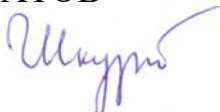


**Міністерство освіти і науки України**  
**Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**  
**Фізичний факультет**

**Кафедра астрономії та космічної інформатики**

«Допущено до захисту»  
Зав. кафедри астрономії та  
космічної інформатики  
проф. Юрій ШКУРАТОВ

16.12.2024 р.



Оцінка « задовільно »  
Голова ЕК  
проф. Віктор ТИШКОВЕЦЬ

19.12.2024 р.



Коптєв Микита Сергійович

**Методи математичного опису несферичних частинок для  
моделювання оптики реголітів.**

Кваліфікаційна робота на здобуття  
освітньо-кваліфікаційного рівня  
«Магістра» спеціальність  
104 – «фізика та астрономія»  
освітньо-професійна програма  
*«астрономія та космічна інформатика»*

*(підпис студента)*

Науковий керівник – Станкевич  
Дмитро Геннадійович  
Кандидат фізико-математичних наук  
Доцент кафедри астрономії

*(підпис керівника)*

**Харків 2024**

## Анотація

Коптєв М.С. Методи математичного опису несферичних частинок для моделювання оптики реголітів – Рукопис  
Дипломна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр” за спеціальністю 104 – «Фізика та астрономія». – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2024. – 60 с. і – Іл. 12

Дипломна робота присвячена дослідженню методів математичного опису несферичних частинок та їх застосуванню для моделювання оптичних властивостей реголіту. Зокрема, в роботі розглядаються різні підходи до опису форми частинок, що використовуються в моделюванні оптики реголіту, зокрема методи, засновані на гауссовських збуреннях, узагальнених еліпсоїдах та локальних функціях відстаней. Окрема увага приділяється використанню математичних інструментів для аналізу форми частинок, таких як гесіан та похідні, а також розгляду взаємодії світла з цими частинками. Виведено алгоритми для моделювання різних типів поверхонь, а також для аналізу перетинів частинок і промінів. Визначено важливість вибору функцій для опису форми та їх вплив на результати моделювання. Робота включає чисельне моделювання та візуалізацію отриманих результатів для кількох типів частинок, що використовуються в астрономії для дослідження реголіту на поверхні небесних тіл. Розроблені методи можуть бути корисними для подальших досліджень в оптиці планетарних тіл і в астрономії в цілому.

**Ключові слова:** несферичні частинки, моделювання оптики, реголіт, гауссовські збурення, гесіан, оптичні властивості.

## Abstract

Koptev M.S. Methods of mathematical description of non-spherical particles for modeling regolith optics – Manuscript

Thesis for obtaining the educational qualification level “Master” in specialty 104 – “Physics and Astronomy”. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2024. – 60 p. and – Ill. 12

This thesis is devoted to the study of methods of mathematical description of non-spherical particles and their application for modeling the optical properties of regolith. In particular, the work considers various approaches to describing the shape of particles used in modeling regolith optics, in particular methods based on Gaussian perturbations, generalized ellipsoids and local distance functions. Special attention is paid to the use of mathematical tools for analyzing the shape of particles, such as Hessian and derivatives, as well as consideration of the interaction of light with these particles. Algorithms for modeling different types of surfaces, as well as for analyzing particle and ray intersections, are derived. The importance of choosing functions to describe the shape and their influence on the modeling results are determined. The work includes numerical modeling and visualization of the obtained results for several types of particles used in astronomy to study regolith on the surface of celestial bodies. The developed methods can be useful for further research in the optics of planetary bodies and in astronomy in general.

**Keywords:** non-spherical particles, optics modeling, regolith, Gaussian perturbations, Hessian, optical properties.

## Умовні позначення

$r$  – Радіус-вектор точки на поверхні частинки.

$r_i$  – Радіус-вектор у випадковій точці  $i$  на поверхні (для гауссового збурення сфери).

$k = (\theta, \varphi)$  – Напрямок у сферичній системі координат (азимутальний та полярний кути).

$d_i$  – Відстань від довільного напрямку  $k$  до заданої точки  $r_i$ .

$N$  – Кількість точок на поверхні сфери (для методу гауссового збурення).

$H$  – Амплітуда (висота) збурень на поверхні.

$A$  – Характеристика розмірів нерівностей уздовж поверхні.

