

УДК 517.9

В. И. ХРАБУСТОВСКИЙ

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ВЕСОМ (РАЗЛОЖЕНИЯ
ПО БЛОХОВСКИМ РЕШЕНИЯМ)**

В данной статье строятся формулы разложения по ограничен-
ным на оси (в отличие от [1]) решениям периодической симмет-
рической системы m дифференциальных уравнений

$$l[y] = \lambda w(t) y \quad (1)$$

произвольного порядка r с матричным (возможно всюду вырож-
денным) весом $w(t) \geq 0$.

Эти разложения строятся в двух видах: в $n^\circ 2$ — по блоховским решениям (ограниченным на оси решениям Флоке) и в $n^\circ 4$ — по линейным комбинациям этих решений, обладающим тем удобным свойством, что для их построения (см. $n^\circ 3$) не надо знать (в отличие от блоховских решений) собственные векторы матрицы монодромии (м. м.). Предварительно в $n^\circ 1$ исследуется самосопряженное (эрмитово) отношение L_α , порождаемое краевой задачей для (1) с граничным условием $\tilde{y}(1) = e^{i\alpha}\tilde{y}(0)^*$. Строится характеристическая матрица и показывается, что $L_{\alpha+0} = L_{\alpha-0}$ (в смысле равномерной резольвентной сходимости) и что в то же время может $L_{\alpha+0} \neq L_\alpha$ (для конечного числа значений $e^{i\alpha}$). Найдено предельное отношение $L_{\alpha+0}$. Результаты $n^\circ 3, 4$ являются новыми и для скалярного уравнения с $\omega(t) \equiv 1$. Часть результатов работы анонсирована в [2].

1. Пусть $J = \underset{H}{(a, b)} \in R^1$. Обозначим: $H = L^2(J, \omega dt)$; $N = \{h \in E^n: Y_\lambda(t)h = 0\}$, где $n = mr$, $Y_\lambda(t)$ — такое $m \times n$ — матричное решение (1), что $\tilde{Y}_\lambda(0) =$ единичной $n \times n$ — матрице 1_n ; P — ортопроектор на $N^\perp$. Для $J = R^1N$ и P обозначаем N_∞ и P_∞ соответственно. В интегралах по J пределы интегрирования опускаем. Считаем, что в (1) период коэффициентов = 1 и м. м. $\tilde{Y}_\lambda(1)$ обозначаем X_λ .

Теорема [1].

$$X_\lambda N_\infty = N_\infty, \quad X_\lambda (GN_\infty)^\perp = (GN_\infty)^\perp, \quad (2)$$

$$b - a \geq \kappa \Rightarrow N = N_\infty, \quad (3)$$

где iG = старшему коэффициенту в нуле эквивалентной (1) системы первого порядка из [1], $\kappa = \deg$ минимального полинома X_0 .

Ниже в этом $n^\circ J = (0, 1)$, $\alpha \in R^1$. В силу [1]

$$N \supseteq K_\alpha(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(X_\lambda - e^{i\alpha}1_n) = K_\alpha(i), \quad \lambda \in R^1, \quad (4)$$

$$N \supseteq K_\alpha(\lambda_0) \Rightarrow K_\alpha(\lambda) \supseteq K_\alpha(\lambda_0) = K_\alpha(i). \quad (5)$$

Лемма 1. Уравнение

$$(1_n - e^{-i\alpha}X_\lambda)\hat{h} = (iG)^{-1}h \quad (6)$$

имеет решение $\hat{h} = \hat{h}(\alpha, \lambda, h)$, если и только если $h \perp K_\alpha(\lambda)$. Если $K_\alpha(\lambda_0) \subseteq N$ (при $\lambda_0 \in R^1$ это так в силу (4)), то в окрестности $\lambda_0 P_h$ является оператором в $N^\perp$, аналитически зависящим от λ .

Доказательство. По теореме Фредгольма (6) разрешимо, если и только если $G^{-1}h \perp \forall$ решению g уравнения

$$(X_\lambda^* - e^{-i\alpha}1_n)g = 0. \quad (7)$$

* Если z — решение (1) или аналогичного неоднородного уравнения, то $\tilde{z}$ — соответствующее решение эквивалентной системы первого порядка из [1].

Но учитывая, что $X_{\lambda}^* G X_{\lambda} = G$, и (4), видим, что любое решение (7) $g = Ge$, где $e \in K_{\alpha}(\lambda)$, и первое утверждение доказано. Из (5) следует, что в окрестности $\lambda_0 K_{\alpha}(\lambda) \subseteq N^*$. Значит в этой окрестности $\forall h \in N^1 \exists \hat{h}$, которое можно выбрать аналитически зависящим от λ по формуле (1.20) из [3, с. 22], если учесть, что $K_{\alpha}(\lambda) = K_{\alpha}(i)$ в этой окрестности в силу (5). Так как $\hat{P}h$ вектором h определяется однозначно, то все доказано.

