

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему *«Про стабілізацію канонічних
нелінійних систем у спеціальному випадку»*

Виконала: студентка групи МП-61,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»

Барська Ю.М.

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики

Бєбія М.О.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник
відділу математичної фізики
Фізико-технічного інституту
низьких температур
імені Б. І. Веркіна НАН
України

Гукалов О.О.

Харків — 2025 рік

Анотації

Барська Юлія Михайлівна. Про стабілізацію канонічних нелінійних систем у спеціальному випадку. У роботі розглядається задача стабілізації для тривимірних нелінійних систем у спеціальному випадку. Досліджується клас керованих систем зі степеневими нелінійностями, які також називають канонічними нелінійними системами, за умови нестрогого спадання степенів. Побудову розв'язку здійснено із застосуванням методу функції Ляпунова. Було виведено умову на коефіцієнти стабілізуючого керування, що буде гарантувати асимптотичну стійкість нульової точки спокою.

Ключові слова: стабілізація, нелінійні керовані системи, метод функції Ляпунова, критичний випадок.

Barska Yuliia. On stabilization of canonical nonlinear systems in a special case. The paper considers the stabilization problem for three-dimensional nonlinear systems in a special case. A class of controllable systems with power nonlinearities, also known as canonical nonlinear systems, is investigated in the case of non-strictly decreasing powers. The solution is constructed using the Lyapunov function method. A condition for the coefficients of stabilizing control has been derived, which guarantees the asymptotic stability of the zero equilibrium point.

Keywords: stabilization, nonlinear control systems, Lyapunov function method, critical case.

Зміст

Вступ	4
1. Побудова лінійного керування	6
1.1. Функція Ляпунова та її похідна	6
1.2. Оцінка похідної функції Ляпунова	8
1.3. Визначення умов на коефіцієнти	12
1.3.1. Чисельне розв’язання системи	13
1.3.2. Інший підхід до розв’язання системи	17
2. Приклади	22
2.1. Приклад канонічної нелінійної системи	22
2.2. Приклад системи з нелінійними доданками більш високого порядку	23
Висновки	27
Список використаних джерел	28
Додатки	29

Вступ

Одним із ключових питань теорії керування є задача стабілізації нелінійних систем у критичному випадку [1, 2, 3, 4, 5].

Особливу увагу викликають нелінійні системи високих порядків, що не піддаються лінеаризації [1, 2, 3, 4, 5]. Ці системи є класичним прикладом критичного випадку, а саме, системи наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \quad (0.1)$$

де $p_i \geq 1$ є відношеннями додатних непарних цілих чисел, а $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ є неперервними дійснозначними функціями більш високого порядку ніж $x_{i+1}^{p_i}$ та виконується наступне: $\varphi_i(0, \dots, 0) = 0$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Серед можливих підходів до розв'язання таких задач значне місце займає метод функції Ляпунова, що дозволяє аналізувати локальну асимптотичну стійкість нульової точки спокою замкнутої системи.

Робота [4] показує, що можливо лінійно стабілізувати систему (0.1) за припущенням, що степені p_i є строго спадаючими, тобто $p_1 > p_2 > \dots > p_n \geq 1$.

Також дослідження на локальну асимптотичну стійкість системи (0.1) при $n = 3$ було розглянуто в статті [1], де детально розглядався один з випадків нестрогого спадання степенів p_i , а саме, коли $p_1 > p_2 = p_3 = 1$. В результаті, було доведено, що така система стабілізується при лінійному керуванні вигляду

$$u(x) = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3,$$

де $k_i > 0$ для $i = 1, 2, 3$ та за умови, що $k_3^2 > \frac{k_2(3 + 2\sqrt{3})}{3}$.

У цій роботі розглядається інший випадок нестрогого спадання p_i і доводиться можливість досягнення лінійної стабілізації системи (0.1).

А саме, проводиться аналіз тривимірної системи вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{p_2}, \\ \dot{x}_3 = u^{p_3}, \end{cases} \quad (0.2)$$

де $p_1 = p_2 > 1$ — відношення непарних цілих чисел, а $p_3 = 1$.

Метою дослідження є побудова лінійного стабілізуючого керування $u(x)$, що забезпечує локальну асимптотичну стійкість нульової точки спокою, а саме, виведення достатніх умов на коефіцієнти керування. Аналіз проводиться за допомогою методу функції Ляпунова, яка обрана у спеціальному вигляді, на відміну від [1,4], що дозволяє дати оцінку її похідної та обґрунтувати стійкість нульового розв'язку замкнутої системи.

Розділ 1

Побудова лінійного керування

Розглянемо нелінійну систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{p_1}, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $u \in \mathbb{R}$ - керування, $p_1 > 1$ - відношення непарних цілих чисел.

Задача стабілізації для системи (1.1) полягає в знаходженні неперервного керування $u(x)$ такого, що нульова точка спокою системи (1.1) з $u = u(x)$ є локально асимптотично стійкою.

Розглянемо лінійне керування

$$u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3, \quad (1.2)$$

де $k_i > 0$ - дійсні додатні числа для $i = 1, 2, 3$.

1.1. Функція Ляпунова та її похідна

Розглянемо функцію Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(g_1(p_1) \frac{k_2^{p_1}}{k_1} (k_1x_1)^2 + g_2(p_1) \frac{k_3^{p_1}}{k_2} (k_1x_1 + k_2x_2)^2 + \frac{1}{k_3} (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)^2 \right),$$

де $g_1(p_1), g_2(p_1)$ - додатновизначені функції, які залежать від p_1 .

Очевидно, що $V(x)$ є додатновизначеною для всіх $k_1, k_2, k_3 > 0$. Засто-

сувавши лінійну заміну змінних

$$e_1 = k_1 x_1, \quad e_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad e_3 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,$$

отримаємо

$$V(e) = \frac{1}{2} \left(g_1(p_1) \frac{k_2^{p_1}}{k_1} e_1^2 + g_2(p_1) \frac{k_3^{p_1}}{k_2} e_2^2 + \frac{1}{k_3} e_3^2 \right). \quad (1.3)$$

Зворотна заміна змінних:

$$x_1 = k_1^{-1} e_1, \quad x_2 = k_2^{-1} (e_2 - e_1), \quad x_3 = k_3^{-1} (e_3 - e_2). \quad (1.4)$$

Використовуючи (1.1) та (2.3), знайдемо похідні для e_1, e_2, e_3 :

$$\dot{e}_1 = k_1 \dot{x}_1 = k_1 x_2^{p_1} = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1},$$

$$\dot{e}_2 = k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_2 = k_1 x_2^{p_1} + k_2 x_3^{p_1} = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1},$$

$$\dot{e}_3 = k_1 x_2^{p_1} + k_2 x_3^{p_1} + k_3 u = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1} + k_3 u.$$

Підставимо $u = -(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) = -e_3$ та отримаємо наступне:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1}, \\ \dot{e}_2 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1}, \\ \dot{e}_3 = \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1} - k_3 e_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Тепер обчислимо похідну функції Ляпунова вздовж траєкторій замкнутої системи (1.5)

$$\dot{V}(e) = \frac{\partial V}{\partial e_1} \dot{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial e_2} \dot{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial e_3} \dot{e}_3.$$

Розглянемо кожен доданок окремо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial e_1} \dot{e}_1 &= \frac{\partial V}{\partial e_1} \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} = \frac{1}{2} g_1(p_1) \frac{k_2^{p_1}}{k_1} 2e_1 \frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} \\
&= g_1(p_1) e_1 (e_2 - e_1)^{p_1}, \\
\frac{\partial V}{\partial e_2} \dot{e}_2 &= \frac{1}{2} g_2(p_1) \frac{k_3^{p_1}}{k_2} 2e_2 \left(\frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1} \right) \\
&= g_2(p_1) \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} e_2 (e_2 - e_1)^{p_1} + g_2(p_1) e_2 (e_3 - e_2)^{p_1}, \\
\frac{\partial V}{\partial e_3} \dot{e}_3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_3} 2e_3 \left(\frac{k_1}{k_2^{p_1}} (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1}} (e_3 - e_2)^{p_1} - k_3 e_3 \right) \\
&= \frac{k_1}{k_2^{p_1} k_3} e_3 (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} e_3 (e_3 - e_2)^{p_1} - e_3^2.
\end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= g_1(p_1) e_1 (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} g_2(p_1) e_2 (e_2 - e_1)^{p_1} + g_2(p_1) e_2 (e_3 - e_2)^{p_1} \\
&+ \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} e_3 (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} e_3 (e_3 - e_2)^{p_1} - e_3^2.
\end{aligned}$$