$Y_{ij}(k)$  – Сферична гармоніка  $ij$ -го порядку у напрямку  $k$ .

$a_{ij}$  – Коефіцієнти при сферичних функціях (для методу сферичних гармонік).

$R(k)$  – Радіус в довільному напрямку  $k$  (узагальнена форма).

$r(\theta, \varphi)$  – Радіус-вектор поверхні, заданий у сферичній системі координат.

$\nabla f$  – Градієнт функції  $f$ , що описує поверхню.

$H(f)$  – Гесіан (матриця других похідних) функції  $f$ .

$\Delta r$  – Відстань між двома точками на поверхні.

$V$  – Об'єм тіла (для методу ДДА).

$\rho$  – Щільність об'єму тіла.

$n$  – Напрямний вектор нормалі до поверхні.

$E, H$  – Електричне та магнітне поля для моделювання оптики реголіту.

$\lambda$  – Довжина хвилі світла.

$\sigma$  – Сигма, що позначає характерні параметри або похибки.

$\theta$  – Кут нахилу або полярний кут (сферична система координат).

$\varphi$  – Азимутальний кут (сферична система координат).

$S_{ij}$  – Матриця розсіювання світла.

$R_0$  – Радіус незбуреної (початкової) сфери.

$f(x, y)$  – Функція, що описує поверхню у декартових координатах.

$t$  – Часовий параметр (якщо застосовується динамічна модель).

$\mathcal{F}$  – Оператор перетворення (наприклад, Фур'є або Лапласа).

$\Sigma$  – Сума (оператор підсумовування).

## Вступ

### **1. Розробка математичних моделей для опису форми несферичних частинок.**

Потрібно вивчити існуючі методи математичного опису частинок, зокрема, методи з використанням гауссовських збурень, узагальнених еліпсоїдів та локальних функцій відстаней. Оцінити їх ефективність для моделювання оптики частинок реголіту.

### **2. Аналіз впливу форми частинок на їх взаємодію зі світлом.**

Необхідно розробити моделі для аналізу відбиття, поглинання та розсіювання світла на частинках різної форми, а також для дослідження впливу параметрів цих форм на оптичні властивості реголіту.

### **3. Розробка чисельних алгоритмів для моделювання поверхні частинок.**

Створити алгоритми для розв'язання задач з перетину частинок і світлових променів, а також для обчислення кута перетину. Для цього потрібно розробити методи, що дозволяють враховувати геометричні особливості форм, наприклад, опуклість чи увігнутість поверхні.

### **4. Створення програмного забезпечення для моделювання оптики реголіту.**

Реалізувати програмні моделі для розрахунку оптичних властивостей частинок реголіту, що дозволить в подальшому провести експерименти та аналіз на практиці, зокрема для астрономічних досліджень.

Завдання цієї роботи полягає в тому, щоб поєднати математичні методи опису форми частинок з їх оптичними властивостями та створити інструменти для моделювання таких частинок у контексті реголіту.

## Вимоги

Для моделювання розсіювання світла в реголіті потрібен математичний опис форми частинок. Від форми частинок залежать як результати розрахунків розсіювання, так і обчислювальна ефективність. Тому важливо обрати оптимальний метод опису, який відповідатиме таким вимогам:

1. Компактність опису: мінімальний обсяг даних для збереження форми.
2. Зручність розв'язання задач перетину частинок із променями або між собою.
3. Універсальність: можливість описувати як тіла, так і поверхні.
4. Різноманітність форм: підтримка гладких або гранчастих поверхонь.
5. Гнучкість: можливість опису як опуклих, так і частково увігнутих об'єктів.

Метою роботи є порівняння декількох підходів для опису форми частинок та вибір найбільш ефективного методу для моделювання оптики реголіту.