Рассмотрим в H отношение $L_{\alpha} = \{\{u, v\} \in H^2 : u = y, \tilde{y} \in AC, l[y] = \omega v, \tilde{y}(1) = e^{i\alpha} \tilde{y}(0)\}$.

Теорема 1. $L_{\alpha}^* = L_{\alpha}$. Пусть $M_{\alpha} = M_{\alpha}(\lambda)$ — характеристическая матрица резольвенты L_{α} (см. [1]).

$$\forall h \in N^1 : M_{\alpha}(\lambda) h = P \left(\hat{h} - \frac{1}{2} (iG)^{-1} h \right), \quad \lambda \in R^1. \quad (8)$$

Доказательство. $\forall f \in H$ положим $h = \int Y_{\lambda}^*(s) \omega(s) f(s) ds \in N^1$. Непосредственная проверка показывает, что $y(t) = Y_{\lambda}(t) \times \times \left\{ \hat{h} - \frac{1}{2} (iG)^{-1} h - \int \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t-s) G^{-1} Y_{\lambda}^*(s) \omega(s) f(s) ds \right\}$ является при $\forall f \in H, \lambda \in R^1$ решением задачи

$$l[y] - \lambda \omega y = \omega f, \quad \tilde{y}(1) = e^{i\alpha} \tilde{y}(0). \quad (9)$$

Из очевидной симметричности L_{α} и разрешимости (9) при $\forall f \in H, \lambda \in R^1$ выводим, как в доказательстве леммы 6 из [1], самосопряженность L_{α} , а затем формулу (8).

Обозначим $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В силу [1] при $\lambda \in R^1$ $\sigma(X_{\lambda}) \cap S = \sigma(X_i) \cap S = \sigma_s$ и у σ_s суммарная алгебраическая кратность $d(\lambda) = d(i)$. Пусть $R_s(\lambda)$ — отвечающий σ_s проектор Рисса м. м. X_{λ} .

Следствие 1. При $e^{i\alpha} \notin \sigma_s$ для $M_{\alpha}(\lambda)$ справедливы формулы:

$$M_{\alpha}(\lambda) = P \left((1_n - e^{-i\alpha} X_{\lambda})^{-1} - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P, \quad \lambda \in R^1, \quad (10)$$

$$M_{\alpha}(\lambda) = P \left(F_{\alpha}(X_{\lambda}) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P, \quad \lambda \in R^1, \quad (11)$$

$$\text{где } F_{\alpha}(\rho) = \begin{cases} (1 - e^{-i\alpha} \rho)^{-1} & \text{при } \rho \in \sigma(X_{\lambda}) \setminus \sigma_s, \\ 0 & \text{при } \rho \in \sigma_s. \end{cases}$$

Доказательство. При $e^{i\alpha} \notin \sigma_s$ из (6) выводим, что при $\lambda \in R^1 \forall h \in E^n \hat{h} = (1_n - e^{-i\alpha} X_{\lambda})^{-1} (iG)^{-1} h$. Подставив это $\hat{h}$ в (8),

* Действительно, если $\exists \lambda_j \rightarrow \lambda_0 : K_{\alpha}(\lambda_j) \cap N \neq K_{\alpha}(\lambda_j)$, то в силу (5) $K_{\alpha}(\lambda_j) \supset K_{\alpha}(\lambda_0)$. Значит, все миноры $X_{\lambda} - e^{i\alpha} 1_n$ порядка $< \dim K_{\alpha}(\lambda_0)^{\perp}$ равны нулю при $\lambda = \lambda_j$, а значит, они $\equiv 0$, что невозможно.

получим (10). Так как $P = P_\infty P = PP_\infty$, то при $e^{i\alpha} \bar{\epsilon} \sigma_s P (1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} (iG)^{-1} P = PF_\alpha(X_\lambda) (iG)^{-1} P + PP_\infty (1_n - e^{-i\alpha} X_\lambda)^{-1} \times \times R_s (iG)^{-1} P_\infty P$. Но в силу (2) второе слагаемое = 0, ибо, как показано в [1],

$$P_\infty R_s(\lambda) G^{-1} P_\infty = 0, \quad \lambda \in R^1. \quad (12)$$

Итак, (8) при $e^{i\alpha} \bar{\epsilon} \sigma_s$ преобразуется в известную [4] формулу (10), теряющую смысл при $e^{i\alpha} \in \sigma_s$.

Из (11) следует, что $\forall \alpha M_{\alpha+0} = M_{\alpha-0}$ = правой части (11) и при $e^{i\alpha} \bar{\epsilon} \sigma_s M_{\alpha+0} = M_\alpha$. Однако, как показано в [2] (см. также пример 1 данной работы), бывает, что $M_{\alpha+0} \neq M_\alpha$. Возникает вопрос: характеристической матрицей какого отношения является $M_{\alpha+0}$?