Перепишемо $\dot{V}(e)$ таким чином

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= -g_1(p_1) e_1 (e_1 - e_2)^{p_1} - g_2(p_1) e_2 (e_2 - e_3)^{p_1} - e_3^2 \\
&+ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} g_2(k) e_2 (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} e_3 (e_2 - e_1)^{p_1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} e_3 (e_3 - e_2)^{p_1}.
\end{aligned}$$

1.2. Оцінка похідної функції Ляпунова

Для оцінки похідної $V(e)$ використаємо наступні допоміжні леми:

Лема 1.1. Для будь-якого $p \geq 1$ і довільних чисел $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, виконується нерівність

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n|^p \leq n^{p-1} (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p).$$

Лема 1.2. Нехай $p \geq 1$ — відношення додатних непарних чисел. Тоді

$$x(x+a)^p \geq 2^{1-p}x^{p+1} + xa^p, \quad \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

Лема 1.3. Нехай $m > 0, n > 0$. Тоді для будь-якого $\gamma > 0$ виконується

$$|x|^m|y|^n \leq \frac{m}{m+n}\gamma|x|^{m+n} + \frac{n}{m+n}\gamma^{-m/n}|y|^{m+n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Використавши леми 1.1 та 1.2, отримаємо такі нерівності:

$$\begin{aligned} -g_1(p_1)e_1(e_1 - e_2)^{p_1} &\leq g_1(p_1) \left(-2^{1-p_1}e_1^{p_1+1} + |e_2^{p_1}||e_1| \right), \\ -g_2(p_1)e_2(e_2 - e_3)^{p_1} &\leq g_2(p_1) \left(-2^{1-p_1}e_2^{p_1+1} + |e_3^{p_1}||e_2| \right), \\ \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}g_2(p_1)e_2(e_2 - e_1)^{p_1} &\leq \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}g_2(p_1) \left(e_2^{p_1+1} + |e_1^{p_1}||e_2| \right), \\ \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}e_3(e_2 - e_1)^{p_1} &\leq \frac{k_1}{k_3k_2^{p_1}}2^{p_1-1}(|e_2^{p_1}||e_3| + |e_1^{p_1}||e_3|), \\ \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}}e_3(e_3 - e_2)^{p_1} &\leq \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}}2^{p_1-1} \left(e_3^{p_1+1} + |e_2^{p_1}||e_3| \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

З нерівності Юнга відомо, що для будь-яких дійсних чисел $a, b \geq 0$ і $p, q \geq 1$ таких що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ виконується наступне: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Тобто, якщо візьмемо $p := 1 + s$ та $q := 1 + \frac{1}{s}$, де $s > 0$ - довільна константа, можемо оцінити $|e_i^{p_1}||e_j|$ наступним чином:

$$|e_i^{p_1}||e_j| \leq \frac{1}{1+s}e_i^{p_1(1+s)} + \frac{s}{s+1}e_j^{1+\frac{1}{s}}.$$

Нехай $s := \frac{1}{p_1}$, тоді:

$$\begin{aligned} |e_2^{p_1}||e_1| &= \left| \frac{1}{C_1}e_2 \right|^{p_1} |C_1^{p_1}e_1| \leq \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1}, \\ |e_1^{p_1}||e_2| &= |C_2^{p_1}e_1|^{p_1} \left| \frac{1}{C_2^{p_1}}e_2 \right| \leq \frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}e_2^{p_1+1}. \end{aligned}$$

Для наступних оцінок візьмемо $s \in (\frac{1}{p_1}, 1)$:

$$\begin{aligned}
|e_2^{p_1}| |e_3| &= \left| \frac{1}{C_3} e_2 \right|^{p_1} |C_3^{p_1} e_3| \leq \frac{1}{(1+s)C_3^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{sC_3^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}}, \\
|e_1^{p_1}| |e_3| &= |C_4^{p_1} e_1|^{p_1} \left| \frac{1}{C_4^{p_1^2}} e_3 \right| \leq \frac{C_4^{p_1(1+s)}}{s+1} e_1^{p_1(1+s)} + \frac{s}{(1+s)C_4^{p_1^2(1+\frac{1}{s})}} e_3^{1+\frac{1}{s}}, \quad (1.7) \\
|e_3^{p_1}| |e_2| &= \left| \frac{1}{C_5} e_2 \right|^{p_1} |C_5^{p_1} e_3| \leq \frac{1}{(1+s)C_5^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{sC_5^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}},
\end{aligned}$$

де $C_i > 0$ для $i = \overline{1, 5}$.

Зауважимо, що нерівності виконуються для будь-яких додатних C_i . Для того щоб довести асимптотичну стійкість, знайдемо додаткові умови на C_i , щоб гарантувати, що $\dot{V}(e)$ є від'ємновизначеною в деякому малому проколотої околі нуля.

Застосувавши оцінки надані вище послідовно, отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &\leq -g_1(p_1)2^{1-p_1}e_1^{p_1+1} + g_1(p_1) \left(\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} e_2^{p_1+1} + \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} \right) \\
&\quad - g_2(p_1)2^{1-p_1}e_2^{p_1+1} + g_2(p_1) \left(\frac{1}{(1+s)C_5^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{sC_5^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\
&\quad - e_3^2 + \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} g_2(p_1) e_2^{p_1+1} \\
&\quad + \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} g_2(p_1) \left(\frac{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} e_1^{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}} e_2^{p_1+1} \right) \\
&\quad + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{1}{(1+s)C_3^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{sC_3^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\
&\quad + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{C_4^{p_1(1+s)}}{s+1} e_1^{p_1(1+s)} + \frac{s}{(1+s)C_4^{p_1^2(1+\frac{1}{s})}} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\
&\quad + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} 2^{p_1-1} e_3^{p_1+1} + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{1}{(1+s)C_3^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{sC_3^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right).
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $p_1 > 1$, та покажемо, що для $s \in (\frac{1}{p_1}, 1)$ показник степеня $p_1(s+1)$ буде більшим за $p_1 + 1$:

$$p_1(s+1) > p_1 + 1,$$

$$s+1 > 1 + \frac{1}{p_1} \Leftrightarrow s > \frac{1}{p_1}.$$

Аналогічно і для $1 + \frac{1}{s}$:

$$1 + \frac{1}{s} > p_1 + 1,$$

$$\frac{1}{s} > p_1 \Leftrightarrow s > \frac{1}{p_1},$$

що справедливо, так як $s \in (\frac{1}{p_1}, 1)$.

Перепишемо вираз в правій частині так, щоб отримати коефіцієнти перед змінними $e_1^{p_1+1}$, $e_2^{p_1+1}$ та e_3^2 :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & \left(-g_1(p_1)2^{1-p_1} + g_1(p_1)\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} + \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} g_2(p_1) \frac{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} \right) e_1^{p_1+1} \\ & + \left(-g_2(p_1)2^{1-p_1} + g_1(p_1) \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} + \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} 2^{p_1-1} g_2(p_1) \left(1 + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}} \right) \right) e_2^{p_1+1} \\ & - e_3^2 + h(x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} h(x) = & g_2(p_1) \left(\frac{1}{(1+s)C_5^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{s C_5^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\ & + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{1}{(1+s)C_3^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{s C_3^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\ & + \frac{k_1}{k_3 k_2^{p_1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{C_4^{p_1(1+s)}}{s+1} e_1^{p_1(1+s)} + \frac{s}{(1+s)C_4^{p_1^2(1+\frac{1}{s})}} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right) \\ & + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} 2^{p_1-1} e_3^{p_1+1} \\ & + \frac{k_2}{k_3^{p_1+1}} 2^{p_1-1} \left(\frac{1}{(1+s)C_3^{p_1(s+1)}} e_2^{p_1(s+1)} + \frac{s C_3^{p_1(1+\frac{1}{s})}}{s+1} e_3^{1+\frac{1}{s}} \right). \end{aligned}$$

1.3. Визначення умов на коефіцієнти

Згідно з методом функції Ляпунова, для гарантування асимптотичної стійкості нульової точки спокою достатньо, щоб $\dot{V}(e)$ була від'ємновизначена, тобто всі коефіцієнти перед $e_1^{p_1+1}$, $e_2^{p_1+1}$, e_3^2 повинні бути від'ємними.