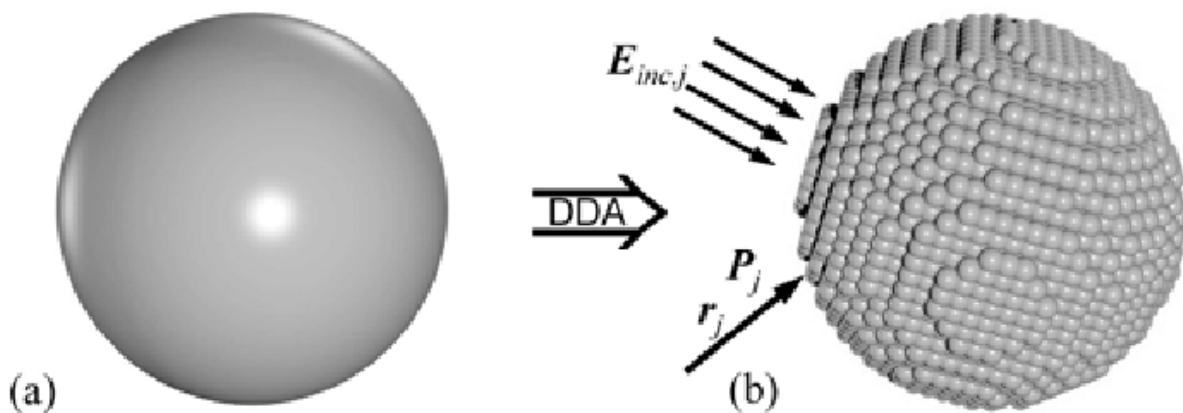
## Основна частина

### 1. Дискретний дипольний аналіз (DDA):

Метод DDA використовується для опису всього об'єму частинки, а не тільки її поверхні. Об'єкт поділяється на малі взаємодіючі диполі.

Особливості:

- Підходить для моделювання складних об'ємних частинок.
- Висока точність у задачах розсіювання світла.
- Велика обчислювальна складність і значні вимоги до пам'яті.



Формула для обчислення дипольного моменту:

$$\mathbf{p}_i = \alpha_i \mathbf{E}_{\text{loc},i}$$

де  $\alpha_i$  – поляризованість диполя,  $\mathbf{E}_{\text{loc},i}$  – локальне електричне поле.

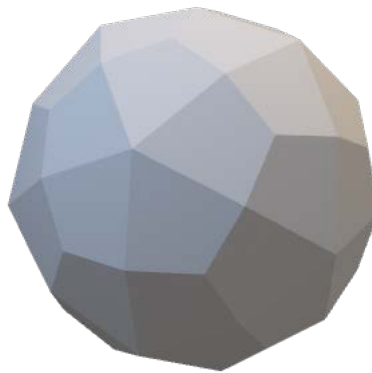
## 2. STL (Surface Tessellation Language):

STL – це метод опису поверхонь об'єкта через трикутні полігони.

Особливості:

- Легко зберігати та візуалізувати.
- Підходить для опису гранчастих об'єктів із чіткими кутами.
- Не дозволяє описувати плавні або гладкі поверхні, тому відблиски з'являються тільки в обраних напрямках.

### Об'єкт у STL гладка модель



## 3. Гауссове збурення сфери:

Метод полягає у створенні нерівностей на поверхні сфери. Радіус у будь-якому напрямку обчислюється за формулою:

$$r(k) = \sum_{i=1}^N r_i \cdot \exp\left(-\frac{d_i^2}{2R^2}\right)$$

де  $r_i$  – збурений радіус у точці, а  $d_i$  – відстань на поверхні сфери.

Особливості:

- Простий алгоритм генерації нерівностей.
- Контрольовані параметри висоти (H) та масштабу нерівностей (R).
- Поверхня завжди гладка.

#### 4. Метод сферичних гармонік:

Радіус частинки задається через сферичні гармоніки:

$$R(k) = \sum_i \sum_j a_{ij} \cdot Y_{ij}(k)$$

де  $a_{ij}$  – коефіцієнти гармонік, а  $Y_{ij}$  – сферичні гармоніки для напрямку  $k$ .