Рассмотрим в H отношение $L_{\alpha+0} = \{ \{u, v\} \in H^2, u = y, \tilde{y} \in AC, l[y] = wv, \tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in N_\infty, \tilde{y}(0) \in (GN_\infty)^\perp \}$. Ответ на вопрос дает

Теорема 2. $L_{\alpha+0}^* = L_{\alpha+0}$. Характеристическая матрица резольвенты $L_{\alpha+0}$ равна $M_{\alpha+0}$.

Доказательство*. $\forall f \in H$ положим $g = (iG)^{-1} \int Y_\lambda^*(s) \times \times \omega(s) f(s) ds \in (GN_\infty)^\perp$, $g_s = R_s(\lambda) g$. Из (12), (2) следует, что

$$g_s \in N_\infty \cap (GN_\infty)^\perp, \quad X_\lambda F_\alpha(X_\lambda) g \in (GN_\infty)^\perp. \quad (13)$$

Обозначим

$$y(t) = \int Y_\lambda(t) \left\{ \left(F_\alpha(X_\lambda) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} - - \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t-s) G^{-1} \right\} Y_\lambda^*(s) \omega(s) f(s) ds. \quad (14)$$

Легко видеть, что

$$\tilde{y}(0) = e^{-i\alpha} X_\lambda F_\alpha(X_\lambda) g + g_s, \quad \tilde{y}(1) = X_\lambda F_\alpha(X_\lambda) g, \quad (15)$$

откуда в силу (13) $\tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in N_\infty$, $\tilde{y}(0) \in (GN_\infty)^\perp$. Значит $y(t)$ (14) — решение задачи

$$l[y] - \lambda w y = w f, \quad \tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in N_\infty, \quad \tilde{y}(0) \in (GN_\infty)^\perp. \quad (16)$$

Оно единственно в H . Действительно, если y_1, y_2 — решения (16), то $y_1 - y_2 = Y_\lambda(t) h$, где $(X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n) h \in N_\infty$, $h \in (GN_\infty)^\perp$. Из второго включения $\Rightarrow R_s h \in N_\infty$ в силу (12). Значит $h_0 = (X_\lambda - e^{i\alpha} 1_n) (1_n - R_s) h \in N_\infty$ в силу (2) и первого включения. Отсюда получаем, что $(R_s - 1_n) h = e^{-i\alpha} F_\alpha(X_\lambda) h_0 \in N_\infty$ в силу (2). Значит $h \in N_\infty \subseteq N$.

Докажем симметричность $L_{\alpha+0}$. Из единственности решения в H задачи (16) следует, что $\forall \{u, v\} \in L_{\alpha+0} : u = y$, где $y = (14)$

* В нем всюду $\lambda \in R^1$.

с $f = v - \lambda u$. Следовательно, у $L_{\alpha+0}$ внеинтегральный член в формуле Лагранжа $= \tilde{y}_1^* i G \tilde{v}_2|_0^1$, где y_1, y_2 — функции вида (14). Но тогда в силу (15), (13) он равен 0 и значит $L_{\alpha+0}$ симметрично. Доказательство теоремы 2 завершается аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. Функции $M_\alpha(\lambda)$, $M_{\alpha+0}(\lambda)$ являются мероморфными* функциями λ . Их полюсы совпадают с собственными значениями задач

$$l[y] = \lambda w y, \quad \tilde{y}(1) = e^{i\alpha} \tilde{y}(0), \quad y \neq 0, \quad (17)$$

$$l[y] = \lambda w y, \quad \tilde{y}(1) - e^{i\alpha} \tilde{y}(0) \in N_\infty, \quad \tilde{y}(0) \in (GN_\infty)^\perp, \quad y \neq 0, \quad (18)$$

соответственно.

Доказательство. Аналитичность $M_\alpha(\lambda)$ может нарушаться лишь при $\lambda \in U_s = \{\lambda \in R^1 : K_\alpha(\lambda) \cap N \neq K_\alpha(\lambda)\}$ в силу леммы 1, а аналитичность $M_{\alpha+0}(\lambda)$ — лишь при $\lambda \in T_s = \{\lambda \in R^1 : d(\lambda) > d(i)\}^{**}$. U_s не имеет конечных предельных точек. Действительно, если $\exists U_s \ni \lambda_j \rightarrow \lambda_0 \neq \infty$, то в силу (4), (5) все миноры $X_\lambda - e^{i\alpha} I_n$ порядка $\dim K_\alpha(i)^\perp$ равны нулю при $\lambda = \lambda_j$, а значит, они $\equiv 0$, что невозможно. Из того, что мультипликаторы (м.) — алгебраические функции, следует, что и T_s конечных предельных точек не имеет. Отсюда с учетом неванлинновости $M_\alpha, M_{\alpha+0}$ вытекает первое утверждение. Второе — следствие теоремы 1 из [1].

