

V K-14038
П 265851

K-14038

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 66

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

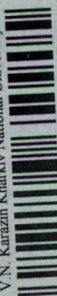
Выпуск 35



ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

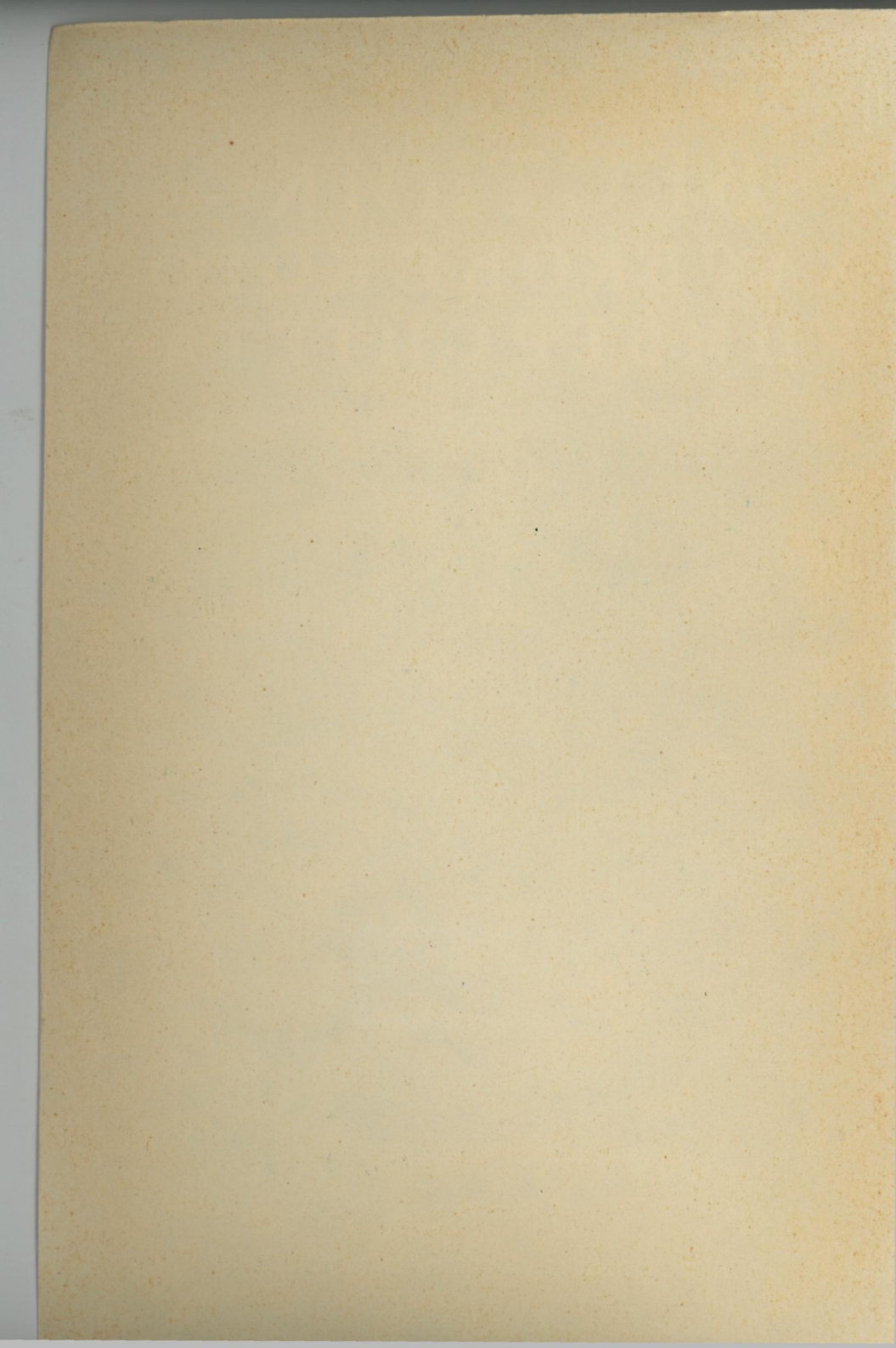
70 коп.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00271166

5



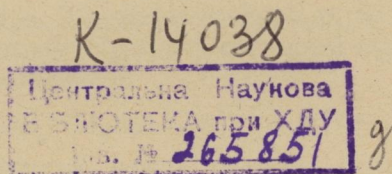
МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 66

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 35



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1971

В настоящий выпуск включены статьи, в которых изучаются π -оперативы; рассматривается приближенный метод решения интегрального уравнения Фредгольма, встречающегося в теории дифракции; изучаются некоторые экстремальные задачи для определенных классов многочленов и целых функций; рассматриваются некоторые классы случайных процессов и их приложения; исследуются групповые свойства уравнений пограничного слоя.

Редакционная коллегия:

проф. Н. И. Ахиезер (ответственный редактор), проф. В. А. Марченко, проф. А. В. Погорелов, доц. А. А. Янцевич (ответственный секретарь).

Адрес редакционной коллегии:

Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.



К ТЕОРЕМЕ СУШКЕВИЧА — РИСА. I

Л. М. Глускин

Теорема Сушкевича — Риса — Клиффорда о строении вполне простых полугрупп [1—7] (т. е. i -простых полугрупп, содержащих минимальные ненулевые левые и правые идеалы) оказалась одним из фундаментальных результатов теории полугрупп, положивших начало ее систематическому развитию.

Строение произвольной вполне простой полугруппы S с нулем можно описать следующим образом. Пусть G_0 — группа с внешне присоединенным нулем 0; I, Λ — два множества; $P = (p_{\lambda i})$ — ΛI -матрица с элементами из G_0 (см. п. 1.6). Тогда S изоморфна полугруппе всех троек $(a, i\lambda)$, где $a \in G_0, i \in I, \lambda \in \Lambda$, с действием

$$(a, i\lambda)(b, j\lambda) = (ap_{\lambda i}b, i\lambda);$$

при этом все тройки $(0, i\lambda)$ отождествляются между собой. Если $(G_0, i\lambda)$ — множество всех троек $(a, i\lambda)$ при фиксированных $i \in I, \lambda \in \Lambda$, то $\bigcup_{i \in I} (G_0, i\lambda)$ является минимальным ненулевым левым идеалом полугруппы S , $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_0, i\lambda)$ — ее минимальным ненулевым правым идеалом, а $(G_0, i\lambda)$ — ее минимальным биидеалом (см. п. 1.1).

Этот результат был перенесен автором [8, 9] на полугруды, т. е. на алгебры с одной тернарной операцией $[s_1 s_2 s_3] = s$ с тождествами типа ассоциативности

$$[[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]].$$

Ряд глубоких аналогий между теориями полугрупп и полугруд привел автора [10—14] к изучению позиционных оперативов класса алгебр S с одной n -арной операцией, удовлетворяющей тождествам (3). Этот класс алгебр содержит помимо n -арного аналога полугрупп и полугруд некоторые другие важные алгебраические системы [15]. Операции в этих алгебрах близки к ассоциативным и часто сводятся к бинарным.

Цель настоящей статьи — перенесение на позиционные оперативы теории вполне простых полугрупп. Основное в настоящей

работе понятие c -простого оператора является аналогом понятия вполне простой полугруппы.

В § 2 (п. 2.11) показано, что всякий c -простой π -оператив (п. 1.2) является либо ассоциативом, либо альтернативом (n -арным аналогом полугруппы или полугруды), либо оператором над абелевой группой. В § 3 (п. 3.1.) все эти алгебры сводятся к операторам Риса с жесткими ограничениями характера основных тождеств (п. 3.8).

Детальное исследование каждого из перечисленных трех основных классов алгебр будет проведено во второй части работы. Там же будет изучена возможность сведения c -простых p -оперативов, (п. 1.2.) к π -оперативам.

Основные результаты статьи сформулированы в заметке [14].

В статье приняты следующие обозначения: $\rightarrow$ — импликация, $\leftrightarrow$ — логическая эквивалентность, $\forall$ — квантор всеобщности.

§ 1. Позиционные операторы

1.1. *Оперативом* называется множество S с одной всюду определенной n -арной операцией:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = P_{j=1}^n x_j = x \quad (x_i, x \in S).$$

Для любых непустых подмножеств A_i оператора S через $A_1 A_2 \dots A_n$ обозначим множество всех произведений $a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i \in A_i$. Если при этом одно из подмножеств A_i (например, A_1) содержит единственный элемент a , то будем писать $A_1 A_2 \dots A_n = a A_2 \dots A_n$. Если $A_{t+1} = A_{t+2} = \dots = A_{t+m} = A$, то обозначим $A_1 A_2 \dots A_n = A_1 A_2 \dots A_t A^m A_{t+m+1} \dots A_n$; A^0 — пустой символ. Обозначим далее

$$(A_1 A_2 \dots A_n) A_{n+1} \dots A_{2n-1} = A_1 A_2 \dots A_{2n-1}.$$

Непустое подмножество A оператора S называется (k) -идеалом, если $S^{k-1} A S^{n-k} \subseteq A$. Множество A , являющееся (k) -идеалом при $k = 1, 2, \dots, n$, называется идеалом оператора S ; при $k = 1$ и $k = n$ — двусторонним идеалом; при $k = 1$ ($k = n$) — *правым* (*левым*) идеалом. Если оператор S содержит такой элемент 0 , что $\{0\}$ является идеалом, то 0 называется нулем оператора S . Подмножество B оператора S называется его биидеалом [7], если $B S^{2n-3} B \subseteq B$.

Ненулевой (k) -идеал (соответственно, двусторонний идеал, биидеал) A оператора S называется минимальным, если он не содержит ненулевых (k) -идеалов (соответственно, двусторонних идеалов, биидеалов) оператора S , отличных от A .

1.2. Всюду в дальнейшем через I_r будем обозначать отрезок натурального ряда $\{1, 2, \dots, r\}$. Пусть $p = \{p_k\}_{k=1}^n$ семейство

взаимно-однозначных отображений ρ_k множества I_{2n-1} на себя таких, что

$$\rho_1 = \rho_n = \varepsilon \quad (1)$$

(ε — тождественная подстановка). Оператив S называется *позиционным оперативом*, ассоциированным с семейством ρ (или короче, ρ -оперативом), если при любых $k \in I_n$, $x_i \in S$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_{k-1} (x_k x_{k+1} \dots x_{k+n-1}) x_{k+n} \dots x_{2n-1} = \\ = x_{\rho_k 1} x_{\rho_k 2} \dots x_{\rho_k (2n-1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Позиционный оператив S называется π -оперативом, если при любых $k \in I_n$, $j \in I_{2n-1}$

$$k \leq j \leq k+n-1 \leftrightarrow k \leq \rho_k j \leq k+n-1.$$

Иначе говоря, к π -оперативу S можно отнести семейство $\pi = \{\sigma_k, \pi_k\}$ подстановок σ_k, π_k множества I_n таких, что $\pi_1 = \pi_n = \sigma_1 = \sigma_n = \varepsilon$, $\sigma_k k = k$ и для любых $x_i, y_j \in S$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_{k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{k+1} \dots x_n = \\ = x_{\sigma_k 1} x_{\sigma_k 2} \dots x_{\sigma_k (k-1)} y_{\pi_k 1} y_{\pi_k 2} \dots y_{\pi_k n} x_{\sigma_k (k+1)} \dots x_{\sigma_k n}. \end{aligned} \quad (3)$$

π -Оператив называется *ассоциативом*, если $\sigma_k = \pi_k = \varepsilon$ при всех $k \in I_n$, *альтернативом*, если n нечетно и все $\sigma_k = \pi_{2j+1} = \varepsilon$, $\pi_{2j} = \tau$, где

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В статьях [10—11] приняты такие обозначения: $n\rho$ -оператив, $n\pi$ -оператив, n -ассоциатив, n -альтернатив. В настоящей статье, как и в [12—14], обозначения несколько упрощены, поскольку аридность операции n всюду считается фиксированной.

1.3. Обозначим через $\langle x \rangle$ наименьший положительный вычет числа x по модулю $n-1$ и определим далее следующие преобразования ξ_k множества I_n : при любых $i, k \in I_n$

$$\xi_k i = \langle \rho_k^{-1}(i+k-1) \rangle.$$

Если S — π -оператив, то $\xi_k i = \pi_k^{-1} i + k - 1$.

Оператив S , содержащий более одного элемента, назовем *i -простым*, если он не содержит собственных идеалов и не изоморфен оперативу

$$V_n = \{0, a\},$$

где 0 — нуль и $a^n = 0$.

В работе [12] показано, что всякий i -простой p -оператив S является объединением своих двусторонних идеалов A_γ :

$$S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma, \quad (4)$$

где Γ — подмножество I_{n-1} , $A_\gamma \cap A_\delta = \{0\}$ при $\gamma \neq \delta$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_1^*, \\ A_\gamma &= A_{\varepsilon_\gamma 1} A_{\varepsilon_\gamma 2} \dots A_{\varepsilon_\gamma n}, \quad A_{\varepsilon_\gamma 1} = A_{\varepsilon_\gamma n} = A_\gamma, \\ A_1 A_{\gamma 2} A_{\gamma 3} \dots A_{\gamma n} &= \{0\}, \text{ если } A_{\gamma l} \neq A_{\varepsilon_\gamma l}. \end{aligned}$$

Для любых различных A_γ , A_δ найдется индекс $k \in I_{n-1}$ такой, что $A_\delta = S^{k-1} A_\gamma S^{n-k}$.

1.4. i -простой p -оператив S называется j -простым [12—14], если

$$\forall k \in I_n, a \in S \setminus \{0\} S^{k-1} a S^{n-k} \neq \{0\}. \quad (5)$$

В j -простом p -оперативе S все двусторонние идеалы A_γ (см. п. 1.3) минимальны: мы будем называть их *компонентами* оператора S . Для любой компоненты A_γ j -простого оператора S и любых его элементов x_i либо $A_\gamma x_2 x_3 \dots x_{n-1} A_\gamma = \{0\}$, либо $A_\gamma x_2 x_3 \dots x_{n-1} A_\gamma = A_\gamma$, если $a \in A_\gamma$, то $A_\gamma = S^{n-1} a S^{n-1}$.

j -Простой оператор S называется c -простым, если каждая его компонента содержит, по крайней мере, один минимальный левый идеал и, по крайней мере, один минимальный правый идеал.

Понятие c -простого оператора является обобщением понятия вполне простой полугруппы.

c -простой оператор называется c_1 -простым, если он не содержит собственных двусторонних идеалов. В [12] замечено, что i -простой p -оператив без нуля не содержит собственных двусторонних идеалов; очевидно, что такой оператор j -прост. Следовательно, i -простой p -оператив без нуля c -прост тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один минимальный левый и хотя бы один минимальный правый идеал. Всякий c -простой p -оператив без нуля является множеством всех ненулевых элементов некоторого c_1 -простого p -оператива с нулем.

1.5. Пусть Γ , I , Λ — непустые множества индексов; $I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, $\Lambda = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$, где I_γ (соответственно Λ_γ) — попарно пересекающиеся подмножества множества I (соответственно Λ). Множество

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \times \Lambda_\gamma$$

назовем *квазидиагональю* декартова произведения $I \times \Lambda$.

* В этом разложении компоненты A_k не предполагаются различными; возможно, что $A_k = A_l$ при $j \neq k$.

1.6. Полугруппа $G_0 = G \cup \{0\}$, где G — группа, а 0 — нуль, называется, как известно, группой с внешне присоединенным нулем [6], (или короче — *группой с нулем* [7]). На декартовом произведении $G_0 \times B$ определим эквивалентность $\sim: (g, i \lambda) \sim (g', i' \lambda')$ тогда и только тогда, когда $(g, i \lambda) = (g', i' \lambda')$ либо $g = g' = 0$. Обозначим через $G \circ B$ фактор-множество декартова произведения $G_0 \times B$ по эквивалентности $\sim$. Можно считать, что $G \circ B$ состоит из всех троек $(g, i \lambda)$, где $g \in G_0$, $(i, \lambda) \in B$, причем все тройки $(0, i \lambda)$ отождествляются между собой.

Если (i, λ) — фиксированный элемент из B , то через $(G_0, i \lambda)$ обозначим множество всех троек $(g, i \lambda)$, где g пробегает множество G_0 . Обозначим далее $[(g, i \lambda)] = g$,

$$A_\gamma = \bigcup_{(i, \lambda) \in I_\gamma \times \Lambda_\gamma} (G_0, i \lambda),$$

$$R_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_0, i \lambda),$$

$$L_\lambda = \bigcup_{i \in I} (G_0, i \lambda).$$

Пусть S — оператив, определенный на декартовом 0-произведении $G \circ B$, где G — группа, B — квазидиагональ. Назовем S *оперативом над группой G* и квазидиагональю B , если 1) элемент $0 = (0, i \lambda)$ является его нулем, 2) для любых элементов $(x_k, i_k \lambda_k)$ оператива S

$$P_{k=1}^n (x_k, i_k \lambda_k) = (z, i_1 \lambda_n), \quad (6)$$

где $z \in G_0$, и 3) множества $(G_0, i \lambda)$, L_λ , R_i , A_γ образуют совокупности всех его минимальных биидеалов и соответственно минимальных левых, правых и двусторонних идеалов.

1.7. ΛI -матрицей над группой с нулем G_0 называется произвольная функция P , ставящая в соответствие каждой паре элементов $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$ элемент $p_{\lambda i} = p(\lambda, i) \in G_0$. Семейства $\{p_{\lambda i}\}_{i \in I}$ и $\{p_{\lambda i}\}_{\lambda \in \Lambda}$ называют λ -й *строкой* и i -м *столбцом* матрицы P . Матрицу P назовем *регулярной*, если в каждой ее строке и в каждом ее столбце есть элемент, отличный от нуля.

Пусть оператив S определен на декартовом 0-произведении $G \circ B$ группы G и квазидиагонали B . Для любого $k \in I_n$ обозначим через v_k, v'_k пару переменных, из которых одна равна i_k , другая — λ_k , причем (i_k, λ_k) пробегает все множество B , $v_1 = i_1, v'_1 = i'_1$.

Пусть для каждого $k \in I_{n-1}$ определена регулярная матрица $p_k(v_k, v'_{k+1})$ над группой G_0 , а для любых индексов $\gamma \in \Gamma$, $k \in I_{n-1}$, — автоморфизм или инверсный автоморфизм ϕ_k^γ полугруппы G_0 .

Назовем S *оперативом Риса**, если действие в нем выражается формулой (6), где при $i_1 \in I_\gamma$ $z = x_1 \cdot p(\lambda_1, v'_2) \cdot \phi_2^\gamma x_2 \cdot p_2(v_2, v'_3) \dots$

$$\dots \phi_{n-1}^\gamma x_{n-1} \cdot p_{n-1}(v_{n-1}, i_n) \cdot x_n. \quad (7)$$

* Это определение несколько проще, чем в работе [14].

Нетрудно проверить, что S является оперативом над группой G (п. 1.6) и квазидиагональю B . Если S i -прост, то он c -прост. Известно [6—9], что вполне простые полугруппы и полугруды изоморфны некоторым бинарным и тернарным оперативам Риса.

1.8. Пусть оператив S является объединением своих попарно непересекающихся подоперативов S_{δ} :

$$S = \bigcup_{\delta \in \Delta} S_{\delta}.$$

Назовем S *связкой* оперативов S_{δ} , если для любых $\delta_i \in \Delta$ существует индекс $\delta \in \Delta$ такой, что

$$S_{\delta_1} S_{\delta_2} \dots S_{\delta_n} \subseteq S_{\delta}.$$

Если $\Delta = I \times \Lambda$ и для любых $i_j \in I$; $\lambda_j \in \Lambda$

$$S_{(i_1 \lambda_1)} S_{(i_2 \lambda_2)} \dots S_{(i_n \lambda_n)} \subseteq S_{(i_1 \lambda_n)},$$

то такая связка называется *прямоугольной*. Если S — прямоугольная связка своих подоперативов $S_{(i, \lambda)}$, то каждый $S_{(i, \lambda)}$ является, как нетрудно проверить, биидеалом оператива S .

§ 2. Редукция к бинарной операции

2.1. Пусть S — произвольный c -простой p -оператив с нулем 0. Строение каждой его компоненты A_{γ} (п. 1.4) можно описать следующим образом [13, 14]. Пусть I, Λ — два множества индексов $i, j, k \dots$ и соответственно $\alpha, \lambda, \mu, \dots$. $\{I_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma} (\{\Lambda_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma})$ — совокупность попарно непересекающихся подмножеств множества I (множества Λ): $B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma} \times \Lambda_{\gamma}$. Тогда

$$A_{\gamma} = \bigcup_{i \in I_{\gamma}} R_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{\gamma}} L_{\lambda} = \bigcup_{i \in I_{\gamma}, \lambda \in \Lambda_{\gamma}} C'_{i\lambda},$$

где R_i и L_{λ} — минимальные левые и правые идеалы оператива S ; $C'_{i\lambda} = R_i \cap L_{\lambda}$ — его минимальные биидеалы; $C'_{i\alpha} \cap C'_{j\lambda} = \{0\}$ при $C'_{i\alpha} \neq C'_{j\lambda}$. При любых $i \in I_{\gamma}, \lambda \in \Lambda_{\gamma}$ множество $C_{i\lambda} = C'_{i\lambda} \setminus \{0\}$ не пусто.

Если $c_1 c_2 \dots c_n \neq 0$ для каких-либо $c_i \in S$ и $c_k \in C_{i\alpha}, c_1 \in C_{j\lambda} \subseteq A_{\gamma}, c_n \in C_{t\mu}, s \in I_{\gamma}, \sigma \in \Lambda_{\gamma}$, то

$$c_1 c_2 \dots c_{k-1} C_{i\alpha} c_{k+1} \dots c_n = C_{j\mu}, \\ C_{s\lambda} c_2 \dots c_{n-1} c_n = C_{s\mu}, c_1 c_2 \dots c_{n-1} C_{t\sigma} = C_{j\sigma},$$

причем отображения φ_k

$$\varphi_k x = c_1 c_2 \dots c_{k-1} x c_{k+1} \dots c_n \quad (x \in C_{i\alpha})$$

множества $C_{i\alpha}$ (при $k = 1$ или n соответственно $C_{s\lambda}, C_{t\sigma}$) на $C_{j\mu}, C_{s\mu}$ и $C_{j\sigma}$ взаимно-однозначны.

2.2. Пусть C'_{ix} — какой-либо минимальный биидеал s -простого p -оператива S , a — произвольный элемент из C_{ix} . В работе [13] показано, что $aS^{n-2}a \neq \{0\}$. Поэтому в S существуют элементы u_j (разумеется, зависящие от индексов i, x) такие, что $au_2u_3 \dots u_{n-1}a \neq 0$. Из (2) и п. 2.1 следует, что относительно бинарной операции

$$0_{ix}(x, y) = x \cdot y = xu_2u_3 \dots u_{n-1}y \quad (x, y \in C_{ix}) \quad (8)$$

множество C_{ix} является группой, а множество $C'_{ix} = C_{ix} \cup \{0\}$ — группой с внешне присоединенным нулем (п. 1. 6).

В каждой компоненте A_γ зафиксируем по одному биидеалу $C'_{m_\gamma \mu_\gamma}$ и обозначим группу $C_{m_\gamma \mu_\gamma}$ через G_γ .

Теорема. *Всякий s -простой p -оператив с нулем S является оперативом над любой из групп G_γ и квазидиагональю B .*

Доказательство. Пусть l — произвольный индекс из Γ , $G_l = G$, $C'_{m_l \mu_l} = G \cup \{0\} = G_0$. Если a — произвольный элемент из G , то для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует в силу п. 1.4 индекс $t = t_\gamma$ такой, что $S^{t-1}aS^{n-t} = A_\gamma$. Следовательно, существуют элементы $c_i = c_i^{(t)} \in S$ такие, что $c_1c_2 \dots c_{t-1}ac_{t+1} \dots c_n \in G_\gamma$. Для каждого $x = x_l \in G$ обозначим

$$x_\gamma = c_1c_2 \dots c_{t-1}xc_{t+1} \dots c_n. \quad (9)$$

Из п. 2.1 следует, что отображение $x \rightarrow x_\gamma$ является взаимно-однозначным отображением группы G на G_γ .

Выберем из каждого множества $C_{i\mu_\gamma}$, $C_{m_\gamma x} \subseteq A_\gamma$ произвольно по одному элементу $c_{i\mu_\gamma}$, $d_{m_\gamma x}$. Единственное наложенное здесь ограничение —

$$c_{m_\gamma \mu_\gamma} = d_{m_\gamma \mu_\gamma} = e_\gamma, \quad (10)$$

где e_γ — единица группы G_γ относительно операции (8).

Для любых $x \in G_0$, $i \in I_\gamma$, $x \in \Lambda_\gamma$ обозначим

$$(x, ix) = c_{i\mu_\gamma}u_2u_3 \dots u_{n-1}x_\gamma u_2u_3 \dots u_{n-1}d_{m_\gamma x}. \quad (11)$$

Вследствие (10), $(x, m_\gamma \mu_\gamma) = x_\gamma$ для любого $x \in G_0$.

Из п. 2. 1 имеем

$$\begin{aligned} \forall x \in G, i \in I_\gamma, x \in \Lambda_\gamma \quad (x, ix) &\in C_{ix}, \\ \forall i \in I_\gamma, x \in \Lambda_\gamma \quad (0, ix) &= 0. \end{aligned}$$

Опять-таки в силу п. 2.1 для каждого элемента $x_{ix} \in C_{ix} \subseteq A_i$ существует, и притом единственный, элемент $x_\gamma \in G$ такой, что $x_{ix} = (x, ix)$. Из п. 1.4, 2.1 теперь следует, что S имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma. \\ A_\gamma &= \bigcup_{i \in I_\gamma, \lambda \in \Lambda_\gamma} (G_0, i\lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

2.2.1. Пусть γ, δ — любые индексы из $\Gamma, t \in I_{n-1}, S^{t-1}A_\delta S^{n-t} = A_\gamma$ (см. п. 1.4). Как и в п. 2.1, найдутся элементы $b_i \in S$ такие, что $b_1 b_2 \dots b_{t-1} G_\delta b_{t+1} \dots b_n = G_\gamma$. Вследствие п. 2.1, 2.2 существует взаимно-однозначное отображение φ группы $G = G_1$ на себя такое, что при любом $x \in G$

$$b_1 b_2 \dots b_{t-1} (\varphi x)_\delta b_{t+1} \dots b_{n-1} b_n = x_\gamma. \quad (13)$$

Обозначая далее $c_{i\mu_\gamma} u_2 \dots u_{n-1} b_1 = c'_{i\mu_\gamma}, b_n u_2 \dots u_{n-1} d_{m_\gamma x} = d'_{m_\gamma x}$ (см. п. 2.1), получим из (11), (13), (3) для любого элемента $(x, ix) \in A_\gamma$

$$c'_{i\mu_\gamma} b_2 \dots b_{t-1} (\varphi x)_\delta b_{t+1} \dots b_{n-1} d'_{m_\gamma x} = (x, ix).$$

2.3. Если S c_1 -простой p -оператив (п. 1.3), то в п. 2.2. квазидиагональ превращается в декартово произведение $I \times \Lambda$. Вместо (12) тогда имеем разложение

$$S = \bigcup_{i \in I, \lambda \in \Lambda} (G_0, i\lambda).$$

Если S — c -простой p -оператив без нуля, то все элементы u_j в определении операции 0_{ix} можно выбрать из множества C_{ix} . Из п. 2.1. следует тогда, что каждое множество $(G, ix) = C_{ix}$ является подоперативом, все элементы которого двусторонне обратимы [11]. Как и в п. 2.2, в этом случае справедлива следующая

Теорема. *Всякий c -простой p -оператив без нуля является прямоугольной связкой своих минимальных биидеалов (G, ix) (см. п.1.8). Все элементы любого подоператива (G, ix) двусторонне обратимы.*

Строение таких подоперативов (G, ix) изучено в работе [11].

2.4. Всюду в дальнейшем на протяжении этого параграфа S — c -простой π -оператив и в силу п. 2.2 S имеет вид (12); $x_k = ([x_k], i_k x_k)$ — произвольные элементы из S . Из п. 2.2 следует, что $x_1 x_2 \dots x_n = (z, i_1 x_n)$, где $z \in G_0$.

Обозначим $a^1 = \{1\}$, $a^2 = \{2, 3, \dots, n-1\}$, $a^3 = \{n\}$ и для любого $j \in I_n$,

$$a_j^k = \{1, n\} \cap \pi_j a^k, v_j \{1, n\} = \delta_j = \{i_j, x_j\}, \\ v_j \{1\} = i_j, v_j \{n\} = x_j, v_j \emptyset = \emptyset, v_j a_j^k = v_j^k.$$

Лемма. *Для произвольного $\alpha \in \Gamma$ существуют автоморфизмы или инверсные автоморфизмы ψ_j^α полугруппы G_0 и функции p_j^α такие, что при любых $x_j \in S, x_1 \in A_\alpha$*

$$z = [x_1 x_2 \dots x_n] = [x_1] \cdot p_1^\alpha(x_1, \delta_2) \cdot \psi_2^\alpha[x_2] \cdot p_2^\alpha(\delta_2, \delta_3) \times \\ \times \psi_3^\alpha[x_3] \cdot p_3^\alpha(\delta_3, \delta_4) \cdot \dots \cdot \psi_{n-1}^\alpha[x_{n-1}] \cdot p_{n-1}^\alpha(\delta_{n-1}, i_n) \cdot [x_n], \quad (14)$$

где

$$p_j^\alpha(\delta_j, \delta_{j+1}) = t_j^\alpha(\delta^2) \cdot q_j^\alpha(\delta^3, \delta_{j+1}^1) \cdot r_{jj+1}^\alpha(\delta_{j+1}^2). \quad (15)$$

Доказательство леммы дано ниже в п. 2.5 — 2.9. Поскольку индекс α предполагается фиксированным, мы будем, не оговаривая этого каждый раз, писать m, μ, ψ_j, ρ_j вместо $m_\alpha, \mu_\alpha, \psi_j^\alpha, \rho_j^\alpha$ (п. 2.2). Единицу группы $G_\alpha = (G, m_\mu)$ будем обозначать через $e_\alpha = (e, m_\mu)$, группы G_1 — через e_1 . Можно ограничиться случаем, когда $i_1 = m, x_n = \mu$, а затем воспользоваться формулой (11).

