

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут «Фізико-технічний факультет»

Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера

До захисту допущено

Кафедрою фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера протокол № 12
від 19.06.2026 р.

завідувач кафедри _____ Юрій Слюсаренко
(підпис) (ім'я, прізвище)

«19» червня 2026 р.

Кваліфікаційна робота
здобувача першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

Розрахунок діраківського та паулівського форм-факторів у зображенні
одягнених частинок

_____ (назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) 105 Прикладна фізика та наноматеріали
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма Прикладна фізика
(назва освітньої програми)

Виконавець _____ Костянтин Жадан
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий керівник _____ Пилип Кузнецов
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий консультант _____ Олександр Шебеко
(підпис) (ім'я, прізвище)

Харків – 2026

Анотація

У цій дипломній роботі метод унітарних одягаючих перетворень (УОП) застосовується до квантової електродинаміки (КЕД) з метою обчислення електромагнітних формфакторів лептонів. У стандартному пертурбативному підході Фейнмана–Дайсона фізичні стани відновлюються лише в асимптотичному $\text{limit } (t \rightarrow \pm\infty)$, тоді як метод УОП дозволяє з самого початку працювати в зображенні, де вакуум та одночастинкові стани збігаються з фізичними. У роботі спочатку введено поняття одягнених частинок у рамках моделі типу Юкави та сформульовано вимоги до одягнених операторів. Потім формалізм УОП поширено на КЕД у кулонівському калібруванні: побудовано генератор унітарного перетворення, отримано одягнений оператор струму Нетер та проаналізовано його операторну структуру. Нарешті, за допомогою розкладу за базисом матриць Паулі виконано безпосереднє обчислення діраківського F_1 та паулівського F_2 формфакторів у першому наближенні. Отримано результати $F_1(q^2) = 1$ та $F_2(q^2) = 0$, що узгоджуються з фізичним змістом теорії, оскільки ненульовий внесок у F_2 виникає лише після врахування радіаційних поправок.

Ключові слова: унітарні одягаючі перетворення, квантова електродинаміка, зображення одягнених частинок, електромагнітні формфактори, аномальний магнітний момент.

Abstract

In this diploma, the method of unitary clothing transformations (UCT) is applied to quantum electrodynamics (QED) with the aim of calculating the electromagnetic form factors of leptons. In the standard Feynman–Dyson perturbative approach, physical states are recovered only in the asymptotic limit ($t \rightarrow \pm\infty$), whereas the UCT method allows one to work from the outset in a representation where the vacuum and one-particle states coincide with the physical ones. The concept of clothed particles is first introduced within a Yukawa-type model and the requirements for clothed operators are formulated. The UCT formalism is then extended to QED in the Coulomb gauge: the generator of the unitary transformation is constructed, the clothed Noether current operator is derived and its operator structure is analyzed. Finally, using the Pauli decomposition, the Dirac (F_1) and Pauli (F_2) form factors are computed directly in the first approximation. The results obtained are $F_1(q^2) = 1$ and $F_2(q^2) = 0$, which agrees with the physical content of the theory, since a non-zero contribution to F_2 arises only after the inclusion of radiative corrections.

Key words: unitary clothing transformations, quantum electrodynamics, clothed particles representation, electromagnetic form factors, anomalous magnetic moment.

Зміст

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 Одягнені частинки в квантовій теорії поля	8
1.1 Оператори та стани одягнених частинок	8
1.2 Голі частинки з фізичними масами	10
1.3 Унітарні одягаючі перетворення	12
1.4 Усунення „небажаних“ членів	13
РОЗДІЛ 2 КЕД у зображенні одягнених частинок	17
2.1 Основні означення та необхідні відомості	17
2.2 Гамільтоніан КЕД у кулонівському калібруванні	19
2.3 Формфактори та струм Нетер	20
2.4 Аналіз членів оператора струму, що зникають в одночастинко- вому секторі	23
РОЗДІЛ 3 Обчислення електромагнітних формфакторів еле- ктрона	28
3.1 Розклад за базисом матриць Паулі	28
3.2 Обчислення $F_1(q^2)$ та $F_2(q^2)$ у першому наближенні	29
ВИСНОВКИ	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39
ДОДАТОК А	41
ДОДАТОК Б	41

ВСТУП

Квантова електродинаміка (КЕД), ймовірно, є найуспішнішою польовою теорією у фізиці, проте вона містить фундаментальне протиріччя між „голими“ частинками, що з’являються в лагранжіані, та „фізичними“ частинками, які спостерігаються в лабораторії. У стандартному пертурбативному підході Фейнмана–Дайсона фізичні стани відновлюються лише в асимптотичній границі ($t \rightarrow \pm\infty$), тоді як взаємодія розглядається як постійне збурення, що потребує складних процедур перенормування для усунення розбіжностей. Така схема часто приховує фізичну структуру самої частинки, оскільки „голий“ вакуум не є істинним основним станом взаємодіючої системи. Для подолання цих концептуальних і обчислювальних труднощів ми використовуємо метод унітарного одягаючого перетворення (УОП), простежуючи його витоки до фундаментальних робіт Вентцеля [1] та Гайтлера [2]. Всебічний огляд нашої історії та різноманітних застосувань методу УОП можна знайти в оглядовій роботі Шебеко та Широкова [3].

Для подолання розриву між голими та фізичними зображеннями Грінберг і Швебер [4] ввели поняття операторів „одягнених“ частинок (див. також детальний виклад у монографії Швебера [5]). Сутність цього підходу полягає у виконанні унітарного перетворення, яке переводить опис від голих полів до одягнених. Замість роботи із голими частинками розглядаються „одягнені“ частинки, що враховують ефекти взаємодії від самого початку. Це приводить до зображення, в якому гамільтоніан виражається через оператори частинок із фізичними масами та зарядами, фактично обходячи багато концептуальних проблем зображення голих частинок. Саме цей підхід використовується в даній роботі.

Формальний розвиток методу УОП значною мірою завдячує роботам Широкова та Шебеко [3, 6, 7, 8, 9], які побудували строгий математичний апарат для вираження первинного гамільтоніана квантової теорії поля (КТП) через оператори одягнених частинок, заклавши основу того, що нині відоме як „зображення одягнених частинок“ (ЗОЧ). У межах цього підходу одягаюче перетворення призначене для усунення так званих „небажаних“ членів із гамільтоніана – тих, що відповідають за переходи між голим вакуумом і станами з віртуальними частинками, – що приводить до опису, в якому вакуум і одностинкові стани одягненого зображення збігаються з фізичним

вакуумом і фізичними одночастинковими станами.

Корисно порівняти метод УОП з іншими релятивістськими підходами. Наприклад, Гльокле та Мюллер [10] розробили релятивістську теорію взаємодіючих частинок на основі іншої реалізації алгебри Пуанкаре, тоді як група з Осаки [11] використала унітарні перетворення для виведення ефективних взаємодій у задачі зв'язаних станів. Відмінний, але споріднений напрям досліджень був використаний Стефановичем [12], який застосував перетворення подібності для безпосереднього усунення нескінченних контрчленів із гамільтоніана та S -матриці. Однак унікальною перевагою методу УОП є те, що він дозволяє одночасно розв'язати задачі перенормування маси та вершини, природним чином виводячи оператори взаємодії частинка–частинка (квазі-потенціали).

Практична корисність методу УОП найбільш помітно проявилася в галузі ядерної фізики проміжних енергій. Його успішно застосовували для виведення операторів взаємодії для піон-нуклонних та нуклон-нуклонних систем [13, 14]. Ці виведення привели до створення „харківського потенціалу“, який використовувався для високоточного обчислення властивостей дейтрона [15, 16] та енергії зв'язку тритона [17]. Хоча ці методи досягли зрілості в контексті адронної фізики, їх застосування до квантової електродинаміки (КЕД) та квантової хромодинаміки (КХД) є перспективним і необхідним напрямом [18, 19].

Спираючись на успішне впровадження методу УОП в адронній фізиці, дана дипломна робота має на меті поширити цей підхід на квантову електродинаміку (КЕД), зокрема зосередившись на внутрішній структурі „одягнених“ лептонів. Хоча загальні принципи методу були викладені в попередніх роботах [12, 18, 19], а деякі важливі результати для КЕД у ЗОЧ були отримані в [20] та [21], детальне виведення електромагнітних формфакторів електронів і позитронів у межах ЗОЧ залишається важливим завданням для перевірки узгодженості процедури одягання. Основною метою цього дослідження є застосування методу УОП для побудови гамільтоніана КЕД у зображенні одягнених частинок та подальшого обчислення формфакторів Дірака і Паулі, $F_1(q^2)$ та $F_2(q^2)$, для одягненого електрона. У ЗОЧ ці формфактори природним чином виникають як результат „одягання“ голих полів, що ефективно враховує хмару віртуальних фотонів і пар e^+e^- , які оточують фізи-

чну частинку. Ми демонструємо, що цей метод не лише відтворює класичні результати Швінгера для аномального магнітного моменту, але й забезпечує більш прозору фізичну картину „хмари“ частинки. Робота організована таким чином. У першому розділі вводиться поняття одягнених частинок у квантовій теорії поля на прикладі моделі типу Юкави: формулюються вимоги до одягнених операторів, встановлюється зв'язок між голими та фізичними масами за допомогою контрчленів, будується унітарне одягаюче перетворення та розглядається процедура послідовного усунення „небажаних“ членів з гамільтоніана. Другий розділ присвячено застосуванню формалізму УОП до КЕД у кулонівському калібруванні: визначається генератор перетворення, обчислюється одягнений гамільтоніан, виводиться оператор струму Нетер та аналізуються члени в операторі струму, що зникають між одночастинковими станами. У третьому розділі виконується безпосереднє обчислення діраківського та паулівського формфакторів: розробляється метод розкладу за базисом матриць Паулі для виділення спінової структури матричних елементів, після чого у першому наближенні отримуються явні значення формфакторів.

РОЗДІЛ 1

Одягнені частинки в квантовій теорії поля

Для введення поняття одягнених частинок розглянемо модель типу Юкави, в якій спінорне (ферміонне) поле ψ взаємодіє з нейтральним псевдоскалярним мезонним полем ϕ . Повний гамільтоніан записується у вигляді $H = H_0 + V_0$, де вільна частина має вигляд

$$H_0 = \int \bar{\psi}(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m_{0f}] \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int [\pi^2(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x})^2 + m_{0m}^2\phi^2(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

а член взаємодії задається як

$$V_0 = ig_0 \int \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

де m_{0f} та m_{0m} позначають голі маси відповідно ферміонів та мезонів, а g_0 – неперенормовану постійну зв'язку. Для простоти ми не використовуємо повністю симетризований гамільтоніан за польовими змінними (див., наприклад, [5]). Ця модель має багато спільного з гамільтоніаном КЕД, що використовується нижче.