Из (11) и теорем 1, 2 следует, что $\forall \alpha$ при $\beta \rightarrow \alpha \pm 0$ ($L_\beta - \lambda$) $^{-1} \rightarrow (L_{\alpha+0} - \lambda)^{-1}$ ($\lambda \notin R^1$) в равномерной операторной топологии и что при $e^{i\alpha} \notin \sigma_s$ $L_{\alpha+0} = L_\alpha$. Однако при $e^{i\alpha} \in \sigma_s$ бывает, что $L_{\alpha+0} \neq L_\alpha$, как показывает

Пример 1. У системы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 + \lambda \end{pmatrix} y \quad (19)$$

два м. = 1, а третий $\rho = \exp\{-i(1 + \lambda)\}$. При $\forall \lambda$ м. = 1 отвечает решение Флоке $\text{col}(1, 0, 0) \stackrel{H}{=} 0$, а при $\lambda = 0$ — еще и $y_0 = \text{col}(0, 1, 0) \stackrel{H}{\neq} 0$. М. ρ отвечает при $\forall \lambda$ решение Флоке $y_\lambda(t) = \text{col}(\lambda, 0, \ln \rho) \rho^t$, которое $\stackrel{H}{\neq} 0$ при $\lambda \neq -1$. Учитывая, что $P = \text{diag}(0, 1, 1)$, находим по формуле (11), что при $e^{i\alpha} \neq 1 = \sigma_s M_\alpha(\lambda) = \text{diag}(0, 0, i/(\rho e^{-i\alpha} - 1) + i/2)$, откуда

$$M_{\alpha+0}(\lambda) = \text{diag}(0, 0, i/(\rho - 1) + i/2). \quad (20)$$

* Или целыми, как показывает пример (5) из [2].

** Бывает, что $\lambda \in U_s$, но $\notin T_s$ ($\lambda = 0$ в (5) из [2] и в (19), (5) и наоборот, ($\lambda = -1$ в (19)).

По формуле (8) находим, что

$$M_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \lambda)/\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda/(1 + \lambda) + i/(\rho - 1) + i/2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Из (20), (21) в силу теоремы 1 из [1] следует: 1) $\lambda_j = 2\pi j - 1$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ являются общими собственными значениями (17) и (18), а $y_{\lambda_j}(t)$ — общими собственными функциями; 2) $\lambda = 0$ — собственное значение только (17). Собственная функция $= y_0$; 3) $\lambda = -1$ — собственное значение только (18). Собственная функция $= \text{col}(i - t, 0, 1) (= dy_\lambda(t)/d\rho|_{\rho=1})$.

Замыкая в H линейные оболочки собственных функций, получаем в силу теоремы 1 из [1], что $\overline{D(L_0)}$ состоит из функций вида $\text{col}(0, \text{Const}, f)$, где $f \in L^2(J, dx) \ominus \text{Const}$, а $\overline{D(L_{+0})}$ — из функций вида $\text{col}(0, 0, g)$, где $g \in L^2(J, dx)$.

Характеристическая матрица резольвенты отношения $L_0 = L_0^*$, порождаемого (1) на оси, равна [1]:

$$M(\lambda) = P_\infty \left(R^+(\lambda) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P_\infty, \quad \lambda \in R^1, \quad (22)$$

где $R^+(\lambda)$ — проектор Рисса м. м., отвечающий $\sigma_i = \{\rho \in \sigma(X_\lambda) : |\rho| < 1\}$.

Отметим, что $M(\lambda) = \lim_{j \rightarrow \infty} M_{\alpha j}(\lambda)$, где $M_{\alpha j}(\lambda)$ — характеристическая матрица задачи вида (18) (если $e^{2iaj} \bar{\epsilon} \sigma_s$, то и вида (17)) на интервале $(-j, j)$, где $\kappa/2 \leq j \in \mathbb{Z}$. Действительно, в силу (3),

(11) $M_{\alpha j}(\lambda) = P_\infty \left(F_\alpha(X_\lambda^{2j}) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P_\infty$. Так как при $j \rightarrow \infty$ $F_\alpha(\rho^{2j})$ стремится к характеристической функции σ_i , то $F_\alpha(X_\lambda^{2j}) \rightarrow R^+(\lambda)$ (функциональное исчисление) и все доказано.

2. В этом n° строится спектральное разложение для (1) в форме Гельфанда. Здесь $J = R^1$.