Розглянемо наступну систему нерівностей, щоб перевірити чи існують такі C_1, C_2 при яких обидва коефіцієнта при $e_1^{p_1+1}$ та $e_2^{p_1+1}$ будуть від'ємними:

$$\begin{cases} -g_1(p_1)2^{1-p_1} + g_1(p_1)\frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} + \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}g_2(p_1)\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} < 0, \\ -g_2(p_1)2^{1-p_1} + g_1(p_1)\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} + \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}g_2(p_1)\left(1 + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}\right) < 0, \end{cases}$$

еквівалентно маємо

$$\begin{cases} \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}g_2(p_1)\frac{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} < g_1(p_1)\left(2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}\right), \\ \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}}2^{p_1-1}g_2(p_1)\left(1 + \frac{1}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}\right) < g_2(p_1)2^{1-p_1} - g_1(p_1)\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}. \end{cases}$$

В результаті отримали систему, де ліві частини нерівностей залежать тільки від k_i , а праві - від C_1, C_2 :

$$\begin{cases} \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < \frac{2^{1-p_1}}{g_2(p_1)}g_1(p_1)\left(2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1}\right)\frac{p_1+1}{p_1C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < \frac{2^{1-p_1}}{g_2(p_1)}\left(g_2(p_1)2^{1-p_1} - g_1(p_1)\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}}\right)\frac{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Так як $k_1, k_2, k_3 > 0$, тоді для розв'язання системи нерівностей (1.8) необхідно, щоб праві частини були додатновизначеними. Це виконується тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} 2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} > 0, \\ g_2(p_1)2^{1-p_1} - g_1(p_1)\frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} > 0. \end{cases}$$

Звідси ми можемо вивести умови на C_1 :

$$\begin{cases} C_1^{p_1(p_1+1)} < 2^{1-p_1}(p_1+1), \\ C_1^{p_1+1} > \frac{g_1(p_1)p_1}{g_2(p_1)(p_1+1)}2^{p_1-1}. \end{cases}$$

Таке C_1 існує, якщо виконуються наступні еквівалентні нерівності:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_1(p_1)p_1}{g_2(p_1)(p_1+1)}2^{p_1-1} \right)^{p_1} &< 2^{1-p_1}(p_1+1), \\ \left(\frac{g_1(p_1)p_1}{g_2(p_1)(p_1+1)} \right)^{p_1} 2^{p_1^2-p_1} &< 2^{1-p_1}(p_1+1), \\ \left(\frac{g_1(p_1)}{g_2(p_1)} \right)^{p_1} \left(\frac{p_1}{p_1+1} \right)^{p_1} &< 2^{1-p_1^2}(p_1+1), \\ \left(\frac{g_1(p_1)}{g_2(p_1)} \right)^{p_1} &< 2^{1-p_1^2} \frac{(p_1+1)^{p_1+1}}{p_1^{p_1}}, \\ \frac{g_1(p_1)}{g_2(p_1)} &< 2^{\frac{1}{p_1}-p_1} \frac{(p_1+1)^{1+\frac{1}{p_1}}}{p_1}. \end{aligned}$$

Підсумовуючи все вищесказане, необхідні умови для розв'язності системи нерівностей (1.8) мають такий вигляд:

$$0 < g_1(p_1) < 2^{\frac{1}{p_1}-p_1} \frac{(p_1+1)^{1+\frac{1}{p_1}}}{p_1} g_2(p_1), \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{g_1(p_1)p_1}{g_2(p_1)(p_1+1)}2^{p_1-1} \right)^{p_1} < C_1^{p_1(p_1+1)} < 2^{1-p_1}(p_1+1). \quad (1.10)$$

1.3.1. Чисельне розв'язання системи

Позначимо праві частини системи (1.8) наступним чином:

$$R_1(C_1, C_2) := \frac{2^{1-p_1}}{g_2(p_1)} g_1(p_1) \left(2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \quad (1.11)$$

$$R_2(C_1, C_2) := \frac{2^{1-p_1}}{g_2(p_1)} \left(g_2(p_1) 2^{1-p_1} - g_1(p_1) \frac{p_1}{(p_1+1) C_1^{p_1+1}} \right) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \quad (1.12)$$

Так як ліві частини нерівностей системи (1.8) однакові, то нам необхідно визначити $\min\{R_1(C_1, C_2), R_2(C_1, C_2)\}$. Для кращої оцінки коефіцієнтів k_1, k_2, k_3 слід максимізувати цей мінімум. Тобто необхідно знайти наступну величину:

$$\max_{C_1, C_2 > 0} \min\{R_1(C_1, C_2), R_2(C_1, C_2)\}.$$

Враховуючи поведінку $R_1(C_1, C_2)$ та $R_2(C_1, C_2)$, максимальне значення мінімуму з цих двох функцій може досягатися в точках їх перетину, тобто:

$$R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*), \quad (1.13)$$

де (C_1^*, C_2^*) - точка перетину.

Зауважимо, що (1.11) та (1.12) можна представити у вигляді добутку

$$R_i(C_1, C_2) = \frac{2^{1-p_1}}{g_2(p_1)} F_i(C_1) H_i(C_2), \quad i = 1, 2,$$

тому для рівності (1.13) достатньо, щоб виконувалось наступне:

$$F_1(C_1^*) = F_2(C_1^*), \quad H_1(C_2^*) = H_2(C_2^*).$$

Розглянемо спочатку рівність $F_1(C_1) = F_2(C_1)$:

$$g_1(p_1) \left(2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1 + 1} \right) = g_2(p_1) 2^{1-p_1} - g_1(p_1) \frac{p_1}{(p_1 + 1) C_1^{p_1+1}},$$

$$(g_1(p_1) - g_2(p_1)) 2^{1-p_1} - g_1(p_1) \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1 + 1} + g_1(p_1) \frac{p_1}{(p_1 + 1) C_1^{p_1+1}} = 0.$$

В результаті отримаємо поліноміальне рівняння

$$g_1(p_1) C_1^{(p_1+1)^2} + 2^{1-p_1} (g_2(p_1) - g_1(p_1)) (p_1 + 1) C_1^{p_1+1} - g_1(p_1) p_1 = 0. \quad (1.14)$$

Додатний корінь якого буде задовольняти рівність $F_1(C_1) = F_2(C_1)$.

Тепер розглянемо рівність $H_1(C_2) = H_2(C_2)$:

$$\frac{p_1 + 1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}} = \frac{(p_1 + 1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1 + 1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1},$$

$$(p_1 + 1)((p_1 + 1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1) = (p_1 + 1)p_1 C_2^{p_1^2(p_1+1)+p_1(p_1+1)}.$$

Аналогічно до попередніх розрахунків, отримаємо поліном

$$p_1 C_2^{p_1(p_1+1)^2} - (p_1 + 1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} - 1 = 0. \quad (1.15)$$

Згідно із правилом знаків Декарта відомо, що кількість додатних коренів полінома дорівнює кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів, або на парне число менше цієї кількості. Тому, так як $p_1 > 1$, то кожен з поліномів, (1.14) та (1.15), має рівно один додатний дійсний корінь.

Нехай C_1^* , C_2^* - додатні дійсні корені поліномів (1.14) та (1.15) відповідно, тоді виконується рівність (1.13).

Оберемо такі додатновизначені функції $g_1(p_1)$ та $g_2(p_1)$, які задовольняють нерівність (1.9), наприклад:

$$g_1(p_1) := 1, \quad g_2(p_1) := 2^{p_1}. \quad (1.16)$$

Тоді необхідно і достатньо, щоб C_1^* та C_2^* були додатними дійсними коренями відповідних поліномів:

$$C_1^{(p_1+1)^2} + 2^{1-p_1}(2^{p_1} - 1)(p_1 + 1)C_1^{p_1+1} - p_1 = 0,$$

$$p_1 C_2^{p_1(p_1+1)^2} - (p_1 + 1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} - 1 = 0,$$

Згідно з умовою (1.10), корінь C_1^* повинен належати наступному інтервалу:

$$\left(\frac{p_1}{2(p_1 + 1)} \right)^{p_1} < C_1^{*p_1(p_1+1)} < 2^{1-p_1}(p_1 + 1). \quad (1.17)$$

Залежно від заданого непарного цілого числа $p_1 > 1$ можемо чисельно знайти C_1^* , C_2^* .