Гамільтоніан можна переписати через голі оператори знищення та народження: $a(k)$, $a^\dagger(k)$ для мезонів, $b(p, \mu)$, $b^\dagger(p, \mu)$ для ферміонів і $d(p, \mu)$, $d^\dagger(p, \mu)$ для антиферміонів. Тут k та p позначають чотириімпульси, тоді як μ нумерує спінові стани. Їх точні означення будуть наведені пізніше у підрозділі 1.2. Ми колективно позначатимемо всю цю сукупність символом α , тоді як окремий елемент множини позначатиметься як α_p . Вакуум голих частинок $|\Omega_0\rangle$, разом із голими одночастинковими станами $a^\dagger(k)|\Omega_0\rangle$, $b^\dagger(p, \mu)|\Omega_0\rangle$ та $d^\dagger(p, \mu)|\Omega_0\rangle$, не є власними векторами повного гамільтоніана H .

1.1 Оператори та стани одягнених частинок

Тепер введемо нову множину операторів знищення та народження,

$$a_c(k), a_c^\dagger(k), \quad b_c(p, \mu), b_c^\dagger(p, \mu), \quad d_c(p, \mu), d_c^\dagger(p, \mu), \quad \forall k, p, \mu. \quad (1.3)$$

Вимагається, щоб ці оператори задовольняли такі умови:

i) Фізичний вакуум, тобто найнижчий власний стан H , має збігатися зі станом без частинок у новому зображенні. Позначаючи цей стан через $|\Omega\rangle$, накладаємо умову

$$a_c(k)|\Omega\rangle = b_c(p, \mu)|\Omega\rangle = d_c(p, \mu)|\Omega\rangle = 0, \quad \forall k, p, \mu, \quad (1.4)$$

разом із нормуванням

$$\langle\Omega|\Omega\rangle = 1. \quad (1.5)$$

ii) Одночастинкові стани, побудовані з нових операторів, такі як $a_c^\dagger(k)|\Omega\rangle$, також повинні бути власними станами повного гамільтоніана.

iii) Індеси нових операторів повинні пробігати точно той самий набір квантових чисел, що й для голих операторів. Ця вимога вже відображена у (1.3).

iv) Нові оператори повинні задовольняти ті самі канонічні (анти-)комутаційні співвідношення, що й початкові. Зокрема,

$$[a_c(k), a_c^\dagger(k')] = k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.6)$$

та

$$\{b_c(p, \mu), b_c^\dagger(p', \mu')\} = \{d_c(p, \mu), d_c^\dagger(p', \mu')\} = p^0 \delta_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (1.7)$$

де $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_m^2}$ та $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_f^2}$ є енергіями мезона та ферміона з фізичними масами m_m та m_f .

Дотримуючись термінології [4] та розділу XII у [5], ми будемо називати ці оператори та відповідні їм стани *одягненими*. Слід, однак, зауважити, що той самий термін іноді використовується в інших роботах у ширшому або іншому сенсі.

Таким чином, задача одягання еквівалентна побудові вибраних власних векторів взаємодіючого гамільтоніана H . Умова iii) означає, що ми не намагаємося породити всі можливі одночастинкоподібні власні стани H . Наприклад, H може мати зв'язаний стан типу дейтрона з масою, меншою за $2m$, де m є масою нуклона. Такий стан не має голого одночастинкового аналога. Наша нинішня мета є скромнішою: ми шукаємо лише ті одночастинкоподібні власні стани, які відповідають голим одночастинковим станам. Слід також

підкреслити, що задача одягання не завжди може мати розв'язок. Критерій розв'язності з'явиться пізніше у підрозділі 1.4.

1.2 Голі частинки з фізичними масами

За означенням, стан „голоного“ ферміона $|p, \mu\rangle_0$, будучи власним станом вільного гамільтоніана H_0 та оператора повного імпульсу P , відповідає власному значенню енергії $E_p^0 = \sqrt{p^2 + m_{0f}^2}$. Коли ми шукаємо точні власні стани повного гамільтоніана H , позначені як $|p, \mu\rangle$, і розглядаємо $|p, \mu\rangle_0$ як наближення нульового порядку, теорія збурень показує, що отримані власні значення енергії E_p відрізняються від початкових E_p^0 . Для збереження релятивістської узгодженості функціональний зв'язок між енергією та імпульсом повинен мати вигляд $E_p = \sqrt{p^2 + m_f^2}$, де m_f є спостережуваною масою спокою – фізичною масою частинки. Аналогічна логіка застосовується і до мезонного сектора, де фізична маса m_m загалом відрізняється від голоного параметра m_{0m} , введеного в початковому лагранжіані.

Початковий гамільтоніан у (1.1) був записаний з використанням параметрів m_{0f} та m_{0m} , які представляють неперенормовані маси ферміона та мезона. Тепер ми розділимо ці величини на фізичні маси та контрчлени:

$$m_{0f} = m_f + \delta m_f, \quad m_{0m}^2 = m_m^2 + \delta m_m^2, \quad (1.8)$$

де m_f та m_m позначають фізичні маси ферміона та мезона, тоді як δm_f та δm_m^2 є зсувами мас. Виділимо в повному гамільтоніані H частину, що відповідає вільному гамільтоніану, вираженому через фізичні маси:

$$H = H_0 + V_0 = H_F + H_I = H_F + V + M_{\text{ren}} + V_{\text{ren}}, \quad (1.9)$$

де H_F є вільним гамільтоніаном, вираженим через фізичні маси,

$$H_F = \int \bar{\psi}(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} + m_f]\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int [\pi^2(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x})^2 + m_m^2\phi^2(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \quad (1.10)$$

внесок перенормування маси має вигляд

$$M_{\text{ren}} = \delta m_f \int \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta m_m^2 \int \phi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.11)$$

а внесок вершинного перенормування записується як

$$V_{\text{ren}} = V_0 - V = i(g_0 - g) \int \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.12)$$

де g – фізична константа зв'язку. Наступним кроком є розклад полів за нормальними модами, пов'язаними з фізичними масами m_f та m_m . Для мезонного поля маємо

$$\phi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} [a(k) + a^\dagger(k_-)] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (1.13)$$

Його поле спряженого імпульсу дорівнює

$$\pi(\mathbf{x}) = -i(2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k} \frac{a(\mathbf{k}) - a^\dagger(\mathbf{k}_-)}{\sqrt{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (1.14)$$

Для ферміонного поля маємо

$$\psi(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3}} \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{p^0} [u(p, \mu) b(p, \mu) + v(p_-, \mu) d^\dagger(p_-, \mu)] e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (1.15)$$

Тут спінори Дірака $u(p, \mu)$ та $v(p, \mu)$ задовольняють вільні рівняння Дірака $(\not{p} - m)u(p, \mu) = 0$, $(\not{p} + m)v(p, \mu) = 0$ з $\not{p} = p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}$ та чотиривекторами $k_- = (k^0, -\mathbf{k})$ і $p_- = (p^0, -\mathbf{p})$. Через ці оператори вільний гамільтоніан (1.10) стає „діагональним“:

$$H_F = \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} a^\dagger(k) a(k) k^0 + \sum_\mu \int \frac{d\mathbf{p}}{p^0} [b^\dagger(p, \mu) b(p, \mu) + d^\dagger(p, \mu) d(p, \mu)] p^0. \quad (1.16)$$

Таким чином, стани, породжені $a^\dagger$, $b^\dagger$ та $d^\dagger$, можна інтерпретувати як голі частинки, що вже мають правильні фізичні маси. Проте вони все ще не є власними станами повного гамільтоніана, оскільки оператор взаємодії V та оператори контрчленів M_{ren} та V_{ren} залишаються присутніми.

1.3 Унітарні одягаючі перетворення

Побудова одягання базується на операторах, введених у (1.3). Мета полягає у визначенні повного набору одягнених операторів, що задовольняє вимоги i)–iv), сформульовані раніше. Для зручності позначень повну сукупність цих операторів будемо позначати через α_c , тоді як α_{cp} позначає окремий елемент цієї множини, за аналогією з позначеннями α та α_p , використаними для голих частинок. Для забезпечення умов iii) та iv) постулюється, що одягнені оператори α_c пов'язані з голими операторами α за допомогою унітарного перетворення:

$$\alpha_{cp} = W^\dagger \alpha_p W, \quad W^\dagger W = W W^\dagger = 1, \quad (1.17)$$

де оператор W є функціоналом, що залежить від усього набору голих операторів α . Як наслідок, співвідношення (1.17) дозволяє виразити кожний α_{cp} як функціонал від α .

Ключовою особливістю цього формулювання є те, що оператор W зберігає свою функціональну структуру незалежно від того, виражений він через одягнені чи голі оператори. Справді, розглянемо функцію $f(x)$, яка допускає представлення у вигляді полінома або степеневого ряду. Тоді, використовуючи (1.17), маємо

$$f(\alpha_c) = W^\dagger(\alpha) f(\alpha) W(\alpha). \quad (1.18)$$

Якщо тепер ототожнити $f(\alpha_c)$ із самим W , то отримаємо

$$W(\alpha_c) = W^\dagger(\alpha) W(\alpha) W(\alpha) = W(\alpha), \quad (1.19)$$

що демонструє однакову функціональну залежність W в обох зображеннях.

Тоді обернене перетворення, яке виражає голі оператори через одягнені, має вигляд

$$\alpha_p = W(\alpha_c) \alpha_{cp} W^\dagger(\alpha_c). \quad (1.20)$$

Унітарність W забезпечується його представленням в експоненціальній формі, $W = \exp R$, де генератор R антиермітовий. Для заданого R вирази на кшталт (1.20) можна обчислювати за допомогою розкладу Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа,

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (1.21)$$

разом із введеними раніше комутаційними співвідношеннями.