Особливості:

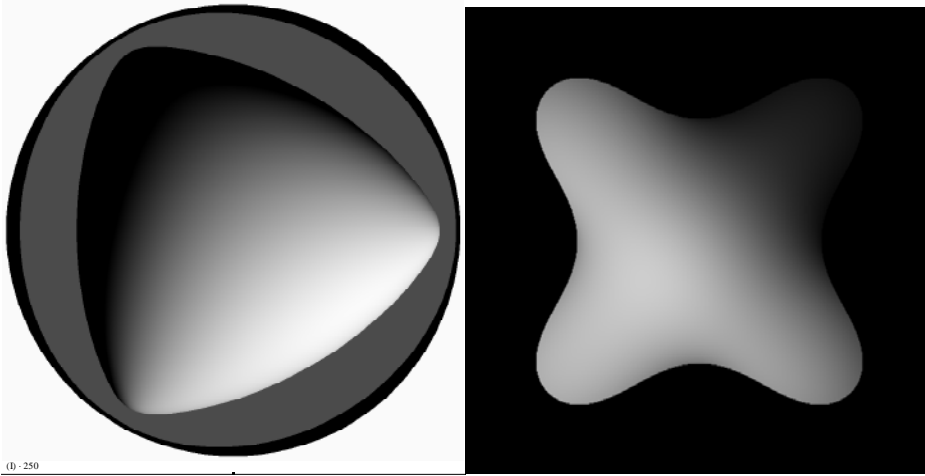
- Компактний математичний опис.
- Підтримка гладких поверхонь.
- Використовується для опису частинок із гармонійними формами.

#### 5. Узагальнені еліпсоїди:

Узагальнені еліпсоїди – це один із найбільш універсальних методів опису форми.

Особливості:

- Компактний опис: невеликий обсяг даних.
- Гладкість поверхні: забезпечує плавний вигляд.
- Гнучкість форм: можуть бути як опуклими, так і частково увігнутими.
- Ефективність: дозволяє легко розв'язувати задачі перетину частинки з частинкою або променем.



**3 фокуса  $f = d$**

**4 фокуса  $f = \ln(d)$**

Приклад опису еліпсоїда:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – напівосі еліпсоїда.

## Розділ 1. Огляд літератури

### 1.1 Вступ до проблеми моделювання реголіту

Моделювання реголіту є важливою задачею в астрономії та фізиці, особливо при дослідженні поверхонь планет та місяців. Реголіт — це шар сипучих матеріалів, що покриває тверду поверхню планети, і є ключовим елементом для вивчення процесів взаємодії з різними типами випромінювання. Одним з основних аспектів вивчення реголіту є аналіз його властивостей при світлорозсіюванні, що дозволяє отримати інформацію про структуру та склад реголіту.

### 1.2 Методики моделювання частинок реголіту

Для моделювання частинок реголіту використовуються різноманітні чисельні методи, включаючи методи, засновані на розбитті об'єкта на елементи (наприклад, методу дискретних елементів), а також методи, що розглядають поверхні об'єктів через їх геометричні характеристики.

Одним із популярних підходів є використання методу дискретних диполів (DDA), який дозволяє здійснити точне моделювання розсіювання світла на реголіті, враховуючи складну геометрію частинок. Цей метод вимагає високої обчислювальної потужності та великих обсягів пам'яті, тому важливим є вибір ефективних алгоритмів для зменшення пам'ятних витрат і прискорення розрахунків.

### 1.3 Огляд літератури з теми моделювання розсіювання світла

Дослідження моделювання розсіяння світла на частинках різних матеріалів займає важливе місце в астрономічних дослідженнях. Однією з основних задач є точне описання геометрії частинок і взаємодія їх з електромагнітним випромінюванням. Для цього використовуються чисельні методи, такі як методи Монте-Карло, методи розподілу диполів, а також методи, засновані на апроксимаціях форм частинок.

Окремої уваги заслуговує питання опису форми частинок. У літературі часто використовуються різні методи апроксимацій, від простих геометричних моделей до більш складних описів на основі власних алгоритмів. Вибір методу має значний вплив на точність моделювання та ефективність обчислень.

#### 1.4 Проблеми моделювання форм частинок

Один із викликів у моделюванні частинок реголіту — це опис їх форми. Частинки можуть бути неоднорідними, мати складні контури і вигини. У результаті виникає проблема зі створенням ефективних математичних моделей, які б зберігали точність при мінімальних вимогах до пам'яті. У літературі розглядаються різні підходи до цієї проблеми, зокрема, методи апроксимації форм через полігональні поверхні або методи, що використовують властивості самих частинок для зменшення складності опису.

## **Розділ 2. Огляд методів математичного опису несферичних частинок**

У цьому розділі буде розглянуто основні методи математичного опису несферичних частинок, які застосовуються для моделювання оптичних властивостей реголіту. Кожен із методів оцінюється з урахуванням вимог до компактності, універсальності та зручності розв'язання задач перетину променів і взаємодії частинок.