Зауважимо, що на Рис.1.1 синіми точками відображаються ті корені C_1^* полінома (1.14), які задовольняють умові (1.17).

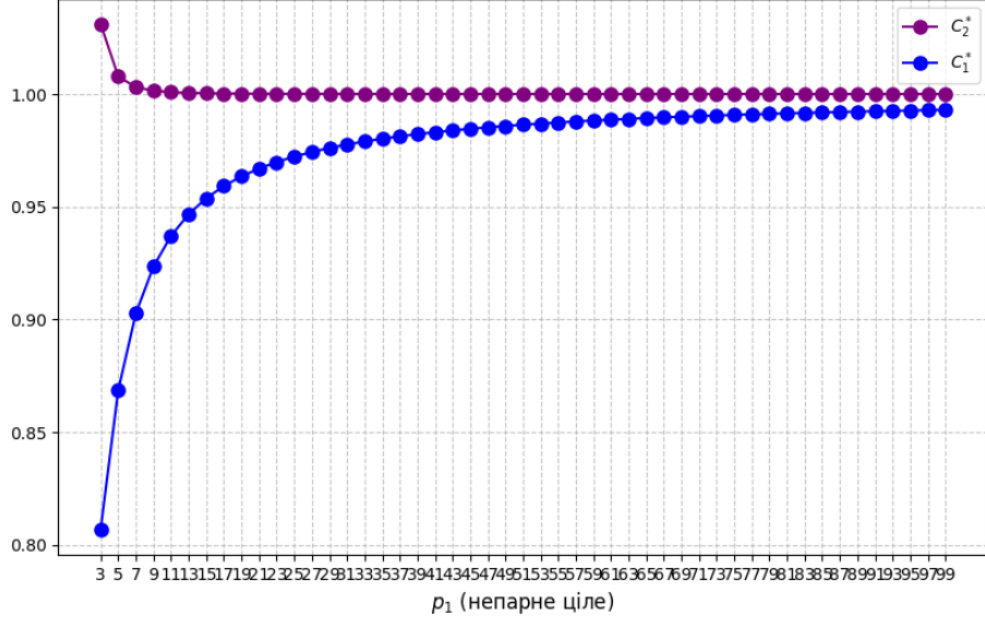


Рис. 1.1: Залежність коренів C_1^* , C_2^* від заданого p_1

Аналізуючи графіки на Рис.1.1, можна зробити висновок, що знайдений додатний корінь C_1^* завжди задовольняє необхідну умову (1.10). А саме, ця умова справедлива для всіх непарних цілих $p_1 > 1$. Отже, ми можемо чисельно розрахувати корені C_1^* , C_2^* та з системи (1.8) отримати наступну умову на коефіцієнти керування:

$$\frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*). \quad (1.18)$$

Таким чином, можемо отримати строгу оцінку на коефіцієнти керування $u(x)$ залежну від показника степеня p_1 . Наприклад, з Табл.1.1 маємо, що при $p_1 = 3$ достатньо, щоб виконувалось наступне:

$$\frac{k_1 k_3^3}{k_2^4} < 0.0066639059756,$$

де $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Тоді керування $u(x) = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$ буде стабілізувати систему (1.1).

p_1	C_1^*	C_2^*	$R_1(C_1^*, C_2^*) = R_2(C_1^*, C_2^*)$
3	0.8069196040	1.03109362	0.0066639059756
5	0.8686373318	1.00779697	0.00011151180503
7	0.9026865506	1.00305250	1.7902×10^{-6}
9	0.9234310693	1.00149759	2.837×10^{-8}
11	0.9370926072	1.00084302	4.472×10^{-10}
13	0.9466788767	1.00052068	7.03×10^{-12}
15	0.9537502144	1.00034384	1.103×10^{-13}
17	0.9591735749	1.00023883	1.729×10^{-15}
19	0.9634622911	1.00017258	2.71×10^{-17}

Табл. 1.1: Чисельне розв'язання рівняння (1.13)

Зауваження 1.4. Слід зазначити, що система (1.8) є розв'язною для будь-яких непарних $p_1 > 1$, однак знайдені C_1^* , C_2^* не обов'язково є оптимальними. Крім того результати при описаному підході залежать від обрання $g_1(p_1)$, $g_2(p_1)$. Враховуючи складність аналізу, важко передбачити заздалегідь як саме інший вибір $g_1(p_1)$, $g_2(p_1)$ вплине на чисельний результат. Тому далі запропоновано підхід, який дозволяє отримати оцінку на коефіцієнти керування, що залежить тільки від показника степеня p_1 .

1.3.2. Інший підхід до розв'язання системи

Розглянемо підхід, який буде гарантувати розв'язність системи (1.8) для будь-яких непарних значень $p_1 > 1$. Аналіз показав, що цей підхід дає дещо кращу оцінку на коефіцієнти стабілізуючого керування.

Повернемося до системи (1.8), підставивши задані $g_1(p_1)$ та $g_2(p_1)$ з (1.16), маємо:

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2^{1-p_1} - \frac{C_1^{p_1(p_1+1)}}{p_1+1} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2 - \frac{p_1}{(p_1+1)C_1^{p_1+1}} \right) \frac{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1)C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Згідно з необхідною умовою (1.10), можемо задати таке значення C_1 , яке точно буде знаходитись між верхньою і нижньою межею відповідно до нерівності (1.17). Візьмемо, наприклад, геометричну середину необхідного інтервалу:

$$C_1^{p_1(p_1+1)} = \sqrt{\left(\frac{p_1}{2(p_1+1)}\right)^{p_1} 2^{1-p_1}(p_1+1)},$$

$$C_1^{p_1(p_1+1)} = \sqrt{\frac{p_1^{p_1}}{(p_1+1)^{p_1-1}} 2^{1-2p_1}},$$

$$C_1^{p_1(p_1+1)} = \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}}}{(p_1+1)^{\frac{p_1-1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}-p_1}.$$

Звідки знаходимо $C_1^{p_1+1}$:

$$C_1^{p_1+1} = (C_1^{p_1(p_1+1)})^{\frac{1}{p_1}} = \frac{\sqrt{p_1}}{(p_1+1)^{\frac{p_1-1}{2p_1}}} 2^{\frac{1}{2p_1}-1}.$$

Підставивши отримані значення в систему нерівностей (1.19), маємо наступне:

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2^{1-p_1} - \frac{\frac{p_1^{\frac{p_1}{2}}}{(p_1+1)^{\frac{p_1-1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}-p_1}}{p_1+1} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2 - \frac{p_1}{(p_1+1) \frac{\sqrt{p_1}}{(p_1+1)^{\frac{p_1-1}{2p_1}}} 2^{\frac{1}{2p_1}-1}} \right) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2^{1-p_1} - \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-p_1}}{(p_1+1)^{\frac{p_1+1}{2}}} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2 - \frac{p_1(p_1+1)^{\frac{p_1-1}{2p_1}}}{(p_1+1) \sqrt{p_1} 2^{\frac{1}{2p_1}-1}} \right) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1} \end{cases}$$

або еквівалентно

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2^{1-p_1} - 2^{\frac{1}{2}-p_1} p_1^{\frac{p_1}{2}} (p_1+1)^{-\frac{p_1+1}{2}} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{1-2p_1} \left(2 - 2^{1-\frac{1}{2p_1}} p_1^{1/2} (p_1+1)^{-\frac{p_1-1}{2p_1}} \right) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \end{cases}$$

Отже, після елементарних перетворень, маємо

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{\frac{3}{2}-3p_1} \left(\sqrt{2} - \sqrt{p_1^{p_1} (p_1+1)^{-p_1-1}} \right) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}}, \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < 2^{2-2p_1} \left(1 - 2^{-\frac{1}{2p_1}} \sqrt{p_1 (p_1+1)^{-\frac{p_1-1}{p_1}}} \right) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Введемо позначення $\tilde{F}_1(p_1)$, $\tilde{F}_2(p_1)$ таким чином:

$$\tilde{F}_1(p_1) := 2^{\frac{3}{2}-3p_1} \left(\sqrt{2} - \sqrt{(p_1+1)^{-p_1-1} p_1^{p_1}} \right),$$

$$\tilde{F}_2(p_1) := 4^{1-p_1} \left(1 - 2^{-\frac{1}{2p_1}} \sqrt{p_1 (p_1+1)^{-\frac{p_1-1}{p_1}}} \right).$$

Обидві ці функції додатновизначені, монотонно спадають і прямують до 0, причому $\tilde{F}_2(p_1) > \tilde{F}_1(p_1)$ для всіх $p_1 > 1$.