2.5. Операция (8) в группе $G = (G, m_\mu)$ и отображение (9) индуцирует на множестве G_0 бинарную операцию $0_\alpha(x, y) = x * y$, относительно которой G_0 является группой с нулем 0 и единицей e . Пусть элементы u_j , определяющие операцию (8) в группе G_0 , имеют вид $u_j = ([x_j], r_j \rho_j)$ при $j = 2, 3, \dots, n-1$. Обозначим $r_1 = r_n = m, \rho_1 = \rho_n = \mu$,

$$f_s = (e, r_s \rho_s), a_j = a_j^1 \cup a_j^3, \\ h_s = \begin{cases} (e, r_s x_s), & \text{если } a_j = \{1\}, \\ (e, i_s \rho_s), & \text{если } a_j = \{n\}, \\ f_s, & \text{если } a_j = \{1, n\}. \end{cases}$$

Из (11) и (8) следует

$$z = [x_1] * d_{mx_1} x_2 \dots x_n = [x_1] * h_1 x_2 \dots x_n.$$

Будем считать при некотором $j \in I_{n-1}$ доказанным, что

$$z = [x_1] * p_1(\delta_1, \delta_2) * \psi_2[x_2] * p_2(\delta_2, \delta_3) * \dots * p_{j-2}(\delta_{j-2}, \delta_{j-1}) * \\ * \psi_{j-1}[x_{j-1}] * t_{j-1}(\delta_{j-1}^2) * z_j, \quad z_j = f_1 f_2 \dots f_{j-2} h_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_n, \quad (16)$$

где $p_s(\delta_s, \delta_{s+1})$ имеют вид (15), а $\psi_j = \psi_j^\alpha$ — взаимно-однозначные отображения полугруппы G_0 на себя такие, что $\psi_i e_1 = e_1$. Докажем, что

$$z_j = p_j(\delta_j, \delta_{j+1}) * \psi_j[x_j] * f_1 f_2 \dots f_{j-1} h_j x_{j+1} \dots x_n. \quad (17)$$

Из п. 2.2.1 вытекает возможность представления элемента $x_j = ([x_j], i_j \lambda_j)$ в виде

$$(c_1 u_2 \dots u_{n-1}(\varphi[x_j])) c_2 \dots c_{n-1} c_n \text{ при } \pi_j(n-j+1) = n, \\ c_1 c_2 \dots c_{n-1} ((\varphi[x_j]) u_2 \dots u_{n-1} c_n) \text{ при } \pi_j(n-j+1) = 1, \quad (18) \\ c_1 c_2 \dots c_{s-1}(\varphi[x_j]) c_{s+1} \dots c_n \text{ при } s = \pi_j(n-j+1) \notin \{1, n\},$$

где $c_1 \in C_{i_j \mu}, c_n \in C_{mx_j}, \varphi$ — взаимно-однозначное отображение полугруппы G_0 на себя такое, что $\varphi G = G$ (если $\pi_j(n-j+1) \in \{1, n\}$, то φ — тождественное преобразование G_0).

Обозначим $x'_i = f_i$ при $i \leq j-2$, $x'_{j-1} = h_{j-1}$, $x'_i = x_i$ при $i \geq j+1$. Из (16) — (18), (3), (8) имеем $z_j = z_j^{(1)} * \varphi[x_j] * z_j^{(2)}$,

$$z_j^{(1)} = x'_{\sigma_j 1} x'_{\sigma_j 2} \dots x'_{\sigma_j (j-1) C_{\pi_j 1} C_{\pi_j 2} \dots C_{\pi_j (n-j) C_{n+1}}}, \quad (19)$$

$$z_j^{(2)} = c_{n+2} c_{\pi_j (n-j+2)} \dots c_{\pi_j n} x'_{\sigma_j (j+1)} \dots x'_{\sigma_j n},$$

где

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_1 & \text{при } \pi_j(n-j+1) = 1, \\ e & \text{при } \pi_j(n-j+1) \neq 1, \end{cases}$$

$$c_{n+2} = \begin{cases} c_n & \text{при } \pi_j(n-j+1) = n, \\ e & \text{при } \pi_j(n-j+1) \neq n. \end{cases}$$

Если 1 содержится в одном из множеств $\pi_j\{1, 2, \dots, n-j+1\}$ или $\pi_j\{n-j+2, \dots, n\}$ (аналогично n — в одном из множеств $\pi_j\{1, 2, \dots, n-j\}$ или $\pi_j\{n-j+1, \dots, n\}$), то $c_1 = c_{i_j p}$ (соответственно $c_n = d_{mx_j}$) входит в качестве сомножителя в $z_j^{(1)}$ или $z_j^{(2)}$. Остальные c_k не зависят ни от i_j , ни от x_j .

2.6. Допустим сначала, что $\sigma_j k = k$ при любом $k < j$, в частности $\sigma_j(j-1) = j-1$, и в формуле (19) $x'_{\sigma_j(j-1)} = h_{j-1}$. Преобразуем произведения $z_j^{(1)}$ и $z_j^{(2)}$ с помощью (16) и (18), при этом вместо x_j для $z_j^{(1)}$ используем $c_{\pi_j 1}$, а для $z_j^{(2)} - c_{\pi_j n}$.

Если $\pi_j 1 = 1$ (соответственно n), то в разложении элемента $z_j^{(1)}$ индекс i_j (соответственно x_j) будет играть прежнюю роль, а x_{i_j} (соответственно i_{i_j}) будет заменен на ρ_{i_j} (на r_{i_j}). Если же $\pi_j 1 \notin \{1, h\}$, то оба индекса i_j , x_j будут заменены на r_{i_j} и ρ_{i_j} . Все $x'_{\sigma_j i}$ при $i \leq j-1$ (и в частности, h_{j-1}) остаются на месте.

Поэтому $z_j^{(1)}$ можно записать в виде

$$z_j^{(1)} = p^{(1)}(v_{j-1}^3, v_j^1) * p^{(2)}(v_j^2). \quad (20)$$

Аналогично, проследив за положением элементов c_1, c_n при разложении $z_j^{(2)}$ и пользуясь (16), получим

$$z_j^{(2)} = p^{(3)}(v_j^{(2)}) * z_j^{(3)}, \quad (21)$$

$$z_j^{(3)} = f_1 f_2 \dots f_{j-1} h_j x'_{\sigma_j(j+1)} \dots x'_{\sigma_j n}.$$

Здесь через $p^{(i)}$ обозначены некоторые функции от аргументов, указанных в скобках, со значениями в G_0 . По самому построению отображения φ (п. 2.5), $\varphi 0 = 0$, $\varphi e_1 = e_1$. Обозначим.

$$p^{(1)}(v_{j-1}^3, v_j^1) = q_{j-1}(v_{j-1}^3, v_j^1), \quad p^{(2)}(v_j^2) = r_{j-1}(v_j^2), \\ \varphi x * (\varphi e_1)^{-1} = \psi_j x, \quad \varphi e_1 * p^{(3)}(v_j^2) = t_j(v_j^2). \quad (22)$$

Заменим в z_j (см. п. 2.5) множитель h_{j-1} на f_{j-1} , а x_j — на h_j . Повторяя вычисления, проведенные для z_j , получим из (19) — (21)

$$f_1 f_2 \dots f_{j-1} h_j x_{j+1} \dots x_n = \varphi e_1 * z_j^{(3)}.$$

Вместе с (19) — (22) это доказывает соотношение (17).

Функции r_{j-1} , q_{j-1} , t_j , как это видно из (22), удовлетворяют условиям леммы; $\psi e_1 = e_1$.

2.7. Пусть $j_s = t$, где $s < j$, $t \neq s$. Будем считать для определенности, что $t > j$. Положим в (16) $x_j = d_1 d_2 \dots d_n$, $x_s = (x, i_s x_s)$, $x_t = (y, i_t x_t)$; остальные элементы x_k зафиксируем так, чтобы $z \neq 0$. Из (16), (18), (3) при некоторых $g_i \in G$, $a_i \in S$ получим

$$z_j = a_1 a_2 \dots a_{s-1} x_t a_{s+1} \dots a_{t-1} d'_1 d'_2 \dots d'_n a_{t+1} \dots a_n = \\ = g_1 * \psi_s y * g_2, \\ z = g_3 * \psi_s x * g_4 * z_j = g_3 * \psi_s x * g_5 * \psi_s y * g_2.$$

С другой стороны, опять-таки из (3) и (16) имеем при некотором $z \in G$ (зависящем от x_t)

$$z = x_1 \dots x_{j-1} (d_1 d_2 \dots d_n) x_{j+1} \dots x_n = \\ = x'_1 x'_2 \dots x'_{j-1} d'_1 d'_2 \dots d'_n x'_{j+1} \dots x'_n = g_6 * \psi_s y * \bar{z}.$$

Отсюда, обозначая $\bar{x}_t = (e_1, i_t x_t)$, получим в силу $\psi_s e_1 = e_1$ и (16)

$$z = g_6 * \psi_s y * g_6^{-1} * g_6 * \psi_s e_1 * \bar{z} = g_6 * \psi_s y * g_6^{-1} * \\ * (x_1 x_2 \dots x_{t-1} x_t x_{t+1} \dots x_n) = g_6 * \psi_s y * g_6^{-1} * g_7 * \psi_s x * g_8.$$

Сравнивая оба выражения для z , получим

$$g_3 * \psi_s x * g_5 * \psi_s y * g_2 = g_6 * \psi_s y * g_9 * \psi_s x * g_8. \quad (23)$$

Из тождества (23), как и в п. 4.4 статьи [11], следует, что группа G относительно операции $*$ абелева.

Если $s < j$, $t < j$, то тождество типа (23) получим аналогично (но не прибегая к 18)).

2.8. Продолжим теперь разложение (19), (21) в случае, когда подстановка σ_j не отображает каждый элемент множества $\{1, 2, \dots, j-1\}$ на себя. Обозначим через m порядок подстановки σ_j .

Если $\sigma_j(j-1) > j$, то представив h_j в виде (18) и применив к $z_j^{(3)}$ преобразование (19), запишем $z_j^{(3)}$ в виде $z_j^{(3)} = z_j^{(4)} * \varphi a * z_j^{(5)}$. К тому из произведений $z_j^{(4)}, z_j^{(5)}$, которое среди $x_{z_j^k}$ содержит множитель h_{j-1} , снова применим преобразование (19) и т. д.

В конце концов на m -м шаге получим

$$z_j^{(3)} = z^* * z_j^{(k-1)} * z_j^{(k)}, \quad (24)$$

$$z_j^{(k-1)} = y_1 y_2 \dots y_{j-2} h_{j-1} d_{\pi j 1} d_{\pi j 2} \dots d_{\pi j (n-j)} d_{\pi j (n-j+1)},$$

$$z_j^{(k)} = d_{\pi j (n-j+1)}'' d_{\pi j (n-j+2)} \dots d_{\pi j n} y_{j+1} \dots y_n.$$

Здесь некоторые из y_i являются исходными элементами x_i . Все d_i и отличные от x_i элементы y_i получены из h_j последовательным разложением с помощью (18). В силу $\sigma_j^m = \varepsilon$ * все оставшиеся здесь элементы x_i находятся среди $y_{j+1}, \dots, y_n$. В каждом представлении элемента h_j в виде (18) лишь множитель $c_{\pi j n} = h_j$ зависит от V_j^3 , в то же время в каждом разложении $z_j^{(i)}$ в виде (19) элемент $c_{\pi j n}$ остается в правом сомножителе. Следовательно $z_j^{(k-1)}$ зависит лишь от h_{j-1} . Обозначив $z_j^{(k-1)} = s_{j-1}(v_j^3) \cdot (\varphi e_1)^{-1}$, получим из (19), (21), (24), как и в п. 2.6.

$$z_j = s_{j-1}(v_{j-1}^3) * p^{(3)}(v_j^2) * \psi_j[x_j] * f_1 f_2 \dots f_{j-1} h'_j x_{j+1} \dots x_n. \quad (25)$$

Здесь $h'_j = (e_1, r_j x_j)$, $(e_1, i_j p_j)$ или f_j в зависимости от того, какие из аргументов i_j, x_j выделились в множитель $p^{(3)}(v_j^2)$.

Поскольку $c_{\pi j 1}$ в (19) не зависит от v_j^2, v_j^3 , преобразовав $z_j^{(1)}$ с помощью (16), (25), получим

$$z_j^{(1)} = z^{(1)} * z^{(2)}, \quad z^{(2)} = f_1 f_2 \dots f_{j-1} c_{\pi j 1} \dots c_{\pi j (n-j)} c_{n+1}.$$

Если $\pi_j 1 \notin \{1, n\}$, то $a_j^1 = \emptyset$; обозначим $p^{(4)}(v_j^1) = e_1, p^{(5)}(v_j^2) = z^{(2)}$. Если же $\pi_j 1 \in \{1, n\}$, то среди элементов $c_{\pi j 2}, \dots, c_{\pi j (n-j)}, c_{n+1}$ есть самое большее один, зависящий от i_j, x_j (напомним, что только c_1, c_n зависят от i_j, x_j). Разлагая $z^{(2)}$ с помощью (19), (16), (25), получим $z^{(2)} = p^{(4)}(v_j^1) * p^{(5)}(v_j^2)$. Обозначим далее $q_{j-1}(v_{j-1}^3, v_j^1) = s_{j-1}(v_j^3) \cdot p^{(4)}(v_j^1)$, если $x_j \in A_{\varepsilon_{aj}}, x_{j-1} \in A_{\varepsilon_{aj-1}}$ и $q_{j-1}(v_{j-1}^3, v_j^1) = 0$ — в противном случае. Конец вывода формулы (17), как и в п. 2.6.

2.9. Пусть теперь $r = \sigma_j(j-1) < j-1$. Из (19) и (16) вытекает

$$z_j = q_{r-1}(v_{j-1}^3, v_j^1) * z', \quad (26)$$

* Через ε здесь обозначена тождественная подстановка.

где $t = \sigma_j^{-1}(r+1)$. Рассматривая вместо z произведение $e_\alpha = e_\alpha * e_\alpha = e_\alpha u_2 u_3 \dots u_{n-1} e_\alpha$, получим вследствие (8), (10) $e' = e$. Вместе с (26), (16) это дает $(\bar{f}_t = \bar{f}_t(v_t^1))$:

$$q_{r-1}(v_{j-1}^3, v_t^1) = q_{r-1}(v_{j-1}^3, v_t^1) * e' = \\ = f_1 f_2 \dots f_{j-2} h_{j-1} u_j \dots u_{t-1} f_t u_{t+1} \dots u_{n-1} e.$$

Преобразуя это произведение, как и в п. 2.8, m раз с помощью (19), получим $q_{r-1}(v_{j-1}^3, v_t^1) = q'(v_{j-1}^3) * q(v_t^1)$. Вместе с (26), (19), (21), как и в п. 2.8, это дает (25). Конец доказательства, как и в п. 2.8.

Если $\sigma_j(j-1) = j-1$, то множители $q_{j-1}(v_{j-1}^3, v_j^1)$, $t_{j-1}(v_j^2)$ в силу коммутативности группы G выделяются, как и в п. 2.6, множитель $r_j(v_j^2)$ — как в п. 2.8.

2.10. Пусть c_i — такие элементы из S , что $c_1 c_2 \dots c_n \in G$, $c_i \in G_\alpha$ при некотором t (см. п. 2.2); $u_i = u_i^t$ — элементы, определяющие операцию (8) в группе G_α .

Из (3) при любых $x_\alpha = (x, m_\alpha)$, $y_\alpha = (y, m_\alpha)$ имеем

$$c_1 c_2 \dots c_{t-1} (x_\alpha u_2 \dots u_{n-1} y_\alpha) c_{t+1} \dots c_n = z_1 z_2 \dots z_{2n-1}, \quad (27)$$

где z_i — переставленные элементы c_j , u_j , x_α , y_α .

Обозначим теперь через $(\cdot)$ и $(*)$ операции в G_1 и G_α . Из (27) и п. 2.5 — 2.9 вытекает одно из тождеств

$$g_1 \cdot \varphi(x * y) \cdot g_2 = g_3 \cdot \varphi_1 x \cdot g_4 \cdot \varphi_2 y \cdot g_5, \quad (28)$$

$$g_1 \cdot \varphi(x * y) \cdot g_2 = g_3 \cdot \varphi_1 y \cdot g_4 \cdot \varphi_2 x \cdot g_5, \quad (29)$$

где g_i — некоторые элементы из $G = G_1$, φ , φ_i — взаимно-однозначные отображения группы G на себя такие, что $\varphi e_1 = \varphi_i e_1 = e_1$. Предположим сначала, что верно тождество (28). Из него вытекает

$$\varphi(x * y) = g_6 \cdot \varphi_1 x \cdot g_4 \cdot \varphi_2 y \cdot g_7. \quad (30)$$

Положив в (30) последовательно $y = e$, $x = e$, получим $\varphi x = g_6 \cdot \varphi_1 x \cdot g_8$, $\varphi y = g_9 \cdot \varphi_2 y \cdot g_7$. Отсюда и из (26) следует при некотором $g \in G$

$$\varphi(x * y) = \varphi x \cdot g \cdot \varphi y.$$

Отсюда, обозначая $\varphi x \cdot g = \psi x$, имеем $\psi(x * y) = \psi x \cdot \psi y$, и ψ является изоморфизмом группы $G(*)$ на группу $G(\cdot)$.

Обозначим $(x, ix)' = (\psi x, ix)$, если $(x, ix) \in A_\alpha$; и $(x, ix)' = (x, ix)$, если $(x, ix) \notin A_\alpha$; $\varphi_j^\dagger = \varphi_1 \psi_j \psi_j^{-1}$, где $\psi_\alpha = \psi$, $\psi_j = \psi$ при

$i_j \in I_\alpha$ и $\psi_\gamma = \varepsilon$, $\psi_j = \varepsilon$ при $\gamma \neq \alpha$, $j \notin I_\alpha$; $\bar{p}^\gamma = \psi_\gamma p^\gamma$. Тогда при $x_1 \in A_\alpha$ имеем для любых $x_i = ([x_i], i_j x_i) \in S$

$$\begin{aligned} \{[P_{j=1}^n x_j]'\} &= \psi \{[x_1] * p_1^\alpha(x_1 v_2) * \psi_2^\alpha[x_2] * p_2^\alpha(v_2, v_3) * \dots\} = \\ &= [x_1'] \cdot \bar{p}_1^\alpha(x_1, v_2) \cdot \psi_2^\alpha[x_2'] \bar{p}_2^\alpha(v_2, v_3) \dots = [P_{j=1}^n x_j']. \end{aligned}$$

При $\gamma \neq \alpha$ основная формула леммы сохраняет тот же характер. Прделав аналогичные замены при всех $\gamma \in \Gamma$, мы заменим все операции 0_γ п. 2.5 на 0_1 . Заметим, что условие $\psi_j^\alpha e_1 = e_1$ п. 2.4 при этом по-прежнему остается в силе: $[(e_1, m_{\alpha \mu_\alpha})'] = \psi e_1$,

$$\varphi_j^\alpha [(e_1, m_{\alpha \mu_\alpha})'] = \varphi_j^\alpha \psi e_1 = \psi \psi_j^\alpha e_1 = \psi e_1.$$

Если же вместо (28) в G выполняется тождество (29), то аналогично отображение $\psi x = \varphi x \cdot g$ ($g \in G$) группы является ее инверсным автоморфизмом. Тогда в A_α произведем замену обозначений $(x, ix)' = (\psi x^{-1}, ix)$.

Теперь, как и в п. 4.4, 4.6 статьи [11], нетрудно показать, что все отображения ψ_j^α полугруппы G_0 являются ее автоморфизмами или инверсными автоморфизмами.

2.11. Из леммы п. 2.4 (как и в п. 4.7 статьи [11]) вытекает

Теорема. *Всякий s -простой π -оператив является либо ассоциативом, либо альтернативом, либо оперативом над абелевой группой (см. п. 1.6).*

Если S — s -простой альтернатив, то все отображения ψ_{2j}^α являются инверсными автоморфизмами (это можно показать, как и в п. 4.9 статьи [11]). Во всех остальных случаях ψ_k^α являются автоморфизмами группы G .

§ 3. Оперативы Риса

3.1. Из леммы п. 2.4. вытекает, что для s -простого ассоциатива всякая функция $p_k^\alpha (= q_k^\alpha)$ имеет вид $q_k^\alpha(\lambda, i)$. Обозначим через $q_k(\lambda, i)$ следующую ΔI -матрицу (п.1.7). Если $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon_\alpha k}$, $i \in I_{\varepsilon_\alpha(k+1)}$, то $q_k(\lambda, i) = q_k^\alpha(\lambda, i)$; в противном случае $q_k(\lambda, i) = 0$. (Напомним, что $\varepsilon_\alpha k$ пробегает все множество $I_{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$, когда k пробегает I_{n-1}). Для s -простого альтернатива функции p_k^α имеют вид $q_k^\alpha(x, \lambda)$ при нечетном k , и $q_k^\alpha(i, j)$ — при четном. ΔI -матрицы и II -матрицы q_k определяются, как и для ассоциатива.

Таким образом, всякий s -простой ассоциатив или альтернатив является оперативом Риса (см. п. 1.7).

Основной в настоящем параграфе является следующая

Теорема. *Всякий s -простой π -оператив S изоморфен некоторому оперативу Риса.*

Доказательство теоремы дано в п. 3.2—3.6. В силу п. 2.11 и только что сделанного замечания можно при доказательстве считать S π -оперативом над абелевой группой. Из доказательства леммы п. 2.4 (и из самой леммы) вытекает, что характер аргументов, от которых зависят все функции p_k^a (и соответственно q_k^a) при фиксированном k , не зависит от индекса a . Это дает возможность определить матрицы $q_i(v, v')$ по функциям q_k^a , как и для ассоциативов.

Для любого индекса $j = 1, 2, \dots, n-1$ обозначим через $\delta_j(\lambda, i)$ следующую Λ -матрицу (п. 1.7): $\delta_j(\lambda, i) = e$, если $\lambda \in \Lambda_{\xi_{aj}}$ и $i \in I_{\xi_{aj+1}}$, в противном случае $\delta_j(\lambda, i) = 0$. Аналогично определяются матрицы $\delta_j(v, v')$ и при других комбинациях аргументов v, v' . Матрицу $q_i(v, v')$ будем называть невырожденной, если она не представима в виде $q_i(v, v') = \delta_i(v, v') \cdot q(v) \cdot q'(v')$.

Обозначим через B_{jX} и $B_{\Lambda X}$ следующие подмножества множества $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. $j \in B_{j\Lambda}$ тогда и только тогда, когда либо матрица q_{j-1} имеет вид $q_{j-1}(\lambda_{j-1}, i_j)$ и невырождена, либо матрица q_j имеет вид $q_j(i_j, \lambda_{j+1})$ и невырождена. Аналогично определяются множества B_{jI} (в этом случае $q_{j-1} = q_{j-1}(i_{j-1}, i_j)$ или $q_j = q_j(i_j, i_{j+1})$), $B_{\Lambda\Lambda}$ и $B_{\Lambda I}$. $j \in B_{j\emptyset}$, если функция p_j^a п. 2.4 имеет вид $p_j^a = \delta_j(i_j, v_{j+1}) \cdot p(i_j) \cdot p'(v_{j+1})$ или $p_{j-1}^a = \delta_{j-1}(v_{j-1}, i_j) \times \times p(v_{j-1}) \cdot p'(i_j)$. Точно так же определяется множество $B_{\Lambda\emptyset}$.

3.2. Введем следующие эквивалентности $\sigma_X (X = I \text{ или } \Lambda)$ на множестве $I_n: j \sigma_X j'$ тогда и только тогда, когда $j = j'$ или j, j' содержатся в одном и том же множестве $B_{XY} (Y = I, \Lambda \text{ или } \emptyset)$.

Лемма. При любых $j, k \in I_n$ $(\xi_k j) \sigma_I j$ и $(\xi_k j) \sigma_\Lambda j$.

Доказательство. Пусть для определенности функция $q_i = q_i(\lambda_i, i_{j+1})$ невырождена. Из рассмотрений § 2 следует, что $q = (q_j^a, m_{a^{(j)}}) = a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_j = a_j(\lambda)$, $a_{j+1} = a_{j+1}(i)$, а остальные a_s не зависят от (переменных) индексов λ, i . Выберем $c_i \in S$ так, чтобы $c_1 c_2 \dots c_{k-1} G_a c_{k+1} \dots c_n \neq 0$ (см. п. 2.2.1). Если $c_1 \in A_j$, $\pi_k^{-1} j = t$, то из (3) и п. 2.4 следует при некоторых $g_i \in G, c_s^i$, $a_s^i \in S$

$$\begin{aligned} g_1 * \phi_k^i q_j^a(\lambda, i) * g_2 &= [c_1 c_2 \dots c_{k-1} q c_{k+1} \dots c_n] = \\ &= [c_1^i c_2^i \dots c_{k-1}^i a_1^i a_2^i \dots a_i a_{i+1}^i a_n^i c_{k+1}^i \dots c_n^i]. \end{aligned} \quad (31)$$

По лемме п. 2.4, каждое из следующих предположений влечет за собой вырожденность функции q_j : 1) $\pi_k^{-1}(j+1) \neq t+1$ и $\pi_k^{-1}(j+1) \neq t-1$; 2) $\pi_k^{-1}(j+1) = t+1$, но функция q_r вырождена или имеет вид $q_r(i, i')$ (здесь $r = \xi_k j = k+t-1$ или $k+t-n$, см. п. 1.3); 3) $\pi_k^{-1}(j+1) = t-1$, но функция q_{r-1} вырождена или имеет вид $q_{r-1}(i', i)$.

Таким образом, остаются две возможности:

$$\pi_k^{-1}(j+1) = t+1, \quad q_r = q_r(\lambda, i) \text{ и невырождена,}$$

$$\pi_k^{-1}(j+1) \neq t-1, \quad q_{r-1} = q_{r-1}(i\lambda) \quad \gg \quad \gg$$

В первом случае из (31) и леммы п. 2.4 следует $g_3 \cdot q_r^i(\lambda, i) \times \times g_4 = g_1 \cdot \psi_k^i q_j^a(\lambda, i) \cdot g_2$, во втором — $g_3 \cdot q_{r-1}^a(i, \lambda) \cdot g_4 = g_1 \cdot \psi_k^i \times \times q_j^a(\lambda, i) \cdot g_2$.

Пусть теперь $j \in B_{\Delta \emptyset}$. Представляя $(p_j^2, m_{\alpha} u_{\alpha})$ и $(p_{j-1}^2, m_{\alpha} u_{\alpha})$ в виде $a_1 a_2 \dots a_n$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим, что в p_j^i или p_{j-1}^i выделяется множитель $p(\lambda_j)$.

Аналогичные заключения о виде функций $q_j, q_{j-1}, p_j, p_{j-1}$ можно сделать, исходя из свойств функций $q_r, q_{r-1}, p_r, p_{r-1}$.

Для этого предыдущие рассмотрения нужно проделать в обратном порядке.

3.3. Пусть V означает любое из множеств I, Δ , а W — любое из множеств $I, \Delta, \emptyset$.

Лемма. Для любого $k \in I_n$

$$1) \quad k \in B_{IV} \rightarrow (k \in B_{\Delta W} \leftrightarrow 1 \in B_{\Delta W}),$$

$$k \in B_{\Delta V} \rightarrow (k \in B_{IW} \leftrightarrow n \in B_{IW}),$$

2) если $k \in B_{\Delta V} (k \in B_{IV})$, то для всякого $\alpha \in \Gamma$ существуют элементы $g_k^{\alpha}, h_k^{\alpha} \in G$ такие, что

$$g_k^{\alpha} \cdot \psi_k^{\alpha} q_1(x, v) \cdot h_k^{\alpha} = \begin{cases} q_k^{\alpha}(x, v), & \text{если } \pi_k 1 = 1, \\ q_{k-1}^{\alpha}(v, x), & \gg \pi_k n = 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$g_k^{\alpha} \cdot \psi_k^{\alpha} q_{n-1}(v, i) \cdot h_k^{\alpha} = \begin{cases} q_k^{\alpha}(i, v), & \gg \pi_k 1 = n, \\ q_{k-1}^{\alpha}(i, v), & \gg \pi_k n = n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть для определенности $q_{k-1} = q_{k-1}(v_{k-1}, i_k)$ невырождена. Из п. 2.4 следует, что $\pi_k 1 = 1$, а значит $\xi_k 1 = k$. Из леммы п. 3.2 вытекает эквивалентность $k \in B_{\Delta W} \leftrightarrow 1 \in B_{\Delta W}$, а из доказательства этой же леммы — первое из равенств (32). Аналогично рассматриваются остальные случаи.

3.4. **Лемма.** Если хотя бы одна из функций q_1, q_{n-1} имеет вид $q(x, i)$ и невырождена, то S является ассоциативом.

Доказательство. Пусть, например, $q_1 = q_1(x, i)$ невырождена. Из леммы п. 3.3 получим последовательно, что при $k = 2, 3, \dots, n-1$ каждая функция q_k имеет вид $q_k(x, i)$ и невырождена. К этому же выводу приводит предположение о невырожденности функции $q_{n-1}(x, i)$.

Пусть t — какой-либо из индексов $2, 3, \dots, n-1$. Из невырожденности $q_{t-1}(x, i)$ и леммы п. 2.4 следует, что $\pi_t 1 = 1$. Допустим, что $\pi_{t-1} j = j$ при $j \leq k$. Если бы $\pi_{t-1}^i(k+1) \neq k+1$, то отсюда, как и в п. 3.2, следовала бы вырожденность функции q_{t+1-1} (или q_{t+k-n}).

Следовательно, $\pi_t^{-1}(k+1) = k+1$; можно считать доказанным, что подстановка π_t тождественная.

Допустим, что $\sigma_t(k+1) \neq \sigma_t k + 1$ при некотором $k \geq t$. В силу $S^n = S[12]$ элемент c_t (соответственно $a_j(\lambda)$, если $t = k$) в формуле (31) можно представить в виде $b_1 b_2 \dots b_n$. Из (3) и леммы п. 2.4 вытекает тогда, что функция p_k вырождена. Следовательно, $\sigma_k k = k$ при любом $k > t$ (и точно так же при $k < t$), и все $\sigma_k = \varepsilon$; S является ассоциативом.