### **2.1. Метод дифузійного дипольного апроксимації (ДДА)**

Метод дифузійного дипольного апроксимації (DDA, Discrete Dipole Approximation) базується на розбитті об'єкта на невеликі елементи (дипольні комірки). Кожна з цих комірок може взаємодіяти з електромагнітним випромінюванням, а їхня сукупність дозволяє описати взаємодію світла з усім тілом.

#### **Переваги методу:**

- Описує весь об'єм частинки.
- Дозволяє враховувати внутрішню структуру матеріалу.

#### **Недоліки:**

- Велике споживання пам'яті при розрахунках.
- Висока обчислювальна складність для складних форм.

#### **Сфери застосування:**

Метод використовується для опису взаємодії світла з частинками складної форми, однак через громіздкість він рідко застосовується для аналізу великих масивів даних.

## **2.2. Метод STL (опис гранчастих поверхонь)**

Метод STL (STereoLithography) базується на представленні поверхні частинки за допомогою трикутників. Поверхня описується як сукупність плоских граней, що утворюють багатогранник.

### **Переваги методу:**

- Зручність для створення моделей у комп'ютерних програмах.
- Компактний опис поверхонь.

### **Недоліки:**

- Відсутність гладкості поверхні, що обмежує точність моделювання розсіювання світла.
- Формування відблисків у конкретних напрямках через гранчасту структуру.

### **Сфери застосування:**

Застосовується в 3D-моделюванні та для простих задач у комп'ютерній графіці та обчислювальній оптиці.

## **2.3. Метод гауссового збурення сфери**

Цей метод базується на модифікації ідеально сферичної поверхні шляхом збурення радіуса в заданих точках. Вектори  $\hat{r}_i$  задають початкові точки, а збурення вводяться через функції гауссового розподілу

### **Переваги методу:**

- Можливість моделювати гладкі поверхні.
- Контроль характеристик неровностей через параметри  $R_i$  і  $r_i$ .

### **Недоліки:**

- Вимагає підбору параметрів для кожної моделі.

**Сфери застосування:**

Моделювання частинок із нерівними, але гладкими поверхнями для задач розсіювання світла.

**2.4. Метод сферичних функцій**

У цьому методі форма частинки описується як сума сферичних функцій  $Y_l$ , що зважені коефіцієнтами  $a_{lj}$

**Переваги методу:**

- Компактність опису через невелику кількість коефіцієнтів.
- Можливість задавати статистично відомі характеристики форми частинки.

**Недоліки:**

- Обмеження точності для складних форм.

**Сфери застосування:**

Застосовується для гладких частинок, форма яких відома з певними статистичними характеристиками.

**2.5. Метод узагальнених еліпсоїдів**

Цей метод описує частинки у вигляді багатофокусних еліпсоїдів, радіус яких обчислюється відносно декількох фокусних точок

**Переваги методу:**

- Компактний опис.
- Гладка поверхня, яка може бути опуклою або увігнутою.
- Зручність у вирішенні задач перетину частинок із променем або іншими частинками.

**Недоліки:**

- Складність побудови моделі для частинок зі значною асиметрією.

**Сфери застосування:**

Найкращий варіант для задач розсіювання світла, де необхідна гладка поверхня та компактність опису.

## 2.6. Методи на основі вокселів

### Суть методу:

Опис частинки за допомогою тривимірної решітки (вокселів), де кожен воксель представляє певну частину об'єкта. Це підхід схожий на метод ДДА, але акцент робиться саме на дискретизації простору.

### Переваги:

- Зручність моделювання складних геометрій.
- Легке представлення об'єктів для чисельних розрахунків.

### Недоліки:

- Великий обсяг пам'яті.
- Недостатня точність для гладких поверхонь.

### Сфери застосування:

Розсіювання світла на складних структурах, таких як агломерати частинок.

## 2.7. Методи з використанням фрактальних структур

### Суть методу:

Частинки описуються за допомогою фрактальних моделей, які імітують природні форми, зокрема реголіт або пил. Фрактали дозволяють створювати самоорганізовані структури із заданим рівнем складності.

### Переваги:

- Можливість опису дуже складних форм.
- Компактний математичний опис через параметри фракталу.