После удаления из λ -оси не имеющего конечных предельных точек множества получим непересекающиеся интервалы Λ_ρ такие, что $\Lambda_\rho \cap (T_s \cup U_s) = \emptyset$ и при фиксированном $\lambda \in \Lambda_\rho$ среди м. $\epsilon \in S \setminus \sigma_s$ нет совпавших (исключая м., равные тождественно на Λ_ρ) и равных 1. Спектр задачи (17), попавший при $\alpha \in [0, 2\pi)$ в Λ_ρ , состоит из собственных значений $\mu_\rho^q(\alpha) : A_\rho^q \rightarrow \Lambda_\rho$ ($0 \leq q < \infty$, интервал $A_\rho^q \subset [0, 2\pi)$) являющихся аналитическими и монотонными на A_ρ^q функциями. Соответствующие ортонормированные в $L^2((0, 1), \omega dt)$ собственные функции $x_{\rho\alpha}^q(t)$ можно выбрать непрерывно зависящими от $\alpha \in A_\rho^q$ и так, что $\exists \lim_{\alpha \rightarrow \kappa} x_{\rho\alpha}^q(0)$, если $A_\rho^q \ni \alpha \rightarrow \kappa$ концу A_ρ^q , а $e^{i\alpha} \rightarrow \sigma_s$ (эти факты можно доказать, ис-

пользуя [3, гл. 3. $n^\circ 4$, 2], [5, с. 115], [2]). Перенумеровав $\mu_p^q(\alpha)$, $x_{p\alpha}^q(t)$, A_p^q , получим $\mu_j(\alpha)$, $x_{j\alpha}(t)$, A_j и положим

$$\lambda_j(\alpha) = \begin{cases} \mu_j(\alpha) & \text{при } \alpha \in A_j \\ \infty & \text{при } \alpha \notin A_j \end{cases}$$

$$y_{j\alpha}(t) = \begin{cases} Y_{\lambda_j(\alpha)}(t) P_\infty x_{j\alpha}(0) & \text{при } \alpha \in A_j \\ 0 & \text{при } \alpha \notin A_j \end{cases} \quad (23)$$

Теорема 3. $\forall f \in D(L_0)$ справедливы формулы обращения

$$f(t) = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{j\alpha}(t) a_j(\alpha) d\alpha, \quad (24)$$

$$a_j(\alpha) = \int y_{j\alpha}^*(t) w(t) f(t) dt \quad (25)$$

и равенство Парсеваля

$$\int f^* w f dt = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_j(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (26)$$

ряд (24) сходится в H , а интеграл (25) — в $L^2((0, 2\pi), dx)$.

Доказательство. В силу (3), (11) характеристическая матрица задачи вида (17) на интервале $(0, \kappa)$ равна при $\lambda \in R^1$

$$M_\alpha(\lambda) = P_\infty \left(F_\alpha(X_\lambda^*) - \frac{1}{2} 1_n \right) (iG)^{-1} P_\infty,$$

если $e^{i\alpha x} \in \sigma_s$. Отсюда, учитывая (22), конечность σ_s и равенство $(\lambda \in R^1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\alpha(X_\lambda^*) d\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1-0} (X_\lambda^* - z 1_n)^{-1} dz = R^+(\lambda),$$

получим, что

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_\alpha(\lambda) d\alpha, \quad \lambda \in R^1. \quad (27)$$

Пусть $\tau(\lambda)$ и $\tau_\alpha(\lambda)$ — спектральные матрицы, отвечающие $M(\lambda)$ и $M_\alpha(\lambda)$ соответственно. В силу (27)

$$\int (1 + \lambda^2)^{-1} d\tau_\alpha(\lambda) \leq \text{Im } M(i). \quad (28)$$

Используя формулу обращения Стильтьеса [4, с. 631] и теорему Лебега, из (27), (28) выводим:

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_\alpha(\lambda) d\alpha^*. \quad (29)$$

* Используя пример 1 из [5], можно показать, что (27), (29), вообще говоря, перестанут быть справедливыми, если в них соответственно M_α заменить M_α , а τ_α — отвечающей M_α спектральной матрицей.

Но с помощью (10) из [1] и замечания 1 можно показать, что

$$\int_0^{2\pi} (\tau_\alpha(\mu_2) - \tau_\alpha(\mu_1)) d\alpha = \sum_i \int_{\Delta_j} \tilde{y}_{j\alpha}(0) (\tilde{y}_{j\alpha}(0))^* d\alpha, \quad (30)$$

где $\Delta_j = \{\alpha: \mu_1 < \lambda_j(\alpha) < \mu_2\}$. Пусть E_μ — спектральное семейство отношения L_0 [1]. Используя [1] ((11), теорема 5), теорему Лебега, из (28) — (30) получаем, что для финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1})f = \sum_i \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_j} y_{j\alpha}(t) a_j(\alpha) d\alpha,$$

откуда стандартно выводятся (24) — (26).