3.4.1. Лемма. Если $q_1 = q_1(x_1 x_2)$, $q_{n-1} = q_{n-1}(i_{n-1}, i_n)$ и обе функции q_1 , q_{n-1} невырождены, то S является альтернативом.

Как и в п. 3.4, пользуясь утверждением п. 3.3, можно показать, что все q_j невырождены и имеют вид $q_j(x, \lambda)$ при k нечетном и $q_j(i, i')$ при k четном. Отсюда, в частности вытекает, что n нечетно. Дальнейшее доказательство аналогично п. 3.4.

3.5. Лемма. Пусть функция q_1 имеет вид $q_1(x, \lambda)$ и невырождена, а q_{n-1} вырождена. Тогда всякая невырожденная функция q_k имеет вид $q_k(x, \lambda)$.

Доказательство. Допустим, что функция q_k невырождена и имеет вид $q_k(v, i)$. Тогда из п. 3.3. следует, что функция q_{k+1} имеет вид $q_{k+1}(x, \lambda)$ и невырождена, и, следовательно, функция q_{n-1} невырождена; мы пришли к противоречию с условием леммы. Аналогично q_k не может иметь вид $q_k(i, v')$.

3.5.1. Как и в п. 3.5, справедливо утверждение:

Если q_1 вырождена, а q_{n-1} имеет вид $q_{n-1}(i, i')$ и невырождена, то всякая невырожденная функция имеет вид $q_k(i, i')$.

3.6. Перейдем к непосредственному доказательству теоремы п. 3.1. Пусть S — произвольный s -простой π -оператив. Как было замечено в п. 3.1, можно считать, что S — оператив над абелевой группой. В силу п. 3.4, 3.4.1 справедливо по крайней мере одно из включений $1 \in B_{\Delta\emptyset}$, $n \in B_{I\emptyset}$.

Допустим сначала, что $n \in B_{I\emptyset}$, $1 \notin B_{I\emptyset}$; пусть k — любой индекс из $I_n \setminus \{1\}$. Существует такое целое $r > 0$, что $k \in \xi_k^r \{1, n\}$ (см. п. 2.1 статьи [11]). Если $k = \xi_k^r 1$, то $q_{k-1} = q_{k-1}(x_{k-1}, x_k)$ либо $q_k = q_k(x_k, x_{k+1})$ в силу п. 3.5. В обоих случаях из п. 3.3 следует $k \notin B_{I\emptyset}$. Если же $k = \xi_k^r n$, то $k \in B_{I\emptyset}$ в силу п. 3.2. Аналогично из $1 \in B_{\Delta\emptyset}$, $n \notin B_{I\emptyset}$ для любого $k \in I_{n-1}$ следует $k \in B_{\Delta\emptyset}$.

Пусть теперь одновременно $1 \in B_{\Delta\emptyset}$ и $n \in B_{I\emptyset}$. Допустим, что некоторый индекс $k \in I_{n-1}$ не содержится в $B_{\Delta\emptyset}$. Из п. 3.2 следует, что $k \neq \xi_k^r 1$, каково бы ни было число r , тогда $k = \xi_k^r n$ при некотором r и по лемме п. 3.3 $k \in B_{I\emptyset}$.

Обозначим $v'_k = i_k$, если $k \in B_{I\emptyset}$, и $v'_k = \lambda_k$, если $k \in B_{\Delta\emptyset}$. (Если $k \in B_{I\emptyset} \cap B_{\Delta\emptyset}$, то обозначим через v'_k любую из этих переменных). Вторую переменную обозначим через v_k . Если среди аргументов функции p_1^x находятся обе переменные i_2, λ_2 , то $p_1^x = \bar{p}_1^x(x_1, v_2) \times$

$\times r_1(v'_2)$. Пользуясь коммутативностью группы G , обозначим $\bar{p}_2^\alpha = r_1(v'_2) \cdot p_2^\alpha$.

Наоборот, если $p_2^\alpha = p_2^\alpha(v_2, v'_2, v_3)$, то аналогично получим $p_2^\alpha = t_2(v'_2) \cdot \bar{p}_2^\alpha(v_2, v_3)$ и обозначим $\bar{p}_1^\alpha = p_1^\alpha \cdot t(v'_2)$. Далее точно так же получим в случае необходимости $\bar{p}_2^\alpha = \bar{p}_2^\alpha(v_2, v_3) \cdot t^3(v'_3)$ и т. д. Для окончания доказательства остается заменить семейство матриц $\{\bar{p}_j^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ одной матрицей p_j , как это сделано в п. 3.1. Регулярность матриц p_j непосредственно следует из j -простоты оператора S (п. 1.4).

3.7. Полное описание изоморфизмов произвольного оператора Риса дано автором в статье [16]. Для выделения канонической формы каждого из классов c -простых π -операторов, указанных в п. 2.11, нам понадобятся во второй части работы некоторые из этих изоморфизмов. При этом вместо матриц $p_k(v_k, v'_{k+1})$ (п. 1.7) для нас более удобными окажутся матрицы $p_k^\alpha(v_k, v'_{k+1})$ (§2). Оператив Риса п. 1.7 мы будем обозначать через $S(G, B, p_k^\alpha, \phi_k^\alpha)$.

3.7.1. Пусть $S = S(G, B, p_k^\alpha, \phi_k^\alpha)$ и $S_1 = S(G, B, q_k^\alpha, \varphi_k^\alpha)$ — операторы Риса над одной и той же группой G и квазидиагональю B . Каждому индексу $i \in I$ ($\lambda \in \Lambda$) сопоставим элемент $c_i \in G$ ($d_\lambda \in G$). Обозначим $c(v) = c_i^{-1}$, если $v = i$, и $c(v) = d_\lambda^{-1}$, если $v = \lambda$. Потребуем, чтобы все элементы $c(v)$ содержались в центре группы G , если при каких-нибудь $k \in I_{n-1}$, $\gamma \in \Gamma$ выполняется одно из условий: 1) $p_{k-1} = p_{k-1}(v_{k-1}, i_k)$, $p_k = p_k(x_k, v'_{k+1})$ и ϕ_k^γ — инверсный автоморфизм; 2) $p_{k-1} = p_{k-1}(v_{k-1}, x_k)$, $p_k = p_k(i_k, v'_{k+1})$ и ϕ_k^α — автоморфизм. Пусть далее при любых $\alpha \in \Gamma$, $k \in I_{n-1}$

$$q_k^\alpha(v_k, v'_{k+1}) = c(v_k) \cdot p_k^\alpha(v_k, v'_{k+1}) \cdot c(v'_{k+1}), \quad \varphi_k^\alpha = \phi_k^\alpha. \quad (33)$$

Тогда отображение

$$f(x, ix) = (d_x c_{i_1}, ix)$$

является, как нетрудно проверить, изоморфизмом оператора S_1 на S .

3.7.2. Для $j \in I_{n-1}$, $\alpha, \gamma \in \Gamma$ будем писать $\gamma \in \bar{\alpha}_j$, если существуют элементы $x_k \in S$ такие, что $x_1 \in A_\alpha$, $x_j \in A_\gamma$ (п. 1.7) и $x_1 x_2 \dots x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_n \neq 0$. Пусть $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ — семейство автоморфизмов полугруппы G_0 такое, что $\varphi_\beta = \varphi_\gamma$, если $\beta \in \bar{\alpha}_j$, $\gamma \in \bar{\alpha}_j$ при некоторых $\alpha \in \Gamma$, $j \in I_{n-1}$. Обозначим $\chi_j^\alpha = \varphi_\gamma^{-1}$, если $\gamma \in \bar{\alpha}_j$. Пусть далее операторы $S = S(G, B, p_k^\alpha, \phi_k^\alpha)$ и $S_1 = S(G, B, q_k^\alpha, \varphi_k^\alpha)$, вместо (33), связаны формулами

$$\varphi_j^\alpha = \varphi_\alpha \phi_j \chi_j^\alpha, \quad q_j^\alpha = \varphi_\alpha p_j^\alpha.$$

Отображение

$$f_{\Phi}(x, ix) = (\varphi_{\alpha}x, ix) \quad (i \in I_{\alpha})$$

является изоморфизмом оператива S на S_1 . В самом деле, для любых $(x_j, i_j x_j) \in S$, $i_1 \in I_{\alpha}$ из (7) имеем

$$\begin{aligned} [P_{j=1}^n f_{\Phi}(x_j, i_j x_j)] &= \{P_{j=1}^{n-1} (\varphi_j^{\alpha} x_j^{\alpha} \cdot q_j^{\alpha}(v_j, v'_{j+1}))\} \cdot \varphi_{\alpha} x_n = \\ &= \{P_{j=1}^{n-1} (\varphi_{\alpha} \varphi_j^{\alpha} x_j \cdot \varphi_{\alpha} p_j^{\alpha}(v_j, v'_{j+1}))\} \cdot \varphi_{\alpha} x_n = [f_{\Phi} P_{j=1}^n (x_j, i_j x_j)]. \end{aligned}$$

3.7.3. Пусть $\alpha \in \Gamma$, $k \in I_{n-1}$ — некоторые фиксированные два индекса; $t = t_k^{\alpha}$ — элемент из G ; пусть оперативы S и S_1 п. 3.7.1 — 3.7.2 вместо (33) связаны соотношениями $\varphi_j^{\gamma} = \varphi_j^{\alpha}$ при $j \neq k$ или $\gamma \neq \alpha$, $\varphi_k^{\alpha} x = t^{-1} \cdot \varphi_k^{\alpha} x \cdot t$ ($x \in G_0$); $q_{k-1}^{\alpha} = p_{k-1}^{\alpha} \cdot t_{\alpha}$, $q_k^{\alpha} = t_{\alpha}^{-1} \cdot p_k^{\alpha}$, в остальных случаях $q_j^{\gamma} = p_j^{\gamma}$.

Тогда, как и в п. 3.7.2, нетрудно проверить, что отображение $f(x, ix) = (x, ix)$ является изоморфизмом оператива S на S_1 .

3.8. В определении π -оператива (п. 1.2.) вовсе не предполагается однозначность выбора подстановок σ_k для данного оператива. Из теоремы п. 3.1., из (7) и из строения неприводимых матриц $p_k(v_k, v'_{k+1})$ в зависимости от подстановок π_k (см. лемму п. 2.4) вытекает следующая

Теорема. Для всякого s -простого π -оператива $\sigma_k = \varepsilon$ при любом k .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Suschkewitsch. Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann., 99, 30—50 (1928).
2. А. К. Сушкевич. Теория обобщенных групп. Харьков—Киев, ГНТИ, Харьков—Киев, 1937.
3. D. Rees. On semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 36, 387—400 (1936).
4. A. H. Clifford. Semi-groups containing minimal ideals. Amer. J. Math., 70, N 3, 521—526 (1948).
5. A. H. Clifford. Semi-groups without nilpotent ideals. Amer. J. Math., 71, N 4, 834—844 (1948).
6. Е. С. Ляпин. Полугруппы. Физматгиз, М., 1960.
7. A. H. Clifford and G. B. Preston. The algebraic theory of semi-groups, v. 1, 2. Providence, 1961, 1966.
8. Л. М. Глушкин. Полугруппы с минимальными левыми идеалами. Докл. АН СССР, 151, № 3, 485—488 (1963).
9. Л. М. Глушкин. Вполне простые полугруппы. Сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. 1. Изд-во Саратовск. ин-та, 1965.
10. Л. М. Глушкин. О позиционных оперативах. Докл. АН СССР, 157, № 4, 767—770 (1964).
11. Л. М. Глушкин. Позиционные оперативы. Мат. сб. 68 (110), № 3, 444—472 (1965).

12. Л. М. Г л у с к и н. О простых оперативах. Сб. «Вестник Харьковск. ун-та, серия механико-математическая», вып. 34, 1969.

13. Л. М. Г л у с к и н. Минимальные бидеалы оператива. «Изв. вузов СССР, Математика», 1968, № 10 (77), 30—41.

14. Л. М. Г л у с к и н. О позиционных оперативах. «Докл. АН СССР», 1968, 182, № 5, 1000—1004.

15. T. E v a n s. Abstract mean values. Duke Math. J, 30, N 1, 331—347 (1963).

16. Л. М. Г л у с к и н. Об оперативах Риса. Исследования по алгебре и математическому анализу. Кишинев, 1971.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН

Ю. В. Гандель

Речь идет об интегральном уравнении Фредгольма, к которому сводятся задачи дифракции волн на круговом диске или круговом отверстии в плоском экране [1] — [4],

$$f(x) - \frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} k(x+y)}{x+y} f(y) dy = g(x), \quad (1)$$

где $g(x) \in L^2_{(-1,1)}$ — заданная функция, $k > 0$ — параметр задачи, а функция $f(x)$ подлежит определению.

При малых значениях параметра k уравнение это может быть решено методом последовательных приближений. Однако представляет практический интерес нахождение решения с заданной степенью точности в довольно широком диапазоне значений k .

Ниже приводится метод приближенного решения рассматриваемого уравнения, применимый при любых k . Принципиально можно получить решение, сколь угодно мало отличающееся от точного, для этого нужно лишь решить систему линейных алгебраических уравнений с достаточно большим числом N неизвестных.

Дана оценка погрешности решения в зависимости от k и от N .

1°. Введем следующие обозначения:

$$(Lf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} k(x+y)}{x+y} f(y) dy$$

$$(Kf)(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{kxy} f(y) dy.$$

Легко видеть, что

$$K^2 = D$$

и, поскольку

$$I - \mu^2 K^2 = (I - \mu K)(I + \mu K),$$

то для того, чтобы определить f из уравнения

$$f - \mu^2 Lf = g,$$

которое при $\mu^2 = i$ совпадает с (1), нужно сначала найти h из уравнения

$$h - \mu Kh = g,$$

а затем определить f из уравнения

$$f + \mu Kf = h.$$

Эти простые соображения показывают, что для нахождения функции $f(x)$, удовлетворяющей уравнению (1), нужно дважды решить интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) - \mu \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{kxy} \varphi(y) dy = \psi(x). \quad (2)$$

В следующем пункте дано приближенное решение уравнения (2) в предположении, что $\psi(x) \in L^2$ — заданная четная или нечетная* функция, а $\mu^2 = i$, и оценивается среднеквадратичное отклонение полученного решения от точного.

2°. Заменяем ядро e^{kxy} вырожденным ядром — отрезком ряда Маклорена для функции e^{kxy} :

$$K_N(kxy) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{k^n}{n!} x^n y^n.$$

Пусть

$$R_N(kxy) = e^{kxy} - K_N(kxy).$$

Тогда при $N \geq k$

$$|R_N(kxy)| < \frac{2k^{2N}}{(2N)!} |x|^{2N} |y|^{2N} \quad (3)$$

для всех x и y из интервала $[-1, 1]$.

Введем обозначение для интегрального оператора с вырожденным ядром

$$(K_N \varphi)(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-1}^1 K_N(kxy) \varphi(y) dy,$$

* В случае, когда правая часть уравнения (2) обладает определенной четностью, нахождение приближенного решения сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с числом уравнений в два раза меньшим по сравнению с общим случаем.

и рассмотрим «приближенное уравнение»

$$\varphi_N - \mu K_N \varphi_N = \psi_N, \quad (4)$$

где $\mu^2 = i$, $\psi_N = \psi_N(x)$ — известная функция из L^2 той же четности, что и $\psi(x)$.

В случае, когда $\psi_N(x)$ нечетная функция, уравнение (4) имеет решение вида

$$\varphi_N(x) = \psi_N(x) + \sum_{n=1}^N c_n x^{2n-1}, \quad (5)$$

а неизвестные коэффициенты c_n должны и могут быть найдены из следующей системы линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^N a_{nm} c_m - \frac{1}{\mu} V^{\sqrt{\frac{\pi}{2k}}} b_n c_n = d_n, \quad (6)$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$a_{nm} = \frac{1}{2(m+n)-1}, \quad (7)$$

$$b_n = \frac{(2n-1)!}{k^{2n-1}}, \quad (8)$$

$$d_n = - \int_0^1 y^{2n-1} \psi_N(y) dy. \quad (9)$$

Когда же $\psi_N(x)$ четная функция, уравнение (4) имеет такое решение:

$$\varphi_N(x) = \psi_N(x) + \sum_{n=0}^{N-1} c_n x^{2n}, \quad (10)$$

а c_n определяется из системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{N-1} a_{nm} c_m - \frac{1}{\mu} V^{\sqrt{\frac{\pi}{2k}}} b_n c_n = d_n, \quad (11)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$a_{nm} = \frac{1}{2(m+n)+1}, \quad (12)$$

$$b_n = \frac{(2n)!}{k^{2n}},$$

$$d_n = - \int_0^1 y^{2n} \psi_N(y) dy. \quad (13)$$

Матрицы систем (6) и (11) имеют вид:

$$A_N - \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} B_N,$$

причем A_N и B_N матрицы, построенные на первых N строках и первых N столбцах бесконечных матриц A и B , которые в случае системы (6) равны соответственно

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \dots \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & 0 \\ & \frac{3!}{k^3} & \\ 0 & & \frac{5!}{k^5} \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

а в случае системы (11)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \frac{2!}{k^2} & \\ 0 & & \frac{4!}{k^4} \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

Теперь дадим оценку среднеквадратичного отклонения решения приближенного уравнения (4) от решения уравнения (2). Эту «погрешность метода» будем называть просто погрешностью.

Вычитая почленно из уравнения (2) уравнение (4) и производя очевидные преобразования, получаем

$$\Phi - \Phi_N = (\mu^{-1} I - K)^{-1} [(K - K_N) \Phi_N + \mu^{-1} (\Psi - \Psi_N)],$$

откуда, используя известную оценку для нормы резольвенты самосопряженного оператора

$$\|(\lambda I - K)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda - \lambda_m|}$$

и оценку для ядра $R_N(kxy)$ оператора $K - K_N$, находим

$$\|\Phi - \Phi_N\| < \frac{k^{2N}}{(2N)!} \frac{1}{N} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \|\Psi_N\| + \sqrt{2} \|\Psi - \Psi_N\|. \quad (14)$$

3°. Решение уравнения (1).

Случай, когда $g(x)$ нечетная функция.

Определяем сначала вспомогательную функцию $h_N(x)$. Для этого

решаем методом предыдущего пункта уравнение (2) с правой частью, равной $g(x)$ из (1), получим

$$h_N(x) = g(x) + \sum_{n=1}^N c'_n x^{2n-1}, \quad (15)$$

где коэффициенты c'_n находим, решая систему уравнений (6) при $\mu = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и $\psi_N(y) = g(y)$ в (9).

Далее определяем приближенное решение уравнения (1), которое обозначим $f_N(x)$.

$$f_N(x) = h_N(x) + \sum_{n=1}^N c_n x^{2n-1}. \quad (16)$$

Коэффициенты c_n должны быть найдены из системы уравнений (6)

при $\mu = -e^{\frac{i\pi}{4}}$ и $\psi_N(y) = h_N(y)$ в (9).

Когда $g(x)$ четная функция,

$$h_N(x) = g(x) + \sum_{n=0}^{N-1} c'_n x^{2n}, \quad (17)$$

c'_n находим, решая систему уравнений (11) при $\mu = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и $\psi_N(y) = g(y)$ в (13).

Приближенное решение уравнения (1) имеет в этом случае вид

$$f_N(x) = h_N(x) + \sum_{n=0}^{N-1} c_n x^{2n}, \quad (18)$$

а коэффициенты c_n нужно найти из системы (11), где следует положить $\mu = -e^{\frac{i\pi}{4}}$, а в выражении для d_n (13) $\psi_N(y) = h_N(y)$.

При таком способе решения уравнения (1) получается погрешность, которую мы характеризуем нормой в $L^2_{(-1,1)}$ разности между точным решением уравнения (1) и полученным приближенным решением $f_N(x)$.

Оценку погрешности можно найти, используя (14) из предыдущего пункта.

При $N > k$ имеем

$$\|f - f_N\| < \frac{1}{N} \sqrt{\frac{k}{N}} \left(\frac{ek}{2N}\right)^{2N} \|g\|, \quad (19)$$

здесь $g(x)$ — заданная функция — правая часть уравнения (1); N — количество линейных алгебраических уравнений, которые приходится решать дважды: сначала для нахождения вспомогательной функции $h_N(x)$, а затем — приближенного решения уравнения (1) $f_N(x)$; $k > 0$ параметр задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, А. Н. Ахиезер. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, 109 (1956).
 2. Jones, D. S. A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disk. Com. Pure and Appl. Math. IX 713—746 (1956).
 3. Heins, A. E. Function-theoretic Aspects of Diffraction Theory. Electromagnetic Waves, Madison (1962).
 4. Ю. В. Гандель. Задача о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. Радиотехника, вып. 1 (1965).
-

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НА ЭКСТРЕМУМ ИНТЕГРАЛОВ

М. А. Перельман

Настоящая статья посвящена некоторым задачам на минимум в классе многочленов и целых трансцендентных функций экспоненциального типа. При этом в отличие от обычных задач этого рода многочлены рассматриваются на дуге окружности, а целые функции — на части вещественной оси. Предельный случай первой задачи встретился в одном инженерном вопросе и это послужило стимулом для нашей работы.

Задача 1. Рассматривается совокупность рациональных функций

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{C_m(z)},$$

где знаменатель — заданный многочлен, не обращающийся в нуль на дуге $l(z = e^{i\theta}; \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, 0 < \alpha < \pi)$, а числитель находим из условия, чтобы функционал

$$I[P_n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |R(e^{i\theta})|^p w(\theta) d\theta$$

имел наименьшее значение. При этом n и $m \leq n$ — степени числителя и знаменателя, $R(z)$ должна удовлетворять условию

$$R(1) = 1,$$

$p \geq 1$ задано и, наконец, $w(\theta)$ — аналог чебышевского веса, который уже вводился в статьях [2], [3] и имеет вид

$$w(\theta) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \sin \frac{\theta + \alpha}{2}}}.$$

Можно принять, что $C_m(1) \neq 0$, так как в противном случае дробь $R(z)$ с самого начала сократилась бы и задача свелась бы к аналогичной с $n_1 = n - d$ и $m_1 = m - d$ вместо n и m . Вводя в чис-

литель и знаменатель один и тот же множитель, отличный от нуля, можем даже добиться, чтобы

$$C_m(1) = 1, P_n(1) = 1. \quad (1)$$

Для решения задачи положим

$$z = \frac{(v - \beta)(\beta v - 1)}{(v + \beta)(\beta v + 1)} \quad \left(\beta = i \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \right). \quad (2)$$

При этом отображении дуга единичной окружности $z = e^{i\theta}$ ($\alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$) переходит в полуокружность $v = e^{i\varphi}$, ($0 \leq \varphi \leq \pi$), и функционал принимает вид

$$I[P_n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{P_n \left(\frac{v - \beta}{v + \beta} \frac{\beta v - 1}{\beta v + 1} \right)}{C_m \left(\frac{v - \beta}{v + \beta} \frac{\beta v - 1}{\beta v + 1} \right)} \right|^p \left| \frac{dv}{iv} \right|.$$

Так как замена v на $\frac{1}{v}$ не меняет z , то

$$\begin{aligned} P_n \left(\frac{v - \beta}{v + \beta} \frac{\beta v - 1}{\beta v + 1} \right) &= \frac{Q_n(x)}{\left[x + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^n}; \quad C_m \left(\frac{v - \beta}{v + \beta} \frac{\beta v - 1}{\beta v + 1} \right) = \\ &= \frac{A_m(x)}{\left[x + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^m}, \end{aligned}$$

где Q_n и A_m — многочлены степени n и m от

$$x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right).$$

Кроме того, так как $x = \infty$ при $z = 1$, то в силу (1) старшие коэффициенты многочленов Q_n и A_m равны 1.

Заметим, что в силу замены $x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right)$ единичная окружность $v = e^{i\varphi}$ переходит в двухбереговой разрез $-1 \leq x \leq 1$.

Многочлен степени $2n$

$$\omega(x) = \left| A_m(x) \left[x + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^{n-m} \right|^2$$

не имеет корней в замкнутом интервале $[-1, 1]$, так как при $-1 \leq x \leq 1$ точка z принадлежит l .

При этом

$$\omega(0) = \left| A_m(0) \left[\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^{n-m} \right|^2 = |C_m(-1)|^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2n\alpha}{2}.$$

Положим, $\omega(0) = C^2$. Эта константа, таким образом, известна априори.

Наш функционал теперь примет вид

$$I[P_n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left| \frac{Q_n(x)}{\sqrt{\omega(x)}} \right|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подробное решение родственной задачи* приведено в монографии [1] (Д14.15). Интересующая нас задача решается аналогично. При любом $p \geq 1$ экстремальный многочлен находится по формуле

$$Q_n^{\text{extr}}(x) = \frac{L_n}{2} \left\{ v^n \frac{D\left(\frac{1}{v}\right)}{D(v)} + v^{-n} \frac{D(v)}{D\left(\frac{1}{v}\right)} \right\} \sqrt{\omega(x)},$$

где

$$\omega(x) = \left| A_m(x) \left[x + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]^{n-m} \right|^2 = C^2 \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x}{a_k} \right) \left(1 - \frac{x}{\bar{a}_k} \right) \left(1 + x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{n-m},$$

$$D(v) = [V(v-\beta)(v+\beta)]^{n-m} \prod_{k=1}^m V(v-b_k)(v-\bar{b}_k),$$

b_k удовлетворяют условиям

$$C_m \left(\frac{b_k - \beta}{b_k + \beta} \frac{\beta b_k - 1}{\beta b_k + 1} \right) = 0, \quad |b_k| < 1,$$

a_k связаны с b по формулам

$$a_k = \frac{1}{2} \left(b_k + \frac{1}{b_k} \right)$$

и

$$L_n = \frac{(2|\beta|)^{n-m} \sqrt{\prod_{k=1}^m (1+b_k^2)(1+\bar{b}_k^2)}}{C \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^{n-m} \left(1 + |\beta|^{2(n-m)} \prod_{k=1}^m |b_k|^2 \right)}.$$

Минимальным значением функционала является

$$\min I[P_n] = \frac{1}{2\pi} L_n^p \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)},$$

* Где функционал имеет вид

$$\int_{-1}^1 \left| (x^n + \dots + A_n) \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\omega(x)}} \right|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

и достигается этот минимум на

$$P_n^{\text{extr}}(z) = \frac{(2|\beta|)^n}{2[1 + |\beta|^{2(n-m)} \prod_{k=1}^m |b_k|^2]} \left\{ \left(\frac{1-\beta v}{v+\beta} \right)^{n-m} \prod_{k=1}^m \frac{(1-vb_k)(1-\bar{v}\bar{b}_k)}{(v+\beta)(\beta v+1)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{v-\beta}{1+\beta v} \right)^{n-m} \prod_{k=1}^m \frac{(v-b_k)(v-\bar{b}_k)}{(v+\beta)(\beta v+1)} \right\}.$$

Заметим, что предельный переход $\rho \rightarrow \infty$ приводит к следующему результату.

При условиях задачи 1

$$\min_{A_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|x^n + \dots + A_n|}{\sqrt{\omega(x)}}$$

достигается на многочлене $Q_n^{\text{extr}}(x)$ и равен L_n . Это было показано в монографии [1], (стр. 291).

Отметим частный случай $C_m(z) \equiv 1$.

Здесь $\min |P_n|$ достигается на

$$P_n(z) = A \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^n (2|\beta|)^n}{2(1 + |\beta|^{2n})} \left\{ \left(i \frac{1-\beta v}{v+\beta} \right)^n + \left(i \frac{v-\beta}{1+\beta v} \right)^n \right\} \quad (|A| = 1).$$

Легко установить связь между многочленами, дающими экстремум функционалу, и соответствующими ортогональными многочленами.

Как показано в [2], многочлены, ортогональные на дуге единичной окружности $(\alpha, 2\pi - \alpha)$ с весом $\omega(\theta)$, имеют вид

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}} \left\{ \frac{v}{v-\beta} \left(i \frac{v-\beta}{1+\beta v} \right)^n + \frac{1}{1-\beta v} \left(i \frac{1-\beta v}{v+\beta} \right)^n \right\}.$$

В силу формулы (2)

$$\varphi_n\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^n \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}} \left\{ \frac{v}{v+\beta} \left(i \frac{v+\beta}{1-\beta v} \right)^n + \frac{1}{1+\beta v} \left(i \frac{1+\beta v}{v-\beta} \right)^n \right\}.$$

Положим

$$\bar{\varphi}_n(z) = z^n \varphi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}} \left\{ \frac{v}{v + \beta} \left(i \frac{v - \beta}{1 + \beta v} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \beta v} \left(i \frac{1 - \beta v}{v + \beta} \right)^n \right\},$$

и рассмотрим функции

$$M_n(x, y) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}(x)} \overline{\varphi_{n+1}(y)} - \varphi_{n+1}(x) \overline{\varphi_{n+1}(y)}}{1 - xy}.$$

При $x = z, y = 1$

$$M_n(z, 1) = \frac{z^{n+1} \varphi_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \varphi_{n+1}(z)}{1 - z} \overline{\varphi_{n+1}(1)} = \\ = \operatorname{ctg}^n \frac{\pi - \alpha}{4} \left\{ \left(i \frac{v - \beta}{1 + \beta v} \right)^n + \left(i \frac{1 - \beta v}{v + \beta} \right)^n \right\}.$$

Отсюда

$$P_n(z) = A \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \right)^n}{2(1 + |\beta|^{2n})} M_n(z, 1) = \\ = A \sqrt{\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}} \frac{\operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2}}{2(1 + |\beta|^{2n})} \frac{z^{n+1} \varphi_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \varphi_{n+1}(z)}{1 - z}.$$

Задача 2. Среди четных целых функций $f(z)$ ($f(0) = 1$) экспоненциального типа $\leq \sigma$ найти функцию, которая дает минимум интегралу

$$\int_1^\infty |f(z)|^2 z^{2\nu} dz,$$

где $\nu \geq 0$ — заданное число.