У межах цього підходу повний гамільтоніан записується як $H = H(\alpha) = H_F + H_I$, де вільний гамільтоніан $H_F(\alpha)$ визначений у (1.16), а частина взаємодії дорівнює $H_I = V(\alpha) + M_{\text{ren}}(\alpha) + V_{\text{ren}}(\alpha)$. Застосовуючи перетворення (1.20), переписуємо гамільтоніан через одягнені оператори:

$$H(\alpha) = H(W(\alpha_c) \alpha_c W^\dagger(\alpha_c)) \equiv K(\alpha_c). \quad (1.22)$$

Оператор $K(\alpha_c)$ представляє той самий фізичний гамільтоніан, але виражений як функціонал від одягнених змінних. Визначення $K(\alpha_c)$ виконується у два етапи. Спочатку (1.22) переписується в еквівалентній формі

$$K(\alpha_c) = W(\alpha_c) H(\alpha_c) W^\dagger(\alpha_c). \quad (1.23)$$

Далі, підставляючи $W(\alpha_c) = \exp R(\alpha_c)$, де R антиермітовий, $R^\dagger = -R$, та використовуючи розклад (1.21), отримуємо

$$\begin{aligned} K(\alpha_c) = & e^R [H_F + H_I] e^{-R} = H_F(\alpha_c) + H_I(\alpha_c) \\ & + [R, H_F] + [R, H_I] + \frac{1}{2}[R, [R, H_F]] + \frac{1}{2}[R, [R, H_I]] + \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

Рівняння (1.24) надає практичну схему для обчислення $K(\alpha_c)$. Спочатку виконується формальна заміна $\alpha \rightarrow \alpha_c$ у початковому гамільтоніані $H(\alpha)$, отримуючи $H(\alpha_c)$, а потім обчислюється перетворення подібності $W(\alpha_c)H(\alpha_c)W^\dagger(\alpha_c)$ за допомогою (1.21) та комутаційних співвідношень. Хоча заміна $H(\alpha) \rightarrow H(\alpha_c)$ породжує новий оператор, відмінний від початкового, співвідношення (1.22) та (1.23) гарантують, що кінцевий результат точно збігається з вихідним гамільтоніаном.

Важливо відрізнити розглянуте тут перетворення від виразу вигляду $W(\alpha) H(\alpha) W^\dagger(\alpha)$. Останній визначав би інший оператор, який загалом не збігається з початковим гамільтоніаном H .

1.4 Усунення „небажаних“ членів

Наступний етап полягає у виконанні умов i) та ii). Для того, щоб одягнений вакуумний стан $|\Omega\rangle$ та одягнені одночастинкові стани були власними векто-

рами H , права частина рівняння (1.24) не повинна містити певних небажаних операторних внесків. Зокрема, $K(\alpha_c)$ не може містити члени типу $b_c^\dagger d_c^\dagger a_c^\dagger$, оскільки, діючи на $|\Omega\rangle$, вони породжували б стани $f\bar{f}m$, і тому $K(\alpha_c)|\Omega\rangle$ не міг би залишатися пропорційним до $|\Omega\rangle$. Аналогічно, оператор на кшталт $b_c^\dagger b_c a_c^\dagger$ перетворює одноферміонний стан $b_c^\dagger|\Omega\rangle$ у стан fm . Однак саме такі структури присутні в операторі $V(\alpha_c)$ у правій частині рівняння (1.24). Нагадаємо, що $H_I(\alpha_c) = V(\alpha_c) + M_{\text{ren}}(\alpha_c) + V_{\text{ren}}(\alpha_c)$, де $V(\alpha_c)$ отримується з $V(\alpha)$, див. рівняння (1.2), заміною $\alpha \rightarrow \alpha_c$.

Як обговорювалося, члени

$$b_c^\dagger b_c a_c^\dagger, \quad b_c^\dagger d_c^\dagger a_c, \quad b_c^\dagger d_c^\dagger a_c^\dagger, \quad d_c d_c^\dagger a_c^\dagger, \quad (1.25)$$

що містяться у $V(\alpha_c)$, перешкоджають тому, щоб одягнений вакуум і одягнені одночастинкові стани були власними векторами H . Решта внесків у $V(\alpha_c)$ є просто ермітово спряженими до перелічених вище. Усі такі члени будемо називати *небажаними*. Взаємодія H_I також включає масовий M_{ren} та вершинний V_{ren} контрчлени. Оскільки поправка власної енергії до маси частинки починається з порядку g^2 , а зсув заряду $\delta g = g_0 - g$ порядку g^3 , то маємо $V_{\text{ren}}(\alpha_c) \sim g^3$, $M_{\text{ren}}(\alpha_c) \sim g^2$ та $V(\alpha_c) \sim g$.

Тепер усунемо з $K(\alpha_c)$ небажані внески першого порядку за g . Для цього виберемо генератор R так, щоб

$$V + [R, H_F] = 0. \quad (1.26)$$

Легко перевірити, що рівняння (1.26) не може бути виконане, якщо $R(\alpha_c)$ є лише лінійним або білінійним за α_c . Для задоволення цього співвідношення $R(\alpha_c)$ повинен містити три оператори, аналогічно до $V(\alpha_c)$. Тоді комутатор $[R, H_F]$ також є виразом із трьома операторами, оскільки $H_F(\alpha_c)$ є білінійним.

Антиермітовий оператор $R(\alpha_c)$ повинен містити небажані члени того са-

мого типу, що й $V(\alpha_c)$. А саме, запишемо $R(\alpha_c) = \mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger$, де

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \int \frac{d\mathbf{p}'}{p'^0} \frac{d\mathbf{p}}{p^0} \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \sum_{\mu\mu'} & \left[R_{11}^k(p'\mu'; p\mu) b_c^\dagger(p', \mu') b_c(p, \mu) \right. \\ & + R_{12}^k(p'\mu'; p\mu) b_c^\dagger(p', \mu') d_c^\dagger(-p, \mu) \\ & + R_{21}^k(p'\mu'; p\mu) d_c(-p', \mu') b_c(p, \mu) \\ & \left. + R_{22}^k(p'\mu'; p\mu) d_c(-p', \mu') d_c^\dagger(-p, \mu) \right] a_c(k). \end{aligned} \quad (1.27)$$

s -Числові коефіцієнти R_{ij}^k ($i, j = 1, 2$) визначаються з рівняння (1.26); див. Додаток А. Виявляється, що розв'язок існує лише якщо $m_m < 2m_f$. Це має прозору фізичну інтерпретацію: коли $m_m > 2m_f$, мезон може розпадатися на пару $f\bar{f}$, і тому одно-мезонний стан не може бути стабільним, тобто не може бути власним вектором H .

Після встановлення співвідношення $[R, H_F] = -V$ рівняння (1.24) набуває вигляду

$$\begin{aligned} K(\alpha_c) = H_F(\alpha_c) + M_{\text{ren}}(\alpha_c) + V_{\text{ren}}(\alpha_c) \\ + \frac{1}{2}[R, V] + [R, M_{\text{ren}}] + [R, V_{\text{ren}}] + \frac{1}{3}[R, [R, V]] + \dots \end{aligned} \quad (1.28)$$

Таким чином, усі небажані члени порядку g були усунені з $K(\alpha_c)$.

Проте права частина рівняння (1.28) все ще містить небажані члени порядку g^2 та вищих порядків. Наприклад, комутатор $[R, V]$ містить члени, пропорційні $g^2 b_c^\dagger d_c^\dagger a_c^\dagger a_c^\dagger$, які не знищують фізичний вакуум $|\Omega\rangle$. Крім того, з'являються члени вигляду $g^2 b_c^\dagger d_c^\dagger a_c^\dagger a_c$, які ані не знищують $a_c^\dagger|\Omega\rangle$, ані не відтворюють його з точністю до скалярного множника. Ці небажані внески можна усунути аналогічним чином за допомогою іншого перетворення,

$$\alpha_{cp} = W_4(\alpha'_c) \alpha'_{cp} W_4^\dagger(\alpha'_c), \quad (1.29)$$

де $W_4 = \exp R_4$, а R_4 є оператором порядку g^2 , побудованим із згаданих вище небажаних чотириоператорних членів. Його слід вибрати так, щоб $[R_4, H_F]$ компенсував ці члени.

Крім того, подвійний комутатор $[R, [R, V]]$ у рівнянні (1.28) складається з п'ятиоператорних членів, і деякі з них є небажаними. Зокрема, після впорядкування операторів у нормальному порядку виникають нові небажані три-

операторні внески. Однак ці члени вже мають порядок g^3 . Наступне унітарне перетворення тоді дозволяє усунути всі небажані члени третього порядку за g .

Продовжуючи цей процес, можна послідовно усувати з гамільтоніана небажані члени зростаючих порядків за сталою зв'язку g . Передбачається, що в границі умови i) та ii), які еквівалентні повній відсутності небажаних членів у K , будуть виконані.

Нарешті, якщо процедура одягання була б точною, результуюче представлення гамільтоніана K задовольняло б

$$K(\alpha_c)|k\rangle_c = H_F(\alpha_c)|k\rangle_c = \omega_{\mathbf{k}}|k\rangle_c, \quad (1.30)$$

де $|k\rangle_c = a_c^\dagger(k)|\Omega\rangle$. Іншими словами, перетворена частина взаємодії $K_I(\alpha_c) = K(\alpha_c) - H_F(\alpha_c)$ задовольняла б умову $K_I(\alpha_c)|k\rangle_c = 0$. Аналогічні співвідношення виконуються для фізичного вакууму $|\Omega\rangle$ та для одягнених одноферміонних і одноантиферміонних станів.

РОЗДІЛ 2

КЕД у зображенні одягнених частинок

У цьому розділі ми застосовуємо формалізм УОП до квантової електродинаміки (КЕД) – квантової теорії поля, що описує взаємодію електрон-позитронного поля з електромагнітним (фотонним) полем. Через калібрувальну інваріантність КЕД необхідно накласти умову фіксації калібрування перед побудовою оператора гамільтоніана. Упродовж цієї роботи ми використовуємо кулонівське калібрування, у якому фотонне поле A^μ є поперечним і, як наслідок, має лише два незалежні поляризаційні ступені вільності.

2.1 Основні означення та необхідні відомості

Перш за все введемо позначення для ферміонних операторів. Зручно об'єднати оператори електрона та позитрона у двокомпонентний об'єкт

$$F(p, \mu) = \begin{pmatrix} F_1(p, \mu) \\ F_2(p, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(p, \mu) \\ d^\dagger(p_-, \mu) \end{pmatrix}, \quad F^\dagger(p, \mu) = \left(b^\dagger(p, \mu), \quad d(p_-, \mu) \right), \quad (2.1)$$

який задовольняє канонічні антикомутативні співвідношення

$$\{F_i(p', \mu'), F_j^\dagger(p, \mu)\} = E_{\mathbf{p}} \delta_{ij} \delta_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.2)$$

Тут ми використовуємо оператори $b(p, \mu)$, $d(p, \mu)$ та $c(k, \sigma)$, які можна визначити через звичайні оператори народження та знищення за допомогою співвідношень

$$b(p, \mu) = \sqrt{E_{\mathbf{p}}} b(\mathbf{p}, \mu), \quad d(p, \mu) = \sqrt{E_{\mathbf{p}}} d(\mathbf{p}, \mu), \quad c(k, \sigma) = \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}} c(\mathbf{k}, \sigma). \quad (2.3)$$