Перепишемо систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < \tilde{R}_1(p_1, C_2), \\ \frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < \tilde{R}_2(p_1, C_2), \end{cases} \quad (1.21)$$

де

$$\tilde{R}_1(p_1, C_2) := \tilde{F}_1(p_1) \frac{p_1+1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}},$$

$$\tilde{R}_2(p_1, C_2) := \tilde{F}_2(p_1) \frac{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1+1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}.$$

При фіксованому p_1 функція $\tilde{R}_1(p_1, C_2)$ є спадною для додатних C_2 , а $\tilde{R}_2(p_1, C_2)$ - навпаки, зростаючою. Тоді, аналогічно до попереднього розді-

лу, знайдемо оптимальне значення C_2 , при якому праві частини системи (1.21) перетинаються, тобто

$$\tilde{F}_1(p_1) \frac{p_1 + 1}{p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}} = \tilde{F}_2(p_1) \frac{(p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)}}{(p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1}.$$

Звідки маємо

$$\tilde{F}_1(p_1)(p_1 + 1) \left((p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} + 1 \right) = \tilde{F}_2(p_1)(p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} p_1 C_2^{p_1(p_1+1)}$$

або

$$F_1(p_1)(p_1 + 1)^2 C_2^{p_1^2(p_1+1)} + F_1(p_1)(p_1 + 1) = F_2(p_1) p_1 (p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1) + p_1(p_1+1)},$$

що еквівалентно

$$\tilde{F}_1(p_1)(p_1 + 1)^2 C_2^{p_1^2(p_1+1)} - \tilde{F}_2(p_1) p_1 (p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)^2} + \tilde{F}_1(p_1)(p_1 + 1) = 0.$$

Отримаємо поліном

$$\tilde{F}_2(p_1) p_1 C_2^{p_1(p_1+1)^2} - \tilde{F}_1(p_1)(p_1 + 1) C_2^{p_1^2(p_1+1)} - \tilde{F}_1(p_1) = 0. \quad (1.22)$$

Нехай, $\tilde{C}_2$ - дійсний додатний корінь цього поліному. Він існує і притому єдиний, згідно з правилом знаків Декарта, так як для всіх $p_1 > 1$ функції $\tilde{F}_1(p_1)$ та $\tilde{F}_2(p_1)$ є додатновизначеними. Тоді візьмемо $C_2 = \tilde{C}_2$ - оптимальне значення для розв'язання системи (1.21).

Чисельні розрахунки зображені на Рис.1.2 показують, що $\tilde{C}_2$ прямує до одиниці при зростанні степеня p_1 . Так як $\tilde{C}_2$ є обмеженим зверху і знизу, можемо проаналізувати поведінку правих частин системи (1.21) при цих межових значеннях, і вивести строгу оцінку на коефіцієнти k_1, k_2, k_3 .

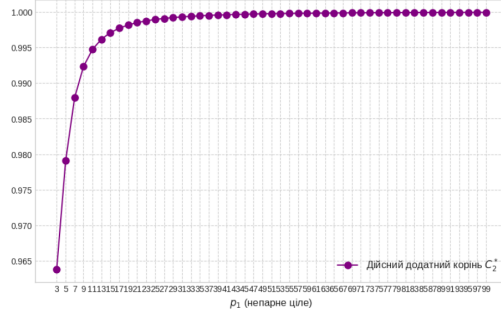


Рис. 1.2: Залежність кореня $\tilde{C}_2$ від p_1

Щоб оцінити знизу максимум мінімуму правих частин системи (1.21), слід розглянути $C_2 = 1$, що підтверджує Рис.1.3. Тобто $\tilde{R}_1(p_1, 1) < \tilde{R}_1(p_1, \tilde{C}_2)$ для всіх $p_1 > 1$.

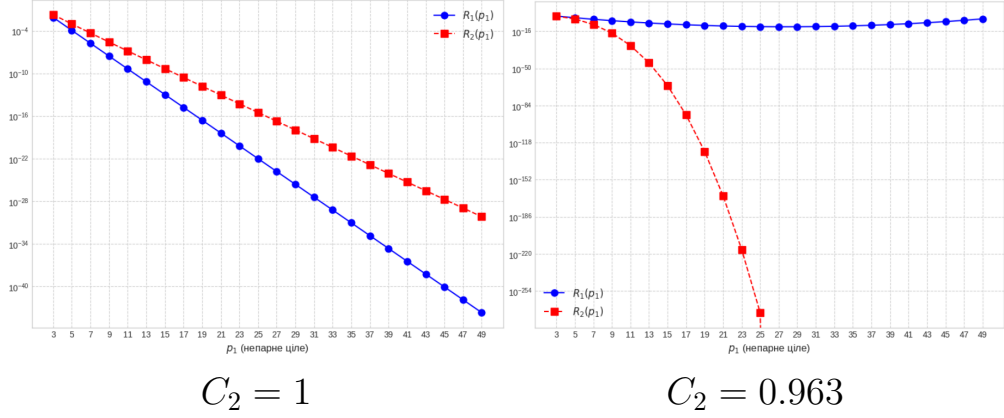


Рис. 1.3: Поведінка $\tilde{R}_1(p_1, C_2)$ та $\tilde{R}_2(p_1, C_2)$ при межових значеннях C_2

Тоді, якщо

$$\frac{k_1 k_3^{p_1}}{k_2^{p_1+1}} < \tilde{R}_1(p_1, 1) = 2^{\frac{3}{2}-3p_1} \left(\sqrt{2} - \sqrt{(p_1 + 1)^{-p_1-1} p_1^{p_1}} \right) \frac{p_1 + 1}{p_1}, \quad (1.23)$$

ми можемо гарантувати асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи (1.1) в деякому проколотому околі нуля.

p_1	$\tilde{R}_1(p_1, 1)$	p_1	$\tilde{R}_1(p_1, 1)$	p_1	$\tilde{R}_1(p_1, 1)$
3	0.0080245868397	13	6.9209×10^{-12}	23	6.4452×10^{-21}
5	0.00011967741513	15	1.0805×10^{-13}	25	1.0076×10^{-22}
7	1.8383×10^{-6}	17	1.688×10^{-15}	27	1.5753×10^{-24}
9	2.8504×10^{-8}	19	2.6378×10^{-17}	29	2.4629×10^{-26}
11	4.4373×10^{-10}	21	4.123×10^{-19}	31	3.8506×10^{-28}

Табл. 1.2: Чисельні значення правої частини нерівності (1.23)

Розділ 2

Приклади

2.1. Приклад канонічної нелінійної системи

Приклад 2.1: Розглянемо задачу стабілізації для такої нелінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{11}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{11}, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (2.1)$$

В цьому випадку $p_1 = 11$. Оберемо такі $k_1, k_2, k_3 > 0$, щоб виконувалась умова (1.23). Наприклад, візьмемо $k_1 = 5, k_2 = 15, k_3 = 2$:

$$\frac{k_1 k_3^{11}}{k_2^{12}} = 0.789 \dots \times 10^{-10} < 4.4373 \times 10^{-10}$$

і умова (1.23) є справедливою, згідно з Табл.1.2 при $p_1 = 11$.