### Недоліки:

- Складність обчислень для задач променевого перетину.
- Висока вимогливість до ресурсів.

### Сфери застосування:

Моделювання частинок, подібних до космічного пилу чи реголіту.

## **2.8. Методи багатокутникового опису (polygon-based methods)**

### **Суть методу:**

Схожий до методу STL, але поверхня частинки може бути описана більш гнучкими багатокутниками, такими як чотирикутники чи складніші полігони.

### **Переваги:**

- Зручний для комп'ютерної графіки.
- Дозволяє отримувати відносно компактний опис із кращою точністю, ніж у STL.

### **Недоліки:**

- Обмеження гладкості поверхні.
- Формування нерівномірних відблисків.

### **Сфери застосування:**

Комп'ютерне моделювання, де потрібна більша деталізація, ніж у STL.

## **2.9. Методи на основі кубічних сплайнів**

### **Суть методу:**

Поверхня частинки описується як комбінація кубічних сплайнів, що дозволяє отримати гладкий опис без різких переходів між елементами.

### **Переваги:**

- Висока гладкість поверхонь.
- Компактний математичний опис.

### **Недоліки:**

- Складність побудови для дуже складних форм.
- Вимоги до ресурсів для обчислення інтегралів розсіювання.

### **Сфери застосування:**

Задачі, де потрібні плавні й гладкі поверхні.

## 2.10. Методи на основі аналітичних функцій

### Суть методу:

Опис форми частинки через аналітичні функції (наприклад, модифіковані синусоїди або експоненти), які задають її геометрію.

### Переваги:

- Точність для специфічних форм.
- Мінімальні обчислювальні витрати для порівняно простих форм.

### Недоліки:

- Вузька сфера застосування.
- Не придатний для складних структур.

### Сфери застосування:

Опис частинок простої геометрії, де потрібна висока точність обчислень.

## 2.11. Гібридні методи опису частинок

### Суть методу:

Поєднання декількох підходів, наприклад, використання гауссового збурення сфери для основної поверхні та STL для деталей чи дрібних нерівностей.

### Переваги:

- Універсальність.
- Можливість адаптації до специфічних задач.

### Недоліки:

- Складність реалізації.
- Високі обчислювальні витрати.

### Сфери застосування:

Задачі, де необхідна комбінація гладких і гранчастих структур.

## **2.12. Методи кінетичного Монте-Карло**

### **Суть методу:**

Форма частинки моделюється статистично через кінетичні процеси, такі як агрегація або злипання дрібних частинок.

### **Переваги:**

- Опис складних агломератів.
- Урахування динамічних процесів утворення частинок.

### **Недоліки:**

- Потребує великих обчислювальних ресурсів.
- Менш точний для гладких поверхонь.

### **Сфери застосування:**

Моделювання частинок пилу або пористих структур.

## Розділ 3. Аналіз і порівняння методів математичного опису

### 3.1 Критерії порівняння

Для аналізу та вибору оптимального методу математичного опису несферичних частинок було визначено такі ключові критерії:

- **Компактність опису** – наскільки ефективно метод представляє інформацію про форму частинки за допомогою мінімальної кількості параметрів.
- **Гладкість поверхні** – чи забезпечує метод плавність контурів описуваної поверхні або ж вона складається з граней.
- **Опуклість/неопуклість форми** – можливість опису як опуклих, так і неопуклих частинок.
- **Обчислювальна складність** – ресурси, необхідні для розрахунків, включаючи час і пам'ять.
- **Придатність для задач перетину** – зручність у вирішенні задач перетину частинок одна з одною або з променем.
- **Відповідність задачам моделювання реголіту** – наскільки метод підходить для опису частинок реголіту з урахуванням їхніх фізичних властивостей.

### 3.2 Порівняльна таблиця методів

Зведення характеристик кожного методу подано в таблиці:

Метод	Компактність	Гладкість	Опуклість	Обчислювальна складність	Придатність для реголіту
ДДА	Низька	Ні	Ні	Висока	Сумнівна
STL	Середня	Ні	Так	Середня	Обмежена
Гауссове збурення сфери	Середня	Так	Так	Середня	Висока
Сферичні гармоніки	Висока	Так	Так	Висока	Висока
Узагальнений еліпсоїд	Висока	Так	Так/Ні	Низька	Висока

### 3.3 Аналіз методів

#### 1. Метод дискретного дипольного апроксимації (ДДА)

- Метод передбачає розбиття тіла на дискретні диполі.
- Основний недолік – висока обчислювальна складність і великий обсяг пам'яті для опису об'ємів.
- Не підходить для гладких або великих частинок.