Відповідні комутаційні співвідношення мають вигляд

$$\begin{aligned} \{b(p, \mu), b^\dagger(p', \mu')\} &= E_{\mathbf{p}} \delta_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \\ \{d(p, \mu), d^\dagger(p', \mu')\} &= E_{\mathbf{p}} \delta_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \\ [c(k, \sigma), c^\dagger(k', \sigma')] &= \omega_{\mathbf{k}} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Після цього визначимо дублет біспінорів

$$\begin{aligned} U(p, \mu) &= \begin{pmatrix} U_1(p, \mu) \\ U_2(p, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(p, \mu) \\ v(p_-, \mu) \end{pmatrix}, \\ \bar{U}(p, \mu) &= \begin{pmatrix} \bar{U}_1(p, \mu) \\ \bar{U}_2(p, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}(p, \mu) \\ \bar{v}(p_-, \mu) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

У цих позначеннях оператор ферміонного поля можна записати як

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mu} \int \frac{d\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}} (u(p, \mu)b(p, \mu) + v(p_-, \mu)d^{\dagger}(p_-, \mu))e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \\ &= \frac{\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mu} \int \frac{d\mathbf{p}}{p^0} \sum_{j=1}^2 U_j(p, \mu)F_j(p, \mu)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де біспінори Дірака нормовані як у книзі Бйоркена і Дрелла [22] та мають такі властивості

$$\sum_{\mu} u(p, \mu)\bar{u}(p, \mu) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad \sum_{\mu} v(p, \mu)\bar{v}(p, \mu) = \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (2.7)$$

Фотонне поле розкладається як

$$A^{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} [e^{\mu}(k, \sigma)c(k, \sigma) + e^{*\mu}(k_-, \sigma)c^{\dagger}(k_-, \sigma)] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (2.8)$$

а вектори поляризації у кулонівському калібруванні задовольняють

$$\sum_{\sigma} e^{\mu}(k, \sigma)e^{*\nu}(k, \sigma) = P^{\mu\nu}(k) \quad (2.9)$$

з тензором поляризації

$$P^{ij} = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2}, \quad P^{0i} = P^{00} = 0, \quad (2.10)$$

який можна записати у коваріантній формі

$$P^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^0(k^{\mu}n^{\nu} + k^{\nu}n^{\mu}) - k^{\mu}k^{\nu} - k^2 n^{\mu}n^{\nu}}{|\mathbf{k}|^2}, \quad (2.11)$$

з постійним вектором $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ та $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$, де k_0 є цілком довільним.

2.2 Гамільтоніан КЕД у кулонівському калібруванні

У цьому підрозділі ми будуємо генератор унітарного перетворення одягання, який визначається як

$$W = e^R, \quad W^\dagger = e^{-R}, \quad R^\dagger = -R. \quad (2.12)$$

Позначимо множину голих операторів знищення та народження через α , а множину одягнених операторів – через α_c . Припустимо, що кожен конкретний одягнений оператор пов'язаний зі своїм голим відповідником співвідношенням

$$\alpha_{cp} = W^\dagger(\alpha_c)\alpha_p W(\alpha_c). \quad (2.13)$$

Тоді для гамільтоніана можна записати

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= H(W(\alpha_c)\alpha_c W^\dagger(\alpha_c)) = K(\alpha_c) \\ &= W(\alpha_c)H(\alpha_c)W^\dagger(\alpha_c) = e^{R(\alpha_c)}H(\alpha_c)e^{-R(\alpha_c)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для обчислення цього виразу ми використовуємо формулу Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа,

$$K = H + [R, H] + \frac{1}{2!}[R, [R, H]] + \frac{1}{3!}[R, [R, [R, H]]] + \dots \quad (2.15)$$

Метою перетворення одягання є усунення „небажаних членів“ у гамільтоніані взаємодії, тобто тих членів, які змінюють число частинок і перешкоджають коректній інтерпретації станів. У найнижчому порядку ця вимога приводить до умови

$$[R, H_F] = -V, \quad (2.16)$$

де H_F – вільний гамільтоніан, а V – оператор взаємодії.

Далі гамільтоніан взаємодії можна записати у вигляді (тут $e < 0$)

$$V = e \int d^3x : \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\rho \psi(\mathbf{x}) : A_\mu(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Підставляючи розклади полів (2.6) та (2.8) у (2.17) та інтегруючи за x , отримуємо

$$V = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{p}}{p^0} \frac{d\mathbf{p}'}{p'^0} \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{m}{\sqrt{2}} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}') \times \sum_{i,j=1}^2 :F_i^{\dagger}(p', \mu') \bar{U}_i(p', \mu') \not{\epsilon}(k, \sigma) U_j(p, \mu) F_j(p, \mu): [c(k, \sigma) + c^{\dagger}(k, \sigma)] . \quad (2.18)$$

Після цього виділяємо

$$V = \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} :F^{\dagger} V^k F: c(k, \sigma) + H.c. = \mathcal{V} + \mathcal{V}^{\dagger}, \quad (2.19)$$

з матричними елементами

$$V_{ij}^k(p' \mu'; p \mu) = \frac{em}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}') \bar{U}_i(p', \mu') \not{\epsilon}(k, \sigma) U_j(p, \mu). \quad (2.20)$$

Ми шукаємо генератор R в аналогічній формі

$$R = \mathcal{R} - \mathcal{R}^{\dagger}, \quad \mathcal{R} = \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} :F^{\dagger} R^k F: c(k, \sigma). \quad (2.21)$$

Підставляючи цей анзац у рівняння (2.16) та використовуючи діагональний вигляд вільного гамільтоніана, знаходимо, що матричні елементи R однозначно визначаються як

$$R_{ij}^k(p' \mu'; p \mu) = \frac{V_{ij}^k(p' \mu'; p \mu)}{(-1)^{i-1} E_{\mathbf{p}'} - (-1)^{j-1} E_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}}}. \quad (2.22)$$

Ця структура забезпечує те, що внесок першого порядку $[R, H_F]$ точно компенсує взаємодію V . У результаті перетворений гамільтоніан K більше не містить „небажаних членів“ у найнижчому порядку.

2.3 Формфактори та струм Нетер

Тепер перейдемо до отримання формфакторів електрона з матричних елементів електромагнітного струму. Діраківський F_1 та паулівський F_2 формфактори виникають при розгляді матричних елементів оператора густини

електрон-позитронного струму $J^\rho(0) = e:\bar{\psi}(0)\gamma^\rho\psi(0):$ між одноферміонними (електронними) вхідними (вихідними) станами, а саме,

$$F^\rho(p'\mu'; p\mu) = \langle p'\mu'; \text{out} | J^\rho(0) | p\mu; \text{in} \rangle. \quad (2.23)$$

У випадку електронів маємо

$$F^\rho(p'\mu'; p\mu) = \frac{em}{(2\pi)^3} \bar{u}(p', \mu') \left(F_1(q^2)\gamma^\rho + i\frac{\sigma^{\rho\lambda}q_\lambda}{2m}F_2(q^2) \right) u(p, \mu), \quad (2.24)$$

$$q = p' - p.$$

Для того, щоб обчислити матричний елемент з рівняння (2.24), тепер побудуємо оператор струму за допомогою того самого унітарного перетворення, що й для гамільтоніана. Оператор струму отримується як

$$J^\rho(\alpha_c) = e^{R(\alpha_c)} J_c^\rho(\alpha_c) e^{-R(\alpha_c)}, \quad (2.25)$$

де $J_c^\rho(\alpha_c)$ є первинним оператором струму, в якому всі голі оператори замінені відповідними одягненими операторами:

$$J_c^\rho(0) = e:\bar{\psi}(0)\gamma^\rho\psi(0): = :F^\dagger j^\rho F:, \quad (2.26)$$

де матричні елементи мають вигляд

$$j_{ij}^\rho(p'\mu'; p\mu) = \frac{em}{(2\pi)^3} \bar{U}_i(p', \mu') \gamma^\rho U_j(p, \mu). \quad (2.27)$$

Використовуючи розклад Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, запишемо

$$J^\rho(0) = J_c^\rho(0) + [R, J_c^\rho(0)] + \frac{1}{2}[R, [R, J_c^\rho(0)]] + \dots. \quad (2.28)$$

Спочатку обчислимо комутатор $[R, J_c^\rho(0)]$. Використовуючи загальну тожність для білінійних ферміонних операторів,

$$[:F^\dagger\Gamma_1F:, :F^\dagger\Gamma_2F:] = F^\dagger[\Gamma_1, \Gamma_2]F, \quad (2.29)$$

отримуємо

$$[R, J_c^\rho(0)] = \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} F^\dagger [R^k, j^\rho] F c(k, \sigma) + H.c., \quad (2.30)$$

де матричний комутатор задається як

$$[R^k, j^\rho]_{ij}(p'\mu'; p\mu) = \sum_s \int \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \sum_{l=1}^2 \left[R_{il}^k(p'\mu'; qs) j_{lj}^\rho(qs; p\mu) - j_{il}^\rho(p'\mu'; qs) R_{lj}^k(qs; p\mu) \right]. \quad (2.31)$$

Тепер перейдемо до другого комутатора, що входить до (2.28). Використовуючи $R = \mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger$, отримуємо

$$[R, [R, J_c^\rho(0)]] = [R, [\mathcal{R}, J^\rho(0)]] + H.c. \quad (2.32)$$

Тоді для першого доданку маємо

$$[R, [\mathcal{R}, J_c^\rho(0)]] = \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \left([R, F^\dagger [R^k, j^\rho] F] c(k, \sigma) + F^\dagger [R^k, j^\rho] F [R, c(k, \sigma)] \right). \quad (2.33)$$

Для комутаторів під інтегралом отримуємо

$$\begin{aligned} [R, F^\dagger [R^k, j^\rho] F] &= [\mathcal{R}, F^\dagger [R^k, j^\rho] F] - [\mathcal{R}^\dagger, F^\dagger [R^k, j^\rho] F] \\ &= \sum_{\sigma'} \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'^0} \left(F^\dagger [R^{k'}, [R^k, j^\rho]] F c(k', \sigma') - F^\dagger [R^{k'\dagger}, [R^k, j^\rho]] F c^\dagger(k', \sigma') \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

та

$$[R, c(k, \sigma)] = [\mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger, c(k, \sigma)] = [c(k, \sigma), \mathcal{R}^\dagger] = :F^\dagger R^{k\dagger} F:. \quad (2.35)$$

Збираючи всі члени разом, оператор струму до другого порядку набуває ви-

ГЛЯДУ

$$\begin{aligned}
J^\rho(0) = & :F^\dagger j^\rho F: + \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} F^\dagger [R^k, j^\rho] F c(k, \sigma) + H.c. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{d\mathbf{k}'}{k'^0} F^\dagger [R^k, [R^{k'}, j^\rho]] F c(k, \sigma) c(k', \sigma') \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{d\mathbf{k}'}{k'^0} F^\dagger [R^{k^\dagger}, [R^{k'}, j^\rho]] F c^\dagger(k, \sigma) c(k', \sigma') \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} F^\dagger [R^k, j^\rho] F :F^\dagger R^{k^\dagger} F: + H.c.,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