Не ограничивая общности, можно считать, что $f(z)$ — вещественная функция. Действительно, пусть $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — вещественные функции, так что $f_1(0) = 1, f_2(0) = 0$. Тогда

$$\int_1^\infty |f(z)|^2 z^{2\nu} dz = \int_1^\infty f_1^2(z) z^{2\nu} dz + \int_1^\infty f_2^2(z) z^{2\nu} dz \geq \int_1^\infty f_1^2(z) z^{2\nu} dz.$$

На основании обобщения теоремы Винера—Пэли, данного Н. И. Ахиезером (см. [1] или [5]), целая функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \int_0^\sigma z^{1/2 - \gamma} J_{\gamma - 1/2}(zt) h(t) \sqrt{t} dt$$

и

$$\int_0^{\infty} f^2(z) z^{2\nu} dz = \int_0^{\sigma} h^2(t) dt.$$

Условие $f(0) = 1$ переходит в

$$\frac{1}{2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\sigma} h(t) t^{\nu} dt = 1. \quad (3)$$

Так как

$$\int_1^{\infty} f^2(z) z^{2\nu} dz = \int_0^{\infty} f^2(z) z^{2\nu} dz - \int_0^1 f^2(z) z^{2\nu} dz,$$

то мы приходим к следующей задаче.

Найти минимум

$$I[h] = \int_0^{\sigma} h^2(t) dt - \int_0^1 z dz \left[\int_0^{\sigma} J_{\nu-1/2}(zt) h(t) \sqrt{t} dt \right]^2$$

при условии (3).

Эта задача сводится к решению интегрального уравнения

$$h(t) - \int_0^{\sigma} K(s, t) h(s) ds = \frac{\mu}{2} \frac{t^{\nu}}{2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+1/2)}$$

с симметрическим вещественным ядром

$$K(s, t) = \sqrt{st} \int_0^1 z J_{\nu-1/2}(z \cdot s) J_{\nu-1/2}(zt) dz.$$

Докажем, что число 1 не является собственным значением этого ядра.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \lambda \int_0^{\sigma} \varphi(t) dt \int_0^1 \sqrt{st} z J_{\nu-1/2}(z \cdot s) J_{\nu-1/2}(zt) dz = \\ &= \lambda \int_0^1 \sqrt{sz} J_{\nu-1/2}(sz) dz \int_0^{\sigma} \sqrt{tz} J_{\nu-1/2}(zt) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим λ_k собственные числа и положим

$$\varphi_k(s) = \lambda_k \int_0^1 \sqrt{sz} J_{\nu-1/2}(sz) \Psi_k(z) dz, \quad (5)$$

так что в силу уравнения (4)

$$\Psi_k(z) = \int_0^{\sigma} \sqrt{tz} J_{\nu-1/2}(zt) \varphi_k(t) dt. \quad (6)$$

Формулы (5) показывают, что собственные функции $\varphi_k(s)$ нашего уравнения являются сужением на интервал $(0, \sigma)$ целых функций экспоненциального типа.

Если $j \neq k$, то по свойству собственных функций

$$\int_0^{\sigma} \varphi_j(s) \varphi_k(s) ds = \delta_{jk}.$$

Так как формулы (6) можно рассматривать как преобразование Ганкеля функций $\varphi_k(t)$ ($0 \leq t \leq \sigma$)*, то в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^{\infty} \Psi_j(z) \Psi_k(z) dz = \int_0^{\sigma} \varphi_j(s) \varphi_k(s) ds = \delta_{jk}.$$

А, с другой стороны, из равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma} \varphi_j(s) \varphi_k(s) ds &= \lambda_k \int_0^{\sigma} \varphi_j(s) ds \int_0^1 \sqrt{sz} J_{\nu-1/2}(sz) \Psi_k(z) dz = \\ &= \lambda_k \int_0^1 \Psi_j(z) \Psi_k^*(z) dz \end{aligned}$$

следует, что

$$\int_0^1 \Psi_j(z) \Psi_k(z) dz = \frac{\delta_{jk}}{\lambda_k}.$$

Отсюда видно, что $\lambda_k > 1$. Наше утверждение доказано.

Мы приходим к частному случаю $\nu = 0$, если поставим следующую задачу:

Из целых функций $f(x)$ ($f(0) = 1$) экспоненциального типа $\leq \sigma$ найти ту, которая дает минимум интегралу

$$\int_E |f(x)|^2 dx,$$

где $E = \{x, |x| \geq 1\}$.

Так же, как и в предыдущем случае, можно считать, что $f(x)$ — вещественная функция. Кроме того, можно считать, что

* Заметим, что в формулы (5) входят сужения на интервал $(0, 1)$ целых функций экспоненциального типа $\Psi_k(z)$.

$f(x)$ — четная функция. Действительно, пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x)$ — нечетная, $f_2(x)$ — четная функция. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f^2(x) dx &= \int_E f_1^2(x) dx + 2 \int_E f_1(x) f_2(x) dx + \int_E f_2^2(x) dx = \\ &= \int_E f_1^2(x) dx + \int_E f_2^2(x) dx \geq \int_E f_2^2(x) dx = 2 \int_1^\infty f_2^2(x) dx. \end{aligned}$$

В этом случае однородное интегральное уравнение (4) принимает вид

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{\sin \sigma(s-t)}{s-t} \varphi(t) dt.$$

Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$(1-s^2) \frac{d^2 w}{ds^2} - 2s \frac{dw}{ds} + (\chi - \sigma^2 s^2) w = 0.$$

Связь между этими двумя уравнениями использовали Поллак и Слепиан в работе, посвященной электротехническим вопросам [4].

Из этой связи вытекает, что собственные значения интегрального уравнения являются простыми, а собственными функциями являются так называемые угловые сфероидальные волновые функции.

Задача 3. В классе четных целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ таких, что $f(c) = 1$, где c^2 — вещественно, найти функцию, которая дает минимум интегралу

$$\int_1^\infty |f(z)|^2 z (z^2 - 1)^{\nu-1/2} dz,$$

где $\nu \geq 0$ — заданное число.

Опять будем считать $f(z)$ вещественной.

Замена $\sqrt{z^2 - 1} = \zeta$ дает

$$\int_1^\infty f^2(z) z (z^2 - 1)^{\nu-1/2} dz = \int_0^\infty f^2(\sqrt{\zeta^2 + 1}) \zeta^{2\nu} d\zeta$$

$f(\sqrt{\zeta^2 + 1}) = g(\zeta)$ — четная целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$. Из упомянутого обобщения теоремы Винера—Пэли следует, что $g(\zeta)$ допускает представление

$$g(\zeta) = \int_0^\sigma \zeta^{\nu-1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\zeta t) h(t) \sqrt{t} dt$$

и

$$\int_0^{\sigma} \zeta^{2\nu} g^2(\zeta) d\zeta = \int_0^{\sigma} h^2(t) dt.$$

Условие $f(c) = 1$ переходит в

$$g(\gamma) = \int_0^{\sigma} \gamma^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\gamma t) h(t) \sqrt{t} dt = 1,$$

где $\gamma = \sqrt{c^2 - 1}$.

Из условия, что c^2 вещественно, следует, что $\gamma^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\gamma t)$ тоже вещественно.

Итак, снова получили задачу на условный экстремум:

Найти функцию, дающую функционалу

$$\int_0^{\sigma} h^2(t) dt$$

минимум при условии

$$\int_0^{\sigma} \gamma^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\gamma t) h(t) \sqrt{t} dt = 1.$$

Легко получить явное решение этой задачи, а именно,

$$h(t) = \lambda \gamma^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\gamma t) \sqrt{t},$$

где λ находится из условия

$$\lambda = \frac{1}{\gamma^{1-2\nu} \int_0^{\sigma} t J_{\nu-1/2}^2(\gamma t) dt} = \frac{2}{\sigma^2 \gamma^{1-2\nu} \{J_{\nu-1/2}^2(\gamma \sigma) - J_{\nu-3/2}(\gamma \sigma) J_{\nu+1/2}(\gamma \sigma)\}}$$

$$g(\zeta) = \lambda \int_0^{\sigma} (\gamma \zeta)^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\zeta t) J_{\nu-1/2}(\gamma t) t dt.$$

Переходя к первоначальной задаче, получаем, что искомой функцией является

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda \int_0^{\sigma} (\gamma \sqrt{z^2 - 1})^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(\sqrt{z^2 - 1} t) J_{\nu-1/2}(\gamma t) t dt = \\ &= \lambda (\gamma \sqrt{z^2 - 1})^{1/2-\nu} \frac{\sigma \{ \gamma J_{\nu-1/2}(\sigma \sqrt{z^2 - 1}) J_{\nu-3/2}(\gamma \sigma) - \sqrt{z^2 - 1} \times \\ &\quad \times J_{\nu-3/2}(\sigma \sqrt{z^2 - 1}) J_{\nu-1/2}(\gamma \sigma) \}}{z^2 - 1 - \gamma^2} \end{aligned}$$

$$\min \int_1^{\infty} f^2(z) z (z^2 - 1)^{\nu-1/2} dz = \lambda =$$

$$= \frac{2}{\sigma^2 (\sqrt{c^2 - 1})^{1-2\nu} \left\{ J_{\nu-1/2}^2(\sigma \sqrt{c^2 - 1}) - J_{\nu-3/2}(\sigma \sqrt{c^2 - 1}) J_{\nu+1/2}(\sigma \sqrt{c^2 - 1}) \right\}}.$$

В частном случае, когда $\nu = 0$, получим следующую задачу:

Из четных целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, таких что $f(c) = 1$ (c^2 — вещественно), найти ту, которая дает минимум интегралу

$$\int_1^{\infty} \frac{f^2(z) z}{\sqrt{z^2 - 1}} dz.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$f(z) = \frac{4 \sqrt{c^2 - 1}}{2\sigma \sqrt{c^2 - 1} + \sin 2\sigma \sqrt{c^2 - 1}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{z^2 - 1} \cos \sigma \sqrt{c^2 - 1} \sin \sigma \sqrt{z^2 - 1} - \sqrt{c^2 - 1} \sin \sigma \sqrt{c^2 - 1} \cos \sigma \sqrt{z^2 - 1}}{z^2 - c^2}$$

и

$$\min \int_1^{\infty} \frac{f^2(z) z}{\sqrt{z^2 - 1}} dz = \frac{2\pi \sqrt{c^2 - 1}}{2\sigma \sqrt{c^2 - 1} + \sin 2\sigma \sqrt{c^2 - 1}}.$$

Автор благодарит Н. И. Ахиезера за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Изд-во «Наука», М., 1965.
2. Н. И. Ахиезер. О полиномах, ортогональных на дуге окружности. «Докл. АН СССР», т. 130, № 2, 1960.
3. М. А. Перельман. Локальная асимптотическая формула для полиномов, ортогональных на дуге окружности. «Вестник ХГУ, серия механико-матем.», т. 33, № 26, 1967.
4. D. Slepian and H. Pollak. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty. BSTJ, v. XL, № 1, 1961.
5. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. Сообщения Харьковск. матем. о-ва, т. 25, 1957.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОСЛЕДСТВОМ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

1. Рассмотрим стационарный случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + A(x) = \sqrt{B(x)} \xi(t), \quad M\{\xi(t)\} = 0, \\ M\{\xi(t) \xi(t + \tau)\} = S_\xi \delta(\tau), \quad B(x) > 0. \quad (1)$$

Известно [1, 2], что процесс $x(t)$, определяемый уравнением (1), является компонентой двумерного марковского процесса $(x(t); v = \frac{dx(t)}{dt})$, но сам процесс $x(t)$ не является марковским. Будем называть такой процесс квазимарковским, или процессом с последствием.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = v; \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{a_1}{a_2} v - \frac{A(x)}{a_2} + \frac{\sqrt{B(x)}}{a_2} \xi(t). \quad (2)$$

Уравнение Колмогорова в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{A(x)}{a_2} \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{a_1}{a_2} v \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{a_1}{a_2} W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(x) W], \quad (3)$$

где $W = W(x, v, t)$ — двумерная совместная плотность распределения вероятностей.

Из уравнения (3) следует, что краевая задача на конечном или полубесконечном интервалах может быть поставлена только по скорости v .

2. Найдем уравнение для одномерной плотности распределения вероятностей $W(x, t)$ [3]. Умножим (3) на v и проинтегрируем по v . В результате этого получим

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + \frac{a_1}{a_2} G(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [v^2(x) W(x, t)] - A(x) W(x, t), \quad (4)$$

где $G(x, t) = \langle v(x) \rangle W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v W(x, v, t) dv$ — поток вероятности;

$$\langle v^2(x) \rangle W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 W(x, v, t) dv.$$

Исключая из уравнения (4) и уравнения непрерывности поток $G(x, t)$, получим уравнение гиперболического типа для $W(x, t)$:

$$a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W(x, t)] + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\langle v^2(x) \rangle W(x, t)]. \quad (5)$$

Уравнение (5), в отличие от (3), допускает постановку краевых задач по координате x . Решение уравнения (5) на конечном интервале может быть представлено в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

3. Предположим, что $x(t)$ является непрерывным случайным процессом и удовлетворяет обычным условиям, которые налагаются на марковский процесс при получении диффузионных уравнений из интегрального уравнения Смолуховского-Чепмена-Колмогорова [1, 4], причем, дополнительно потребуем, чтобы существовала $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, где $f(x, t; y, \tau) = \frac{\partial F(x, t; y, \tau)}{\partial y}$.

Тогда с помощью аналога функционального уравнения Смолуховского-Чепмена-Колмогорова для процессов с последствием

$$F(x, t - \Delta t; y, \tau) = \int_z \left\{ \int_{t-\Delta t}^{\tau} F(z, t - \theta; y, \tau) K(\theta) d\theta \right\} \times \\ \times d_z F(x, t - \Delta t; z, t), \quad (6)$$

где $k(\theta)$ — весовая функция, учитывающая эффект последствия, можно показать, что функция $f(x, t; y, \tau)$ для процесса с последствием однородного во времени удовлетворяет прямому и обратному уравнениям гиперболического типа:

$$a_2 \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x) f(x, y, t)] + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ \times [\langle v^2(x) \rangle f(x, y, t)] \quad (7)$$

и

$$a_2 \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = -A(y) \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} + a_2 \langle v^2(y) \rangle \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad (8)$$

где

$$A(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f(x, y, t) dy, \quad (9)$$

а $\langle v^2(x) \rangle$ на интервалах времени порядка интервалов корреляции скорости T_v можно определить из соотношений

$$\langle v^2(x) \rangle \simeq \frac{2}{T_v} B(x), \quad (10)$$

где

$$B(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 f(x, y, t) dy. \quad (11)$$

Таким образом, $\langle v^2(x) \rangle$ зависит от интервала корреляции T_v , а значит, от конечно-разностного шага во времени. Время корреляции скорости в случае линейной возвращающей силы $A(x) = x$ равно

$$T_v = \frac{1}{R_v(0)} \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\vartheta) d\vartheta = \frac{2a_2}{a_1}, \quad (12)$$

где $R_v(\vartheta)$ — корреляционная функция скорости.
Следовательно,

$$\langle v^2(x) \rangle \simeq \frac{2B_1(x)}{T_v} = \frac{S \hat{z} B(x)}{2a_1 a_2} = \frac{\sigma_x^2(x)}{a_2}, \quad (13)$$

где $\sigma_x^2(x)$ — дисперсия процесса $x(t)$.

Уравнения (7) и (8) в случае $A(x) = x$ имеют вид:

$$a_2 \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda f(x, y, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_x^2(x) f(x, y, t)] \quad (14)$$

и

$$a_2 \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = -y \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} + \sigma_y^2(y) \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2}. \quad (15)$$

Полагая в (14) и (15) $a_2 = 0$, приходим к уравнению одномерной диффузии:

$$a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda f(x, y, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_x^2(x) f(x, y, t)] \quad (16)$$

и

$$a_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = -y \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} + \sigma_y^2(y) \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2}. \quad (17)$$

4. Рассмотрим класс одномерных плотностей $W(x)$, которые удовлетворяют уравнению Пирсона [7, 8, 9]:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{ax+b}{cx^2+dx+g} W(x) = \frac{A(x)}{D(x)} W(x), \quad (18)$$

где a, b, c, d, g — постоянные.

Если $A(x)$ и $D(x)$ не зависят от времени и $D(x) > 0$, то

$$W(x) = \frac{c}{D(x)} \exp \left\{ \int \frac{2A(x)}{D(x)} dx \right\}. \quad (19)$$

В работах [5, 6, 7, 9] показано, что при определенных условиях

собственные функции $\varphi_k(x)$ уравнения (7) удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$\frac{1}{2} D(x) \varphi_k''(x) + A(x) \varphi_k'(x) + \lambda_k \varphi_k(x) = 0, \quad (20)$$

где при соответствующих краевых условиях

$$\begin{aligned} D(x) &= cx^2 + dx + g, \\ A(x) &= ax + b, \\ \lambda_k &\text{— собственные числа.} \end{aligned}$$

Таким образом, если заданы $A(x)$ и $D(x)$, то собственные функции находятся из обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Применяя для решения уравнений (7, 8) метод разделения переменных, находим

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \frac{W(x, y, t)}{W(x)} = W(y) \sum_k T_k(t) \varphi_k(x) \varphi_k(y) = \\ &= W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t} \left[\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right] \varphi_k(x) \varphi_k(y) \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $T_k(t)$ находятся из решения уравнения

$$a_2 T_k''(t) + a_1 T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = 0, \quad (22)$$

корни $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ определяются из характеристического уравнения

$$a_2 p^2 + a_1 p + \lambda_k = 0.$$

Собственные функции $\varphi_k(x)$ определяются из дифференциального уравнения (20).

5. Рассмотрим возможные частные случаи.

Пусть

$$\begin{aligned} A(x) &= ax + b; \\ D(x) &= 2(cx^2 + dx + g). \end{aligned} \quad (23)$$

В случае, когда $A(x) = ax + b$, а $D(x) = 2g$, уравнение (20) приводит к полиномам Эрмита и

$$\begin{aligned} W(z, z_0, t) &= \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z_0^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} H_k(z) H_k(z_0) e^{\alpha t} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_2\lambda_k - a_1^2}}{2a_2}; \quad \lambda_k = -ak, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$z = \sqrt{-\frac{1}{ag}} (ax + b), \quad a < 0.$$

Пусть

$$A(x) = ax + b; \quad D(x) = 2(dx + g).$$

В этом случае (20) является уравнением для полиномов Лягерра и

$$W(z, z_0, t) = W(z) W(z_0) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k^2 e^{\alpha t} [\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t] L_k^{(\alpha)}(z) \times \right. \\ \left. \times L_k^{(\alpha)}(z_0), \right. \quad (25)$$

$$\text{где } W(z) = \frac{z^2 e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}; \quad z_k^2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha+1+k)}; \quad \lambda_k = -ak; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_2\lambda_k - a_1^2}}{2a_2}; \quad z = -\frac{a}{d^2} (dx + g);$$

$$L_k^{(\alpha)}(z) = z^{-\alpha} e^z \frac{d^k}{dz^k} (z^{k+\alpha} e^{-z}).$$

$$\text{Пусть } A(x) = ax + b = (p+q)x + (p-q); \quad D(x) = 2(1-x^2).$$

В этом случае (20) приводит к полиномам Якоби и двумерная плотность имеет вид

$$W(x, y, t) = W(x) W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t} [\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t] \times \right. \\ \left. \times \bar{P}_k^{(p_1, q_1)}(x) \bar{P}_k^{(p_1, q_1)}(y) \right\}, \quad (26)$$

где

$$\bar{P}_k^{(p_1, q_1)}(x) = z_k P_k^{(p_1, q_1)}(x);$$

$$z_k = \frac{\Gamma(p_1+1) \Gamma(q_1+1) (2k+p_1+q_1+1) k! (k+p_1+q_1+1)}{(p_1+q_1+1) \Gamma(p_1+q_1+1) \Gamma(p_1+1+k) \Gamma(q_1+1+k)};$$

$$W(x) = \frac{(p_1+q_1+1) \Gamma(p_1+q_1+1)}{z^{p_1+q_1+1} \Gamma(p_1+1) \Gamma(q_1+1)} (1-x)^{p_1} (1-x)^{q_1};$$

$$p_1 = q + 1; \quad q_1 = p + 1; \quad \lambda_k = k(k+p_1+q_1+1); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть

$$A(x) = (2\lambda - 1)x; \quad D(x) = 2(1-x^2),$$

где

$$p_1 = q_1 = \lambda - \frac{1}{2}.$$

В рассматриваемом случае (20) определяет полиномы Гегенбауэра.

Двумерная плотность $W(x, y, t)$, построенная на полиномах Гегенбауэра, имеет вид

$$W(x, y, t) = W(x) W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t} \left[\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right] \times \right. \\ \left. \times \bar{P}_k^{(\lambda)}(x) \bar{P}_k^{(\lambda)}(y) \right\},$$

где $\bar{P}_k^{(\lambda)}(x) = x_k P_k^{(\lambda)}(x)$; $x_k = \frac{(k+\lambda)k! \Gamma(2\lambda)}{\lambda \Gamma(2\lambda+k)}$;

$$W(x) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{V \pi \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}; \quad \lambda_k = k(k+2\lambda), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть $A(x) = 0$; $D(x) = 2(1-x^2)$.

В этом случае (20) есть уравнение полиномов Лежандра, а двумерная плотность имеет вид

$$W(x, y, t) = W(x) W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t} \left[\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right] \times \right. \\ \left. \times \bar{P}_k(x) \bar{P}_k(y) \right\}, \quad (27)$$

где

$$W(x) = \frac{1}{2}; \quad \bar{P}_k(x) = x_k P_k(x) = \sqrt{2k+1} P_k(x); \\ \lambda_k = k(k+1); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть $A(x) = x$; $D(x) = 2(1-x^2)$.

Уравнение (20) есть уравнение полиномов Чебышева. Двумерная плотность имеет вид

$$W(x, y, t) = W(x) W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t} \left[\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right] \times \right. \\ \left. \times \tilde{T}_k(x) \tilde{T}_k(y) \right\}, \quad (28)$$

где $W(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\tilde{T}_k(x) = x_k \tilde{T}_k(x) = \sqrt{2} T_k(x)$;
 $\lambda_k = k^2$; $k = 1, 2, 3, \dots$

Обобщением рассмотренных выше случаев является построение $W(x, y, t)$ на основе гипергеометрической функции Гаусса.

Пусть $A(x) = ax + b$; $D(x) = 2(cx^2 + dx + g) = 2c(x - x')(x - x'')$, $c < 0$; $d^2 - 4cg > 0$; $x' < x < x''$.

Тогда (20) есть уравнение для гипергеометрической функции Гаусса и

$$W(x, y, t) = W(x) W(y) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{\alpha_k t} [\cos \beta_k t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta_k t] \times \right. \\ \times \left(\frac{x+1}{2} \right)^{1-\gamma} {}_2F_1 \left(\alpha_k + 1 - \gamma; \beta_k + 1 - \gamma; 2 - \gamma; \frac{x+1}{2} \right) \left(\frac{y+1}{2} \right)^{1-\gamma} \times \\ \times {}_2F_1 \left(\alpha_k + 1 - \gamma; \beta_k + 1 - \gamma; 2 - \gamma; \frac{y+1}{2} \right) \Big\}, \quad (29)$$

где

$$W(x) = (\delta_0^2)^{-1} (x+1)^{\gamma-1} [c(x-1)]^{A-\gamma-1}; A = \frac{4c-a}{c};$$

$$\lambda_k = -ck^2 + ck - ak; k = 1, 2, 3, \dots;$$

$$x_k^2 = \frac{\delta_0^2}{\delta_k^2} =$$

$$= \frac{\int_{-1}^1 (x-1)^{A-\gamma-1} (1+x)^{1-\gamma} \left[{}_2F_1 \left(\alpha_1 + 1 - \gamma; \beta_1 + 1 - \gamma; 2 - \gamma; \frac{x+1}{2} \right) \right]^2 dx}{\int_{-1}^1 (x-1)^{A-\gamma-1} (1+x)^{1-\gamma} \left[{}_2F_1 \left(\alpha_k + 1 - \gamma; \beta_k + 1 - \gamma; 2 - \gamma; \frac{x+1}{2} \right) \right]^2 dx};$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}; \beta = \frac{\sqrt{4a_2\lambda_k - a_1^2}}{2a_2}; 1 > \gamma > \frac{3c-a}{2}; \gamma = \frac{(4c-a)+b}{2c};$$

$$\alpha_k = \frac{3c-a + \sqrt{(c-a)^2 - 4c\lambda_k}}{2c}; \beta_k = \frac{3c-a - \sqrt{(c-a)^2 - 4c\lambda_k}}{2c}.$$

При соответствующих предположениях из (29) можно получить соотношения (24) ÷ (28), как частный случай.

Таким образом, плотности (28) ÷ (29), построенные соответственно на полиномах Эрмита, Лягерра, Якоби, Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева и гипергеометрической функции Гаусса, определяют непрерывный случайный квазимарковский процесс, причем собственные функции уравнения (20) представляют в рассматриваемых случаях полные системы, ортогональные на бесконечном, полубесконечном и конечном интервалах соответственно.

В заключение авторы благодарят Г. Я. Любарского и И. Е. Казакова за обсуждение полученных результатов и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН, 1938, вып. 5.
 2. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 3, 1933, № 3.
 3. А. А. Власов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», М., 1966.
 4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. ГИТТЛ, М. — Л., 1950.
 5. О. В. Сарманов. Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям. Изд-во АН СССР, М., 1961.
 6. Г. А. Амбарцумян. Кривые распределения вероятностей, приводящие в пределе к кривым распределения Пирсона. Докл. АН СССР, новая серия, 1937, т. 16, № 5.
 7. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ГИИЛ, М., 1948.
 8. Г. Крамер. Математические методы статистики. ГИИЛ, М., 1948.
 9. E. Wong. The construction of a class of Stationary Markoff Processes. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, V. XVI, 1964.
-

Таким образом, чисто случайный многомерный процесс определяется законом распределения $W(\xi, t)$, где $\xi = (x, y, \dots, z)$.

2. Многомерные марковские процессы. Рассмотрим значения случайных процессов $x(t), y(t), \dots, z(t)$ в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$:

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), \dots, z_0 = z(t_0);$$

$$x_1 = x(t_1), y_1 = y(t_1), \dots, z_1 = z(t_1);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = x(t_n), y_n = y(t_n), \dots, z_n = z(t_n).$$

Многомерный процесс $\xi(t) = [x(t), y(t), \dots, z(t)]$ будет марковским, если условные вероятности $p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}, \dots, \xi_0, t_0)$ зависят лишь от последнего значения процесса $\xi_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, z_{n-1})$ в момент времени t_{n-1} . Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_0, t_0) &= p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}) = \\ &= \frac{W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n)}{W_n(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1})}. \end{aligned} \quad (3)$$

На основании (3) имеем

$$\begin{aligned} &W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) = \\ &= p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}) W_n(\xi_0, t_0; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1}), \\ &W_n(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1}) = \\ &= p(\xi_{n-1}, t_{n-1} / \xi_{n-2}, t_{n-2}) W_{n-1}(\xi_0, t_0; \dots; \xi_{n-2}, t_{n-2}), \\ &\dots \dots \dots \\ &W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1) = p(\xi_1, t_1 / \xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, для многомерных марковских процессов многомерные плотности распределения вероятностей выражаются через вероятности перехода и плотность $W(\xi_0, t_0)$:

$$\begin{aligned} &W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) = p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ &\times p(\xi_{n-1}, t_{n-1} / \xi_{n-2}, t_{n-2}) \dots p(\xi_1, t_1 / \xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0) = \\ &= W_1(\xi_0, t_0) \prod_{k=1}^n p(\xi_k, t_k / \xi_{k-1}, t_{k-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что характерным свойством многомерных марковских процессов является то, что вероятности перехода $p(\xi_i, t_i / \xi_{i-1}, t_{i-1})$ и плотность $W_1(\xi_0, t_0)$ полностью определяют марковский случайный процесс.

Рассмотрим выражение для $W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1), t_0 < t < t_1$

$$W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) = p(\xi_1, t_1 / \xi, t) p(\xi, t / \xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0). \quad (6)$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по $\xi = (x, y, \dots, z)$:

$$\begin{aligned} \int W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) d\xi &= W_1(\xi_0, t_0) \times \\ &\times \int p(\xi_1, t_1 / \xi, t) p(\xi, t / \xi_0, t_0) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\int W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) d\xi = W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1),$$

находим

$$W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1) = W_1(\xi_0, t_0) \int p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0) d\xi, \quad (8)$$

или

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0) d\xi. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой известное функциональное соотношение Смолуховского — Чепмена — Колмогорова (СЧК) и является исходным при исследовании многомерных диффузионных процессов. Используя (8), (9), можем записать следующее соотношение для плотности распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= W_1(\xi_0, t_0) \int p(\xi_1, t_1/\xi'_1, t'_1) \times \\ &\times p(\xi'_1, t'_1/\xi_0, t_0) d\xi'_1 \int p(\xi_2, t_2/\xi'_2, t'_2) p(\xi'_2, t'_2/\xi_1, t_1) d\xi'_2 \dots \\ &\dots \int p(\xi_n, t_n/\xi'_n, t'_n) p(\xi'_n, t'_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}) d\xi'_n = \\ &= W_1(\xi_0, t_0) \prod_{k=1}^n \int p(\xi_k, t_k/\xi'_k, t'_k) p(\xi'_k, t'_k/\xi_{k-1}, t_{k-1}) d\xi'_k. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Многомерные процессы с последствием. Из общего соотношения

$$W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) = p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_0, t_0) \times \\ \times W_n(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1}). \quad (11)$$

следует, что описание некоторых классов многомерных случайных процессов связано с установлением определенных соотношений между условными плотностями $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2$. Для многомерных марковских случайных процессов имеет место соотношение вида

$$p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_0, t_0) = p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}). \quad (12)$$

Можно получить некоторые другие классы многомерных случайных процессов, используя гипотезы, отличающиеся от (12). Пусть

$$L\{p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_1, t_1; \xi_0, t_0)\} = p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}), \quad (13)$$

где L — некоторый оператор. В общем случае L может быть дифференциальным оператором, содержащим дифференцирование по $x_k, y_k, \dots, z_k$. Коэффициенты дифференциального оператора могут зависеть от всех переменных $x, y, \dots, z, t$. Наконец, L может представлять собой интегро-дифференциальный оператор, не

обязательно линейный. В последующем ограничимся рассмотрением класса случайных процессов, для которых

$$L_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}^k \{p_k\} = p_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (14)$$

где $L_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}^k$ — линейный оператор. (В дальнейшем вид оператора $L_{(t_1, t_2, \dots, t_k)}^k$ будет конкретизирован). Соотношение (14) необходимо дополнить соответствующими начальными условиями, которые в большинстве прикладных вопросов вытекают из физической постановки задачи.