Отметим, что $y_{j\alpha}(0) \in L^\infty(0, 2\pi)$ в силу (28). Однако (ср. замечание 3 из [2]), если в (23) убрать P_∞ , то в (24) некоторые интегралы могут стать расходящимися. Так для (19) расходится в 0 интеграл из (24), отвечающий собственному значению $\lambda = -(1 + \alpha)$, если в (23) нет P_∞ , а $f = \text{col}(0, 0, g)$, $0 < g \in C_0^1(J)$ ($f \in D(L_0)$).

3. Ниже $\sigma_s = \emptyset$, $n = 2k$ и выполнено условие:

$$\exists \Gamma \in M_n(\mathbb{C}) : \Gamma^* G \Gamma = i \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ -1_k & 0 \end{pmatrix}^{\text{def}} = J. \quad (31)$$

Обозначим $\Lambda = R^1 \setminus T$, где T — множество тех λ , при которых > 1 порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным m . Пусть проекторы Рисса $P^+(\lambda)$ ($P^-(\lambda)$) отвечают m . I (II) рода [1, 5], $Q^+(\lambda) = R^+ + P^+$, $Q^-(\lambda) = \underset{\text{def}}{P^-} - Q^+$. Как известно [5], $P^+ \in C_{\text{loc}}^\infty(\Lambda)$. В силу (31) $\text{rg } P^+ = \text{rg } P^- = r(\lambda)$, а в силу [5] $r(\lambda) = \text{const}$ при $\lambda \in (\alpha, \beta) \subseteq \Lambda$. $\forall B(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ полагаем $\Gamma^{-1} B(\lambda) \Gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, $B_i \in M_k(\mathbb{C})$. Обозначим $\tau^\pm(\lambda) = (1/2\pi) (2 \text{Re } P_1^\pm \pm \pm i (P_2^\pm - P_3^\pm)) (\lambda \in \Lambda)$.

Лемма 2. $\tau^\pm(\lambda) \geq 0$, $\text{rg } \tau^\pm(\lambda) = r(\lambda)$.

Доказательство. В силу леммы 2 из [1]

$$2\pi\tau^\pm = \mp(1_k, \mp i1_k) J \Gamma^{-1} P^\pm \Gamma (1_k, \mp i1_k)^*, \quad (32)$$

откуда $\tau^\pm \geq 0$, ибо $\mp G P^\pm \geq 0$ [3], и $\text{rg } \tau^\pm \leq r$, так как rg произведения (32) $\leq \text{rg}$ каждого множителя.

Покажем, что $\text{rg } \tau^\pm \geq r$. Обозначим $K^\pm$ подпространства векторов вида $\Gamma \text{col}(f^\pm, \pm i f^\pm)$, где $f^\pm \in \text{Ker } \tau^\pm$. Ясно, что $K^\pm \mp G$ — положительны. В силу (32) $P^\pm K^\pm = 0 \Rightarrow P^\pm E^n G$ — ортогональны $K^\pm \Rightarrow P^\pm E^n \perp K^\pm \mp G$ — положительны $\Rightarrow \dim(P^\pm E^n \perp K^\pm) \leq k \Rightarrow \Rightarrow r + \text{def } \tau^\pm \leq k \Rightarrow r \leq \text{rg } \tau^\pm$.

Обозначим $\Pi^\pm(\lambda)$ ортопроекторы на $\tau^\pm(\lambda) E^k$.

Лемма 3.1°. $\Pi^\pm(\lambda) \in C_{\text{loc}}^\infty(\Lambda)$ 2°. $\forall \lambda_0 \in T \exists \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \Pi^\pm(\lambda)$.

Доказательство. Утверждение 1° вытекает из того, что

$$P^\pm \in C_{\text{loc}}^\infty(\Lambda) \text{ и } r(\lambda) = \text{const при } \lambda \in (\alpha, \beta) \subseteq \Lambda.$$

Докажем 2°. Запишем $\Pi^\pm(\lambda)$ с помощью интерполяционного полинома:

$$\Pi^\pm(\lambda) = 1_k - L^\pm(\tau^\pm(\lambda), \lambda), \quad (33)$$

где

$$L^\pm(\mu, \lambda) = \frac{\delta! D^\pm(\mu, \lambda)}{\mu^\delta \left\{ \frac{\partial^\delta}{\partial \mu^\delta} D^\pm(\mu, \lambda) \Big|_{\mu=0} \right\}}, \quad (34)$$

$\delta = k - r(\lambda)$, $D^\pm(\mu, \lambda) = \det(\tau^\pm(\lambda) - \mu 1_k)$. Из (33), (34) и формул (21), (24), (25) из [5] вытекает, что в полукрестностях точки λ_0 $\Pi^\pm(\lambda)$ представимы рядами Лорана по дробным степеням $\lambda - \lambda_0$ и в этих рядах число членов с отрицательными степенями конечно. Отсюда с учетом того, что $|\Pi^\pm| = 1$, следует требуемое существование пределов ■

Пусть $a^\pm(\lambda)$, $b^\pm(\lambda) \in M_k(\mathbb{C})$ и столбцы $\Gamma(a^\pm, b^\pm)$ образуют базис в $Q^\pm E^n$ ($\text{Im } \lambda \geq 0$, $\lambda \notin T$).