#### 2. Формат STL

- Використовує набір плоских трикутників для опису поверхні.
- Простий для реалізації, але призводить до появи гранчастих поверхонь.
- Має обмежену придатність для задач з високими вимогами до гладкості.

#### 3. Метод гауссового збурення сфери

- Радіус у довільному напрямку обчислюється як комбінація базових точок на сфері з додаванням збурень.
- Забезпечує гладкість і компактність опису.

- Підходить для опису опуклих поверхонь з невеликими відхиленнями.

#### 4. Метод сферичних гармонік

- Використовує статистично задані коефіцієнти для побудови поверхні за сферичними функціями.
- Висока точність і можливість опису як опуклих, так і неопуклих поверхонь.
- Значна обчислювальна складність при великій кількості гармонік.

#### 5. Метод узагальненого еліпсоїда

- Може описувати як опуклі, так і частково неопуклі поверхні.
- Найкращий компроміс між компактністю, гладкістю та простотою розрахунків.
- Оптимальний для задач моделювання реголіту завдяки зручності у вирішенні задач перетину.

### 3.4 Вибір оптимального методу

На основі проведеного аналізу можна зробити висновок, що **узагальнений еліпсоїд** є найкращим методом для моделювання частинок реголіту, оскільки:

- Він має компактний опис із мінімальною кількістю параметрів.
- Забезпечує гладкість поверхні.
- Може описувати як опуклі, так і неопуклі форми.
- Дозволяє ефективно вирішувати задачі перетину частинки з частинкою або з променем.

## Висновки

В результаті аналізу різних методів математичного опису несферичних частинок було встановлено, що узагальнені еліпсоїди є найоптимальнішим вибором для моделювання форми реголіту з огляду на наступні переваги:

1. Компактний розмір опису:

Узагальнені еліпсоїди задаються через обмежену кількість параметрів (фокуси та функція, що зменшує обсяг даних, необхідних для збереження інформації про форму).

2. Гладкість поверхонь:

Завдяки вибору функції, поверхні узагальнених еліпсоїдів є гладкими, що забезпечує точніше моделювання взаємодії зі світлом.

- Можливість моделювання як опуклих, так і неопуклих форм:

Різні варіації функції дозволяють створювати як опуклі, так і частково увігнуті геометрії, що підвищує універсальність методу.

Простота вирішення задач:

Завдяки простоті математичного опису, задачі на перетин частинок одна з одною або з променем можуть бути вирішені відносно швидко й ефективно.

- Таким чином, узагальнені еліпсоїди задовольняють усі ключові вимоги до опису форми частинок реголіту, зокрема:

- гладкість для точного розрахунку оптичних властивостей;
- компактність для економії пам'яті;
- простота математичних операцій, що робить їх зручними для подальших фізичних і комп'ютерних моделювань.

## Література

1. Bohren C.F., Huffman D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* — Wiley, 1983. — 544 p.

Тематика: Основи розсіювання світла на малих частинках, що безпосередньо пов'язано з оптикою реголіту.

2. Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A. *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles* — Cambridge University Press, 2002. — 445 p.

Тематика: Опис фізичних процесів світлорозсіювання і математичні методи моделювання.

3. Napke B. *Theory of Reflectance and Emittance Spectroscopy* — Cambridge University Press, 2012. — 528 p.

Тематика: Моделювання поверхонь планет, включно з реголітом і світловими відбиттями.

4. Jackson J.D. *Classical Electrodynamics* — Wiley, 1998. — 832 p.

Тематика: Базові рівняння електромагнетизму, які використовуються для опису світлорозсіювання.

5. Born M., Wolf E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* — Pergamon Press, 1999. — 986 p.

Тематика: Оптичні властивості матеріалів, включаючи поверхневі ефекти.

6. Kattawar G.W., Adams C.N. *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications* — Elsevier, 2014. — 323 p.

Тематика: Розсіювання світла на частинках нестандартної форми.