Таким образом, многомерные случайные процессы рассматриваемого класса характеризуются аналогично марковским процессам условной плотностью $p(\xi, t/\xi_0, t_0)$ и плотностью $W_1(\xi, t_0)$. Поэтому можно назвать такие процессы с последствием квазимарковскими процессами. Дополнительно необходимо знать вид оператора $L_{(t_1, \dots, t_k)}^k$, который учитывает эффекты последствия.

Получим аналог функционального уравнения СЧК для многомерных процессов с последствием. С этой целью рассмотрим уравнение (11) для $n = 2$, $t_0 < t < t_1$:

$$W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) = p(\xi_1, t_1/\xi, t; \xi_0, t_0) W_2(\xi, t; \xi_0, t_0). \quad (15)$$

Учитывая, что

$$W_2(\xi_0, t_0/\xi, t) = p(\xi, t/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0), \quad (16)$$

находим

$$W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) = p(\xi_1, t_1/\xi, t; \xi_0, t_0) \times p(\xi, t/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0). \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по $\xi = (x, y, \dots, z)$. В силу условия согласованности имеем

$$\int W_3(\xi_0, t_0; \xi, t; \xi_1, t_1) d\xi = W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1). \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1) &= \int p(\xi_1, t_1/\xi, t; \xi_0, t_0) \cdot p(\xi, t/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0) d\xi = \\ &= \int (L_t)^{-1} p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0) d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как

$$W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1) = p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0), \quad (20)$$

то

$$\begin{aligned} p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0) &= \int (L_t)^{-1} p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0) \times \\ &\times W_1(\xi_0, t_0) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Если оператор L_t не зависит от t_0 , тогда

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int (L_t)^{-1} p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0) d\xi. \quad (22)$$

Предположим, что L_t^{-1} является интегральным оператором таким, что

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int \int \int \dots \int K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z) \cdot p(\xi_1, t_1/\xi, t - \theta_x - \theta_y - \dots - \theta_z) p(\xi, t - \theta_x - \theta_y - \dots - \theta_z/\xi_0, t_0) d\theta_x d\theta_y \dots d\theta_z d\xi. \quad (23)$$

В дальнейшем будем называть $K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z)$ функцией веса. Для интервалов времени (t_0, t_1) , которые превышают интервалы корреляции процессов $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{dz}{dt}$ и их взаимных корреляций в зависимости от выбора интервала (t_0, t) , имеем

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int d\xi \int \int \dots \int p(\xi_1, t_1/\xi, t - \theta_x - \theta_y - \dots - \theta_z) \cdot K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z) d\theta_x d\theta_y \dots d\theta_z p(\xi, t/\xi_0, t_0), \quad (24)$$

или

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int d\xi \left[\int \int \dots \int p(\xi, t - \theta_x - \theta_y - \dots - \theta_z/\xi_0, t_0) \times \right. \\ \left. \times K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z) d\theta_x d\theta_y \dots d\theta_z \right] p(\xi_1, t_1/\xi, t). \quad (25)$$

Функциональные уравнения (24), (25) обобщают соотношения СЧК на многомерные процессы с последствием. Если функция веса

$$K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z) = \delta(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z),$$

то из (24), (25) следует соотношение СЧК

$$p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int p(\xi_1, t_1/\xi, t) p(\xi, t/\xi_0, t_0). \quad (26)$$

Рассмотрим значения многомерного случайного процесса $\xi = (x, y, \dots, z)$, взятого в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$. Этот многомерный случайный процесс будем считать квазимарковским процессом, если справедливо равенство

$$p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) = \int \int \dots \int p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1} - \theta_x - \theta_y - \dots - \theta_z) K(\theta_x, \theta_y, \dots, \theta_z) d\theta_x d\theta_y \dots d\theta_z. \quad (27)$$

Выберем шаг $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ и т. д. таким образом, чтобы корреляция и взаимная корреляция процессов $\dot{\xi}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dots, \dot{z}(t)]$ распространялась на интервалы, меньшие чем интервалы

$$t_0 < \theta_0 < t_1; t_1 < \theta_1 < t_2; t_2 < \theta_2 < t_3; \dots; t_{n-1} < \theta_{n-1} < t_n; t_n < \theta_n < t_{n+1}.$$

В этом случае

$$p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \dots \int_{t_{n-1}} p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1} - \theta_{n-1}^x - \theta_{n-1}^y - \dots - \theta_{n-1}^z) K(\theta_{n-1}^x, \theta_{n-1}^y, \dots, \theta_{n-1}^z) d\theta_{n-1}^x \cdot d\theta_{n-1}^y \dots d\theta_{n-1}^z, \quad (28)$$

где

$$t_{n-1} < \theta_{n-1} < t_n.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} p(\xi_{n-1}, t_{n-1}/\xi_{n-2}, t_{n-2}; \dots; \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) = \\ = \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \dots \int p(\xi_{n-1}, t_{n-1}/\xi_{n-2}, t_{n-2} - \theta_{n-2}^x - \theta_{n-2}^y - \dots - \theta_{n-2}^z) \times \\ \times K(\theta_{n-2}^x, \theta_{n-2}^y, \dots, \theta_{n-2}^z) d\theta_{n-2}^x d\theta_{n-2}^y \dots d\theta_{n-2}^z, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dots \int p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0 - \theta_0^x - \theta_0^y - \dots - \\ - \theta_0^z) K(\theta_0^x, \theta_0^y, \dots, \theta_0^z) d\theta_0^x d\theta_0^y \dots d\theta_0^z. \end{aligned}$$

Запишем выражения для плотностей распределения различных порядков квазимарковского процесса:

$$\begin{aligned} W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1) &= p(\xi_1, t_1/\xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0), \quad (30) \\ W_3(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \xi_2, t_2) &= p(\xi_2, t_2/\xi_1, t_1; \xi_0, t_0) W_2(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1), \\ W_4(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \xi_3, t_3) &= p(\xi_3, t_3/\xi_2, t_2; \xi_1, t_1; \\ &\quad \xi_0, t_0) \cdot W_3(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \xi_2, t_2). \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n+1}(\xi_0, t_0; \dots; \xi_n, t_n) &= p(\xi_n, t_n/\xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \\ &\quad \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) \cdot W_n(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Заметим, что плотности (30) полностью не характеризуют случайный процесс $\xi(t) = [x(t), y(t), \dots, z(t)]$, так как моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ выбраны специальным образом. Однако использование такого класса плотностей достаточно для решения ряда прикладных задач.

Следует отметить, что уже в случае марковского процесса диффузионного типа соответствующие значения моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ при определении плотностей распределения вероятностей $W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ не могут быть выбраны произвольно. Например, для

$$W_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_3, t_3/x_2, t_2) p(x_2, t_2/x_1, t_1) W_1(x_1, t_1)$$

значения $t_2 = t_1$ и $t_2 = t_3$ могут представить только теоретический интерес при рассмотрении идеализированных диффузионных процессов.

Известное соотношение Эйнштейна

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle = 2Dt$$

приводит к парадоксу [4]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle (x - x_0)^2 \rangle}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2D}{t} = \infty.$$

В действительности не существует бесконечных скоростей броуновских частиц.

Пусть время $t = n\tau$, где $n = 1, 2, \dots$. Для $t = \tau$ имеем

$$\frac{\langle (x - x_0)^2 \rangle}{\tau^2} = \frac{2D}{\tau} = \langle v_x^2 \rangle < \infty,$$

где $\langle v_x^2 \rangle$ — среднее значение квадрата скорости на интервале времени τ .

Определим коэффициент диффузии D следующим образом:

$$D = \frac{1}{2} \langle v_x^2 \rangle \tau.$$

Очевидно, что в этом случае коэффициент диффузии зависит от конечно-разностного шага во времени τ , величина которого определяется временем корреляции процесса $\frac{dx}{dt}$.

Таким образом, для того, чтобы оставаться в рамках процессов без последствия, время t_2 не может выбираться произвольно, а должно удовлетворять условию

$$t_1 + \tau \leq t_2 \leq t_3 - \tau.$$

При невыполнении этого условия необходимо учитывать последствие. Такой процесс уже не будет являться марковским.

Используя в (30) подстановку последующих равенств в предыдущие, найдем

$$\begin{aligned} W_{n+1}(\xi_0, t_0; \dots; \xi_n, t_n) &= p(\xi_n, t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_1, t_1; \\ &\xi_0, t_0) \cdot p(\xi_{n-1}, t_{n-1} / \xi_{n-2}, t_{n-2}; \dots, \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) \dots p(\xi_2, \\ &t_2 / \xi_1, t_1; \xi_0, t_0) p(\xi_1, t_1 / \xi_0, t_0) W_1(\xi_0, t_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Принимая во внимание соотношения (28), (29), можем представить (31) следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= W_1(\xi_0, t_0) \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} \dots \int p(\xi_n, \\ &t_n / \xi_{n-1}, t_{n-1} - \theta_{n-1}^x - \theta_{n-1}^y - \dots - \theta_{n-1}^z) K(\theta_{n-1}^x, \theta_{n-1}^y, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots, \theta_{n-1}^z) d\theta_{n-1}^x d\theta_{n-1}^y \dots d\theta_{n-1}^z \cdot \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \dots \int p(\xi_{n-1}, t_{n-1}/\xi_{n-2}, t_{n-2} - \\
& \quad - \theta_{n-2}^x - \theta_{n-2}^y - \dots - \theta_{n-2}^z) K(\theta_{n-2}^x, \theta_{n-2}^y, \dots, \\
& \quad \theta_{n-2}^z) d\theta_{n-2}^x d\theta_{n-2}^y \dots d\theta_{n-2}^z \dots \int_{t_1}^{t_2} \dots \int p(\xi_2, t_2/\xi_1, t_1 - \theta_1^x - \theta_1^y - \\
& \quad - \dots - \theta_1^z) K(\theta_1^x, \theta_1^y, \dots, \theta_1^z) d\theta_1^x d\theta_1^y \dots d\theta_1^z \cdot \int_{t_0}^{t_1} \dots \int p(\xi_1, \\
& \quad t_1/\xi_0, t_0 - \theta_0^x - \theta_0^y - \dots - \theta_0^z) K(\theta_0^x, \theta_0^y, \dots, \theta_0^z) d\theta_0^x d\theta_0^y \dots d\theta_0^z = \\
& = W_1(\xi_0, t_0) \prod_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dots \int p(\xi_k, t_k/\xi_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \\
& \quad - \dots - \theta_{k-1}^z) K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z. \quad (32)
\end{aligned}$$

Пусть процессы $x(t)$, $y(t)$, $\dots$, $z(t)$ отличаются на аддитивную составляющую типа «белого» шума, т. е.

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t) + n_y(t) \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \\ z(t) &= x(t) + n_z(t) \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где $n_y(t)$, $\dots$, $n_z(t)$ — случайные процессы, типа «белого» шума. В этом случае получим

$$\begin{aligned}
W_{n+1}(\xi_0, t_0; \xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= W_1(\xi_0, t_0) \times \\
&\times \prod_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(\xi_k, t_k/\xi_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}) K(\theta_{k-1}) d\theta_{k-1}. \quad (34)
\end{aligned}$$

4. Уравнения для апостериорных распределений. Рассмотрим случайные процессы с последствием

$$x(t), y(t), \dots, z(t).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} x_m &= (x_0, t_0; x_1, t_1; \dots; x_m, t_m), \\ y_m &= (y_0, t_0; y_1, t_1; \dots; y_m, t_m), \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_m &= (z_0, t_0; z_1, t_1; \dots; z_m, t_m). \end{aligned} \quad (35)$$

Совместную плотность распределения вероятностей значений $x_m, y_m, \dots, z_m$ обозначим $W(x_m, y_m, \dots, z_m)$.

В случае квазимарковских процессов имеем

$$W(x_m, y_m, \dots, z_m) = W(x_0, t_0, \dots, z_0, t_0) \prod_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dots \int p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}; t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \dots - \theta_{k-1}^z) \cdot K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z. \quad (36)$$

По аналогии можем записать также

$$W(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \times \prod_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dots \int p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}^y - \theta_{k-1}^x - \dots - \theta_{k-1}^z) \cdot K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z. \quad (37)$$

С учетом (36) наряду с (37) имеем

$$W(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = W(x_m, y_m, \dots, z_m) \int \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) \cdot K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z. \quad (38)$$

Рассмотрим условную вероятность $W(x_m/y_m, \dots, z_m)$ значений сигнала $x(t)$ при условии, что наблюдались реализации $y(t), \dots, z(t)$ в некоторые моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_m$. Если известен ряд значений $y_m, \dots, z_m$ случайных процессов $y(t), \dots, z(t)$ в некоторые моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_m$, то эти сведения изменяют данные о случайном процессе $x(t)$, в частности, законы распределения.

Используем формулу условной вероятности

$$W(x_m/y_m, \dots, z_m) = \frac{1}{W(y_m, \dots, z_m)} W(x_m, y_m, \dots, z_m). \quad (39)$$

Подставив в (39) значение $W(x_m, y_m, \dots, z_m)$ из (36) находим

$$W(x_m, y_m, \dots, z_m) = \frac{1}{W(y_m, \dots, z_m)} W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \times \prod_{k=1}^m \int \dots \int p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}; t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \dots - \theta_{k-1}^z) \cdot K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z. \quad (40)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) &= \frac{1}{W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})} W(x_0, y_0, \dots, z_0) \times \\
 &\times \prod_{k=1}^{m+1} \int \dots \int p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}; \\
 &t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \dots - \theta_{k-1}^z) K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) \times \\
 &\times d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z = \frac{1}{W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})} W(x_m, y_m, \dots, z_m) \times \\
 &\times \int \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}; t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \\
 &- \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Существенный интерес для приложений представляет апостериорное распределение вероятностей для последнего значения сигнала $x_m = x(t_m)$ в момент времени t_m :

$$W(x_m, y_m) = W(x_m/y_m, \dots, z_m). \quad (42)$$

Проинтегрировав совместную условную плотность распределения $W(x_m/y_m, \dots, z_m)$ по переменным $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ находим

$$\begin{aligned}
 W(x_m, t_m) &= \frac{1}{W(y_m, \dots, z_m)} \int \dots \int_{x_0 x_1 \dots x_{m-1}} W(x_m, y_m, \dots, z_m) \times \\
 &\times dx_0 dx_1 \dots dx_{m-1} = [W(y_m, \dots, z_m)]^{-1} \int \dots \int_{x_0 x_1 \dots x_{m-1}} W(x_0, y_0, \dots, \\
 &z_0, t_0) \cdot \prod_{k=1}^m \left\{ \int \dots \int_{t_{k-1}} p(x_k, y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, \right. \\
 &z_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \dots - \theta_{k-1}^z) \cdot K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \\
 &\left. \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z \right\} dx_0 dx_1 \dots dx_{m-1}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
 W(x_{m+1}, t_{m+1}) &= [W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})]^{-1} \int \dots \int_{x_0 x_1 \dots x_{m-1}} W(x_{m+1}, \\
 &y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) dx_0 dx_1 \dots dx_m = [W(y_{m+1}, \dots, \\
 &\dots, z_{m+1})]^{-1} \int \dots \int_{x_0 x_1 \dots x_{m-1}} W(x_0, y_0, \dots, z_0, t_0) \prod_{k=1}^{m+1} \left\{ \int \dots \int_{t_{k-1}} p(x_k, \right. \\
 &y_k, \dots, z_k, t_k/x_{k-1}, y_{k-1}, \dots, z_{k-1}, t_{k-1} - \theta_{k-1}^x - \theta_{k-1}^y - \dots - \\
 &- \theta_{k-1}^z) K(\theta_{k-1}^x, \theta_{k-1}^y, \dots, \theta_{k-1}^z) d\theta_{k-1}^x d\theta_{k-1}^y \dots d\theta_{k-1}^z \left. \right\} \times \\
 &\times dx_0 dx_1 \dots dx_m = [W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})]^{-1} \int \dots \int_{x_0 x_1 \dots x_m} W(x_m,
 \end{aligned}$$

$$y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, \\ \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots, \\ \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z dx_0 dx_1 \dots dx_m. \quad (44)$$

Так как

$$[W(y_m, \dots, z_m)]^{-1} \int_{x_0 x_1 \dots x_{m-1}} \dots \int W(x_m, y_m, \dots, \\ \dots, z_m) dx_0 dx_1 \dots dx_{m-1} = W(x_m, t_m), \quad (45)$$

то, выделяя в (44) сомножитель (45), можно вместо (44) записать следующее выражение:

$$W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = W(x_{m+1}, t_{m+1}) = \frac{W(y_m, \dots, z_m)}{W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})} \times \\ \times \int_{x_m} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, \\ t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots, \\ \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z dx_m. \quad (46)$$

Воспользовавшись условием нормировки

$$\int W(x_{m+1}, t_{m+1}) dx_{m+1} = 1,$$

исключим множитель

$$W(y_m, \dots, z_m)/W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1}).$$

Тогда наряду с (46) имеем

$$\int W(x_{m+1}, t_{m+1}) dx_{m+1} = \frac{W(y_m, \dots, z_m)}{W(y_{m+1}, \dots, z_{m+1})} \int_{x_m x_{m+1}} \dots \int W(x_m/y_m, \dots, \\ \dots, z_m) \times \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}/t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, \\ \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots, \\ \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z dx_m dx_{m+1}. \quad (47)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 W(x_{m+1}, t_{m+1}) &= W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = \\
 &= \int_{x_m} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, t_{m+1}/x_m, \\
 &\quad y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots \\
 &\quad \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z dx_m \\
 &= \frac{\int_{x_m} \int_{x_{m+1}} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} \dots \int p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, \\
 &\quad t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m^x - \theta_m^y - \dots - \theta_m^z) K(\theta_m^x, \theta_m^y, \dots \\
 &\quad \dots, \theta_m^z) d\theta_m^x d\theta_m^y \dots d\theta_m^z dx_m dx_{m+1}}{1}.
 \end{aligned} \quad (48)$$

Для процессов x_k с « m » состояниями интеграл необходимо заменить суммой по этим состояниям:

$$\int \Phi(x_k) dx_k = \sum_{k=0}^m \Phi(x_k). \quad (49)$$

В частном случае двух состояний имеем

$$\int \Phi(x_k) dx_k = \sum_{k=0}^1 \Phi(x_k). \quad (50)$$

При этом формула для апостериорной плотности принимает вид

$$\begin{aligned}
 W(x_{m+1}, t_{m+1}) &= W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = \\
 &= \frac{\sum_{x_m} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \sum_{n^x} \dots \sum_{n^z} p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, t_{m+1}/x_m, \\
 &\quad y_m, \dots, z_m, \Delta t(m - n^x - n^y - \dots - n^z) K(\Delta t n^x, \Delta t n^y, \dots, \Delta t n^z)}{\sum_{x_m} \sum_{x_{m+1}} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \sum_{n^x} \dots \sum_{n^z} p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, \\
 &\quad t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, \Delta t(m - n^x - n^y - \dots - n^z) K(\Delta t n^x, \\
 &\quad \Delta t n^y, \dots, \Delta t n^z)}.
 \end{aligned} \quad (51)$$

Рекуррентные соотношения (48) и (51) позволяют для многомерного процесса с последствием $\xi(t) = [x(t), y(t), \dots, z(t)]$ оценить условное распределение вероятностей компоненты x , если наблюдаются компоненты $y, \dots, z$. Для случая, когда наблюдаемые процессы $\{y_m, \dots, z_m\}$ отличаются от процесса $\{x\}$ лишь аддитив-

ной постоянной типа «белого» шума, рекуррентные соотношения (48) и (51) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = \\
 & \frac{\int_{x_m} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_{m+1}, \\
 & t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dx_m}{\int_{x_m} \int_{x_{m+1}} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, \\
 & \dots, z_{m+1}, t_{m+1}/x_m, y_m, \dots, z_m, t_m - \theta_m) K(\theta_m) d\theta_m dx_m dx_{m+1}} \quad (52)
 \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned}
 & W(x_{m+1}/y_{m+1}, \dots, z_{m+1}) = \\
 & \sum_{x_m} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \sum_n p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, z_m, \\
 & = \frac{\Delta t (m+1)/x_m, y_m, \dots, z_m, \Delta t (m-n) K(\Delta t n)}{\sum_{x_m} \sum_{x_{m+1}} W(x_m/y_m, \dots, z_m) \sum_n p(x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, \\
 & \dots, z_m, \Delta t (m+1)/x_m, y_m, \dots, z_m, \Delta t (m-n) K(\Delta t n)}
 \end{aligned}$$

В случае марковского процесса $K(\theta) = \delta(\theta)$ и из (48), (51) следуют, как частный случай, уравнения для апостериорных плотностей процесса без последействия [5].

Полученные в первой части статьи соотношения будут использованы в последующем при решении ряда прикладных задач оптимальной фильтрации, управления и различения гипотез.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последействием. Вестник ХГУ, серия механико-математическая, т. 34, 1969.
2. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Уравнения для одномерных плотностей в случае линейных динамических систем второго порядка. Вестник ХГУ, серия механико-математическая, т. 34, 1969.
3. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Об определении вероятности первого достижения одномерным случайным процессом фиксированных границ. Вестник ХГУ, серия механико-математическая, т. 34, 1969.
4. А. А. Власов. Статистические функции распределения. Изд-во «Наука», М., 1966.
5. Р. Л. Стратонович. Условные процессы Маркова. Теория вероятностей и ее применение. Т. 5, вып. 2. 1960, стр. 172—195.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ, ФИЛЬТРАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ. II

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

В последнее время значительное развитие получили условные марковские процессы и их применение [1—3]. Представляет интерес рассмотреть некоторые задачи, относящиеся к оптимальной фильтрации, управлению и различению гипотез с точки зрения процессов с последствием марковского типа [4]. Это позволяет в ряде случаев расширить прикладные возможности теории случайных процессов.

1. Фильтрация непрерывных стационарных случайных процессов с последствием в белом гауссовском шуме

Пусть $x(t)$ — непрерывный случайный процесс, удовлетворяющий дифференциальному уравнению вида

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + A_1(x, t) = \sqrt{B_1(x)} \xi(t), \quad (1)$$

где $M\{\xi\} = 0$; $M\{\xi\xi_\tau\} = S_\xi \delta(\tau)$; $A_1(x, t)$, $B_1(x)$ — полиномы. В случае распределений Пирсона

$$A_1(x) = ax + b; \quad B_1(x) = cx^2 + dx + q. \quad (2)$$

Наблюдаемым является процесс

$$r(t) = x(t) + n(t),$$

причем

$$M\{n\} = 0; \quad M\{nn_\tau\} = N \delta(\tau). \quad (3)$$

Уравнение для априорной плотности распределения вероятностей имеет вид

$$a_n \frac{\partial^n W_a}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W_a}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W_a] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) W_a], \quad (4)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — локальные характеристики непрерывного стационарного процесса с последствием марковского типа [4, 5].

На основании результатов [4, 5] можно показать, что апостериорная плотность в рассматриваемом случае определяется из уравнения

$$a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) W] + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(x, t) \int_{-l}^l \left[r(t) y - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{y^2}{2} \right] W(y, t) dy \right\},$$

где

$$L_t = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) является исходным при решении задач оптимальной фильтрации. В установившемся режиме имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [B(x) W] - \frac{d}{dx} [A(x) W] + \frac{a_1}{N} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W(x) - \\ - \frac{1}{N} \left\{ W(x) \int_{-l}^l \left[r(t) y - \frac{a_1}{2} y^2 \right] W(y) dy \right\} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнений (5), (6) при произвольных $A(x)$ и $B(x)$ представляет достаточно сложную задачу. Поэтому рассмотрим случаи, важные для приложений. При этом, используя соответствующие приближения, перейдем от уравнения для $W(x, t)$ к конечному числу уравнений относительно одномерных моментов.

Рассмотрим фильтрацию непрерывного стационарного гауссовского процесса в белом гауссовском шуме. Учитывая, что в этом случае локальные характеристики случайного процесса $x(t)$ имеют вид

$$A(x, t) = x; \quad B(x) = B,$$

запишем уравнение для априорной плотности распределения вероятностей

$$a_n \frac{\partial^n W_a}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [x W_a] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Апостериорная плотность в рассматриваемом случае определяется из уравнения

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xW) + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t)y - \frac{1}{2}y^2 \right] W(y, t) dy \right\}. \quad (8)$$

Определим уравнения для одномерных моментов

$$\langle x^i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^i W(x, t) dx. \quad (9)$$

Умножая правую и левую части (8) на x и интегрируя по x в пределах $\pm \infty$, находим

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + \langle x \rangle = L_t \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{N} [r(t) - \langle x \rangle] \right\}. \quad (10)$$

Уравнение (10) «незамкнуто», так как для его решения необходимо знать $\langle x^2 \rangle$. Выражение для $\langle x^2 \rangle$ может быть найдено из (8) путем умножения на x^2 и интегрирования по x в пределах $\pm \infty$:

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x^2 \rangle = \\ = B - \frac{2}{N} \left[a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1 \right] \langle x^2 \rangle^2. \quad (11)$$

При получении уравнения (11) учтено, что $\langle x^3 \rangle = 0$, а $\langle x^4 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle^2$. Уравнения для одномерных моментов $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$ оказались замкнутыми, так как в гауссовском случае $\langle x^3 \rangle = \langle x^5 \rangle = \dots = 0$, а $\langle x^4 \rangle$, $\langle x^6 \rangle$ и т. д. выражаются через $\langle x^2 \rangle$. Таким образом, задача оптимальной фильтрации может быть практически реализована до конца путем построения решающего устройства, которое определяет $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$ согласно уравнениям (10) и (11).

Пусть $A(x, t) = ax + b$; $B(x) = B(1 - x^2)$. В этом случае уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей имеет вид

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(ax + b)W] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - x^2)W] + L_t \frac{1}{N} \left[r(t)x - \right. \\ \left. - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(x, t) \int_{-1}^1 \left[r(t)y - \frac{1}{2}y^2 \right] W(y, t) dy \right\}. \quad (12)$$

Уравнение (12) является исходным при решении задачи оптимальной фильтрации в белом шуме случайного процесса с по-

следствием марковского типа, построенного на основе гипергеометрической функции. Для построения приближенного решения

(12) перейдем к одномерным моментам $\langle x^i \rangle = \int_{-1}^1 x^i W(x, t) dx$.

Умножая (12) на x^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ и интегрируя по x в пределах ± 1 , находим уравнения для $\langle x^i \rangle$:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + a \langle x \rangle + b = L_t \left[\frac{1}{N} \langle x^2 \rangle r(t) - \frac{\langle x^3 \rangle}{2N} - \frac{1}{2N} \langle x^2 \rangle \langle x \rangle \right], \quad (13)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x^2 \rangle \left(a + \frac{1}{2} b \right) = B - b + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle x^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^4 \rangle \right] - L_t \frac{1}{2N} \langle x^2 \rangle^2, \quad (14)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(B + a) \langle x^3 \rangle = B \langle x \rangle - 2b \langle x^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle x^4 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^5 \rangle \right] - L_t \frac{1}{2N} \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle, \quad (15)$$

Из (13) — (15) следует, что уравнения для $\langle x^i \rangle$ не являются замкнутыми. С целью замыкания уравнений в первом нетривиальном приближении, ограничимся учетом $\langle x^5 \rangle$ и пренебрежем кумулянтами k_j , ($j \geq 4$). При $k_4 = k_5 = \dots = 0$ имеет место квазинормальное приближение. В более общем случае, обрывая разложение на кумулянтах m -го порядка, получаем замкнутые выражения для моментов $(m+1)$ -го порядка через моменты младших порядков [6].

В рассматриваемом случае

$$\langle x^4 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle^2; \quad \langle x^5 \rangle = 10 \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle. \quad (16)$$

Тогда наряду с (14) и (15) имеем

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \left(a + \frac{1}{2} B \right) \langle x^2 \rangle = B - b + L_t \left[\frac{1}{N} r(t) \langle x^3 \rangle - \frac{2}{N} \langle x^2 \rangle^2 \right] \quad (17)$$

и соответственно

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(B + a) \langle x^3 \rangle = B \langle x \rangle - 2b \langle x^2 \rangle + L_t \frac{\langle x^2 \rangle}{N} \left[r(t) 3 \langle x^2 \rangle - \frac{11}{2} \langle x^3 \rangle \right]. \quad (18)$$

Таким образом, ограничившись $\langle x^5 \rangle$ и используя приближение (16), получим замкнутую систему уравнений для $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$.

Совместное решение уравнений (13), (17) и (18) приводит к квазиоптимальной фильтрации. Попутно заметим, что уравнения оптимальной фильтрации непрерывных случайных процессов с последствием, построенных соответственно на полиномах Эрмита, Лягерра, Якоби, Гегенбауэра, Лежандра и Чебышева в белом гауссовском шуме, может быть получено аналогичным образом.

2. Фильтрация непрерывных нестационарных случайных процессов в белом гауссовском шуме

Пусть $x(t)$ — непрерывный нестационарный случайный процесс с последствием марковского типа, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + [a_0 + \eta(t)] A_1(x) = \sqrt{B_1(x)} \xi(t), \quad (19)$$

где

$$A_1(x) = ax + b; \quad B_1(x) = cx^2 + dx + q,$$

$$M\{\eta\} = 0; \quad M\{\eta\eta_\tau\} = S_\eta \delta(\tau); \quad M\{\xi\} = 0; \quad M\{\xi\xi_\tau\} = S_\xi \delta(\tau).$$

Тогда априорная плотность одномерного процесса $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$a_n \frac{\partial^n W_a}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W_a}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W_a] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W_a \}. \quad (20)$$

Для наблюдаемого процесса $r(t) = x(t) + n(t)$, где $n(t)$ — белый шум, для апостериорной плотности $W(x, t)$ имеет место уравнение следующего вида:

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + \\ + D_{00}(x)] W \} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ W(x, t) \int_{-l}^l \left[r(t)y - \frac{1}{2} y^2 \right] W(y, t) dy \right\}, \quad (21)$$

где

$$L_t = a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1.$$

Уравнение (21) позволяет в принципе решить задачу оптимальной фильтрации процесса $x(t)$ в белом шуме.