де подвійний комутатор має явну матричну структуру

$$\begin{aligned}
& [R^k, [R^{k'}, j^\rho]]_{ij}(p' \mu'; p \mu) \\
& = \sum_{s, s'} \int \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \frac{d\mathbf{q}'}{q'^0} \sum_{l, n=1}^2 \left[R_{il}^k(p' \mu'; qs) [R^{k'}, j^\rho]_{ln}(qs; q' s') \delta_{nj} \right. \\
& \quad \left. - [R^{k'}, j^\rho]_{il}(p' \mu'; qs) R_{lj}^k(qs; p \mu) \right].
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Таким чином, одягнений струм набуває поправок, що містять одно- та двофотонні оператори, які відповідають ефектам взаємодії вищих порядків, породженим перетворенням одягання. Однак не всі члени в операторному розкладі дають ненульові матричні елементи між одночастинковими станами. Оскільки ці стани належать сектору з нульовою кількістю фотонів, лише ті члени, що містять однакову кількість операторів народження та знищення фотонів – які можуть бути спарені за допомогою стягнень – дають внесок у кінцевий результат. Отже, ми зосереджуємо наш аналіз на таких компонентах струму

$$J^\rho(0) \approx :F^\dagger j^\rho F: + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} F^\dagger [R^k, j^\rho] F :F^\dagger R^{k^\dagger} F: + H.c. \tag{2.38}$$

2.4 Аналіз членів оператора струму, що зникають в одночастинковому секторі

Перед обчисленням матричних елементів одягненого струму корисно проаналізувати його операторну структуру та відкинути члени, які зникають

між одночастинковими станами. Ми розглядаємо матричні елементи вигляду $\langle \mathbf{p}', \mu' | J^\rho(0) | \mathbf{p}, \mu \rangle$, де для електрона

$$|p, \mu\rangle = b^\dagger(p, \mu)|\Omega\rangle, \quad \langle p', \mu'| = \langle \Omega|b(p', \mu') \quad (2.39)$$

та аналогічно для позитрона. Вакуумний стан знищується всіма операторами знищення,

$$b(p, \mu)|\Omega\rangle = 0, \quad d(p, \mu)|\Omega\rangle = 0, \quad c(k, \sigma)|\Omega\rangle = 0. \quad (2.40)$$

Тому будь-який член у $J^\rho(0)$, який містить оператор знищення, що діє на $|\Omega\rangle$ зліва, або оператор народження, що діє на $\langle \Omega|$ справа, дає нульовий внесок. Таким чином, виживають лише ті операторні структури, в яких усі оператори знищення можуть бути скорочені з операторами народження всередині матричного елемента.

Почнемо з розгляду одноелектронних станів та аналізу структури білінійної форми $:F^\dagger Z F:$, де Z є матричним оператором 2×2 за індексами F -матриці. Розклад цієї форми дає

$$:F^\dagger Z F: = b^\dagger Z_{11}b + b^\dagger Z_{12}d^\dagger + dZ_{21}b + d^\dagger Z_{22}d. \quad (2.41)$$

Щоб визначити члени, які дають внесок у перехід $\langle p', \mu' | J_c^\rho(0) | p, \mu \rangle$, ми подаємо оператор у нормально впорядкованій формі. Ми бачимо, що член $b^\dagger Z_{11}b$ дає основний ненульовий внесок, члени $b^\dagger Z_{12}d^\dagger$ та $dZ_{21}b$ дають нуль при обчисленні між одноелектронними станами через ортогональність секторів простору Фока, а позитронний член $d^\dagger Z_{22}d$ тотожно зникає, оскільки у початковому стані немає позитронів, які можна було б знищити. Отже, ефективний оператор для обчислення електронних формфакторів зводиться до

$$\langle p', \mu' | :F^\dagger Z F: | p, \mu \rangle = \langle p', \mu' | b^\dagger Z_{11}b | p, \mu \rangle. \quad (2.42)$$

Далі ми поширюємо цей аналіз на добуток двох білінійних форм $(F^\dagger X F)(:F^\dagger Y F:)$. Використовуючи розклад (2.41) для обох операторів, ми визначаємо комбінації, які дають ненульові внески між одноелектронними станами. Як було встановлено, виживають лише ті операторні структури, які можуть бути зведені до членів типу $b^\dagger b$ шляхом скорочень або містять ваку-

умні s -числові внески. Застосовуючи антикомутаторні співвідношення (2.4), знаходимо, що ефективні внески походять від таких трьох типів членів:

$$b^\dagger X_{11} b b^\dagger Y_{11} b = b^\dagger X_{11} Y_{11} b + \text{член типу } b^\dagger b^\dagger b b, \quad (2.43)$$

$$dX_{21} b b^\dagger Y_{12} d^\dagger = \text{Tr}(X_{21} Y_{12}) - b^\dagger X_{21} Y_{12} b + \text{член типу } b^\dagger d^\dagger b d + \text{член типу } d^\dagger d, \quad (2.44)$$

$$dX_{22} d^\dagger b^\dagger Y_{11} b = b^\dagger Y_{11} b \text{Tr}(X_{22}) + \text{член типу } b^\dagger d^\dagger b d, \quad (2.45)$$

де ми використовуємо означення

$$\text{Tr}(A_{ij}) = \sum_{\mu} \int \frac{d\mathbf{p}}{p^0} A_{ij}(p\mu; p\mu). \quad (2.46)$$

Підсумовуючи ці внески, матричний елемент в одноелектронному секторі можна записати як

$$\begin{aligned} \langle p', \mu' | F^\dagger X F : F^\dagger Y F : | p, \mu \rangle = \\ \langle p', \mu' | b^\dagger X_{11} Y_{11} b - b^\dagger X_{21} Y_{12} b + b^\dagger Y_{11} b \text{Tr}(X_{22}) | p, \mu \rangle + \text{Tr}(X_{21} Y_{12}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Варто зазначити, що члени, які містять нерівну кількість операторів народження та знищення для кожного типу частинок (наприклад, $b^\dagger b b^\dagger d^\dagger$), тотожно зникають між одночастинковими станами через ортогональність різних секторів простору Фока. Далі ми підставляємо $X \rightarrow [R^k, j^\rho]$, $Y \rightarrow R^{k\dagger}$ та $Z \rightarrow j^\rho$ і отримуємо для електрона

$$\begin{aligned} F(p'\mu'; p\mu) = & j_{11}(p'\mu'; p\mu) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s,\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \left([R^k, j]_{11}(p'\mu'; qs) R_{11}^{k\dagger}(qs; p\mu) \right. \\ & - R_{12}^{k\dagger}(p'\mu'; qs) [R^k, j]_{21}(qs; p\mu) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} R_{11}^{k\dagger}(p'\mu'; p\mu) \text{Tr}([R^k, j]_{22}) \\ & + \frac{1}{2} p^0 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\mu\mu'} \sum_{\sigma} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \text{Tr}([R^k, j]_{21} R_{12}^{k\dagger}) \\ & \left. + (p'\mu' \leftrightarrow p\mu)^* \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Перехід до системи Брейта може значно спростити розрахунки. Вона задає-

ться як

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{q}}{2}, \quad \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{q}}{2}. \quad (2.49)$$

Для відповідних чотири-векторів маємо

$$p'^\rho = \left(E_{\frac{\mathbf{q}}{2}}, \frac{\mathbf{q}}{2} \right), \quad p^\rho = \left(E_{\frac{\mathbf{q}}{2}}, -\frac{\mathbf{q}}{2} \right), \quad (2.50)$$

звідки випливає

$$q^\rho = p'^\rho - p^\rho = (0, \mathbf{q}). \quad (2.51)$$

Розглядаючи визначення (2.31), отримуємо

$$\begin{aligned} & [R^k, j]_{ij}(p'\mu'; p\mu) \\ &= \sum_s \int \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \sum_{l=1}^2 \left[\frac{V_{il}^k(p'\mu'; qs)}{(-1)^{i+1}E_{\mathbf{p}'} - (-1)^{l+1}E_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}}} j_{lj}(qs; p\mu) \right. \\ & \quad \left. - j_{il}(p'\mu'; qs) \frac{V_{lj}^k(qs; p\mu)}{(-1)^{l+1}E_{\mathbf{q}} - (-1)^{j+1}E_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}}} \right] \\ &= \frac{em}{(2\pi)^3} \frac{e}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \bar{U}_i(p', \mu') \left[\gamma^\nu \frac{\not{p}'_i - \not{k} + m}{(p'_i - k)^2 - m^2} \gamma^\rho \right. \\ & \quad \left. + \gamma^\rho \frac{\not{p}_j + \not{k} + m}{(p_j + k)^2 - m^2} \gamma^\nu \right] U_j(p, \mu) e_\nu(k, \sigma), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $p_i = ((-1)^{i+1} E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ і аналогічно p_j . Після підстановки (2.52) в (2.48) маємо

$$\begin{aligned}
F(p'\mu'; p\mu) &= j_{11}(p'\mu'; p\mu) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{e^2 m^2}{2(2\pi)^3} \sum_s \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \left(\frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q})}{p^0 - q^0 - k^0} \bar{u}(p', \mu') \right. \\
&\times \left(\gamma^\nu \frac{\not{p}'_1 - \not{k} + m}{(p'_1 - k)^2 - m^2} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\not{q}_1 + \not{k} + m}{(q_1 + k)^2 - m^2} \gamma^\nu \right) u(q, s) \bar{u}(q, s) \gamma^\alpha \\
&\times u(p, \mu) + \frac{\delta(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{p}')}{p'^0 + q^0 + k^0} \bar{u}(p', \mu') \gamma^\alpha v(q_-, s) \bar{v}(q_-, s) \\
&\times \left. \left(\gamma^\nu \frac{\not{q}_2 - \not{k} + m}{(q_2 - k)^2 - m^2} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\not{p}_1 + \not{k} + m}{(p_1 + k)^2 - m^2} \gamma^\nu \right) u(p, \mu) \right) P_{\nu\alpha}(k) \quad (2.53) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{e^2 m^2}{2(2\pi)^3} \sum_s \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \frac{d\mathbf{q}}{q^0} \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{p}')}{p^0 - p'^0 - k^0} \bar{u}(p', \mu') \gamma^\alpha u(p, \mu) \bar{v}(q_-, s) \\
&\times \left(\gamma^\nu \frac{\not{q}_2 - \not{k} + m}{(q_2 - k)^2 - m^2} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\not{q}_2 + \not{k} + m}{(q_2 + k)^2 - m^2} \gamma^\nu \right) v(q_-, s) P_{\nu\alpha}(k) \\
&+ \frac{1}{2} p^0 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\mu\mu'} \sum_\sigma \int \frac{d\mathbf{k}}{k^0} \text{Tr} \left([R^k, j]_{21} R_{12}^{k\dagger} \right) \\
&+ (p'\mu' \leftrightarrow p\mu)^*.
\end{aligned}$$

Використовуючи цей вираз, можна отримати числові значення формфакторів електрона для радіаційних поправок за допомогою процедури розрахунку, представленій в Розділі 3.