Лемма 4. $\det(a^\pm(\lambda) \mp ib^\pm(\lambda)) \neq 0$.

Доказательство вытекает из формулы

$$(a^\pm \mp ib^\pm)^* (a^\pm \mp ib^\pm) = a^{\pm*} a^\pm + b^{\pm*} b^\pm + \{ \mp [\text{col}(a^\pm, b^\pm)]^* J \text{col}(a^\pm, b^\pm) \},$$

так как $\{\dots\} \geq 0$ в силу $\mp G$ — неотрицательности $Q^\pm E^n$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$, $\lambda \notin T$ [3], [6].

Обозначим $A^\pm(\lambda) = \text{col}(a^\pm, b^\pm)(a^\pm \mp ib^\pm)^{-1}$ ($A^\pm$ не зависит от выбора $a^\pm, b^\pm$).

Лемма 5.1°. $\frac{1}{2} 1_k \leq A^{\pm*}(\lambda) A^\pm(\lambda) \leq 1_k$. 2°. $A^\pm(\lambda)$ аналитичны при $\text{Im } \lambda > 0$. 3°. $A^\pm(\lambda) \in C_{\text{loc}}^\infty(\Lambda)$ и $\lambda \in T$ являются точками устранимых разрывов $A^\pm(\lambda)$.

Доказательство. 1°. Легко видеть, что

$$A^\pm = \frac{1}{2} \text{col}(1_k + V^\pm, \pm i(1_k - V^\pm)),$$

где $V^\pm = (a^\pm \pm ib^\pm)(a^\pm \mp ib^\pm)^{-1}$, откуда $A^{\pm*} A^\pm = \frac{1}{2}(1_k + V^{\pm*} V^\pm)$ и 1° доказано, ибо $1_k - V^{\pm*} V^\pm = \mp 2A^{\pm*} J A^\pm \geq 0$ в силу $\mp G$ — неотрицательности $Q^\pm E^n$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$, $\lambda \notin T$ [3], [6].

Утверждение 2° вытекает из [6, с. 274].

3°. Используя [6, с. 274] и функции $x_{jk}(\lambda)$ из [5, с. 116], можно показать, что в окрестности $\forall \lambda_0 \in \Lambda (\in T)$ $A^\pm(\lambda)$ разлага-

ются в ряды Лорана по целым (дробным) степеням $\lambda - \lambda_0$ и в этих рядах число членов с отрицательными степенями конечно. Отсюда с учетом 1° следует 3°.

Обозначим $U^\pm(\lambda) = \Gamma A^\pm(\lambda) \Pi^\pm(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$).

Теорема 4.1°. $P^\pm(\lambda) U^\pm(\lambda) = U^\pm(\lambda)$, т. е. столбцы $U^+(\lambda)$ ($U^-(\lambda)$) линейно выражаются через собственные векторы м. м., отвечающие м. I (II) рода. 2°. $\frac{1}{2} \mu \Pi^\pm(\lambda) \leq U^{\pm*}(\lambda) U^\pm(\lambda) \leq \nu \Pi^\pm(\lambda)$, где μ, ν — наименьшее и наибольшее собственные числа $\Gamma^* \Gamma$. 3°. $U^\pm(\lambda) \in C_{loc}^\infty(\Lambda)$. 4°. $\forall \lambda_0 \in T \exists \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} U^\pm(\lambda), \lim_{\lambda \downarrow \lambda_0} U^\pm(\lambda)$.

Доказательство 1°. Допустим сначала, что $\omega(t)$ — вес положительного типа [5]. Тогда [1] не имеют конечных предельных точек множества $T^\pm = \{\lambda \in \Lambda : \det Q_2^\pm = 0\}$. Используя леммы 2, 3 из [1], можно показать, что при $\lambda \in \Lambda \setminus T^\pm$

$$\mp 2\pi i \tau^\pm = (1_k \mp i Q_4^\pm Q_2^{\pm-1}) P_2^\pm (1_k \mp i Q_4^\pm Q_2^{\pm-1})^*. \quad (35)$$