В стационарном режиме имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \{ [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W(x) \} - \frac{d}{dx} [A(x) W(x)] - \\ - \frac{1}{N} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x) - \frac{1}{N} \left\{ W(x) \int_{-l}^l \left[r(t)y - \frac{1}{2}y^2 \right] W(y) dy \right\} = 0. \quad (22)$$

Для решения уравнений (21), (22) целесообразно использовать метод Бубнова — Галеркина. Однако решение задачи с учетом эволюции апостериорной плотности во времени представляет известные трудности и является достаточно громоздкой. Поэтому в последующем при рассмотрении некоторых частных случаев, представляющих интерес в практическом отношении, с целью упрощения перейдем от уравнения для $W(x, t)$ к конечному числу

уравнений для одномерных моментов $\langle x^i \rangle = \int_{-l}^l x^i W(x, t) dx$, которые приводят к квазиоптимальной фильтрации.

Пусть $A_1(x) = A_1x$; $B_1(x) = B_1$. В этом случае апостериорная плотность распределения вероятностей для процесса $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ D_{11}x^2 - \\ - 2D_{10}x + D_{00} \} W + L_t \frac{1}{N} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t)y - \frac{1}{2}y^2 \right] W(y, t) dy \right\}, \quad (23)$$

где D_{11} , D_{00} и D_{10} характеризуют соответственно дисперсию процессов $\eta(t)$, $\xi(t)$ и их взаимную дисперсию. Переходя от (23) к уравнениям для одномерных моментов, и полагая $D_{10} = 0$, находим

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + A \langle x \rangle = L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ \langle x^2 \rangle \left[r(t) - \frac{\langle x^2 \rangle}{2} \right] - \frac{\langle x^3 \rangle}{2} \right\}, \quad (24)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle x^2 \rangle = D_{00} + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[\langle x^3 \rangle r(t) - \frac{1}{2} \langle x^4 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle^2 \right], \quad (25)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle x^3 \rangle = 3D_{00} \langle x \rangle + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle x^4 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^5 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle \right], \quad (26)$$

Уравнения (24) — (26) не замкнуты, так как для их решения необходимо знать $\langle x^4 \rangle$ и $\langle x^5 \rangle$. Следовательно, необходимо решить проблему замыкания зацепляющейся цепочки уравнений для одномерных моментов. Ограничимся квазинормальным приближением. Тогда из (16), (25), (26) получаем

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle x^2 \rangle = D_{00} + L_t \frac{1}{N} [r(t) \langle x^3 \rangle - 2 \langle x^2 \rangle^2], \quad (27)$$

и, соответственно,

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle x^3 \rangle = 3D_{00} \langle x \rangle + L_t \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{N} \left[r(t) 3 \langle x^2 \rangle - \frac{11}{2} \langle x^3 \rangle \right] \right\}. \quad (28)$$

Из уравнений (24), (27) и (28) следует, что использованное приближение (16) позволило осуществить замыкание зацепляющейся цепочки уравнений для $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$, которые дают решение задачи квазиоптимальной фильтрации непрерывного нестационарного гауссовского случайного процесса с последствием марковского типа в белом гауссовском шуме.

Пусть $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + [A + \eta(t)] x(t) = \sqrt{1 - x^2} \xi(t), \quad (29)$$

причем, $\eta(t)$ и $\xi(t)$ — гауссовский белый шум с нулевым средним. Уравнение для априорной плотности распределения вероятностей —

$$a_n \frac{\partial^n W_a}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [(Ax) W_a] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ \times \{ [D_{11} x^2 - 2D_{10} x \sqrt{1 - x^2} + D_{00} (1 - x^2)] W_a \}. \quad (30)$$

Уравнение для апостериорной плотности $W(x, t)$ процесса $x(t)$, наблюдаемого в белом шуме $n(t)$, имеет вид

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(Ax) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11} x^2 - 2D_{10} x \sqrt{1 - x^2} + D_{00} (1 - x^2)] W \} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(x, t) \int_{-1}^1 \left[r(t) y - \frac{1}{2} y^2 \right] W(y, t) dy \right\}. \quad (31)$$

Для стационарного режима имеем наряду с (31)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \{ [D_{11}x^2 - 2D_{10}x \sqrt{1-x^2} + D_{00}(1-x^2)] W(x) \} + \\ & + \frac{d}{dx} [(Ax) W] + \frac{1}{N} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x) - \\ & - \frac{1}{N} \left\{ W(x) \int_{-1}^1 \left[r(t)y - \frac{1}{2}y^2 \right] W(y) dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Перейдем от (31) к зацепляющейся системе уравнений для одномерных моментов, считая при этом $D_{10} = 0$:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + A \langle x \rangle = L_t \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{N} \times \right. \\ \left. \times \left[r(t) - \frac{\langle x \rangle}{2} \right] - \frac{1}{2N} \langle x^3 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11} + D_{00}) \langle x^2 \rangle = D_{00} + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle x^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^4 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle^2 \right], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11} + D_{00}) \langle x^3 \rangle = \\ = 3D_{00} \langle x \rangle + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle x^4 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^5 \rangle - \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle \right], \end{aligned} \quad (35)$$

Для замыкания уравнений в первом нетривиальном приближении учтем (16). Тогда наряду с (34) и (35) имеем уравнения для $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11} + D_{00}) \langle x^2 \rangle = \\ = D_{00} + L_t \frac{1}{N} [r(t) \langle x^3 \rangle - 2 \langle x^2 \rangle^2], \end{aligned} \quad (36)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11} + D_{00}) \langle x^3 \rangle = 3D_{00} \langle x \rangle + \\ + L_t \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{N} \left[3r(t) \langle x^2 \rangle - \frac{11}{2} \langle x^3 \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнения (33), (36) и (37) описывают квазиоптимальную фильтрацию в белом шуме непрерывного нестационарного случайного процесса с последствием марковского типа, построенного на основе гипергеометрического ряда.

3. Фильтрация детерминированного и случайного сигналов на фоне белого шума.

Рассмотрим оптимальную фильтрацию в случае, когда наблюдаемым является процесс

$$r(t) = x(t) + V[y(t)] + n(t), \quad (38)$$

где $x(t)$ — полезный неслучайный сигнал, представляющий собой произвольную детерминированную функцию времени; $V[y(t)]$ — полезный сигнал, являющийся произвольной функцией от непрерывного случайного процесса с последствием марковского типа; $n(t)$ — белый шум.

Полезный случайный сигнал удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + A(y, t) = \sqrt{B_1(y)} \xi(t). \quad (39)$$

Уравнение для априорной плотности процесса $y(t)$ имеет вид

$$L_t \left(\frac{\partial W_a}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W_a] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W_a]. \quad (40)$$

Апостериорная плотность распределения вероятности процесса $x(t) + V[y(t)]$, наблюдаемого в белом шуме с интенсивностью N , удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = & - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W] + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x + \right. \\ & \left. + V(y)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(y, t) \int_{-l}^l [x + \right. \\ & \left. + V(z)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(z)) \right] W(z, t) dz \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$L_t = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}.$$

Для стационарного режима имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [B(y) W(y)] - \frac{d}{dy} [A(y) W(y)] + \frac{1}{N} \left\{ [x + V(y)] \left[r(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W(y) \right\} - \frac{1}{N} \left\{ W(y) \int_{-l}^l [x + V(z)] \left[r(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (x + V(z)) \right] W(z) dz \right\} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнения (41), а в стационарном случае (42), являются исходными для решения задачи оптимальной фильтрации произвольного

детерминированного и произвольной функции от случайного процесса с последствием марковского типа, в белом гауссовском шуме.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В гауссовском стационарном случае

$$A(y) = Ay; \quad B(y) = B.$$

Уравнение для апостериорной плотности в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = & \frac{\partial}{\partial y} [(Ay) W] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x + V(y)] [r(t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (x + V(y))] W(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(y, t) \int_{-\infty}^{\infty} [x + V(z)] [r(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (x + V(z))] W(z, t) dz \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

На основании (43) запишем зацепляющуюся цепочку уравнений для одномерных моментов:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y \rangle}{dt} + A(y) = & L \frac{1}{N} \left\{ [r(t) x \langle y \rangle + \right. \\ & \left. + r(t) \langle y V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y V(y) \rangle + \langle y V^2(y) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y \rangle + r(t) \langle y \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y \rangle \langle V(y) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle y \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^2 \rangle}{dt} + 2A \langle y^2 \rangle = & B + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^2 \rangle + \right. \\ & \left. + r(t) \langle y^2 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + 2x \langle y^2 V(y) \rangle + \langle y^2 V^2(y) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + \right. \\ & \left. + 2x \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^2 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^3 \rangle}{dt} + 3A \langle y^3 \rangle = & 3B \langle y \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^3 \rangle + \right. \\ & \left. + r(t) \langle y^3 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + 2x \langle y^3 V(y) \rangle + \langle y^3 V^2(y) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + \right. \\ & \left. + 2x \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^3 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

.....

Для замыкания уравнений относительно одномерных моментов необходимо знать явный вид функциональной зависимости $V(y)$. В квазинормальном приближении можно ограничиться уравнениями для $\langle y \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ и $\langle y^3 \rangle$, используя представления $\langle y^4 \rangle$ и $\langle y^5 \rangle$, согласно (16), т. е. перейти к уравнениям квазиоптимальной фильтрации.

Пусть $y(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + [A + \eta(t)] y(t) = \sqrt{B_1} \xi(t). \quad (47)$$

В этом случае уравнение для апостериорной плотности имеет вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = & \frac{\partial}{\partial y} [(Ay) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(D_{11} y^2 - 2D_{10} y + D_{00}) W] + \\ & + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x + V(y)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W(y, t) - \right. \\ & \left. - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(y, t) \int_{-\infty}^{\infty} [x + V(z)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(z)) \right] W(z, t) dz \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Уравнения для одномерных моментов:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y \rangle}{dt} + A \langle y \rangle = & L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y \rangle + \right. \\ & \left. + r(t) \langle y V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y V(y) \rangle + \langle y V^2(y) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y \rangle + r(t) \langle y \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y \rangle \langle V(y) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle y \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle y^2 \rangle = & D_{00} + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \times \right. \\ & \times \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + 2x \langle y^2 V(y) \rangle + \langle y^2 V^2(y) \rangle] \Big\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + \right. \\ & \left. + 2x \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^2 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle y^3 \rangle = & 3D_{00} \langle y \rangle + \\ + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x r(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + r(t) x \langle y^3 \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$+ \langle y^3 V(y) \rangle] \Big\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + 2x \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^3 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (51)$$

Разлагая $V(y)$ в ряд и используя квазинормальное приближение для $\langle y^4 \rangle$ и $\langle y^3 \rangle$, получаем замкнутую систему уравнений для $\langle y \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ и $\langle y^3 \rangle$, т. е. уравнения квазиоптимальной фильтрации произвольного неслучайного сигнала и произвольной функции от нестационарного гауссовского процесса с последствием в белом гауссовском шуме.

Предположим, что $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y + b = \sqrt{(1-y^2) B_1} \xi(t). \quad (52)$$

Уравнение для апостериорной плотности в рассматриваемом случае имеет вид

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y} [(ay + b) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(1-y^2) W] + \\ + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x + V(y)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W(y, t) - \right. \\ \left. - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(y, t) \int_{-1}^1 [x + V(z)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(z)) \right] W(z, t) dz \right\} \right\}. \quad (53)$$

Из (53) можно получить уравнения для одномерных моментов:

$$a_n \frac{d^n \langle y \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y \rangle}{dt} + a \langle y \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y \rangle + \right. \\ \left. + r(t) \langle y V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y V(y) \rangle + \langle y V^2(y) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y \rangle + r(t) \langle y \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y \rangle \times \right. \\ \left. \times \langle V(y) \rangle + \langle y \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (54)$$

$$a_n \frac{d^n \langle y^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^2 \rangle}{dt} + (2a + B) \langle y^2 \rangle = B - b + \\ + L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + 2x \langle y^2 V(y) \rangle + \right. \\ \left. + \langle y^2 V^2(y) \rangle] \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + \right. \\ \left. + 2x \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^2 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle y^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^3 \rangle}{dt} + 3(a+B) \langle y^3 \rangle = 3B \langle y \rangle - 2b \langle y^2 \rangle + \\
& + L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + 2x \langle y^3 V(y) \rangle + \right. \\
& \quad \left. + \langle y^3 V^2(y) \rangle] \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle] - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + 2x \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^3 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (56)
\end{aligned}$$

Нетривиальный случай соответствует учету трех первых моментных функций: $\langle y \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ и $\langle y^3 \rangle$. Разлагая $V(y)$ в ряд и используя квазинормальное приближение, приходим к уравнениям квазиоптимальной фильтрации.

Пусть $y(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + [a + \eta(t)] y(t) + b = \sqrt{B_1(1-y^2)} \xi(t). \quad (57)$$

Априорная плотность $W_a(y, t)$ для процесса $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{\partial^n W_a}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} [(ay + b) W_a] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ [D_{11}y^2 - 2D_{10}y \sqrt{1-y^2} + D_{00}(1-y^2)] W_a \}. \quad (58)
\end{aligned}$$

Уравнение для апостериорной плотности:

$$\begin{aligned}
& L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y} [(ay + b) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ [D_{11}y^2 - 2D_{10}y \sqrt{1-y^2} + \\
& + D_{00}(1-y^2)] W \} + L_t \frac{1}{N} \left\{ [x + V(y)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] \times \right. \\
& \times W(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(y, t) \int_{-1}^1 [x + V(z)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(z)) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \left. \times W(z, t) dz \right\} \right\} \quad (59)
\end{aligned}$$

Из (59) можно найти зацепляющуюся систему уравнений для одномерных моментов $\langle y^i \rangle$:

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle y \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y \rangle}{dt} + a \langle y \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y(t) + \right. \\
& \quad \left. + r(t) \langle y V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + 2x \langle y V(y) \rangle + \langle y V^2(y) \rangle] \right\} - \\
& - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y \rangle + r(t) \langle y \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y \rangle + \right. \\
& \quad \left. + 2x \langle y \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (60)
\end{aligned}$$

$$a_n \frac{d^n \langle y^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle y^2 \rangle = D_{00} - b +$$

$$+ L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + 2x \langle y^2 V(y) \rangle + \right.$$

$$+ \langle y^2 V^2(y) \rangle] \} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^2 \rangle + r(t) \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^2 \rangle + \right.$$

$$+ 2x \langle y^2 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^2 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \}, \quad (61)$$

$$a_n \frac{d^n \langle y^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle y^3 \rangle = 3D_{00} \langle y \rangle -$$

$$- 2b \langle y^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 V(y) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + \right.$$

$$+ 2x \langle y^3 V(y) \rangle + \langle y^3 V^2(y) \rangle] \} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [xr(t) \langle y^3 \rangle + r(t) \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} [x^2 \langle y^3 \rangle + 2x \langle y^3 \rangle \langle V(y) \rangle + \langle y^3 \rangle \langle V^2(y) \rangle] \right\}, \quad (62)$$

Уравнения (60) — (62) для $\langle y \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ и $\langle y^3 \rangle$ характеризуют весьма общий случай, когда наблюдается произвольная функция полезного случайного сигнала $y(t)$. Для конкретных $V[y(t)]$ можно легко довести до логического конца задачу оптимальной фильтрации в белом шуме произвольного детерминированного сигнала и произвольной функции от случайного нестационарного процесса, построенного на основе гипергеометрического ряда. При этом необходимо использовать разложение $V(y)$ в ряд и осуществить обрыв бесконечной зацепляющейся цепочки уравнений для одномерных моментов. Это приводит к квазиоптимальной фильтрации.

4. Фильтрации фазы, представляющей собой случайный процесс в белом гауссовском шуме.

Рассмотрим случай, когда наблюдаемым процессом является

$$r(t) = U \sin \varphi(t) + n(t), \quad (63)$$

где $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ — разность фаз, $n(t) = E_s(t) \cos \varphi(t) - E_c(t) \sin \varphi(t)$ — флуктуационный шум, причем $M\{E_s\} = 0$; $M\{E_s(t)E_s(t+\tau)\} = N\delta(\tau)$. Процесс $\varphi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \varphi(t)}{dt} + A(\varphi, t) = \sqrt{B_1(\varphi)} \xi(t). \quad (64)$$

Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей может быть записано в виде

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} [A(\varphi) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [B(\varphi) W] + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) V(\varphi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} V^2(\varphi) \right] W(\varphi, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(\varphi, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) V(\psi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} V^2(\psi) \right] W(\psi, t) d\psi \right\}, \quad (65)$$

где

$$L_t = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}, \quad V(\varphi) = U \sin \varphi(t).$$

Пусть $\varphi(t)$ является гауссовским процессом. Тогда $A_1(\varphi) = A_1 \varphi$, $B_1(\varphi) = B_1$. Перейдем к одномерным моментам $\langle \varphi^i \rangle$, используя разложения

$$V(\varphi) = V \sin \varphi = U \left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right]; \\ V^2(\varphi) = \frac{U}{2} \left[\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right]. \quad (66)$$

Подставляя (66) в (65), умножая на φ^i и интегрируя по φ , находим

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} A \langle \varphi \rangle = L_t \frac{1}{N} \left\{ U \left[\langle \varphi^2 \rangle - \frac{1}{3!} \langle \varphi^4 \rangle \right] \times \right. \\ \left. \times \left[r(t) - \frac{1}{4} U \langle \varphi \rangle \right] - \frac{U^2}{4} \left[\frac{\langle \varphi^3 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^5 \rangle}{4!} + \dots \right] \right\}, \quad (67)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + 2A \langle \varphi^2 \rangle = B + L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ r(t) U \left[\langle \varphi^3 \rangle - \frac{\langle \varphi^5 \rangle}{3!} \right] - \frac{U^2}{4} \frac{\langle \varphi^4 \rangle}{2!} \right\} - L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ \frac{U}{4} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^4 \rangle \langle \varphi^2 \rangle}{4!} \right] \right\}, \quad (68)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3A \langle \varphi^3 \rangle = 3B \langle \varphi \rangle + L_t \frac{U}{N} \times \\ \times \left[r(t) \langle \varphi^4 \rangle - \frac{U}{8} \langle \varphi^5 \rangle \right] - L_t \frac{U^2}{N} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^3 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^4 \rangle \langle \varphi^3 \rangle}{4} \right], \quad (69)$$

Полагая кумулянты $k_4 = k_5 = \dots = 0$ и ограничиваясь уравнениями для $\langle \varphi \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle \varphi^3 \rangle$, наряду с (67) — (69) имеем также

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + A \langle \varphi \rangle = L_t \frac{U}{N} \left\{ \left[r(t) - \frac{U}{4} \langle \varphi \rangle \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\langle \varphi^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle^2 \right] - \frac{U \langle \varphi^3 \rangle}{8} \left[1 - \frac{5}{8} \langle \varphi^2 \rangle \right] \right\}, \quad (70)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + 2A \langle \varphi^2 \rangle = B - L_t \frac{U}{N} \left\{ r(t) \times \right. \\ \left. \times \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{10 \langle \varphi^2 \rangle}{3!} \right] - \frac{7U}{16} \langle \varphi^2 \rangle^2 + \frac{U}{64} \langle \varphi^2 \rangle^3 \right\}, \quad (71)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3A \langle \varphi^3 \rangle = 3B \langle \varphi \rangle + \\ + L_t U \frac{\langle \varphi^3 \rangle}{N} \left\{ r(t) 3 \langle \varphi^2 \rangle - \frac{9}{8} \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{4} \right] \right\}. \quad (72)$$

Уравнения (70)–(72) замкнуты, так как для их решения достаточно наряду с реализацией $r(t)$ знать $\langle \varphi \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle \varphi^3 \rangle$, которые могут быть получены в результате решения уравнений (70)–(72).

Пусть $A_1(\varphi) = a\varphi + b$; $B_1(\varphi) = B_1(1 - \varphi^2)$. Уравнение для апостериорной плотности принимает вид

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(a\varphi + b)W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [B(1 - \varphi^2)W] + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) V(\varphi) - \frac{1}{2} V^2(\varphi) \right] W(\varphi, t) - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(\varphi, t) \int_{-1}^1 \left[r(t) V(\psi) - \frac{1}{2} V^2(\psi) \right] W(\psi, t) d\psi \right\}. \quad (73)$$

Переходя к одномерным моментам, получаем

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + a \langle \varphi \rangle + b = L_t \frac{U}{N} \left\{ \left[r(t) - \frac{U}{4} \langle \varphi \rangle \right] \times \right. \\ \left. \times \langle \varphi^2 \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2} \right] - \frac{U}{8} \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{5}{6} \langle \varphi^2 \rangle \right] \right\}, \quad (74)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + (2a + B) \langle \varphi^2 \rangle + b = B + \\ + L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) U \left[\langle \varphi^3 \rangle - \frac{\langle \varphi^5 \rangle}{3!} \right] - \frac{U^2}{4} \frac{\langle \varphi^4 \rangle}{2!} \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ \frac{U}{4} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle^2}{2!} - \frac{\langle \varphi^4 \rangle \langle \varphi^2 \rangle}{4!} \right] \right\}, \quad (75)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3(a + B) \langle \varphi^3 \rangle = 3B \langle \varphi \rangle - 2b \langle \varphi^2 \rangle + \\ + L_t \frac{U}{N} \left[r(t) \langle \varphi^4 \rangle - \frac{U}{8} \langle \varphi^5 \rangle \right] - L_t \frac{U}{4N} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^3 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^3 \rangle \langle \varphi^4 \rangle}{4!} \right], \quad (76)$$

Обрывая зацепляющуюся цепочку уравнений для $\langle \varphi' \rangle$ на $\langle \varphi^3 \rangle$ и полагая $\langle \varphi^4 \rangle = 3 \langle \varphi^2 \rangle^2$; $\langle \varphi^5 \rangle = 10 \langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^3 \rangle$, имеем

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + a \langle \varphi \rangle + b = L_t \frac{U}{N} \left\{ \left[r(t) - \frac{U}{4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \langle \varphi \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^3 \rangle}{2} \right] - \frac{U \langle \varphi^3 \rangle}{8} \left[1 - \frac{5}{8} \langle \varphi^2 \rangle \right] \right] \right\}, \quad (77)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + (2a + B) \langle \varphi^2 \rangle = B - b + \\ + L_t \frac{U}{N} \left\{ r(t) \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{10 \langle \varphi^2 \rangle}{3!} \right] - \frac{7}{16} U \langle \varphi^2 \rangle^2 + \frac{U \langle \varphi^2 \rangle^3}{16} \right\}, \quad (78)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3(a + B) \langle \varphi^3 \rangle = 3B \langle \varphi \rangle - \\ - 2b \langle \varphi^2 \rangle + L_t \frac{U}{N} \left\{ r(t) 3 \langle \varphi^2 \rangle^2 - \frac{9}{b} \langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{4} \right] \right\}. \quad (79)$$

Решение уравнений (77)–(79) описывают квазиоптимальную фильтрацию стационарного случайного процесса с последствием, построенного на основе гипергеометрического ряда, в белом гауссовском шуме. Пусть $\varphi(t)$ является нестационарным гауссовским процессом и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n \varphi}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \varphi}{dt} + [A + \eta(t)] \varphi(t) = \sqrt{B_1} \xi(t). \quad (80)$$

В этом случае уравнение для апостериорной плотности $W(\varphi, t)$ при наблюдении процесса $r(t) = U \sin \varphi(t) + n(t)$ имеет вид

$$a_n \frac{\partial^n W}{\partial t^n} + \dots + a_1 \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(A \varphi) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left\{ [D_{11} \varphi^2 - 2D_{10} \varphi + \right. \\ \left. + D_{00}] W \right\} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) V \sin \varphi - \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \varphi \right] W - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ W \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) U \sin \psi - \frac{1}{2} U^2 \sin^2 \psi \right] W(\psi, t) d\psi \right\}. \quad (81)$$

Переходя от (81) к одномерным моментам с учетом разложения (66) и ограничиваясь учетом $\langle \varphi^5 \rangle$, находим уравнения для $\langle \varphi \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle$, $\langle \varphi^3 \rangle$:

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + A \langle \varphi \rangle = L_t \frac{1}{N} \left\{ U \left[\langle \varphi^2 \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\langle \varphi^4 \rangle}{3!} \right] \left[z(t) - \frac{U}{4} \langle \varphi \rangle \right] - \frac{1}{4} U^2 \left[\frac{\langle \varphi^3 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^5 \rangle}{4!} \right] \right\}, \quad (82)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle \varphi^2 \rangle = D_{00} - L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ r(t) U \left[\langle \varphi^3 \rangle - \frac{\langle \varphi^5 \rangle}{3!} \right] - \frac{U \langle \varphi^2 \rangle}{4 \cdot 2!} \right\} - L_t \frac{1}{N} \times \\ \times \left\{ \frac{U^2}{4} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^4 \rangle \langle \varphi^2 \rangle}{4!} \right] \right\}, \quad (83)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle \varphi^3 \rangle = 3D_{00} \langle \varphi \rangle + \\ + L_t \frac{U}{N} \left[r(t) \langle \varphi^4 \rangle - \frac{1}{2} \frac{U}{4} \langle \varphi^5 \rangle \right] - L_t \frac{U^2}{4N} \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle \langle \varphi^3 \rangle}{2!} - \frac{\langle \varphi^3 \rangle \langle \varphi^4 \rangle}{4!} \right], \quad (84)$$

Обрывая цепочку закрепляющихся уравнений на $\langle \varphi^3 \rangle$ и учитывая (16), имеем наряду с (82)—(84)

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + A \langle \varphi \rangle = L_t \frac{U}{N} \left\{ \left[r(t) - \frac{U}{4} \langle \varphi \rangle \right] \times \right. \\ \times \langle \varphi^2 \rangle \left(1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2} \right) - \frac{U \langle \varphi^3 \rangle}{8} \left[1 - \frac{5}{6} \langle \varphi^2 \rangle \right] \left. \right\}, \quad (85)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle \varphi^2 \rangle = D_{00} + \\ + L_t \frac{U}{N} \left\{ r(t) \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{10 \langle \varphi^2 \rangle}{3!} \right] + \frac{U}{16} \langle \varphi^2 \rangle^2 \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle - 28}{4} \right] \right\}, \quad (86)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle \varphi^3 \rangle = 3D_{00} \langle \varphi \rangle + \\ + L_t U \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{N} \left\{ r(t) 3 \langle \varphi^2 \rangle - \frac{9}{8} \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{4} \right] \right\}. \quad (87)$$

Решение уравнений (85)—(87) описывают квазиоптимальную фильтрацию функции от гауссовского нестационарного процесса с последствием в стационарном гауссовском белом шуме.

Пусть $V[\varphi(t)] = U \sin \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ является нестационарным негауссовским процессом, причем

$$a_n \frac{d^n \varphi}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \varphi}{dt} + [a_0 + \eta(t)] \varphi(t) = \sqrt{(1 - \varphi^2)} \xi(t). \quad (88)$$

Апостериорная плотность распределения вероятностей $W(\varphi, t)$ удовлетворяет в данном случае уравнению

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(a_0 \varphi) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \{ [D_{11} \varphi^2 - 2D_{10} \varphi \sqrt{1 - \varphi^2} + \\ + D_{00} (1 - \varphi^2)] W(\varphi, t) \} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) U \sin \varphi - \frac{1}{2} U^2 \sin^2 \varphi \right] \times \\ \times W(\varphi, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W(\varphi, t) \int_{-1}^1 \left[r(t) U \sin \psi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} U^2 \sin^2 \psi \right] W(\psi, t) d\psi \right\}. \quad (89)$$

Уравнение (89) является исходным для решения задачи оптимальной фильтрации. Используя разложения $U \sin \varphi$ и $U^2 \sin^2 \varphi$ в ряды и полагая кумулянты $k_4 = k_5 = \dots = 0$, получим уравнения для одномерных моментов $\langle \varphi \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle \varphi^3 \rangle$, которые и являются уравнениями квазиоптимальной фильтрации нестационарного случайного процесса с последствием, построенного на основе гипергеометрического ряда

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi \rangle}{dt} + A \langle \varphi \rangle = L_t \frac{1}{N} U \left\{ \left[r(t) - \frac{U}{4} \langle \varphi \rangle \right] \times \right. \\ \left. \times \langle \varphi^2 \rangle \left[1 - \frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle \right] - \frac{U \langle \varphi^3 \rangle}{8} \left[1 - \frac{5}{6} \langle \varphi^2 \rangle \right] \right\}, \quad (90)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} + (2a_0 - D_{11} + D_{00}) \langle \varphi^3 \rangle = D_{00} + \\ + L_t \frac{U}{N} \left\{ r(t) \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{10 \langle \varphi^2 \rangle}{3!} \right] + \frac{U}{16} \langle \varphi^2 \rangle^2 \left[\frac{\langle \varphi^2 \rangle - 28}{4} \right] \right\}, \quad (91)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \varphi^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \varphi^3 \rangle}{dt} + 3(a_0 - D_{11} + D_{00}) \langle \varphi^3 \rangle = 3D_{00} \langle \varphi \rangle + \\ + L_t U \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{N} \left\{ r(t) 3 \langle \varphi^2 \rangle - \frac{9}{8} \langle \varphi^3 \rangle \left[1 - \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{4} \right] \right\}. \quad (92)$$

Совместное решение уравнений (90)–(92) приводит к квазиоптимальной нелинейной фильтрации. Заметим, что для осуществления режима слежения за изменением фазы $\varphi_1(t)$ необходимо использовать $\langle \varphi \rangle$ в качестве оптимального управления. В простейшем случае можно предположить, что для объекта управления имеет место уравнение

$$\varphi_2(t) = K_0 \int_0^t \langle \varphi(t) \rangle dt. \quad (93)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \hat{\varphi}_1(t), \quad (94)$$

где $\hat{\varphi}_1(t) = \varphi_2(t)$ — оптимальная оценка входного сигнала $\varphi_1(t)$. Таким образом, при решении задачи оптимальной фильтрации и управления уравнение оптимальной фильтрации для $\langle \varphi \rangle$ необходимо дополнить наряду с уравнениями для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle \varphi^3 \rangle$ также уравнением оптимального управления $\hat{\varphi}_1(t) = \varphi_2(t) = L_0 \{ \langle \varphi(t) \rangle \}$ и уравнением замыкания системы (94), где L_0 — оптимальный оператор объекта управления, который должен обладать интегральными свойствами.