Тоді стабілізуюче керування має вигляд

$$u(x) = -5x_1 - 15x_2 - 2x_3.$$

Підставимо це керування в систему (2.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{11}, \\ \dot{x}_2 = x_3^{11}, \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 15x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Проілюструємо поведінку траєкторії цієї системи, наприклад, для початкових умов

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 0.9, \quad x_3(0) = 1.$$

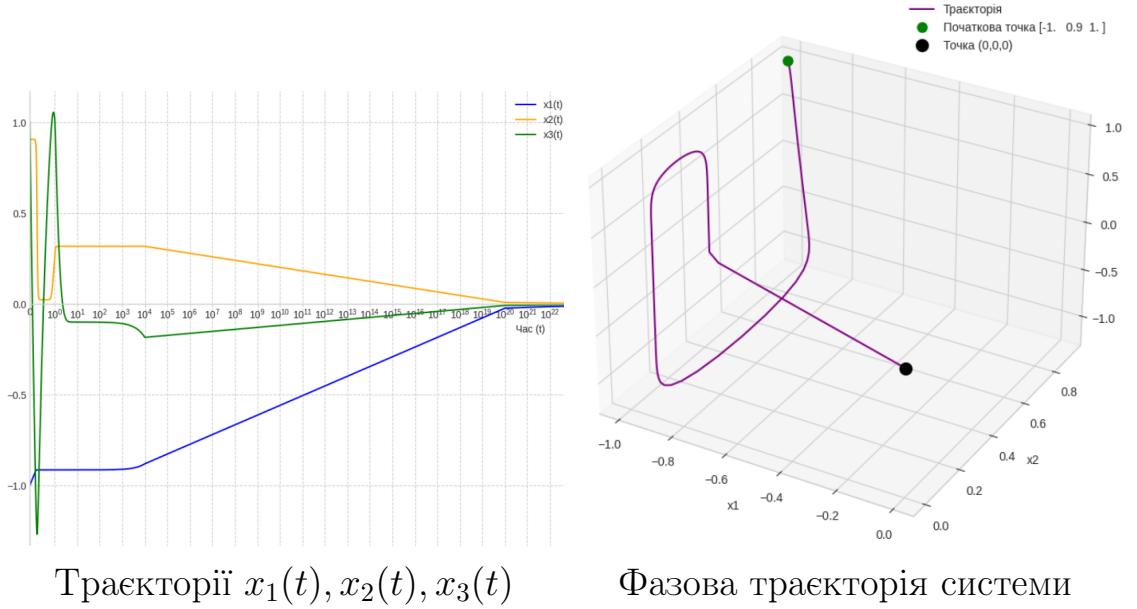


Рис. 2.1: Траєкторії системи (2.1) при $u = u(x)$

З Рис.2.1 видно, що траєкторія системи прямує до нуля зі зростанням часу.

2.2. Приклад системи з нелінійними доданками більш високого порядку

Аналогічно до роботи [1] можемо розглянути більш загальну систему вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + \varphi_i(x_1, \dots, x_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ — неперервні функції більш високого порядку. Для стабілізації системи (2.2) використовується те ж саме лінійне керування $u(x)$:

$$u(x) = -k_1 x_1 - \dots - k_n x_n,$$

де $k_i \in \mathbb{R}, k_i > 0, i = 1, \dots, n$, що стабілізує її нелінійне наближення, а саме систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ключовою умовою застосовності такого підходу є вимога, щоб неперервні функції φ_i в околі початку координат задовольняли наступні оцінки:

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \rho_i(x_1, \dots, x_n) \left(|x_{i+1}|^{p_i+\delta_i} + |x_{i+2}|^{p_i+\delta_i} + \dots + |x_n|^{p_i+\delta_i} \right), \quad (2.4)$$

де $\rho_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ - неперервні функції та $\delta_i > 0$ - сталі, $i = 1, \dots, n$.

Оскільки порядок функцій $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ вищий за порядок $x_{i+1}^{p_i}$, керування $u(x)$ стабілізує систему (2.2). Це дозволяє зберегти вибір функції Ляпунова та заміни змінних, застосовані для системи (2.3). При цьому додаткові члени більш високого порядку, що виникають від φ_i при знаходженні похідної функції Ляпунова, будуть потрапляти у функцію $h(x)$. Такі члени не впливають на знак похідної в достатньо малому околі нуля.

Розглянемо тепер частковий випадок системи (2.2), поклавши $n = 3$, $p_1 = p_2 > 1$ та $p_3 = 1$. Отже, система матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{p_1} + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3^{p_1} + \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (2.5)$$

За умови існування чисел $\delta_1 > 0$ та $\delta_2 > 0$ таких, що в околі початку коор-

динат виконанні наступні оцінки для функцій $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ та $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$:

$$|\varphi_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)(|x_2|^{p_1+\delta_1} + |x_3|^{p_1+\delta_1}),$$

$$|\varphi_2(x_1, x_2, x_3)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)|x_3|^{p_1+\delta_2},$$

при деяких неперервних функціях $\rho_1(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ та $\rho_2(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, маємо, що лінійне керування

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$$

стабілізує нульову точку спокою системи (2.5) при виконанні умови (1.23).

Приклад 2.2: Розглянемо задачу стабілізації для нелінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_2^4 \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_3^3 + x_3^4 \cos(x_1), \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (2.6)$$

В цьому випадку $p_1 = 3$ та

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_2^4 \sin(x_1 + x_2), \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_3^4 \cos(x_1).$$

Якщо обрати $\delta_1 = \delta_2 = 1$ та $\rho_1(x_1, x_2, x_3) = 1$, $\rho_2(x_1, x_2, x_3) = 1$, то виконується умова (2.4):

$$|x_2^4 \sin(x_1 + x_2)| \leq \rho_1(x_1, x_2, x_3)(|x_2|^{3+\delta_1} + |x_3|^{3+\delta_1}) = x_2^4 + x_3^4,$$

$$|x_3^4 \cos(x_1)| \leq \rho_2(x_1, x_2, x_3)|x_3|^{3+\delta_2} = x_3^4.$$

Оберемо такі $k_1, k_2, k_3 > 0$, щоб виконувалась умова (1.23), наприклад,

$k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1$. Дійсно,

$$\frac{k_1 k_3^3}{k_2^4} = 0.00390625 < 0.008024 \dots,$$

тоді стабілізуюче керування має вигляд:

$$u(x) = -x_1 - 4x_2 - x_3.$$

Підставимо $u(x)$ в систему (2.6) та проілюструємо поведінку траєкторії замкнутої системи, наприклад, для початкових умов

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1.$$

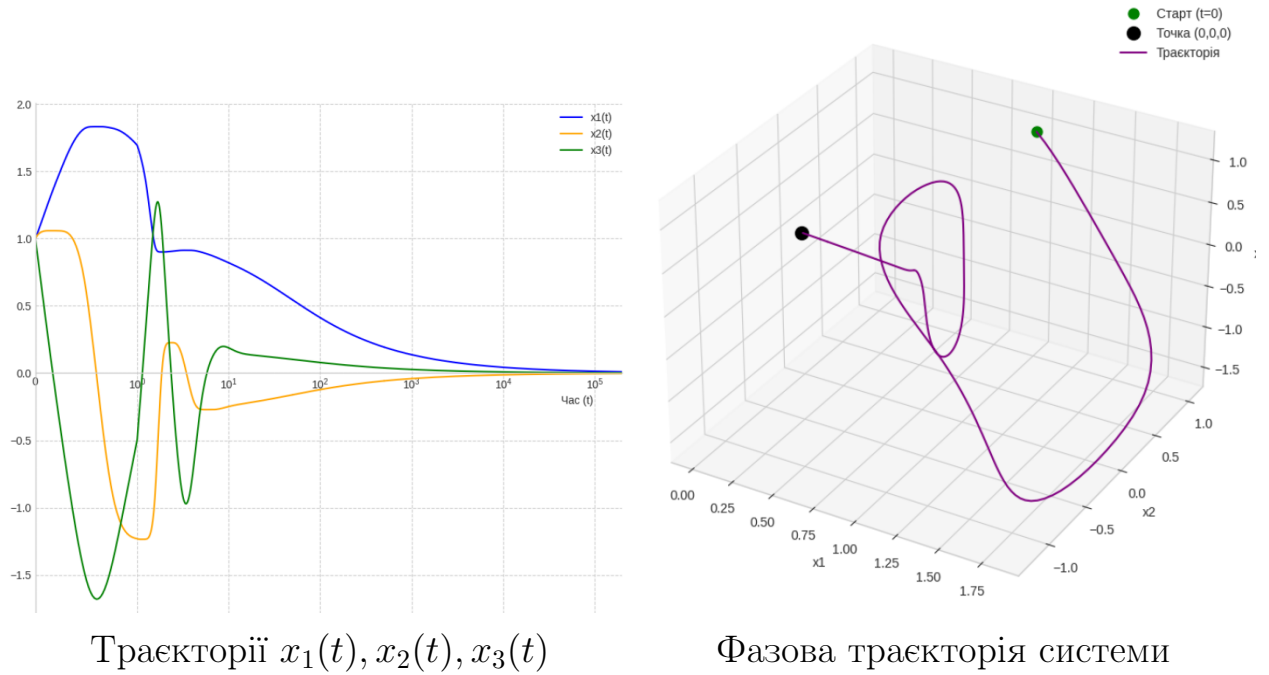


Рис. 2.2: Траєкторії системи (2.6) при $u = u(x)$

Чисельні розрахунки підтверджують, що траєкторії системи (2.6) дійсно прямують до нуля для початкових умов з достатньо малого околу початку координат.

