilde{g}$ — инвариантным мерам ν , так что из свойств энтропии действительно $h(f) = h(\tilde{g})$. Т. к. φ — гомеоморфизм, то $\varphi \circ \psi$ кусочно-разрывно и биективно. «Возвращая» меру Лебега λ с $[0, 1]$ на K с помощью $(\varphi \circ \psi)^{-1}$, получим меру l на K , обладающую, очевидно, требуемым свойством.

Утверждение 1 уточняет теорему 2 для кусочно-монотонных f , т. к. показывает, что в этом случае «модельные» (см. [1, теорема 2]) для f/B_i транзитивные отображения многообразий с циклами можно считать имеющими постоянный коэффициент растяжения.

Список литературы: 1. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. 1. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986, вып. 46, с. 20—25. 2. *Блох А. М.* О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий. — В кн.: Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики: Тр. ин-та мат. АН УССР. К., 1984, с. 3—11. 3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с. 4. *Parry W.* Symbolic dynamics and transformations of the interval. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 22, p. 368—378. 5. *Hofbauer F., Keller G.* Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. — Math. Zeit., 1982, 180, № 1, p. 119—140.

Поступила в редколлегию 14.06.84.