5. Фильтрация детерминированного и случайного полезного сигнала на фоне белого гауссовского шума и оптимальное управление объектом в следящих измерителях

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации, когда наблюдаемым является процесс

$$r(t) = [1 + f(t)] \varphi(x) + \sqrt{S(x)} n(t), \quad (95)$$

где $M\{f\} = 0$; $M\{ff_\tau\} = N_f \delta(\tau)$; $M\{n\} = 0$; $M\{nn_\tau\} = N_n \delta(\tau)$; $\varphi(x)$, $S(x)$ — дискриминаторная и флюктуационная характеристики измерителя; $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, причем $x(t) = z(t) + V[y(t)]$, $z(t)$ — произвольный детерминированный полезный сигнал; $V[y(t)]$ — произвольная функция от полезного случайного сигнала; $y(t)$ — полезный случайный сигнал, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^ny}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + A_1(y, t) = \sqrt{B_1(y)} \xi(t). \quad (96)$$

Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = & - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W] + L_t [N_n S(z, y) + \\ & + \varphi^2(z, y) N_f]^{-1} \left\{ \left[r(t) \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 \right] W(y, t) \right\} - L_t [N_n S(z, y) + \\ & + \varphi^2(z, y) N_f]^{-1} \left\{ W(y, t) \int_{-t}^t \left[\varphi r(t) - \frac{1}{2} \varphi^2 \right] W(y, t) dy \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Уравнение (97) является исходным при решении задач оптимальной фильтрации детерминированного и случайного процесса, который может быть произвольной функцией. В дальнейшем упростим задачу и рассмотрим случай, когда процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$a_n \frac{d^nx}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + A_1(x, t) = \sqrt{B_1(x)} \xi(t), \quad (98)$$

а дискриминационная и флюктуационная характеристики определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \beta x e^{-\alpha x^4}, \\ S(x) &= S_0 + S_2 x^2 e^{-\gamma x^4}, \end{aligned} \quad (99)$$

где

$$S_i = \left. \frac{\partial^i S(x)}{\partial x^i} \right|_{x=0}$$

В гауссовском стационарном случае $A(x, t) = Ax$, $B_1(x) = B_1$. Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей следует из (97):

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(Ax) W] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + L_t [N_n S(x) + \Phi^2(x) N_l]^{-1} \times \\ \times \left[r(t) \Phi(x) - \frac{1}{2} \Phi^2(x) \right] W(x, t) - L_t [N_n S(x) + \Phi^2(x) N_l]^{-1} \times \\ \times \left\{ W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) \Phi(x) - \frac{1}{2} \Phi^2(x) \right] W(x, t) dx \right\}. \quad (100)$$

Для получения замкнутой системы уравнений относительно одномерных моментов $\langle x^i \rangle$ используем разложение $\Phi(x)$, $\Phi^2(x)$ и $S(x)$ в ряды, и учтем, что в квазинормальном приближении $\langle x^4 \rangle = 3\langle x^2 \rangle^2$, а $\langle x^5 \rangle = 10\langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle$. Тогда получим уравнения для $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + A \langle x \rangle = L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \left\{ \left[r(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - r(t) 3 \langle x^2 \rangle^2 N_1 - \frac{\beta}{2} \langle x \rangle \right] \langle x^2 \rangle - \frac{\beta}{2} \langle x^3 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} N_1 \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle [11 - 10 N_1 \langle x^2 \rangle] \right\}, \quad (101)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2A \langle x^2 \rangle = B + L_t \beta (S_0 N_n)^{-1} \times \\ \times \left\{ r(t) \langle x^3 \rangle [1 - 10 N_1 \langle x^2 \rangle] - 2\beta \langle x^2 \rangle^2 + \frac{3}{2} \beta N_1 \langle x^2 \rangle^3 \right\}, \quad (102)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3A \langle x^3 \rangle = 3B \langle x \rangle + L_t \beta (S_0 N_n)^{-1} \times \\ \times \left\{ r(t) 3 \langle x^2 \rangle^2 - \frac{11}{2} \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle + 10\beta (2N_n S_0)^{-1} \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}, \quad (103)$$

где

$$N_1 = (N_n S_0)^{-1} (N_n S_2 + N_l \beta^2).$$

Совместное решение уравнений (101), (102) и (103) приводит к квазиоптимальной фильтрации гауссовского случайного процесса. В случае нестационарного гауссовского процесса $x(t)$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + [A + \eta(t)] x(t) = \sqrt{B_1} \xi(t), \quad (104)$$

уравнение для апостериорной плотности при наблюдении процесса имеет вид

$$\begin{aligned}
 L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [(Ax) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}x^2 - 2D_{10}x + D_{00}] W \} + \\
 &+ L_t [N_n S(x) + \varphi^2(x) N_l]^{-1} \left[r(t) \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi^2(x) \right] W(x, t) - \\
 &- L_t [N_n S(x) + \varphi^2(x) N_l]^{-1} \times \\
 &\times \left\{ W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) \varphi(z) - \frac{1}{2} \varphi^2(z) \right] W(z, t) dz \right\}. \quad (105)
 \end{aligned}$$

Из (105) получаем замкнутую в первом приближении систему уравнений для $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$:

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + A \langle x \rangle &= L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \left[r(t) - r(t) 3N_1 \langle x^2 \rangle - \frac{\beta}{2} \langle x \rangle \right] \langle x^2 \rangle - \frac{\beta}{2} \langle x^3 \rangle + \right. \\
 &\left. + \frac{11}{2} N_1 \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle - \frac{10}{2} N_1^2 \beta \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}, \quad (106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2A - D_{11}) \langle x^2 \rangle &= D_{00} + L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \times \\
 &\times \left\{ r(t) \langle x^3 \rangle [1 - 10N_1 \langle x^2 \rangle] - 2\beta \langle x^2 \rangle^2 + \frac{3}{2} \beta N_1 \langle x^2 \rangle^3 \right\}, \quad (107)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(A - D_{11}) \langle x^3 \rangle &= 3D_{00} \langle x \rangle + \\
 &+ L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \left\{ r(t) 3 \langle x^2 \rangle - \frac{11}{2} \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle + \right. \\
 &\left. + 5\beta (N_n S_0)^{-1} \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}. \quad (108)
 \end{aligned}$$

Решение уравнений (106)–(108) описывает квазиоптимальную фильтрацию нестационарного гауссовского процесса в белом гауссовском шуме.

Рассмотрим фильтрацию стационарного негауссовского процесса в белом шуме, считая, что процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + ax + b = \sqrt{1-x^2} \xi(t). \quad (109)$$

Для апостериорной плотности распределения вероятностей можно получить уравнение

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(ax + b) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(1 - x^2) W] + L_t [N_n S(x) + \\ + \varphi^2(x) N_f]^{-1} \left[r(t) \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi^2(x) \right] W(x, t) - L_t [N_n S(x) + \\ + \varphi^2(x) N_f]^{-1} \left\{ W(x, t) \int_{-1}^1 \left[r(t) \varphi(z) - \frac{1}{2} \varphi^2(z) \right] W(z, t) dz \right\}. \quad (110)$$

Перейдем к уравнениям для одномерных моментов $\langle x^i \rangle$. Воспользовавшись разложением $\varphi(x)$, $\varphi^2(x)$, $S(x)$, явный вид которых задан соотношением (99) и в приближении $\langle x^4 \rangle = 3\langle x^2 \rangle^2$ и $\langle x^5 \rangle = 10\langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle$; $\langle x^6 \rangle = \dots = 0$, находим уравнение для $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + a \langle x \rangle + b = L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[r(t) - 3r(t) N_1 \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \beta \langle x \rangle \right] \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \beta \langle x^3 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{11}{2} N_1 \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle - 5\beta N_1^2 \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}, \quad (111)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2a + B) \langle x^2 \rangle = B - b + \\ + L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \left\{ r(t) \langle x^3 \rangle \left[1 - 10N_1 \langle x^2 \rangle - 2\beta \langle x^2 \rangle^2 + \frac{3}{2} \beta N_1 \langle x^2 \rangle^3 \right] \right\}, \quad (112)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(a + B) \langle x^3 \rangle = 3B \langle x \rangle - \\ - 2b \langle x^2 \rangle + L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \left\{ r(t) 3 \langle x^2 \rangle^2 - \frac{11}{2} \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle + \right. \\ \left. + 5\beta (N_n S_0)^{-1} \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}. \quad (113)$$

Уравнения (111)–(113) приводят к квазиоптимальной нелинейной фильтрации в белом шуме стационарного случайного процесса, построенного на основе гипергеометрического ряда. В нестационарном случае, когда, например, процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению, имеем

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + [a + \eta(t)] x(t) + b = \sqrt{1 - x^2} \xi(t). \quad (114)$$

Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей принимает вид

$$L_t \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(ax + b) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}x^2 - 2D_{10}x \sqrt{1-x^2} + D_{00}(1-x^2)W] + L_t [N_n S(x) + \varphi^2(x) N_f]^{-1} [r(t) \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi^2(x)] W(x, t) - L_t [N_n S(x) + \varphi^2(x) N_f]^{-1} \times \\ \times \left\{ W(x, t) \int_{-1}^1 [r(t) \varphi(z) - \frac{1}{2} \varphi^2(z)] W(z, t) dz \right\}. \quad (115)$$

Переходя от (115) к уравнениям для одномерных моментов при указанных выше предположениях находим уравнения относительно $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$:

$$a_n \frac{d^n \langle x \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + a \langle x \rangle + b = L_t \beta (N_n S_0)^{-1} \times \\ \times \left\{ [r(t) - r(t) 3N_1 \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \beta \langle x \rangle] \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \beta \langle x^3 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{11}{2} \beta N_1 \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle - 5 \beta N_1^2 \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}, \quad (116)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle x^2 \rangle = D_{00} - b + L_t \beta \times \\ \times (N_n S_0)^{-1} \left\{ r(t) \langle x^3 \rangle [1 - 10N_1 \langle x^2 \rangle] - 2\beta \langle x^2 \rangle^2 + \frac{3}{2} \beta N_1 \langle x^2 \rangle^3 \right\}, \quad (117)$$

$$a_n \frac{d^n \langle x^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle x^3 \rangle = 3D_{00} \langle x \rangle - \\ - 2b \langle x^2 \rangle + L_t \beta [N_n S_0]^{-1} \left\{ r(t) 3 \langle x^2 \rangle^2 - \frac{11}{2} \beta \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle + \right. \\ \left. + 5 \beta [N_n S_0]^{-1} \langle x^2 \rangle^2 \langle x^3 \rangle \right\}. \quad (118)$$

Совместное решение уравнений (116)–(118) приводит к квазиоптимальной нелинейной фильтрации в белом шуме нестационарного случайного процесса, построенного на основе гипергеометрического ряда. Для замыкания следящего измерителя необходимо использовать $\langle x \rangle$ в качестве входного сигнала системы оптимального «управления» объектом. Если предположить, что для объекта имеет место уравнение вида

$$x_2(t) = K_v \int_0^t \langle x \rangle dt,$$

то

$$x(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t),$$

где $\hat{x}_1(t) = x_2(t)$ является оптимальной оценкой $x_1(t)$.

6. Обнаружение детерминированных сигналов на фоне негауссовских помех

Вопросы оптимального приема сигналов на фоне негауссовских шумов представляют существенный интерес, так как на практике приходится сталкиваться с задачами обнаружения и фильтрации сигналов в присутствии случайных помех, плотности распределения вероятностей которых существенно отличаются от гауссовских. Один из методов решения таких задач может основываться на теории условных марковских процессов и процессов с последствием марковского типа.

Рассмотрим вопрос оптимального обнаружения сигнала, который является произвольной детерминированной функцией времени. Помеха $V[y(t)]$ представляет собой произвольную функцию от одномерного процесса с последствием. На полезный сигнал наложен также белый шум $n(t)$. Решая задачу обнаружения (т. е. осуществляя проверку гипотез $\theta = 1$ и $\theta = 0$), запишем наблюдаемый процесс следующим образом:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) + V[y(t)] + n(t) & \text{при } \theta = 1, \\ V[y(t)] + n(t) & \text{при } \theta = 0. \end{cases} \quad (119)$$

Процесс $y(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + A(y, t) = \sqrt{B_1(y)} \xi(t). \quad (120)$$

Для осуществления оптимального приема необходимо располагать апостериорными плотностями распределения вероятностей

$$W_1 = W(y, t/r(t), \theta = 1); \quad W_0 = W(y, t/r(t), \theta = 0). \quad (121)$$

Уравнения для апостериорных плотностей W_1 и W_0 имеют вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} \right) = & - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W_1] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W_1] + L_t \frac{1}{N} [x + V(y)] \times \\ & \times \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W_1(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_1(y, t) \int_{-\infty}^t [x + V(y)] \times \right. \\ & \times \left. \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W_1(y, t) dy \right\}, \end{aligned} \quad (122)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_0}{\partial t} \right) = & - \frac{\partial}{\partial y} [A(y) W_0] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y) W_0] + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) V(y) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} V^2(y) \right] W_0(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_0(y, t) \int_{-\infty}^t \left[r(t) V(y) - \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{1}{2} V^2(y) \right] W_0(y, t) dy \right\}. \end{aligned} \quad (123)$$

Оптимальный приемник обнаружения должен формировать отношения правдоподобия Λ или его логарифм $z = \ln \Lambda$ и осуществлять сравнение полученной величины с порогами. Как и в [7] уравнение для логарифма правдоподобия можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = L_1 - L_0, \quad (124)$$

где

$$L_1 = L_t \frac{1}{N} \int_{-l}^l \left\{ [x + V(y)] r(t) - \frac{1}{2} [x + V(y)]^2 \right\} W_1(y, t) dy, \quad (125)$$

$$L_0 = L_t \frac{1}{N} \int_{-l}^l \left[V(y) r(t) - \frac{1}{2} V^2(y) \right] W_0(y, t) dy, \quad (126)$$

$$L_t = \sum_{i=1}^n a_i \frac{dt^{i-1}}{dt^{i-1}}.$$

Определение $W_1(y, t)$ и $W_0(y, t)$ из (122), (123) наталкивается на значительные трудности. Поэтому целесообразно перейти к уравнениям для квазиоптимального приема, воспользовавшись для этой цели одномерными моментами

$$\left. \begin{aligned} \langle y_1^i \rangle &= \int_{-l}^l y^i W_1(y, t) dy, \\ \langle y_0^i \rangle &= \int_{-l}^l y^i W_0(y, t) dy. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $A(y, t) = Ay$; $B(y) = B$. В этом случае уравнения для апостериорных плотностей W_1 и W_0 имеют вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} [(Ay) W_1] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + L_t \frac{1}{N} [x + V(y)] \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + \right. \\ &\quad \left. + V(y)) \right] W_1(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_1(y, t) \int_{-\infty}^{\infty} [x + V(y)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[r(t) - \frac{1}{2} (x + V(y)) \right] W_1(y, t) dy \right\}, \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_0}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} [(Ay) W_0] + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) V(y) - \frac{1}{2} V^2(y) \right] \times \\ &\quad \times W_0(y, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_0(y, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) V(y) - \frac{1}{2} V^2(y) \right] W_0(y, t) dy \right\}. \end{aligned} \quad (129)$$

Из (128) и (129) легко получить уравнения для одномерных моментов:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_1 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_1 \rangle}{dt} + A \langle y_1 \rangle = L_t \frac{1}{N} [r(t) x \langle y_1 \rangle + \\ + r(t) \langle y_1 V(y_1) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1 \rangle + 2x \langle y_1 V(y_1) \rangle + \langle y_1 V^2(y_1) \rangle] - \\ - L_t \frac{1}{N} \{ [r(t) x \langle y_1 \rangle + r(t) \langle y_1 \rangle \langle V(y_1) \rangle] - \\ - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1 \rangle + 2x \langle y_1 \rangle \langle V(y_1) \rangle + \langle y_1 \rangle \langle V^2(y_1) \rangle] \}, \quad (130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_0 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_0 \rangle}{dt} + A \langle y_0 \rangle = L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle y_0 V(y_0) \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle y_0 V^2(y_0) \rangle \right] - L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle y_0 \rangle \langle V(y_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle y_0 \rangle \langle V^2(y_0) \rangle \right], \quad (131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_1^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_1^2 \rangle}{dt} + 2A \langle y_1^2 \rangle = B + L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) x \langle y_1^2 \rangle + \right. \\ \left. + r(t) \langle y_1^2 V(y_1) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1^2 \rangle + 2x \langle y_1^2 V(y_1) \rangle + \langle y_1^2 V^2(y_1) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) x \langle y_1^2 \rangle + r(t) \langle y_1^2 \rangle \langle V(y_1) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1^2 \rangle + \right. \\ \left. + 2x \langle y_1^2 \rangle \langle V(y_1) \rangle + \langle y_1^2 \rangle \langle V^2(y_1) \rangle] \right\}, \quad (132) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_0^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_0^2 \rangle}{dt} + 2A \langle y_0^2 \rangle = B + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle y_0^2 V(y_0) \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle y_0^2 V^2(y_0) \rangle \right] - L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle y_0^2 \rangle \langle V(y_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle y_0^2 \rangle \langle V^2(y_0) \rangle \right], \quad (133) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_1^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_1^3 \rangle}{dt} + 3A \langle y_1^3 \rangle = 3B \langle y_1 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) x \langle y_1^3 \rangle + \right. \\ \left. + r(t) \langle y_1^3 V(y_1) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1^3 \rangle + 2x \langle y_1^3 V(y_1) \rangle + \langle y_1^3 V^2(y_1) \rangle] \right\} - \\ - L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) x \langle y_1^3 \rangle + r(t) \langle y_1^3 \rangle \langle V(y_1) \rangle] - \frac{1}{2} [x^2 \langle y_1^3 \rangle + \right. \\ \left. + 2x \langle y_1^3 \rangle \langle V(y_1) \rangle + \langle y_1^3 \rangle \langle V^2(y_1) \rangle] \right\}, \quad (134) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle y_0^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle y_0^3 \rangle}{dt} + 3A \langle y_0^3 \rangle = B \langle y_0 \rangle + \\ + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle y_0^3 V(y_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle y_0^3 V^2(y_0) \rangle \right] - L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \times \right. \\ \left. \times \langle y_0^3 \rangle \langle V(y_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle y_0^3 \rangle \langle V^2(y_0) \rangle \right], \quad (135) \end{aligned}$$

... ..

На основании уравнений (124)—(126) и (130)—(135) может быть построена схема квазиоптимального нелинейного приема. Для этого необходимо разложить $V(y)$ и $V^2(y)$ в ряды и ограничиться первыми тремя моментными функциями и приближенными соотношениями для $\langle y^4 \rangle$ и $\langle y^5 \rangle$, полагая кумулянты $k_4 = k_5 = \dots = 0$. Используя (124)—(126), находим $z = \ln \Lambda$ и осуществляем сравнение с порогами.

Пример. Рассмотрим вопрос обнаружения гармонического сигнала. Пусть

$$x(t) = E_1 \sin(\omega t + \varphi). \quad (136)$$

Помеха $\psi(t)$ представляет собой квазигармонический фазомодулированный процесс, т. е.

$$V(\psi_t) = E_2 \sin(\omega t + \psi_t). \quad (137)$$

Флуктуации фазы удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$a_n \frac{d^n \psi}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d\psi}{dt} + [a + \eta(t)]\psi(t) + b = \sqrt{1 - \psi^2} \xi(t). \quad (138)$$

Уравнение для апостериорных плотностей распределения вероятностей W_1 и W_0 , соответствующих гипотезам $\theta = 1$ и $\theta = 0$, имеют в данном случае вид

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} \right) = & \frac{\partial}{\partial \psi} [(a\psi + b) W_1] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \{ [D_{11}\psi^2 - 2D_{10}\psi \sqrt{1 - \psi^2} + \\ & + D_{00}(1 - \psi^2)] W_1(\psi, t) + L_t \frac{1}{N} \{ [E_1 \sin(\omega t + \varphi) + E_2 \sin(\omega t + \psi_t)] \times \\ & \times \left[r(t) - \frac{1}{2} [E_1 \sin(\omega t + \varphi) + E_2 \sin(\omega t + \psi_t)] \right] W_1(\psi, t) - \\ & - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_1(\psi, t) \int_{-1}^1 [E_1 \sin(\omega t + \varphi) + E_2 \sin(\omega t + \psi_t)] \times \right. \\ & \times \left. \left[r(t) - \frac{1}{2} [E_1 \sin(\omega t + \varphi) + E_2 \sin(\omega t + \psi_t)] \right] W_1(\psi, t) d\psi \right\}, \quad (139) \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} L_t \left(\frac{\partial W_0}{\partial t} \right) = & \frac{\partial}{\partial \psi} [(a\psi + b) W_0] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \{ [D_{11}\psi^2 - 2D_{10}\psi \sqrt{1 - \psi^2} + \\ & + D_{00}(1 - \psi^2)] W_0(\psi, t) \} + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) E_2 \sin(\omega t + \psi_t) - \right. \\ & - \frac{1}{2} E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_t) \left. \right] W_0(\psi, t) - L_t \frac{1}{N} \left\{ W_0(\psi, t) \int_{-1}^1 r(t) E_2 \sin(\omega t - \right. \\ & \left. - \psi_t) - \frac{1}{2} E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_t) \right\} W_0(\psi, t) d\psi \}. \quad (140) \end{aligned}$$

Решение (139) и (140) в общем виде затруднительно. Поэтому целесообразно перейти к одномерным моментам. Используем разложения

$$E_2 \sin(\omega t + \psi_i) = E_2 \left[\sin \omega t + \psi_i \cos \omega t - \frac{\psi_i^2}{2!} \sin \omega t - \frac{\psi_i^3}{3!} \cos \omega t + \frac{\psi_i^4}{4!} \sin \omega t - \dots \right], \quad (141)$$

$$E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{E_2^2}{2} \left\{ 1 - \left[\cos 2\omega t - 2\psi_i \sin 2\omega t - \frac{\psi_i^2}{2!} \cos 2\omega t + \frac{2\psi_i^3}{3!} \sin 2\omega t + \frac{2\psi_i^4}{4!} \cos 2\omega t - \dots \right] \right\}. \quad (142)$$

Умножая (139) и (140) на ψ_i , $i = 1, 2, 3$ и интегрируя по ψ в пределах ± 1 , находим:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle \psi_1 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1 \rangle}{dt} + a \langle \psi_1 \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) \times \right. \\ \times E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + r(t) \langle \psi_1 E_2 \sin(\omega t + \psi_i) \rangle - \frac{1}{2} [r(t) \times \\ \times E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 E_2 \sin(\omega t + \psi_i) \rangle + \\ + \langle \psi_1 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) \rangle] \left. \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + r(t) \langle \psi_1 \rangle \times \right. \\ \times \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_i) \rangle - \frac{1}{2} [E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \times \\ \times \langle \psi_1 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_i) \rangle + \langle \psi_1 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) \rangle] \left. \right\}; \quad (143) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle \psi_0 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0 \rangle}{dt} + a \langle \psi_0 \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0 E_2 \sin(\omega t + \right. \\ + \psi_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_0 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle \left. \right] - L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_0) \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle \psi_0 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle \right]; \quad (144) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \langle \psi_1^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_1^2 \rangle = D_{00} - b + \\ + L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + r(t) \langle \psi_1^2 E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle - \right. \\ - \frac{1}{2} [E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle + \\ + \langle \psi_1^2 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) \rangle] \left. \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + \right. \\ + r(t) \langle \psi_1^2 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle - \frac{1}{2} [E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + \\ + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle + \langle \psi_1^2 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) \rangle] \left. \right\}; \quad (145) \end{aligned}$$

$$a_n \frac{d^n \langle \psi_0^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_0^2 \rangle = D_{00} - b +$$

$$+ L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0^2 E_2 \sin(\omega t + \psi_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_0^2 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle \right] -$$

$$- L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0^2 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_0^2 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle \right]. \quad (146)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \psi_1^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_1^3 \rangle =$$

$$= 3D_{00} \langle \psi_1 - 2b \langle \psi_1^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + \right.$$

$$+ r(t) \langle \psi_1^3 E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle - \frac{1}{2} [E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle +$$

$$+ 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle + \langle \psi_1^3 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) \rangle] \Big\} -$$

$$- L_t \frac{1}{N} \left\{ [r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + r(t) \langle \psi_1^3 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle] - \right.$$

$$- \frac{1}{2} [E_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_1) \rangle +$$

$$+ \langle \psi_1^3 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) \rangle] \Big\}; \quad (147)$$

$$a_n \frac{d^n \langle \psi_0^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_0^3 \rangle =$$

$$= 3D_{00} \langle \psi_0 \rangle - 2b \langle \psi_0^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0^3 E_2 \sin(\omega t + \psi_0) \rangle - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \langle \psi_0^3 E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle] - L_t \frac{1}{N} \left[r(t) \langle \psi_0^3 \rangle \times \right.$$

$$\times \langle E_2 \sin(\omega t + \psi_0) \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_0^3 \rangle \langle E_2^2 \sin^2(\omega t + \psi_0) \rangle] \Big]; \quad (148)$$

Для замыкания уравнений одномерных моментов используем разложения (141), (142) и приближенные выражения для $\langle \psi^4 \rangle$, $\langle \psi^5 \rangle$. Пренебрегая осциллирующими членами с двойной частотой наряду с уравнениями (143) — (148) имеем:

$$a_n \frac{d^n \langle \psi_1 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1 \rangle}{dt} + a \langle \psi_1 \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \times \right.$$

$$\times \langle \psi_1 \rangle + r(t) \left[\left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \frac{10 \langle \psi_1^3 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1^2 \rangle - \right.$$

$$- \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{3!} \right) E_2 \cos \omega t \Big] - \frac{1}{2} \left[r(t) E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \right.$$

$$+ \varphi) \left[\left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{3!} + \frac{10 \langle \psi_1^3 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1^2 \rangle - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{3!} E_2 \cos \omega t \Big] E_2 \cos \omega t \Big] + \frac{E_2^2}{2} \langle \psi_1 \rangle \Big] - L_t \frac{1}{N} \Big\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \\
& + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + r(t) \langle \psi_1 \rangle \Big[\left(1 - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} + \right. \\
& + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \Big) E_2 \cos \omega t \Big] - \frac{1}{2} \Big[E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1 \rangle + 2 E_1 \sin(\omega t + \\
& + \varphi) \langle \psi_1 \rangle \Big[\left(1 - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{2!} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \right) E_2 \cos \omega t \right] + \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_1^2 \rangle \Big\}; \quad (149)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle \psi_0 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0 \rangle}{dt} + a \langle \psi_0 \rangle + b = L_t \frac{1}{N} \Big\{ r(t) \Big[\left(\langle \psi_0 \rangle - \right. \\
& - \frac{\langle \psi_0^3 \rangle}{2!} + \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{4!} \Big) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_0^2 \rangle + \frac{3 \langle \psi_0^2 \rangle^2}{3!} \right) E_2 \cos \omega t \Big] - \\
& - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0 \rangle \Big] - L_t \frac{1}{N} \Big\{ r(t) \langle \psi_0 \rangle \Big[\left(1 - \frac{\langle \psi_0^2 \rangle}{2!} + \frac{3 \langle \psi_0^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \\
& + \left(\langle \psi_0 \rangle - \frac{\langle \psi_0^3 \rangle}{3!} + \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{5!} \right) E_2 \cos \omega t \Big] - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0 \rangle \Big\}; \quad (150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle \psi_1^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_1^2 \rangle = D_{00} - b + \\
& + L_t \frac{1}{N} \Big\{ \Big\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + r(t) \Big[\left(\langle \psi_1^2 \rangle - \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{2!} \right) E_2 \sin \omega t + \\
& + \left(\langle \psi_1^3 \rangle - \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{3!} \right) E_2 \cos \omega t \Big] \Big\} - \frac{1}{2} \Big\{ E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + \\
& + 2 E_1 \sin(\omega t + \varphi) \Big[\left(\langle \psi_1^2 \rangle - \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{2!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1^3 \rangle - \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{3!} \right) \times \\
& \times E_2 \cos \omega t \Big] + \frac{E_2^2}{2} \langle \psi_1^3 \rangle \Big\} \Big\} - L_t \frac{1}{N} \Big\{ \Big\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle + \\
& + r(t) \langle \psi_1^2 \rangle \Big[\left(1 - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} + \right. \\
& + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \Big) E_2 \cos \omega t \Big] - \frac{1}{2} \Big[E_1^2 \sin^2 \omega t + \psi) \langle \psi_1^2 \rangle + 2 E_1 \sin(\omega t + \\
& + \varphi) \langle \psi_1^2 \rangle \Big[\left(1 - \frac{\psi_1^2}{2!} + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left[\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \right) E_2 \cos \omega t \right] + \frac{E_2^2}{2} \langle \psi_1^2 \rangle \Big] \Big\} \Big\}; \quad (151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle \psi_0^2 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0^2 \rangle}{dt} + (2a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_0^2 \rangle = D_{00} - b + \\
& + L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) \left[\left(\langle \psi_0^2 \rangle - \frac{3 \langle \psi_0^2 \rangle^2}{2!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_0^3 \rangle - \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{3!} \right) \times \right. \right. \\
& \times E_2 \cos \omega t \left. \right] - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0^2 \rangle \left. \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) \langle \psi_0^2 \rangle \left[\left(1 - \frac{\langle \psi_0^2 \rangle}{2!} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{3 \langle \psi_0^2 \rangle^2}{4!} \left. \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_0 \rangle - \frac{\langle \psi_0^3 \rangle}{3!} + \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{5!} \right) \times \\
& \times E_2 \cos \omega t \left. \right] - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0^2 \rangle \left. \right\}; \quad (152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle \psi_1^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_1^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_1^3 \rangle = \\
& = 3D_{00} \langle \psi_1 \rangle - 2b \langle \psi_1^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ \left\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + \right. \right. \\
& + r(t) \left[\left(\langle \psi_1^3 \rangle - \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{2!} \right) E_2 \sin \omega t + (3 \langle \psi_1^2 \rangle^2 E_2 \cos \omega t) \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \left[\left(\langle \psi_1^3 \rangle - \right. \right. \right. \\
& - \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{2!} \left. \right) E_2 \sin \omega t + (3 \langle \psi_1^2 \rangle E_2 \cos \omega t) \left. \right] - \frac{E_2^2}{2} \langle \psi_1^3 \rangle \left. \right\} - \\
& - L_t \frac{1}{N} \left\{ \left\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + r(t) \langle \psi_1^3 \rangle \left[\left(1 - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \right. \right. \right. \right. \\
& + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \left. \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \right) \cdot E_2 \cos \omega t \left. \right] - \\
& - \frac{1}{2} \left[E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \langle \psi_1^3 \rangle + 2E_1 \sin(\omega t + \varphi) \times \right. \\
& \times \langle \psi_1^3 \rangle \left[\left(1 - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} + \frac{3 \langle \psi_1^2 \rangle^2}{4!} \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_1 \rangle - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} + \right. \right. \\
& + \frac{10 \langle \psi_1^2 \rangle \langle \psi_1^3 \rangle}{5!} \left. \right) E_2 \cos \omega t \left. \right] + \frac{E_2^2}{2} \langle \psi_1^3 \rangle \left. \right] \left. \right\}; \quad (153)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n \langle \psi_0^3 \rangle}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \langle \psi_0^3 \rangle}{dt} + 3(a - D_{11} + D_{00}) \langle \psi_0^3 \rangle = 3D_{00} \langle \psi_0 \rangle - \\
& - 2b \langle \psi_0^2 \rangle + L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) \left[\left(\langle \psi_0^3 \rangle - \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{2!} \right) E_2 \sin \omega t + \right. \right. \\
& + (3 \langle \psi_0^2 \rangle^2 E_2 \cos \omega t) \left. \right] - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0^3 \rangle \left. \right\} - L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) \langle \psi_0^3 \rangle \left[\left(1 - \frac{\langle \psi_0^2 \rangle}{2!} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{3 \langle \psi_0^2 \rangle^2}{4!} \left. \right) E_2 \sin \omega t + \left(\langle \psi_0 \rangle - \frac{\langle \psi_0^3 \rangle}{3!} + \right. \\
& + \frac{10 \langle \psi_0^2 \rangle \langle \psi_0^3 \rangle}{5!} \left. \right) E_2 \cos \omega t \left. \right] - \frac{E_2^2}{4} \langle \psi_0^3 \rangle \left. \right\}. \quad (154)
\end{aligned}$$