Висновки

В роботі було розв'язано задачу стабілізації для класу тривимірних систем із степеневими нелінійностями в особливому випадку. У порівнянні з попередніми результатами [2, 3, 4, 5], умова строгого спадання степенів була пом'якшена до умови нестрогого спадання. Доведено, що для досліджуваного класу систем ефективним є застосування лінійного закону керування, яке базується на побудові спеціальної функції Ляпунова та аналізі її похідної. До того ж, кількома способами було отримано додаткові вимоги щодо коефіцієнтів керування k_1 , k_2 та k_3 , в порівнянні з ситуацією зі строго спадаючими показниками степенів, щоб досягти локальної асимптотичної стійкості нульової точки спокою.

Отримані теоретичні результати було чисельно підтверджено прикладами, які продемонстрували збіжність фазових траєкторій систем до початку координат.

Список використаних джерел

- [1] Bebiya M.O., Mastruk V.A. On linear stabilization of a class of nonlinear systems in a critical case, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2023. – Vol. 98. - P. 36-49. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-03
- [2] M.O. Bebiya, V.I. Korobov, On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. - 2016. - Vol. 12, No. 2. - P. 113-133. DOI: 10.15407/mag12.02.113
- [3] V.I. Korobov, M.O. Bebiya, Stabilization of one class of nonlinear systems, Automation and Remote Control. - 2017. - Vol. 78, No. 1. - P. 1-15. DOI: 10.1134/S0005117917010015
- [4] J. Zhu, C. Qian, A necessary and sufficient condition for local asymptotic stability of a class of nonlinear systems in the critical case, Automatica. - 2018. - Vol. 96. - P. 234-239. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.06.052
- [5] M.O. Bebiya, On the bounded control synthesis for three-dimensional high order nonlinear systems, Bukovinian Mathematical Journal. - 2023. - Vol. 11, No. 2. - P. 11-23. DOI: 10.31861/bmj2023.02.01

Додатки

Чисельне розв’язання згаданих поліноміальних рівнянь, систем та побудови графіків було виконано за допомогою Python 3, бібліотеки matplotlib, mpmath, numpy, scipy та numba. Лістинги відповідних програм наведені нижче:

Лістинг 2.1: Побудова графіку на Рис.1.1 та обчислення значень Таб.1.1

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpmath import mp

mp.dps = 300

def solve_c1_exact(p1_val, g1, g2):
    p1 = mp.mpf(p1_val)
    K = mp.power(2, 1 - p1) * (g2 - g1) * (p1 + 1)

    def eq(x):
        return mp.power(x, p1 + 1) + K * x - p1

    def deq(x):
        return (p1 + 1) * mp.power(x, p1) + K

    try:
        x_root = mp.findroot(eq, 0.5, df=deq, tol=mp.power(10, -150))
    except ValueError as e:
        print(f"Error solving C1 for p={p1_val}: {e}")
        return None, None, None, None

    c1 = mp.power(x_root, 1 / (p1 + 1))

    val_check = mp.power(x_root, p1)
    base_lower = ((g1 * p1) / (g2 * (p1 + 1))) * mp.power(2, p1 - 1)
    lower_bound = mp.power(base_lower, p1)
    upper_bound = mp.power(2, 1 - p1) * (p1 + 1)
```

```

    return c1, val_check, lower_bound, upper_bound

def solve_c2_exact(p1_val):
    p1 = mp.mpf(p1_val)

    def eq(x):
        return p1 * mp.power(x, p1 + 1) - (p1 + 1) * mp.power(x, p1) - 1

    def deq(x):
        return p1 * (p1 + 1) * mp.power(x, p1) - (p1 + 1) * p1 * mp.power(
x, p1 - 1)

    start_point = 1.0 + 2.0/p1

    try:
        x_root = mp.findroot(eq, start_point, df=deq, tol=mp.power(10,
-150), maxsteps=1000)
    except ValueError as e:
        print(f"Error solving C2 for p={p1_val}: {e}")
        return None

    c2 = mp.power(x_root, 1 / (p1 * (p1 + 1)))
    return c2

# --- R1 and R2 ---

def calculate_R1(c1, c2, p1, g1, g2):
    term1 = (mp.power(2, 1 - p1) / g2)

    c1_pow = mp.power(c1, p1 * (p1 + 1))
    c2_pow = mp.power(c2, p1 * (p1 + 1))

    F1 = g1 * (mp.power(2, 1 - p1) - (c1_pow / (p1 + 1)))
    H1 = (p1 + 1) / (p1 * c2_pow)

    return term1 * F1 * H1

def calculate_R2(c1, c2, p1, g1, g2):
    term1 = mp.power(2, 1 - p1) / g2

    c1_pow_small = mp.power(c1, p1 + 1)

```

```

F2 = g2 * mp.power(2, 1 - p1) - g1 * (p1 / ((p1 + 1) * c1_pow_small))

exponent_huge = p1 * p1 * (p1 + 1)
c2_pow_huge = mp.power(c2, exponent_huge)

numerator = (p1 + 1) * c2_pow_huge
denominator = numerator + 1
H2 = numerator / denominator

return term1 * F2 * H2

p1_values = range(3, 100, 2)

data_p1 = []
data_c1 = []
data_c2 = []

print(f"{'p1':<4} | {'C1':<12} | {'C2':<12} | {'R1':<12} | {'R2':<12} | {'R1=R2?'}")
print("-" * 95)

for p_val in p1_values:
    p = mp.mpf(p_val)
    g1 = mp.mpf(1)
    g2 = mp.power(2, p)

    c1, val, lb, ub = solve_c1_exact(p, g1, g2)
    c2 = solve_c2_exact(p)

    data_p1.append(p_val)

    if c1 is not None and c2 is not None:
        if not (val > lb and val < ub):
            print(f"{p_val:<4} | C1 out of bounds")
            data_c1.append(float('nan'))
            data_c2.append(float('nan'))
            continue

    r1_val = calculate_R1(c1, c2, p, g1, g2)
    r2_val = calculate_R2(c1, c2, p, g1, g2)

```

```

is_equal = mp.almosteq(r1_val, r2_val, abs_eps=mp.mpf('1e-100'))

data_c1.append(float(c1))
data_c2.append(float(c2))

s_c1 = mp.nstr(c1, 8)
s_c2 = mp.nstr(c2, 8)
s_r1 = mp.nstr(r1_val, 5)
s_r2 = mp.nstr(r2_val, 5)

print(f"{p_val:<4} | {s_c1:<12} | {s_c2:<12} | {s_r1:<12} | {s_r2:<12} | {is_equal}")
else:
    data_c1.append(float('nan'))
    data_c2.append(float('nan'))
    print(f"{p_val:<4} | Error solving roots")

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

ax.plot(data_p1, data_c2, 'o-', color='purple', label='$C_2 \sim$', markersize=8)
ax.plot(data_p1, data_c1, 'o-', color='blue', label='$C_1 \sim$', markersize=8)

ax.set_xlabel('$p_1$', fontsize=12)
ax.legend()
ax.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
ax.set_xticks(data_p1)

plt.show()

```

Лістинг 2.2: Побудова графіку для Рис.1.2

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def find_positive_real_C2_new(p1):
    p1 = float(p1)
    degree = int(p1 + 1)

    F1 = 2**((3.0/2.0-3.0*p1)*(np.sqrt(2.0)-np.sqrt((p1+1.0)**(-p1-1.0)*p1