Полагая $a^\pm = Q_2^\pm$, $b^\pm = Q_4^\pm$, имеем в силу леммы 4 и (35) при $\lambda \in \Lambda \setminus T^\pm$: $U^\pm E^k = \Gamma \operatorname{col} (Q_2^\pm, Q_4^\pm) (Q_2^\pm \mp i Q_4^\pm)^{-1} (1_k \mp i Q_4^\pm Q_2^{\pm-1}) \times \times P_2^\pm E^k = \Gamma \operatorname{col} (Q_2^\pm, Q_4^\pm) Q_2^{\pm-1} P_2^\pm E^k = \Gamma \operatorname{col} (P_2^\pm, P_4^\pm) E^k$, если учесть (26)± из [1]. Отсюда $P^\pm U^\pm = U^\pm$ при $\lambda \in \Lambda \setminus T^\pm$, а так как $P^\pm, U^\pm \in C_{loc}^\infty(\Lambda)$ в силу леммы 3, 5, то и при $\lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим общий случай. Возьмем $\forall \lambda_0$ из Λ , отвечающего системе (1). Тогда $\lambda = 0$ принадлежит Λ , отвечающему системе $I[y] - \lambda_0 \omega(t) y = \lambda y$ с весом 1_m положительного типа. По доказанному для этой системы справедливо 1° при $\lambda = 0$, а значит для (1) — при $\lambda = \lambda_0$.

Утверждения 2°—4° — следствия леммы 3, 5.

Отметим, что если в (1) $\omega(t)$ — вес положительного типа, то, положив $a^\pm = Q_2^\pm$, $b^\pm = Q_4^\pm$, получим в силу 1° теоремы 4, что $U^\pm(\lambda) = \Gamma \operatorname{col} (P_2^\pm, P_4^\pm) (Q_2^\pm \mp Q_4^\pm)^{-1} \Pi^\pm$, (36) и значит, используя (24), (25) из [5], (33), (34) и аналогичные формулы для $Q^\pm$, можно явно выразить $U^+(\lambda) (U^-(\lambda))$ через м. м., м. I (II) рода и через м., модули которых < 1 .

Отметим также, что если в (36) отбросить $\Pi^\pm$, то полученные выражения по-прежнему $\in C_{loc}^\infty(\Lambda)$, однако, как показывает пример уравнения $y^{(4)} = \lambda y$, уже не всегда $\in L^\infty(R^1)$.

Обозначим $u_\lambda^\pm(t)$ $m \times k$ — матричные решения (1), удовлетворяющие начальным условиям: $\tilde{u}_\lambda^\pm(0) = U^\pm(\lambda)$.

4. В этом n° $I = R^1$. В силу замечания 3 из [2] $\tau^\pm \in L_{loc}^1(J)$.

Теорема 5. $\forall f \in D(L_0)$ справедливы формулы обращения

$$f(t) = \int \{u_\lambda^+(t) \tau^+(\lambda) \eta_\lambda^+ + u_\lambda^-(t) \tau^-(\lambda) \eta_\lambda^-\} d\lambda, \quad (37)$$

$$\eta_\lambda^\pm = \int u_\lambda^{\pm*}(t) \omega(t) f(t) dt \quad (38)$$

и равенство Парсеваля

$$\int f^* \omega f dt = \int (\eta_{\lambda}^{+*} \tau^+ \eta_{\lambda}^+ + \eta_{\lambda}^{-*} \tau^- \eta_{\lambda}^-) d\lambda, \quad (39)$$

интеграл (37) сходится в H , а интегралы (38) $^{\pm}$ — в $L^2(R^1, \tau^{\pm} d\lambda)$.

Доказательство. В силу теоремы (5) и формулы (11) из [1] при финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\lambda \int Y_{\lambda}(t) S S^{-1} (P^- - P^+) \times \\ \times G^{-1} S^{-1*} S^* Y_{\lambda}^*(s) \omega(s) f(s) ds, \quad (40)$$

где $S = \Gamma(A^+(\lambda), A^-(\lambda))$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1_k & -i1_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Gamma^{-1} Q^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_k & i1_k \end{pmatrix} \Gamma^{-1} Q^-. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40) и используя самосопряженность $P^{\pm} G^{-1}$ и лемму 2 из [1], получаем, что при финитных $f \in H$

$$(E_{\mu_2} - E_{\mu_1}) f = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \{u_{\lambda}^+(t) \tau^+(\lambda) \eta_{\lambda}^+ + u_{\lambda}^-(t) \tau^-(\lambda) \eta_{\lambda}^-\} d\lambda,$$

откуда стандартно выводятся (37)—(39).

Список литературы: 1. Храбустовский В. И. Спектральный анализ периодических систем с вырождающимся весом на оси и полуоси.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 44, с. 122—133. 2. Храбустовский В. И. Разложения по собственным функциям периодических систем с весом.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 5, с. 26—28. 3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 718 с. 4. Атkinson Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М.: Мир, 1968.— 749 с. 5. Храбустовский В. И. Спектральная матрица периодической симметрической системы с вырождающимся весом на оси.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 35, с. 111—119. 6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 534 с.

Поступила в редколлегию 08.10.84.