Используем уравнение для логарифма правдоподобия $\frac{dz}{dt} = L_1 - L_0$.
В рассматриваемом случае

$$L_1 = L_t \frac{1}{N} \int_{-1}^1 \left\{ [x(t) + V(\psi)] r(t) - \frac{1}{2} [x(t) + V(\psi)]^2 \right\} W_1(\psi, t) d\psi; \quad (155)$$

$$L_0 = L_t \frac{1}{N} \int_{-1}^1 \left[V(\psi) r(t) - \frac{1}{2} V^2(\psi) \right] W_0(\psi, t) d\psi. \quad (156)$$

Учитывая (136), (137) и (141), (142), наряду с (155), (156) имеем:

$$\begin{aligned} L_1 = L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) E_1 \sin(\omega t + \varphi) + E_2 r(t) \left[\sin \omega t + \cos \omega t \langle \psi_1 \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} \sin \omega t - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} \cos \omega t \dots \right] - \frac{1}{2} \left[E_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 E_1 \sin(\omega t + \varphi) E_2 \left(\sin \omega t + \langle \psi_1 \rangle \cos \omega t - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} \sin \omega t - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} \cos \omega t \right) + \frac{E_2^2}{2} \right] \right\}; \quad (157) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_0 = L_t \frac{1}{N} \left\{ r(t) E_2 \left[\sin \omega t + \langle \psi_0 \rangle \cos \omega t - \frac{\langle \psi_0^2 \rangle}{2!} \sin \omega t - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\langle \psi_0^3 \rangle}{3!} \cos \omega t \right] - \frac{E_2^2}{4} \right\}. \quad (158) \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение для логарифма правдоподобия принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = L_1 - L_0 = L_t \frac{1}{N} \left\{ \left[x r(t) - \frac{x^2}{2} \right] + E_2 r(t) \left[(\langle \psi_1 \rangle - \langle \psi_0 \rangle) \cos \omega t - \right. \right. \\ \left. \left. - (\langle \psi_1^2 \rangle - \langle \psi_0^2 \rangle) \frac{1}{2!} \sin \omega t - (\langle \psi_1^3 \rangle - \langle \psi_0^3 \rangle) \frac{1}{3!} \cos \omega t \right] + \right. \\ \left. + x E_2 \left[\sin \omega t + \langle \psi_1 \rangle \cos \omega t - \frac{\langle \psi_1^2 \rangle}{2!} \sin \omega t - \frac{\langle \psi_1^3 \rangle}{3!} \cos \omega t \right] \right\}. \quad (159) \end{aligned}$$

Уравнения (149) — (154) для моментных функций $\langle \psi_1 \rangle$, $\langle \psi_1^2 \rangle$, $\langle \psi_1^3 \rangle$ и $\langle \psi_0 \rangle$, $\langle \psi_0^2 \rangle$, $\langle \psi_0^3 \rangle$ и уравнение (159) позволяют решить задачу синтеза квазиоптимального приемника, который обнаруживает сигнал $x(t) = E_1 \sin(\omega t + \varphi)$ на фоне функции от негауссовской помехи $y(t)$ и белого гауссовского шума $n(t)$. Полученное в результате совместного решения уравнений (149) — (154) и (159) значение логарифма функции правдоподобия необходимо сравнить с порогами, используя однопороговую или двухпороговую схемы принятия решения. На этом завершается решение задачи синтеза квазиопти-

мального приемника обнаружения. Вопросы анализа квазиоптимальных приемников обнаружения, т. е. определение вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения, могут быть исследованы на основе [8].

Рассмотренные в данной работе задачи соответствуют квазинормальному приближению, когда учитывались лишь кумулянты третьего порядка. Используя соотношения, полученные в настоящей работе, нетрудно синтезировать устройства квазиоптимальной фильтрации, управления и различения гипотез для различных конкретных прикладных задач с учетом бескумулянтных приближений более высоких порядков [6]. При этом следует отметить, что реализацию алгоритмов квазиоптимальной фильтрации, управления и различения гипотез целесообразно осуществлять на основе применения цифровых вычислительных устройств, особенно в случае учета моментов более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, М., 1966.
 2. Э. М. Хазен. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. Изд-во «Сов. радио», М., 1968.
 3. Р. Л. Стратонович. Условные процессы Маркова. Теория вероятностей и ее применения. Т. V, вып. 2, 1960.
 4. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Основные соотношения. 1. (См. статью в настоящем сборнике).
 5. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием. Вестник ХГУ, серия механико-математическая, т. 34, 1969.
 6. Р. Х. Крейчнан. Проблема замыкания в теории турбулентности. Гидродинамическая неустойчивость. Пер. с англ. А. С. Мониной. Изд-во «Мир», М., 1964.
 7. Р. Л. Стратонович, Ю. Г. Сосулин. Оптимальный прием сигналов на фоне негауссовых помех. «Радиотехника и электроника», № 4, 1966.
 8. Р. Л. Стратонович, Ю. Г. Сосулин. Оптимальное обнаружение диффузионного процесса в белом шуме. «Радиотехника и электроника», т. 10, № 5, 1965.
-

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Г. Боев

Работа посвящена вопросу об использовании некоторых групповых преобразований, допускаемых уравнениями пограничного слоя, для построения решения одних задач теории пограничного слоя по известным решениям других.

1. Рассмотрим систему уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя S_3 [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_a}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_a}{\partial x_k} &= - \frac{\partial p}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_a}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) &= 0, \quad p = \rho B T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu c_p}{\rho} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\alpha = 1, 3 \quad k = 1, 2, 3).$$

Здесь v_i — компоненты вектора скорости, T — температура, s — энтропия, p — давление, ρ — плотность. Функции v_i , T должны удовлетворять некоторым начальным условиям при $t = 0$ и крайним условиям при $y = 0$ и $y \rightarrow \infty$, например, $v_1 \rightarrow V_1(x, z, t)$, $v_3 \rightarrow V_3(x, z, t)$, $T \rightarrow T_\infty(x, z, t)$ при $y \rightarrow \infty$;

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad T = T_0(x, z, t) \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Запишем теперь уравнения (1.1) в криволинейных координатах

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \omega^{-1} dy, \quad \xi = z, \quad \tau = t, \quad (1.3)$$

где $\omega(x, y, z, t) \neq 0$ — некоторая произвольная функция, имеющая в пограничной области ($y = \varepsilon y^*$) порядок малости 0 (1), т. е.

$$\omega(x, \varepsilon y^*, z, t) \sim 0(1) \quad \left(\varepsilon = R^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (1.4)$$

Уравнения пограничного слоя в этих координатах имеют вид [2]

$$\rho \frac{\partial \bar{v}^a}{\partial \tau} + \rho \bar{v}^k \frac{\partial \bar{v}^a}{\partial \xi^k} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi^a} + \frac{1}{\bar{w}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{\bar{w}} \frac{\partial \bar{v}^a}{\partial \eta} \right); \quad \bar{w} \equiv w(\xi, \eta, \zeta, \tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} (\rho \bar{w} \bar{v}^k) = 0; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho T \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\bar{w}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu c_p}{\rho \bar{w}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\mu}{\bar{w}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial \eta} \right)^2 \right],$$

где

$$\bar{v}^1 = v_x, \quad \bar{v}^3 = v_z, \quad \bar{v}^2 = -\bar{w}^{-1} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} v_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_z - v_y \right]. \quad (1.6)$$

Если ввести теперь новую плотность $\bar{\rho}$, вязкость $\bar{\mu}$, теплопроводность $\bar{\lambda}$

$$\bar{\rho} = \rho \bar{w}, \quad \bar{\mu} = \mu \bar{w}^{-1}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \bar{w}^{-1}, \quad (1.7)$$

то система (1.5) по виду полностью совпадает с (1.1). Это означает, что преобразование $\xi = x, \quad \eta = \int_0^y w^{-1} dy, \quad \zeta = z, \quad \tau = t,$

$$\bar{v}^{-1} = v_x, \quad \bar{v}^3 = v_z, \quad \bar{v}^2 = -\bar{w}^{-1} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} v_x + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_z - v_y \right]; \quad (1.8)$$

$$\bar{p} = p, \quad \bar{T} = T, \quad \bar{S} = S, \quad \bar{\rho} = \rho \bar{w}, \quad \bar{\mu} = \mu \bar{w}^{-1}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \bar{w}^{-1}$$

есть групповое преобразование системы S_3 . В дальнейшем мы его будем обозначать G_3 .

Аналогично показывается, что система уравнений плоского стационарного пограничного слоя S_2 допускает более широкую группу преобразований G_2 :

$$\xi = \int_0^x \varphi^{-1} dx, \quad \eta = \int_0^y w^{-1}(x, y, t) dy, \quad \tau = t,$$

$$\bar{v}^1 = v_x, \quad \bar{v}^2 = -\frac{1}{\varphi w} \frac{\partial y}{\partial \xi} v_x + \frac{\varphi}{w} v_y, \quad \bar{p} = p,$$

$$\bar{\rho} = \rho \bar{w}, \quad \bar{\mu} = \mu \bar{\varphi} \bar{w}^{-1}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \bar{\varphi} \bar{w}^{-1}, \quad \bar{\varphi} \equiv \varphi(\xi). \quad (1.9)$$

Здесь $\varphi \neq 0$ — некоторая произвольная функция либо только переменной x , либо функция x, y , но такая, что в пограничной области она может быть представлена в виде

$$\varphi(x, \varepsilon y^*) = \varphi(x, 0) + O(\varepsilon^2). \quad (1.10)$$

Группы G_3 и G_2 зависят от произвольных функций (первая от w , вторая — от φ и w) и являются бесконечномерными.

Основное свойство системы уравнений, допускающей группу, заключается в следующем: любое решение системы S под действием преобразований группы переходит снова в некоторое решение той же системы S .

Так как выбор той или иной подгруппы групп G_2 и G_3 определяется выбором преобразования координат ξ, η, ζ, τ , а преобразование функций v_i, ρ, T происходит по правилам тензорного анализа, то можно говорить, что координаты ξ, η, ζ, τ переводят уравнения пограничного слоя S жидкости с плотностью ρ , вязкостью μ , теплопроводностью λ в уравнения пограничного слоя $\bar{S}$ жидкости с плотностью $\bar{\rho}$, вязкостью $\bar{\mu}$, теплопроводностью $\bar{\lambda}$.

Эти преобразования координат мы будем в дальнейшем называть преобразованиями эквивалентности системы уравнений пограничного слоя. Они обладают следующим свойством:

Если $\Phi(x, y, z, t)$ — есть решение системы уравнений пограничного слоя S и ξ, η, ζ, τ — преобразование эквивалентности, то

$$\bar{\Phi} \left\{ \int_0^{\xi} \bar{\varphi}(\xi, 0) d\xi; \int_0^{\eta} \bar{\omega}(\xi, \eta, \tau) d\eta; \tau \right\}$$

будет решением системы уравнений пограничного слоя $\bar{S}$.

Систему $\bar{S}$ будем называть эквивалентной системе S , если первая получена из второй с помощью преобразований эквивалентности.

В дальнейшем будем различать три вида функций φ, ω , порождающих три типа преобразований:

1°. φ, ω зависят от x, y, z, t явным образом.

2°. φ, ω зависят от x, y, z, t через решение системы уравнений пограничного слоя.

3°. φ, ω представляют собой комбинацию функций вида 1° и 2°.

2. Для преобразований, зависящих от x, y, z, t явно, функция ω в пограничной области ($y = \varepsilon y^*$) должна иметь вид

$$\omega(x, \varepsilon y^*, z, t) = \omega(x, 0, z, t) + O(\varepsilon). \quad (2.1)$$

Таким образом, общий вид такого преобразования будет следующим:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{\omega(x, z, t)}, \quad (2.2)$$

$\zeta = z, \quad \tau = t$ (координата η зависит от y линейно).

К преобразованиям типа (2.2) относятся такие:

а) автомодельные преобразования системы уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости, т. е. преобразования, с помощью которых она может быть приведена к системе обыкновенных уравнений;

б) преобразования, переводящие друг в друга уравнения пограничного слоя на телах различной геометрической формы.

Для отыскания автомодельных решений примем

$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\lambda} = \lambda, \quad \bar{\rho} = \rho.$$

При этом условии G_2 и G_3 уже не являются групповыми преобразованиями и, следовательно, будут переводить некоторое решение системы S снова в это же решение. Существование автомодельных решений определяется строением группы H , допускаемой уравнениями пограничного слоя при условии (2.3).

Теорема Л. В. Овсянникова [3]. Пусть имеется система дифференциальных уравнений S для определения m функций $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) от $n - m$ независимых переменных x_k ($k = 1, 2, \dots, 3$).

Если система S допускает группу H , обладающую полным набором функционально-независимых инвариантов I_ρ , число которых равно $t = n - R$ (R — ранг матрицы, составленной из координат операторов группы H) и степень полноты относительно искомых функций равна m , то у этой системы потенциально существуют инвариантные H -решения ранга $\rho = t - m$, задача отыскания которых сводится к решению системы S/H для некоторых функций, зависящих от $\rho < n - m$ независимых переменных.

Если H есть группа растяжений, т. е. группа, составленная из операторов

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{n-m} \lambda_\alpha^i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \mu_\alpha^k u^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

($\alpha = 1, 2, \dots, \nu$; $\lambda_\alpha^i, \mu_\alpha^k$ — постоянные), то инвариантное H -решение называется *автомодельным решением в узком смысле*.

Группа растяжений обладает следующими свойствами: она абелева, т. е.

$$[X_\alpha X_\beta] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \nu),$$

и ранг матрицы M , составленной из координат операторов, равен числу операторов, т. е. $R(M) = \nu$.

Однако при изменении системы координат оператор растяжения вообще перестает быть оператором растяжения, поэтому Л. В. Овсянниковым было дано следующее определение:

Инвариантное H -решение называется *автомодельным в широком смысле*, если группа H — абелева.

Для такой группы имеет место теорема [4]. Абелева группа H , для которой $R(M) = R$, содержит подгруппу H_R с тем же значением R , подобную группе растяжений.

Следствие 1. Для всякого автомодельного в широком смысле H -решения найдется такая подгруппа $H_R \subset H$ и такая система координат в пространстве E^N , что это решение в данной системе координат будет автомодельным в узком смысле H -решением.

Следствие 2. Всякое автомодельное в широком смысле H -решение может быть найдено в некоторой системе координат как решение, не зависящее от некоторых независимых переменных.

Этими результатами объясняется возможность использования преобразований для получения автомодельных решений. Кроме того, можно получить автомодельные решения, не зная операторов группы. Это очень существенно, так как задача вычисления операторов группы и нахождения неприводимых подгрупп нужного порядка далеко не всегда является простой.

Рассмотрим теперь несколько задач, решение которых можно построить с помощью преобразований вида (2.2) из решения задачи плоского пограничного слоя.

1) Задача пограничного слоя на удлиненном теле вращения. Уравнения этой задачи [1] имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \rho v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \nu(x)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_1 \nu(x)) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_2 \nu(x)) &= 0, \\ \rho T \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu c_p}{P} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(здесь $\nu(x)$ — радиус кривизны поверхности тела в плоскости, перпендикулярной оси вращения, x — координата, отсчитываемая вдоль образующей, y — по нормали).

Уравнения (2.3) отличаются от уравнений плоского пограничного слоя лишь видом уравнения непрерывности.

Преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = \nu(x) y, \quad \tau = t \quad (2.4)$$

заменяет систему уравнений (2.3) системой уравнений плоского пограничного слоя жидкости с вязкостью $\bar{\mu}$ и теплопроводностью $\bar{\lambda}$

$$\bar{\mu} = \mu \nu^2(x), \quad \bar{\lambda} = \lambda \nu^2(x). \quad (2.5)$$

Преобразование (2.4) является более общим, чем преобразование Степанова — Манглера [5, 6]

$$\xi = \int_0^x \nu^2(x) dx, \quad \eta = \nu(x) y, \quad (2.6)$$

которое применимо лишь для упрощения стационарных задач (1.9). Кроме того, преобразование (2.4) более удобно, так как оно решает задачу приведения системы (2.3) к виду системы уравнений плоского пограничного слоя и в то же время избавляет нас от необходимости обращения функции $\xi = \xi(x)$, связанной с переходом в плоскость x, y . Преобразование (2.6) естественно возникает лишь при отыскании автомодельных решений системы уравнений (2.3).

2) В качестве второго примера рассмотрим задачу пограничного слоя на полубесконечной пластине в параболических координатах

$$x = \xi^2 - \tau^2, \quad y = 2\xi\tau. \quad (2.7)$$

В этих координатах точкам пластины соответствует линия $\tau = 0$, жидкость занимает область $\tau > 0$.

В такой постановке могут быть решены следующие задачи.

1°. Задача обтекания полубесконечной пластины при не очень больших числах Рейнольдса R .

Для описания такого течения необходимо учитывать влияние пограничного слоя на распределение давления во внешнем потоке (учет толщины пограничного слоя δ), которое является эффектом порядка $\varepsilon = R^{-1/2}$. Толщина вытеснения δ^* — величина, характеризующая смещение линий тока во внешнем потоке, для задачи Блазиуса она имеет вид

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_1}{V}\right) dy = 5x^{1/2} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{1/2},$$

и поэтому учет поправки порядка ε требует решения задачи обтекания не пластины, а параболического цилиндра толщины $2\delta^*$. Естественными координатами в такой задаче являются параболические.

2°. Задача о пограничном слое на полубесконечной пластине с учетом краевого эффекта [7, 8, 9].

Для решения этих задач достаточно заметить, что преобразование к параболическим координатам есть преобразование эквивалентности.

Действительно, в пограничной области ($\tau = \varepsilon\tau^*$)

$$\xi = x^{1/2} + O(\varepsilon^2), \quad \tau = \frac{y}{2} x^{-1/2},$$

и мы приходим к преобразованию (1.9) с функциями

$$\varphi(x) = 2x^{1/2}, \quad w(x) = 2x^{1/2}.$$

Решение задачи пограничного слоя в параболических координатах получается из решения задачи Блазиуса заменой переменных

$$x \rightarrow x(\xi, 0), \quad y \rightarrow y(\xi, \tau)$$

и имеет вид (функция тока ψ)

$$\psi = \xi f(\tau), \quad \eta = \frac{y}{2} x^{-1/2} \rightarrow \frac{2\xi\tau}{2\xi} = \tau,$$

где $f(\tau)$ удовлетворяет задаче Блазиуса [1].

3. Более сложным образом w может зависеть от y только через решение уравнений пограничного слоя.

Решение системы уравнений пограничного слоя включает в себя следующие функции:

$$v_1, v_3, v_2, \rho, \rho, T. \quad (3.1)$$

Все они имеют в пограничной области порядок малости $O(1)$, и те из них, которые не обращаются в нуль в этой области, могут быть выбраны в качестве определяющей функции ω . Так как v_1 и v_3 в пограничном слое есть монотонно возрастающие функции y , то к (3.1) могут быть добавлены еще и

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Преобразования, определяемые непосредственно функциями из решения системы уравнений пограничного слоя, в дальнейшем будем называть *основными*.

Любая функция вида

$$\Phi(v_1, v_2, v_3, \rho, \rho, \dots),$$

например,

$$\frac{\mu}{\mu_0}(T), \frac{\mu \rho}{\mu_0 \rho_0},$$

также может быть выбрана в качестве определяющей функции ω . Число основных преобразований конечно и зависит от постановки задачи пограничного слоя (плоская, пространственная, магнитогидродинамическая). В обычной гидродинамике они могут определяться лишь функциями

$$v_1, v_3, \rho, \rho, T, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Каждая из этих функций определяет уже известное преобразование $\omega^{-1} = \rho/\rho_0$ — преобразование А. А. Дородницына, $\omega^{-1} = v_1$ — преобразование Р. Мизеса, $\omega^{-1} = \partial v_1/\partial y$ — преобразование Л. Крокко.

Так как давление p может быть выбрано в качестве функции φ лишь в задачах плоского стационарного пограничного слоя, то отсюда следует, что преобразование А. А. Дородницына

$$\xi = \int_0^x \frac{\rho}{\rho_0} dx, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad (3.4)$$

которое употребляется обычно, применимо лишь для упрощения задач плоского стационарного пограничного слоя. Для упрощения общей задачи нужно пользоваться преобразованием

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad \zeta = z, \quad \tau = t. \quad (3.5)$$

Число основных преобразований, связанных с решениями системы пограничного слоя, можно увеличить не только за счет изменения постановки задачи, но и за счет сужения класса рассматриваемых задач. Например, для задач, в которых температура есть монотонная функция y , можно использовать преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = T, \quad \zeta = z, \quad \tau = t,$$

определяемое функцией $\omega^{-1} = \partial T / \partial y$. В этих координатах коэффициенты вязкости $\mu(T)$ и теплопроводности $\lambda(T)$ уже не будут связанными с решением системы уравнений пограничного слоя, а будут заданными функциями координат.

4. С помощью комбинированных преобразований можно построить автомодельные решения более сложных задач пограничного слоя газа произвольной плотности; результаты А. А. Дородницына, Р. Мизеса, Л. Крокко обобщить на задачу пограничного слоя на удлинённом теле вращения и задачу обтекания полубесконечной пластины в параболических координатах.

Например, для исключения плотности из системы уравнений пограничного слоя на удлинённом теле вращения нужно воспользоваться преобразованием

$$\xi = x, \quad \eta = v(x) \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad \tau = t,$$

представляющим собой комбинацию преобразований А. А. Дородницына и Степанова — Манглера.

Обобщение результатов Л. Крокко и Р. Мизеса на эту задачу достигается преобразованиями

$$\xi = x, \quad \eta = v(x) v_1, \quad \tau = t$$

и

$$\xi = x, \quad \eta = v(x) \int_0^y v_1 dy, \quad \tau = t.$$

Исключить плотность из уравнений пограничного слоя в параболических координатах можно с помощью преобразования

$$\xi = \bar{\xi}, \quad \eta = \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\rho}{\rho_0} d\tau, \quad t = t.$$

Все предыдущие рассуждения и результаты непосредственно переносятся на уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя при малых магнитных числах Рейнольдса R_m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
 2. А. Г. Боев, В. Л. Герман. Криволинейные координаты в теории пограничного слоя. «Изв. АН СССР, Механика», № 6, 1965.
 3. Л. В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.
 4. Л. В. Овсянников. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Изд-во Новосибирск. ун-та, Новосибирск, 1966.
 5. Е. И. Степанов. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией, ПММ, т. II, вып. 1, 1947.
 6. Mangler, W. Zusammenhang zwischen ebenen und rotationsymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMM, Bd. 28, 1948, s. 97.
 7. Н. Е. Кочин. Задача обтекания вязкой жидкостью полубесконечной пластинки. Собр. соч., т. 2. Изд. АН СССР, 1949.
 8. Carrier G. F., Lin C. C. On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate, Quart. Appl. Math. v. 6, 1948.
 9. Kaplan S. The Role of Coordinat Systems in boundary — layer theory, ZAMP, v. 5, 1954, p. 111.
 10. А. А. Дородницын. Пограничный слой сжимаемого газа, ПММ, т. 4, вып. 6, 1942.
-

УДК 519.45 519.48. К теореме Сушкевича — Риса. И. Г л у с к и н Л. М. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 3—22.

На π -оперативы (РЖМат, 1964, 12A262; 1969, 3A152, 4A133) обобщается теорема Сушкевича — Риса — Клиффорда о строении вполне простых полугрупп. Рассматриваются некоторые типы оперативов, строение которых будет изучено во второй части работы.

Библиографических ссылок 16.

УДК 517.948.3. О решении одного интегрального уравнения математической теории дифракции волн. Г а н д е л ь Ю. В. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 23—28.

Речь идет об интегральном уравнении Фредгольма

$$f(x) - \frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} k(x+y)}{x+y} f(y) dy = g(x),$$

к которому сводятся задачи дифракции волн на круговом диске или круговом отверстии в плоском экране. В работе дан метод приближенного решения этого уравнения, применимый при любых значениях параметра $k > 0$. Принципиально можно получить решения, сколь угодно мало отличающиеся от точного, для этого нужно лишь решить систему линейных алгебраических уравнений с достаточно большим числом N неизвестных. Дана оценка среднеквадратичного отклонения приближенного решения $f_N(x)$ от точного решения $f(x)$:

$$\|f - f_N\| < \left(\frac{ek}{2N}\right)^{2N} \|g\|.$$

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.51 : 519.53. О некоторых задачах на экстремум интегралов. П е р е л ь м а н М. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 29—38.

В статье рассматриваются некоторые задачи на минимум в классе многочленов и целых трансцендентных функций экспоненциального типа, причем многочлены рассматриваются на дуге окружности, а целые функции — на части вещественной оси.

Библиографических ссылок 5.

УДК 519.2.004.14.

О представлении плотности распределения вероятностей стационарных случайных процессов с последствием ортогональными рядами. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 39—46.

Получено уравнение гиперболического типа, которому удовлетворяет плотность распределения вероятностей в случае динамической системы, описываемой нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением второго порядка. Приводятся плотности, построенные соответственно на полиномах Эрмита, Лягерра, Якоби, Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева и гипергеометрическом ряде, которые определяют непрерывный случайный квазимарковский процесс.

Библиографических ссылок 9.

УДК 519.2.004.14.

Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Основные соотношения. I. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 47—59.

Рассматриваются многомерные случайные процессы с последствием. Получен аналог функционального уравнения Смолуховского — Чепмена — Колмогорова в многомерном случае для квазимарковских процессов и уравнения для апостериорных плотностей распределения вероятностей.

Библиографических ссылок 5.

УДК 519.2.004.14.

Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Оптимальное обнаружение, фильтрация и управление, II. Александров Ю. А., Янцевич А. А. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 60—93.

Рассматриваются задачи оптимальной фильтрации, управления и различения гипотез с точки зрения процессов с последствием. Получены уравнения для апостериорных плотностей распределения вероятностей в случае процессов с последствием и соответствующие системы зацепляющихся дифференциальных уравнений для одномерных моментов. Рассматривается квазинормальное приближение, когда учитываются кумулянты третьего порядка; такое приближение приводит к квазиоптимальной фильтрации, управлению и различению гипотез.

Библиографических ссылок 8.

УДК 532.526.

Преобразования эквивалентности в теории ламинарного пограничного слоя. Боев А. Г. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 35, 1971, стр. 94—102.

Показывается, что уравнения пограничного слоя допускают непрерывную группу преобразований G , зависящую от произвольной функции (бесконечномерная группа). Выбор той или иной подгруппы определяется выбором преобразования координат. Этим объясняется возможность использования преобразований координат для построения решения одних задач теории пограничного слоя по известным решениям других.

Библиографических ссылок 10.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Л. М. Глушкин. К теореме Сушкевича — Риса. I	3
Ю. В. Гандель. О решении одного интегрального уравнения математической теории дифракции волн	23
М. А. Перельман. О некоторых задачах на экстремум интегралов	29
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О представлении плотности распределения вероятностей стационарных случайных процессов с последствием ортогональными рядами	39
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Основные соотношения. I	47
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Оптимальное обнаружение, фильтрация и управление. II	60
А. Г. Боев. Преобразования эквивалентности в теории ламинарного пограничного слоя	94
Рефераты	103

Редактор *Е. П. Иващенко*
 Техредактор *Т. П. Воробьенко*
 Корректор *Л. П. Гипенко*

Сдано в набор 7/VI 1970 г. Подписано к печати 10/V 1971 г. БЦ 50100.
 Формат 60 × 90¹/₁₆. Объем: 6,5 физ. печ. л., 6,5 усл. печ. л., 7 уч.-изд. л.
 Зак. 205. Тираж 500. Цена 70 коп.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в тип. № 16 Областного управления по печати. Харьков, 3, Университетская. 16 Зак. 2186.