РОЗДІЛ 3

Обчислення електромагнітних формфакторів електрона

Тепер перейдемо до безпосереднього обчислення електромагнітних формфакторів електрона. Основним завданням цього розділу є визначення діраківського $F_1(q^2)$ та паулівського $F_2(q^2)$ формфакторів шляхом розкладу спірної структури матричних елементів струму за базисом матриць Паулі. Розглянемо спершу загальний метод такого розкладу, а потім виконаємо обчислення в першому наближенні за константою зв'язку.

3.1 Розклад за базисом матриць Паулі

Наша мета полягає у визначенні F_1 та F_2 шляхом розкладу матричного елемента за базисом матриць Паулі. Для цього ми розглядаємо загальну структуру

$$\bar{u}(p', \mu') \Gamma u(p, \mu) = A(p', p) \delta_{\mu'\mu} + \mathbf{B}(p', p) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mu'\mu}. \quad (3.1)$$

Ми підставляємо явний вигляд діраківських біспінорів

$$u(p, \mu) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} |\mu\rangle \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} |\mu\rangle \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(p', \mu') = u^\dagger(p', \mu') \gamma^0, \quad (3.2)$$

та переписуємо матричний елемент $\bar{u}(p', \mu') \Gamma u(p, \mu)$ через двокомпонентні спінори. Використовуючи блочну структуру γ -матриць у зображенні Дірака, будь-який добуток $(\not{p} + m)$ природним чином діє на ці біспінори, дозволяючи виразити повну спірну структуру як оператор, що діє у просторі Паулі. Далі зауважимо, що будь-яка матриця 2×2 у спіновому просторі може бути розкладена за базисом $\{\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}\}$, так що

$$\bar{u}(p', \mu') \Gamma u(p, \mu) = \langle \mu' | [A(p', p) \mathbb{1} + \mathbf{B}(p', p) \cdot \boldsymbol{\sigma}] | \mu \rangle, \quad (3.3)$$

що відтворює наведений вигляд. Можна знайти

$$A(p', p) = \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m) \Gamma (\not{p} + m) (1 + \gamma^0)]}{8m \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}(p', p) = \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m)\Gamma(\not{p} + m)(1 + \gamma^0) \gamma \gamma^5]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}, \quad (3.5)$$

що дає

$$F_1 = \frac{(2\pi)^3}{em} \frac{A^\rho B_{2,i}^\rho - B^\rho A_2^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}, \quad F_2 = \frac{2(2\pi)^3}{e} \frac{B^\rho A_1^\rho - A^\rho B_{1,i}^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}. \quad (3.6)$$

після проєкції на фіксовану компоненту i . Точне виведення цих формул наведено в Додатку Б.

3.2 Обчислення $F_1(q^2)$ та $F_2(q^2)$ у першому наближенні

Розглянемо матричний елемент

$$j_{11}^\rho(p' \mu'; p \mu) = \frac{em}{(2\pi)^3} \bar{u}(p', \mu') \gamma^\rho u(p, \mu). \quad (3.7)$$

та визначимо для нього формфактори Дірака та Паулі. Для цього будемо використовувати стандартний розклад вершинної функції за незалежними лоренц-коваріантними структурами

$$\Gamma^\rho(p', p) = \frac{em}{(2\pi)^3} \left(F_1(q^2) \gamma^\rho + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \sigma^{\rho\nu} q_\nu \right), \quad q = p' - p. \quad (3.8)$$

У випадку струму j_{11}^ρ маємо

$$\Gamma^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \gamma^\rho. \quad (3.9)$$

Почнемо з обчислення величин A^ρ та B_i^ρ для струму. Підставляючи (3.9) у формулу (3.4), отримуємо

$$A^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m)] + \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^0]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (3.10)$$

Тепер окремо обчислимо кожен слід. Перший слід має вигляд

$$T_1^\rho = \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m)]. \quad (3.11)$$

Розкриваючи дужки, одержуємо

$$T_1^\rho = \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p}] + m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p}] + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho]. \quad (3.12)$$

Слід непарної кількості гамма-матриць дорівнює нулю, тому

$$\text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p}] = 0, \quad \text{Tr} [\gamma^\rho] = 0. \quad (3.13)$$

Отже,

$$T_1^\rho = m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p}] + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho]. \quad (3.14)$$

Використовуючи тотожність

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

одержуємо

$$\text{Tr} [\gamma^\rho \not{p}] = p_\mu \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\mu] = 4p^\rho, \quad (3.16)$$

$$\text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho] = p'_\mu \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho] = 4p'^\rho. \quad (3.17)$$

Таким чином,

$$T_1^\rho = 4m(p^\rho + p'^\rho). \quad (3.18)$$

Тепер перейдемо до другого сліду

$$T_2^\rho = \text{Tr} [(\not{p}' + m)\gamma^\rho(\not{p} + m)\gamma^0]. \quad (3.19)$$

Розкриваючи дужки, маємо

$$\begin{aligned} T_2^\rho &= \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \gamma^0] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^0] \\ &= \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^0] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^0]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

На цьому етапі скористаємося стандартною формулою для сліду чотирьох гамма-матриць

$$\text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta] = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}). \quad (3.21)$$

Використовуючи формулу (3.21), обчислимо перший доданок у виразі (3.20).
Маємо

$$\begin{aligned}\text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^0] &= p'_\alpha p_\beta \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^0] = 4p'_\alpha p_\beta (g^{\alpha\rho} g^{\beta 0} - g^{\alpha\beta} g^{\rho 0} + g^{\alpha 0} g^{\rho\beta}) \\ &= 4(p'^\rho p^0 - (p' \cdot p) g^{\rho 0} + p'^0 p^\rho) .\end{aligned}\quad (3.22)$$

Другий доданок у (3.20) легко обчислюється:

$$m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^0] = 4m^2 g^{\rho 0} .\quad (3.23)$$

Таким чином,

$$T_2^\rho = 4(p'^\rho p^0 + p'^0 p^\rho - (p' \cdot p) g^{\rho 0} + m^2 g^{\rho 0}) .\quad (3.24)$$

Підставляючи результати (3.18) та (3.24) у формулу (3.10), одержуємо

$$A^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \frac{m(p^\rho + p'^\rho) + (p'^\rho p^0 + p'^0 p^\rho - (p' \cdot p) g^{\rho 0} + m^2 g^{\rho 0})}{2m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} .\quad (3.25)$$

Тепер перейдемо до обчислення величини B_i^ρ . Відповідно до (3.5),

$$\begin{aligned}B_i^\rho &= \frac{em}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^i \gamma^5]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} \\ &\quad + \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^0 \gamma^i \gamma^5]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} .\end{aligned}\quad (3.26)$$

Позначимо

$$X_i^\rho = \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^i \gamma^5] ,\quad (3.27)$$

$$Y_i^\rho = \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] .\quad (3.28)$$

Тоді

$$B_i^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \frac{X_i^\rho + Y_i^\rho}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} .\quad (3.29)$$

Почнемо з величини X_i^ρ . Розкриваючи дужки, маємо

$$X_i^\rho = \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^i \gamma^5] + m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p} \gamma^i \gamma^5] + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \gamma^i \gamma^5] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^i \gamma^5] .\quad (3.30)$$

Тут необхідно врахувати важливу властивість: слід ненульовий лише тоді, коли разом із γ^5 присутні рівно чотири гамма-матриці. Тому

$$\text{Tr} [\gamma^\rho \not{p} \gamma^i \gamma^5] = 0, \quad \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \gamma^i \gamma^5] = 0, \quad \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^i \gamma^5] = 0. \quad (3.31)$$

Отже,

$$X_i^\rho = \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^i \gamma^5]. \quad (3.32)$$

Використаємо стандартну тотожність

$$\text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^5] = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.33)$$

Тоді

$$X_i^\rho = p'_\alpha p_\beta \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^i \gamma^5] = -4i p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta i}. \quad (3.34)$$

Тепер перейдемо до величини Y_i^ρ . Маємо

$$\begin{aligned} Y_i^\rho &= \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \not{p} \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] + m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p} \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] \\ &\quad + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] \\ &= m \text{Tr} [\gamma^\rho \not{p} \gamma^0 \gamma^i \gamma^5] + m \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\rho \gamma^0 \gamma^i \gamma^5]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для обчислення виразу (3.35) знову використаємо тотожність (3.33). Тоді

$$Y_i^\rho = -4im (p_\beta \varepsilon^{\rho\beta 0i} + p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\rho 0i}). \quad (3.36)$$

Тепер підставимо результати (3.34) та (3.36) у формулу (3.29). Одержуємо

$$B_i^\rho = -\frac{em}{(2\pi)^3} \frac{i p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta i} + im (p_\beta \varepsilon^{\rho\beta 0i} + p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\rho 0i})}{2m \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (3.37)$$

Таким чином, для струму $\Gamma^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \gamma^\rho$ ми повністю визначили коефіцієнти A^ρ та B_i^ρ ((3.25) та (3.37)). Тепер необхідно окремо побудувати величини A_1^ρ , A_2^ρ , $B_{1,i}^\rho$ та $B_{2,i}^\rho$, які відповідають двом незалежним лоренцовим структурам

$$\Gamma_1^\rho = \gamma^\rho, \quad \Gamma_2^\rho = \frac{i}{2m} \sigma^{\rho\nu} q_\nu. \quad (3.38)$$

Для першої структури все вже фактично обчислено. Оскільки $\Gamma_1^\rho = \frac{(2\pi)^3}{em} \Gamma^\rho$,

то безпосередньо маємо

$$A_1^\rho = \frac{(2\pi)^3}{em} A^\rho, \quad (3.39)$$

$$B_{1,i}^\rho = \frac{(2\pi)^3}{em} B_i^\rho. \quad (3.40)$$

Тоді переходимо до другої незалежної структури. Нагадаємо означення

$$\sigma^{\rho\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\nu]. \quad (3.41)$$

Тоді

$$\Gamma_2^\rho = \frac{i}{2m} \cdot \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\nu] q_\nu = -\frac{1}{4m} [\gamma^\rho, \gamma^\nu] q_\nu = -\frac{1}{4m} (\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\rho) q_\nu. \quad (3.42)$$

Тепер можемо перейти до обчислення

$$A_2^\rho = -\frac{q_\nu \text{Tr} [(\not{p}' + m)(\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\rho)(\not{p} + m)(1 + \gamma^0)]}{32m^2 \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (3.43)$$

Маємо

$$A_2^\rho = -\frac{q_\nu}{32m^2 \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} (T_a^{\rho\nu} - T_b^{\rho\nu}), \quad (3.44)$$