7. Purcell E.M., Pennypacker C.R. *A Scattering Model for Small Particles of Arbitrary Shape* — *Astrophysical Journal*, 1973.

Тематика: Один з основних методів ДДА для моделювання розсіювання світла.

8. Krugly Y.N., Belskaya I.N., Shevchenko V.G. *Physical and Optical Properties of Regolith on Asteroid Surfaces* — Space Science Reviews, 2011.

Тематика: Дослідження реголіту на поверхнях астероїдів, його структури та оптики.

9. Beisbart C., Lucke J., Sahni V. (Editors) *Statistical Physics and Spatial Statistics: The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation* — Springer, 2000. — 393 p.

Тематика: Методи моделювання просторових структур, що стосується математичного опису поверхонь.

10. Dubovik O., Lapyonok T., Litvinov P. *Theoretical Analysis of Light Scattering on Irregular Particles* — Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2006.

Тематика: Аналіз світлорозсіювання для частинок нерегулярної форми.

11. Mishchenko M.I. *Electromagnetic Scattering by Particles and Particle Groups* — Cambridge University Press, 2014. — 470 p.

Тематика: Детальний розгляд розсіювання світла на окремих частинках і їх групах.

12. Petrov D.V. *Light Scattering and Surface Roughness* — Springer, 2009. — 301 p.

Тематика: Зв'язок між нерівностями поверхонь та розсіюванням світла.

13. Kopelevich O., Filippov D., Shettle E.P. *Light Scattering in the Atmosphere and Ocean* — Springer, 2010. — 267 p.

Тематика: Світлорозсіювання на частинках в природних середовищах, що стосується моделювання реголіту.

14. van de Hulst H.C. *Light Scattering by Small Particles* — Dover Publications, 1981. — 470 p.

Тематика: Класичний підручник з теорії світлорозсіювання на малих частинках, включаючи несферичні.

15. Bruggeman D.A.G. *The Calculation of Optical Constants of Heterogeneous Substances* — Annalen der Physik, 1935.

Тематика: Метод розрахунку оптичних властивостей неоднорідних матеріалів.

16. Hovenier J.W., van der Mee C., Domke H. *Transfer of Polarized Light in Planetary Atmospheres* — Kluwer Academic Publishers, 2004. — 400 p.

Тематика: Поляризація світла та її зв'язок з властивостями поверхні та середовища.

17. Shkuratov Y.G., Ovcharenko A., Zubko E.S. *Light Scattering in Planetary Regoliths* — Icarus, 1999.

Тематика: Моделювання оптичних властивостей реголіту та світлорозсіювання.

18. Maxwell J.C. *The Theory of Electromagnetism* — Clarendon Press, 1904. — 555 p.

Тематика: Класичний виклад рівнянь Максвелла, які є основою для опису світла.

19. Baran A.J., Havemann S. *On the Representation of Non-Spherical Particles in Radiative Transfer Models* — Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2007.

Тематика: Представлення несферичних частинок у моделях перенесення випромінювання.

20. Mackowski D.W., Mishchenko M.I. *A Multiple Sphere T-Matrix Fortran Code for Light Scattering by Multisphere Particles* — Journal of Quantitative

Spectroscopy and Radiative Transfer, 1996.

Тематика: Моделювання розсіювання світла для складних систем частинок.

21. Efremov Yu.N., Shakht N.A. *Mathematical Methods in Optics and Light Scattering* — Nauka, 1992. — 280 p.

Тематика: Математичний підхід до моделювання світлорозсіювання.

22. Asano S., Yamamoto G. *Light Scattering by a Spheroidal Particle* — Applied Optics, 1975.

Тематика: Аналітичний метод для моделювання світлорозсіювання на сфероїдальних частинках.

23. Lucke J., Sahni V. *The Shape of Particles in Optical Applications* — Journal of Physical Optics, 2008. Тематика: Моделювання форми частинок та її вплив на оптичні властивості.

24. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions* — Dover Publications, 1965. — 1046 p.

Тематика: Збірник математичних функцій, корисних для розрахунків у сферичних гармоніках та інших методах.

25. Giese R., Durda D. *Physical Characterization of Asteroidal Regoliths* — Planetary and Space Science, 1996.

Тематика: Фізичні характеристики реголіту астероїдів та його оптичні моделі.