```

```

**(p1)))
F2 = 4**((1.0-p1)*(1-2**(-1.0/(2.0*p1))*np.sqrt(p1*(p1+1)**((-1.0-p1)/
p1)))

coefficients = [0.0] * (degree + 1)

coefficients[0] = F2*p1
coefficients[1] = -(F1*(p1 + 1.0))
coefficients[-1] = -F1
try:
    all_x_roots = np.roots(coefficients)
except np.linalg.LinAlgError:
    return np.nan
real_roots = all_x_roots[np.isreal(all_x_roots)].real
positive_real_x_roots = real_roots[real_roots > 0]

if len(positive_real_x_roots) > 0:
    x_root = positive_real_x_roots[0]
    c2_root = x_root**((1.0 / (p1 * (p1 + 1.0)))
    return c2_root
else:
    return np.nan

p1_values = np.arange(3, 100, 2)
c2_values = [find_positive_real_C2_new(p) for p in p1_values]

plt.style.use('seaborn-v0_8-whitegrid')
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

ax.plot(p1_values, c2_values, 'o-', color='purple', label='Real positive
root  $C_2^{*p_1}$ ', markersize=8)

ax.set_title('Real positive  $C_2^{*p_1}$  of  $p_1$ ', fontsize=16)
ax.set_xlabel('p1', fontsize=12)
ax.set_ylabel('C2', fontsize=12)
ax.legend(fontsize=12)
ax.grid(True, linestyle='--')
ax.set_xticks(p1_values)

print("p1 | C2 ")
print("----|-----")

```

```

for p, c in zip(p1_values, c2_values):
    if np.isnan(c):
        print(f"{p:2} | not found")
    else:
        print(f"{p:2} | {c:.10f}")
        R = 2**((1.0/2.0-3.0*p)*(np.sqrt(2.0)-np.sqrt((p+1.0)**(-p-1.0)*p**(p))
        *(p+1.0)/(p*c**(p*(p+1.0))))
        print(R)

plt.show()

```

Лістинг 2.3: Поведінка функцій $\tilde{R}$ та $\tilde{R}_2$ залежно від заданого C_2 для Рис.1.3

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def verify_equalities(p1):
    print("-" * 40)
    print(f"CHECK for p1 = {p1}")
    print("-" * 40)

    p1 = float(p1)

    try:
        F1 = 2**((3.0/2.0-3.0*p1)*(np.sqrt(2.0)-np.sqrt((p1+1.0)**(-p1-1.0)
        *p1**(p1))))
        F2 = 4**((1.0-p1)*(1-2**((-1.0/(2.0*p1))*np.sqrt(p1*(p1+1)**((-1.0-
        p1)/p1))))
    except (ValueError, OverflowError):
        return np.nan, np.nan

    C2 = 1.0

    try:
        exponent_C2_R1 = p1 * (p1 + 1.0)
        F1_factor = (p1 + 1.0) / (p1 * C2**exponent_C2_R1)
        exponent_C2_R2 = p1**2.0 * (p1 + 1.0)
        C2_pow = C2**exponent_C2_R2 # = 1.0
        numerator_RHS2 = (p1 + 1.0) * C2_pow
        denominator_RHS2 = ((p1 + 1.0) * C2_pow) + 1

```

```

    F2_factor = numerator_RHS2 / denominator_RHS2

    R1 = F1 * F1_factor
    R2 = F2 * F2_factor

    print("--- Numerical results ---")
    print(f"   R1      {R1:.10e}")
    print(f"   R2      {R2:.10e}")
    print(f"   (R1 = R2)? {np.isclose(R1, R2)}")
    print("\n")
    return R1, R2

except Exception as e:
    print(f"Error, can't find R1 or R2: {e}")
    return np.nan, np.nan

p1_values = np.arange(3, 50, 2)
r1_plot_values = []
r2_plot_values = []

for p in p1_values:
    r1, r2 = verify_equalities(p)
    r1_plot_values.append(r1)
    r2_plot_values.append(r2)

plt.style.use('seaborn-v0_8-whitegrid')
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 7))

ax.plot(p1_values, r1_plot_values, 'o-', label='$R_1(p_1)$', markersize=8,
        color='blue')
ax.plot(p1_values, r2_plot_values, 's--', label='$R_2(p_1)$', markersize
        =8, color='red')

ax.set_title('$R_1$ and $R_2$ of $p_1$ (if $C_2=1$)', fontsize=16)
ax.set_xlabel('$p_1$', fontsize=12)
ax.legend(fontsize=12)
ax.grid(True, linestyle='--')
ax.set_xticks(p1_values)
ax.set_yscale('log')

plt.show()

```

Лістинг 2.4: Моделювання тректорій системи для Прикладу 2.1 (аналогічно і для Прикладу 2.2)

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from numba import njit

p1 = 3.0
k1 = 1.0
k3 = 1.0
k2 = 4.0

A = (k1 * k3**p1) / (k2**(p1 + 1))
term_in_sqrt = (p1**p1) / ((p1 + 1)**(p1 + 1))
B = (2**(2/2 - 3*p1) * (np.sqrt(2) - np.sqrt(term_in_sqrt))) * (p1 + 1) /
    p1
print(f'A={A}')
print(f'B={B}')
print(f" A < B: {A < B}")

@njit
def system_ode_numba(t, y, k1, k2, k3, p1):
    x1, x2, x3 = y
    u = -k1*x1 - k2*x2 - k3*x3

    dx1_dt = np.sign(x2) * np.abs(x2)**p1+(x2**(p1+1))*np.sin(x1+x2)
    dx2_dt = np.sign(x3) * np.abs(x3)**p1+(x3**(p1+1))*np.cos(x1)
    dx3_dt = u

    return np.array([dx1_dt, dx2_dt, dx3_dt])

initial_ics = np.array([1.0, 1.0, 1.0])
t_final = 10.0**10

time_segments = [0.0, 10.0, 500.0, 10000.0, t_final]

all_t = []
all_y = []
```

```

current_ics = initial_ics

print("Starting a quick solution...")

for i in range(len(time_segments) - 1):
    t_start = time_segments[i]
    t_end = time_segments[i+1]

    t_eval = np.linspace(t_start, t_end, 1000)

    dsol = solve_ivp(
        system_ode_numba,
        (t_start, t_end),
        current_ics,
        t_eval=t_eval,
        method='LSODA',
        args=(k1, k2, k3, p1)
    )

    all_t.append(dsol.t)
    all_y.append(dsol.y)

    current_ics = dsol.y[:, -1]

full_t = np.concatenate(all_t)
full_y = np.concatenate(all_y, axis=1)

print("The solution is complete. I am drawing graphs...")

fig = plt.figure(figsize=(16, 8))
fig.suptitle(f"Trajectory", fontsize=16)

# --- 2D grafic ---
ax_2d = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax_2d.set_xscale('symlog', linthresh=1.0)
ax_2d.set_xlim(left=0, right=t_final)

ax_2d.plot(full_t, full_y[0], color='blue', label='x1(t)')
ax_2d.plot(full_t, full_y[1], color='orange', label='x2(t)')
ax_2d.plot(full_t, full_y[2], color='green', label='x3(t)')

```

```

ax_2d.spines['top'].set_visible(False)
ax_2d.spines['right'].set_visible(False)
ax_2d.spines['bottom'].set_position('zero')
ax_2d.spines['left'].set_position('zero')
ax_2d.set_xlabel('time (t)', ha='right', x=0.95)
ax_2d.legend()
ax_2d.grid(True, linestyle='--')

# --- 3D graphic ---
ax_3d = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
ax_3d.set_xlabel('x1')
ax_3d.set_ylabel('x2')
ax_3d.set_zlabel('x3')
ax_3d.set_title('3D Phase portrait')

ax_3d.plot(full_y[0], full_y[1], full_y[2], color='purple', label='
    Trajectory', lw=1.5)

ax_3d.plot([initial_ics[0]], [initial_ics[1]], [initial_ics[2]], 'go',
    markersize=8, label=f'Starting point {initial_ics}')
ax_3d.plot([0], [0], [0], 'ko', markersize=10, label='Point (0,0,0)')

ax_3d.legend()

plt.tight_layout(rect=[0, 0.03, 1, 0.95])
plt.show()

```