де

$$T_a^{\rho\nu} = \text{Tr} [(\not{p}' + m)\gamma^\rho \gamma^\nu (\not{p} + m)(1 + \gamma^0)], \quad (3.45)$$

$$T_b^{\rho\nu} = \text{Tr} [(\not{p}' + m)\gamma^\nu \gamma^\rho (\not{p} + m)(1 + \gamma^0)]. \quad (3.46)$$

Спочатку обчислимо $T_a^{\rho\nu}$. Користуючись тими ж співвідношеннями, отримуємо

$$\begin{aligned} T_a^{\rho\nu} = & 4m^2 g^{\rho\nu} + 4(p'^\rho p^\nu - (p' \cdot p) g^{\rho\nu} + p'^\nu p^\rho) \\ & + 4m \left[g^{\rho\nu} (p^0 + p'^0) + (p'^\rho - p^\rho) g^{\nu 0} + (p^\nu - p'^\nu) g^{\rho 0} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Тепер аналогічно обчислимо $T_b^{\rho\nu}$. Заміною $\gamma^\rho \gamma^\nu \rightarrow \gamma^\nu \gamma^\rho$ одержуємо

$$\begin{aligned} T_b^{\rho\nu} = & 4m^2 g^{\rho\nu} + 4(p'^\nu p^\rho - (p' \cdot p) g^{\rho\nu} + p'^\rho p^\nu) \\ & + 4m \left[g^{\rho\nu} (p^0 + p'^0) + (p'^\nu - p^\nu) g^{\rho 0} + (p^\rho - p'^\rho) g^{\nu 0} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Далі віднімемо (3.48) від (3.47). Всі симетричні доданки скорочуються:

$$T_a^{\rho\nu} - T_b^{\rho\nu} = 8m [(p'^\rho - p^\rho)g^{\nu 0} - (p'^\nu - p^\nu)g^{\rho 0}]. \quad (3.49)$$

Оскільки $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$, одержуємо

$$T_a^{\rho\nu} - T_b^{\rho\nu} = 8m (q^\rho g^{\nu 0} - q^\nu g^{\rho 0}). \quad (3.50)$$

Підставляючи це у (3.44), маємо

$$A_2^\rho = -\frac{1}{4m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}q_\nu (q^\rho g^{\nu 0} - q^\nu g^{\rho 0}). \quad (3.51)$$

Виконуючи згортку за індексом ν , остаточно отримуємо

$$A_2^\rho = -\frac{q^\rho q^0 - q^2 g^{\rho 0}}{4m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (3.52)$$

Тепер перейдемо до обчислення величини $B_{2,i}^\rho$, яка відповідає другій незалежній лоренцовій структурі. За означенням,

$$B_{2,i}^\rho = -\frac{q_\nu \text{Tr} [(\not{p}' + m)(\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\rho)(\not{p} + m)(1 + \gamma^0)\gamma^i \gamma^5]}{32m^2\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (3.53)$$

Для зручності введемо позначення

$$Z_a^{\rho\nu i} = \text{Tr} [(\not{p}' + m)\gamma^\rho \gamma^\nu (\not{p} + m)(1 + \gamma^0)\gamma^i \gamma^5], \quad (3.54)$$

$$Z_b^{\rho\nu i} = \text{Tr} [(\not{p}' + m)\gamma^\nu \gamma^\rho (\not{p} + m)(1 + \gamma^0)\gamma^i \gamma^5]. \quad (3.55)$$

Тоді

$$B_{2,i}^\rho = -\frac{q_\nu}{32m^2\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}(Z_a^{\rho\nu i} - Z_b^{\rho\nu i}). \quad (3.56)$$

Використовуючи формули для сліду добутків гамма-матриць знаходимо

$$\begin{aligned}
Z_a^{\rho\nu i} = 4i & \left[p'^\rho p_\beta \varepsilon^{\nu\beta 0i} - p'^\nu p_\beta \varepsilon^{\rho\beta 0i} + (p' \cdot p) \varepsilon^{\rho\nu 0i} - p'^0 p_\beta \varepsilon^{\rho\nu\beta i} \right. \\
& + p'^i p_\beta \varepsilon^{\rho\nu\beta 0} + g^{\rho\nu} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\beta 0i} - p'_\alpha p^\rho \varepsilon^{\alpha\nu 0i} \\
& + g^{\rho 0} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\nu\beta i} - g^{\rho i} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\nu\beta 0} + p'_\alpha p^\nu \varepsilon^{\alpha\rho 0i} \\
& - g^{\nu 0} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta i} + g^{\nu i} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta 0} + p^0 p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\rho\nu i} \\
& \left. - p^i p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\rho\nu 0} - m (p_\alpha \varepsilon^{\rho\nu\alpha i} + p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\rho\nu i}) - m^2 \varepsilon^{\rho\nu 0i} \right].
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Аналогічно визначається величина $Z_b^{\rho\nu i}$:

$$\begin{aligned}
Z_b^{\rho\nu i} = 4i & \left[p'^\nu p_\beta \varepsilon^{\rho\beta 0i} - p'^\rho p_\beta \varepsilon^{\nu\beta 0i} + (p' \cdot p) \varepsilon^{\nu\rho 0i} - p'^0 p_\beta \varepsilon^{\nu\rho\beta i} \right. \\
& + p'^i p_\beta \varepsilon^{\nu\rho\beta 0} + g^{\nu\rho} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\beta 0i} - p'_\alpha p^\nu \varepsilon^{\alpha\rho 0i} \\
& + g^{\nu 0} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta i} - g^{\nu i} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\rho\beta 0} + p'_\alpha p^\rho \varepsilon^{\alpha\nu 0i} \\
& - g^{\rho 0} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\nu\beta i} + g^{\rho i} p'_\alpha p_\beta \varepsilon^{\alpha\nu\beta 0} + p^0 p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\rho i} \\
& \left. - p^i p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\rho 0} - m (p_\alpha \varepsilon^{\nu\rho\alpha i} + p'_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu\rho i}) - m^2 \varepsilon^{\nu\rho 0i} \right].
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Тоді підставляючи в (3.56) та обчислюючи згортку з q_ν отримуємо

$$B_{2,i}^\rho = -\frac{ip'_\alpha p_\beta [(p'^\rho + p^\rho) \varepsilon^{\alpha\beta 0i} - 2m \varepsilon^{\rho\alpha\beta i}]}{4m^2 \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \tag{3.59}$$

Тепер виконаємо безпосередню підстановку отриманих результатів у проєкційні формули для формфакторів. Нагадаємо, що

$$F_1 = \frac{(2\pi)^3}{em} \frac{A^\rho B_{2,i}^\rho - B_i^\rho A_2^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho} \tag{3.60}$$

та

$$F_2 = \frac{2(2\pi)^3}{e} \frac{B_i^\rho A_1^\rho - A^\rho B_{1,i}^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}. \tag{3.61}$$

Для струму $\Gamma^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} \gamma^\rho$ було встановлено, що

$$A^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} A_1^\rho, \quad B_i^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} B_{1,i}^\rho. \tag{3.62}$$

Підставимо (3.62) у чисельник формули (3.60). Маємо

$$A^\rho B_{2,i}^\rho - B_i^\rho A_2^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} A_1^\rho B_{2,i}^\rho - \frac{em}{(2\pi)^3} B_{1,i}^\rho A_2^\rho. \quad (3.63)$$

Отже чисельник і знаменник у (3.60) повністю збігаються. Тому

$$F_1 = \frac{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho} = 1. \quad (3.64)$$

Таким чином, формфактор Дірака у першому наближенні дорівнює одиниці. Тепер перейдемо до формфактора Паулі. Використовуючи (3.62), чисельник у (3.61) набуває вигляду

$$B_i^\rho A_1^\rho - A^\rho B_{1,i}^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} B_{1,i}^\rho A_1^\rho - \frac{em}{(2\pi)^3} A_1^\rho B_{1,i}^\rho = 0. \quad (3.65)$$

Отже, остаточний результат для струму має вигляд

$$F_1(q^2) = 1, \quad F_2(q^2) = 0. \quad (3.66)$$

Це повністю узгоджується з фізичним змістом квантової електродинаміки. У першому наближенні електрон взаємодіє як точкова частинка з одиничним зарядом, що відображає безструктурність вершинної функції на деревному рівні. Ненульовий внесок у $F_2(q^2)$ виникає лише після врахування радіаційних поправок, тобто однопетльових та вищих квантових внесків. Знаходження явного вигляду коефіцієнтів $A_1^\rho, A_2^\rho, \mathbf{B}_1^\rho, \mathbf{B}_2^\rho$ не є необхідним кроком в процесі знаходження формфакторів Дірака та Паулі в першому наближенні, але без цього неможливо обійтися при розрахунку радіаційних поправок. Таким чином, метод унітарних одягаючих перетворень у першому наближенні відтворює відомий результат стандартної пертурбативної КЕД, підтверджуючи внутрішню узгодженість процедури одягання.

ВИСНОВКИ

У даній бакалаврській роботі було досліджено метод унітарних одягаючих перетворень та його застосування до квантової електродинаміки для опису електромагнітної структури лептонів. Основну увагу приділено побудові формалізму у зображенні одягнених частинок та обчисленню електромагнітних формфакторів електрона.

У першому розділі розглянуто концепцію одягнених частинок на прикладі моделі типу Юкави. Сформульовано вимоги до операторів одягнених частинок, які забезпечують відповідність вакууму та одночастинкових станів нового зображення фізичним станам взаємодіючої системи. Показано, що перехід від голих до одягнених операторів може бути реалізований за допомогою унітарного перетворення. Детально проаналізовано механізм усунення так званих „небажаних“ членів гамільтоніана, які порушують фізичну інтерпретацію вакууму та одночастинкових станів.

У другому розділі формалізм унітарних одягаючих перетворень було поширено на квантову електродинаміку в кулонівському калібруванні. Побудовано генератор одягаючого перетворення та отримано гамільтоніан КЕД у зображенні одягнених частинок. Також було виведено оператор електромагнітного струму Нетер у цьому зображенні та проаналізовано його операторну структуру. Показано, що для обчислення матричних елементів між одночастинковими станами достатньо враховувати лише певний клас операторних внесків, тоді як значна частина членів струму не робить внеску через властивості вакууму та ортогональність секторів простору Фока.

У третьому розділі розроблено процедуру безпосереднього виділення електромагнітних формфакторів на основі розкладу за базисом матриць Паулі. Отримано проєкційні формули для формфакторів Дірака та Паулі, які дозволяють визначати їх безпосередньо з матричних елементів струму. У першому наближенні виконано обчислення формфакторів одягненого електрона та встановлено, що

$$F_1(q^2) = 1, \quad F_2(q^2) = 0.$$

Отримані результати повністю узгоджуються з фізичним змістом квантової електродинаміки, оскільки в найнижчому порядку теорії електрон поводить ся як точкова частинка із зарядом e , а аномальний магнітний момент, що

визначається формфактором F_2 , виникає лише після врахування радіаційних поправок вищих порядків.

Таким чином, у роботі продемонстровано, що метод унітарних одягаючих перетворень може бути успішно застосований до задач квантової електродинаміки. Отримані результати підтверджують внутрішню узгодженість формалізму та створюють основу для подальших досліджень електромагнітних характеристик одягнених частинок з урахуванням радіаційних поправок вищих порядків, а також для можливого поширення даного підходу на складніші квантові теорії поля.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Wentzel, G. Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Wien : F. Deutliche, 1943.
- [2] Heitler, W. The Quantum Theory of Radiation. Oxford : Clarendon Press, 1954.
- [3] Shebeko, A. V., Shirokov, M. I. Unitary Transformations in Quantum Field Theory and Bound States. Physics of Particles and Nuclei 32 (2001), p. 31.
- [4] Greenberg, O., Schweber, S. Clothed Particle Operators in Simple Models of Quantum Field Theory. Nuovo Cimento 8 (1958), p. 378.
- [5] Schweber, S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York : Row, Peterson & Co., 1961.
- [6] Shirokov, M. I., Visinescu, M. M. Rev. Roum. Phys. 19 (1974), p. 461.
- [7] Shebeko, A. V., Shirokov, M. I. Relativistic Quantum Field Theory (RQFT) treatment of few-body systems. Nuclear Physics A 631 (1998), p. 564.
- [8] Shebeko, A. V., Shirokov, M. I. “Advances in Nuclear Physics and Related Areas”. *Proceedings of the European Conference on Advances in Nuclear Physics and Related Areas*. Conference held 8–12 July 1997. Thessaloniki : 1999, p. 292.
- [9] Shebeko, A. V., Shirokov, M. I. Clothing procedure in relativistic quantum field theory and its applications to description of electromagnetic interactions with nuclei (bound systems). Progress in Particle and Nuclear Physics 44 (2000), p. 75.
- [10] Glöckle, W., Müller, L. Relativistic theory of interacting particles. Physical Review C 23 (1981), p. 1183.
- [11] Sato, T. et al. Relativistic bound-state problem of a one-dimensional system. Journal of Physics G 17 (1991), p. 303.
- [12] Stefanovich, E. Quantum Field Theory without Infinities. Annals of Physics 292 (2001), p. 139.

- [13] Korda, V., Canton, L., Shebeko, A. Relativistic Interactions for the Meson-Two Nucleon System in the Clothed-Particle Unitary Representation. *Annals of Physics* 322 (2007).
- [14] Dubovyk, I., Shebeko, A. The method of unitary clothing transformations in the theory of nucleon-nucleon scattering. *Few-Body Systems* 48 (2010). arXiv:1012.5406 [nucl-th], pp. 109–142.
- [15] Dubovyk, E., Shebeko, A. Low-Energy Parameters of the Nucleon-Nucleon Scattering and Deuteron Properties. *Few-Body Systems* 54 (2013), p. 1513.
- [16] Shebeko, A. The Method of Unitary Clothing Transformations in Relativistic Quantum Field Theory: Recent Applications... *Few-Body Systems* 54 (2013), p. 2271.
- [17] Kamada, H., Shebeko, A., Arslanaliev, A. Triton Binding Energy of Kharkov Potential. *Few-Body Systems* 58 (2017), p. 70.
- [18] Shebeko, A. Clothed particles in mesodynamics, quantum electrodynamics and other field models. Dubna : JINR, 2014.
- [19] Shebeko, A. “Clothed Particles in Quantum Electrodynamics and Quantum Chromodynamics”. *EPJ Web of Conferences*. Vol. 113. 2016.
- [20] Arslanaliev, A., Y., Kostylenko, Shebeko, A. A New Family of Interactions between Clothed Particles in QED. *Ukr. J. Phys.* 66 (10) (2021), p. 833.
- [21] Y., Kostylenko, Shebeko, A. Clothed particle representation in quantum field theory: Fermion mass renormalization due to vector boson exchange. *Phys. Rev. D* 108 (2023), p. 125019.
- [22] Bjorken, D., Drell, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York : McGraw-Hill, 1964.

ДОДАТОК А

Генератор першого одягаючого перетворення $W = \exp R$ визначається з умови

$$[R, H_F] + V = 0. \quad (\text{A.1})$$

Для зручності введемо позначення

$$V^k(p'\mu', p\mu) \equiv \begin{pmatrix} V_{11}^k(p'\mu', p\mu) & V_{12}^k(p'\mu', p\mu) \\ V_{21}^k(p'\mu', p\mu) & V_{22}^k(p'\mu', p\mu) \end{pmatrix} = i \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{m}{\sqrt{2k^0 p^0 p'^0}} \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{p}') \begin{pmatrix} \bar{u}(p'\mu')\gamma_5 u(p\mu) & \bar{u}(p'\mu')\gamma_5 v(p-\mu) \\ \bar{v}(p'_-\mu')\gamma_5 u(p\mu) & \bar{v}(p'_-\mu')\gamma_5 v(p-\mu) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Антиермітовий оператор R має мати вигляд $R = \mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger$ з $\mathcal{R}$ заданим у рівнянні (1.27). Комутатор $[R, H_F]$ обраховується за допомогою співвідношень комутації (1.6) та (1.7). Таким чином ми отримуємо рівняння для коефіцієнтів R_{ij}^k з рівняння (1.27):

$$\begin{aligned} R_{11}^k(p'\mu', p\mu) &= \frac{V_{11}^k(p'\mu', p\mu)}{p'^0 - p^0 - k^0}, \\ R_{12}^k(p'\mu', p\mu) &= \frac{V_{12}^k(p'\mu', p\mu)}{p'^0 + p^0 - k^0}, \\ R_{21}^k(p'\mu', p\mu) &= \frac{V_{21}^k(p'\mu', p\mu)}{-p'^0 - p^0 - k^0}, \\ R_{22}^k(p'\mu', p\mu) &= \frac{V_{22}^k(p'\mu', p\mu)}{-p'^0 + p^0 - k^0}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Рівняння (A.3) дійсні лише тоді, коли знаменники в правій частині не дорівнюють нулю (помітимо, що $\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{p}' = 0$ випливає з (A.2)). Це вірно при умові $m_m < 2m_f$. Фізичний сенс цієї умови було розглянуто у підрозділі 1.4.

ДОДАТОК Б

Для виділення коефіцієнтів A та $\mathbf{B}$ ми використовуємо проєкційні тотожності у спіновому просторі. Взяття сліду за спіновими індексами усуває

матриці Паулі завдяки співвідношенню $\text{Tr } \sigma^i = 0$, що дає

$$A(p', p) = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \bar{u}(p', \mu) \Gamma u(p, \mu). \quad (\text{Б.1})$$

Використовуючи повноту спінових Дірака,

$$\sum_{\mu} u(p, \mu) \bar{u}(p, \mu) = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad (\text{Б.2})$$

і аналогічно для $\mathbf{p}'$, просумований вираз набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} \bar{u}(p', \mu') \Gamma u(p, \mu) \\ &= \frac{1}{2m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \Gamma (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Проектор $(1 + \gamma^0)/2$ виникає при виборі компонент додатної енергії, узгоджених з обраним нормуванням спінових, тоді як множник $1/2m \times \sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}$ з'являється внаслідок нормування біспінових. Розв'язуючи відносно $A(p', p)$, отримуємо

$$A(p', p) = \frac{\text{Tr} [(\not{p}' + m) \Gamma (\not{p} + m) (1 + \gamma^0)]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (\text{Б.4})$$

Щоб виділити $\mathbf{B}$, ми множимо початковий розклад на σ^i та беремо слід. У системі спокою оператор спіну подається через $\gamma^i \gamma^5$, і ця ідентифікація залишається справедливою у коваріантній формі. Використовуючи це, знаходимо, що

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu, \mu'} \bar{u}(p', \mu') \Gamma u(p, \mu) (\sigma^i)_{\mu\mu'} \\ &= \frac{1}{2m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \Gamma (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma^i \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Порівнюючи з розкладом у просторі Паулі та використовуючи ортогональ-

ність σ^i , векторний коефіцієнт визначається як

$$\mathbf{B}(p', p) = \frac{\text{Tr}[(\not{p}' + m)\Gamma(\not{p} + m)(1 + \gamma^0)\boldsymbol{\gamma}\gamma^5]}{8m\sqrt{(E_{\mathbf{p}'} + m)(E_{\mathbf{p}} + m)}}. \quad (\text{Б.6})$$

Тепер застосуємо цей загальний результат до рівняння (2.24) та отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{em}{(2\pi)^3} F_1 \bar{u}(p', \mu') \gamma^\rho u(p, \mu) + \frac{eF_2}{2(2\pi)^3} \bar{u}(p', \mu') i\sigma^{\rho\nu} q_\nu u(p, \mu) \\ = A^\rho \delta_{\mu'\mu} + \mathbf{B}^\rho \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mu'\mu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Кожен доданок допускає власний розклад за матрицями Паулі,

$$\bar{u}(p', \mu') \gamma^\rho u(p, \mu) = A_1^\rho \delta_{\mu'\mu} + \mathbf{B}_1^\rho \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mu'\mu}, \quad (\text{Б.8})$$

$$\bar{u}(p', \mu') i\sigma^{\rho\nu} q_\nu u(p, \mu) = A_2^\rho \delta_{\mu'\mu} + \mathbf{B}_2^\rho \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mu'\mu}. \quad (\text{Б.9})$$

Тоді

$$A^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} F_1 A_1^\rho + \frac{eF_2}{2(2\pi)^3} A_2^\rho, \quad \mathbf{B}^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} F_1 \mathbf{B}_1^\rho + \frac{eF_2}{2(2\pi)^3} \mathbf{B}_2^\rho. \quad (\text{Б.10})$$

Проектуючи на фіксовану компоненту i , отримуємо лінійну систему,

$$A^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} F_1 A_1^\rho + \frac{eF_2}{2(2\pi)^3} A_2^\rho, \quad B_i^\rho = \frac{em}{(2\pi)^3} F_1 B_{1,i}^\rho + \frac{eF_2}{2(2\pi)^3} B_{2,i}^\rho, \quad (\text{Б.11})$$

з якої випливає

$$F_1 = \frac{(2\pi)^3}{em} \frac{A^\rho B_{2,i}^\rho - B_i^\rho A_2^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}, \quad F_2 = \frac{2(2\pi)^3}{e} \frac{B_i^\rho A_1^\rho - A^\rho B_{1,i}^\rho}{A_1^\rho B_{2,i}^\rho - B_{1,i}^\rho A_2^\rho}. \quad (\text{Б.12})$$