

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет комп'ютерних наук
Кафедра теоретичної та прикладної системотехніки

«Затверджую»

Зав. кафедри теоретичної та
прикладної системотехніки

_____ д.т.н., проф. С. І. Шматков
«___» _____ 2023 р

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної роботи
магістра

на тему: «Програмна модель роботи з диференційним приводом».

Захищено на засіданні
Атестаційної комісії № 42
протокол № __ від __.12.2023 р.
Оцінка _____ / _____
Голова Атестаційної комісії
_____ Скоб О. Ю.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Виконала:
студента групи КУ– 61
Галузь знань: 15 – Автоматизація та
приладобудування
Спеціальність: 151 – «Автоматизація та
комп'ютерно-інтегровані технології»
Бережний Артем Андрійович
(прізвище, ім'я та по батькові)

_____ (підпис)

Керівник:
к.ф.-м.н., доцент
Котвицький Альберт Тадуешевич
(прізвище, ім'я та по батькові)

_____ (підпис)

Рецензент:

_____ (підпис)

АНОТАЦІЯ

Пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи магістра складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і двох додатків. Загальний обсяг роботи складає 86 сторінки, із яких 62 сторінка основної частини з 13 рисунками, 20 найменуваннями списку використаних джерел та трьома додатками.

Об'єкт дослідження – процес управління програмною моделлю робота.

Предмет дослідження – математичні моделі руху, які дозволяють проводити дослідження розробленого руху для програмної моделі.

Завдання, яке вирішується в кваліфікаційній роботі полягає в тому, щоб скориставшись розробленою програмною моделлю двоколісного робота з певними вхідними даними побудувати розроблений рух та оцінити ефективність керування.

Область застосування – керування роботами, у різних галузях, таких як промисловість, медицина та транспорт тощо.

Ключові слова: Wolfram Mathematica, кінематична модель, математична модель, диференційний привід, модель робота.

ABSTRACT

An explanatory note to the master's attestation work is created in the introduction, three sections, conclusions, a list of sources used and three additional substances.

The total volume of work is 86 pages, of which 62 pages of the main part with 13 figures, 20 names of the list of used sources and four additions. The purpose of the qualification work is increasing the efficiency of the computer system by taking into account the operator's competencies.

The task, which is solved in the qualification work, is to use the given characteristics of the control system to make an assessment and draw conclusions to improve the robot model.

The field of application is the calculation and construction of the motion of a robot with differential drives with different input characteristics, which can be used in the future in industry, medicine, transport, etc.

Keywords: Wolfram Mathematica, kinematic model, mathematical model, differential drive, robot model.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	8
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ТА РОЗРОБКА КІНЕМАТИЧНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З ТРЬОМА СТУПЕНЯМИ.....	9
1.1. Аналіз основних принципів побудови кінематичної моделі.....	9
1.2. Побудова кінематичної моделі рухомої платформи	11
Висновки за розділом 1.....	15
РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ТА РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ДЛЯ МОДЕЛІ РОБОТА.....	16
2.1. Аналіз основних принципів побудови математичних моделей.....	16
2.2. Розробка математичних моделей руху двоколісної моделі робота з диференціальними приводами	18
2.2.1. Рівноприскорений рух.....	18
2.2.2. Круговий рух з постійною кутовою швидкістю.....	19
2.2.3. Круговий рух з різною постійною кутовою швидкістю.....	20
2.2.4. Прямолінійний рух з постійним кутовим прискоренням.....	23
2.2.5. Приклад 5 Рух по спіралі, що закручується.....	24
2.2.6. Приклад 6 Рух по спіралі, мій варіант.....	29
Висновки за розділом 2.....	38
РОЗДІЛ 3 КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ ПРАЦЕСПРОМОЖНОСТІ І ГОТОВНОСТІ СИСТЕМИ.....	40
3.1. Аналіз основних принципів роботи Wolfram Mathematica.....	40
3.2. Побудова траєкторій руху програмної моделі.....	41
3.2.1 Побудова траєкторії руху робота 1.....	43
3.2.2 Побудова траєкторії руху робота 2.....	49
3.3. Побудова траєкторії руху робота 1 та 2 з використанням ламаної кривої.....	55

3.4. Порівняння програмної моделі робота з аналогом.....	62
Висновки за розділом 3.....	64
ВИСНОВКИ.....	65
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	67
ДОДАТКИ.....	70

ВСТУП

Робот – це механізм, здатний виконувати завдання в неструктурованому середовищі без постійного контролю з боку людини. Повністю автономні роботи мають такі характеристики:

- збирають дані про навколишнє середовище;
- можуть працювати протягом тривалого часу без втручання оператора;
- включають в себе блоки маніпуляторів, шасі та інші пристрої для взаємодії з навколишнім середовищем.

Під час роботи автономні роботи можуть набувати або отримувати нові можливості, наприклад, нові алгоритми виконання завдань або адаптуватися до мінливого середовища шляхом перепрограмування мікросхем безпосередньо на платі. Автономні роботи потребують регулярного технічного обслуговування, які будь-яка інша машина.

Розвиток робототехніки призводить до постійної модифікації рішень в області управління. Завдання автоматизації та створення нових і оптимізованих алгоритмів керування покладається навчених і розробників програмного забезпечення. Зі зрозумілих причин не завжди є можливість протестувати щойно винайдені методи роботи на реальному обладнанні. Крім того, використання симуляторів не завжди є найкращим рішенням, оскільки вони складні в налаштуванні та потребують часу на адаптацію. Основний виклик полягав у створенні відповідного посередника між користувачем і симулятором.

Сучасні галузі та підприємства активно використовують різноманітних промислових роботів для автоматизації повторюваних завдань і процесів, покращуючи якість і повторюваність. Технологічний прогрес дозволив створити мобільних роботів, здатних виконувати завдання, які людина не може виконати в умовах підвищеної небезпеки або в ситуаціях, коли людський організм має обмежену продуктивність і можливості.

Тема дослідження: програмні моделі роботів з диференціальним приводом

Методи дослідження: використано методи математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Дослідження, аналіз та статистична обробка результатів експериментальних досліджень за допомогою прикладної програми Wolfram Mathematica.

Актуальність теми дослідження: у сучасній техніці та робототехніці все більшого значення набуває розробка програмних моделей для керування роботами з диференціальним приводом. Роботи з диференціальним приводом мають широкий спектр функцій та застосувань, від мобільних роботів до систем промислової автоматизації. Програмні моделі, які можуть ефективно керувати такими роботами, є важливим елементом для розвитку науки робототехніки та її застосувань у різних галузях, таких як промисловість, медицина та транспорт.

Мета роботи: основною метою даної роботи є розробка та аналіз програмної моделі для керування роботом з диференціальним приводом. Дослідження спрямоване на вдосконалення та оптимізацію алгоритмів керування та розробку нових підходів у робототехніці.

Науковий інтерес: кінематичні обчислювальні процеси для роботів з диференціальним приводом.

Завдання дослідження

- Розглянути різновиди систем з різними ступенями свободи
- Провести аналіз та розробку кінематичних рівнянь для обраної спеціальної системи.
- Провести аналіз основних складових функціонування об'єкта в період експлуатації, розробити математичні моделі рухів для МР.
- Розробити комп'ютерну реалізацію робота з диференційними приводами оцінки готовності та порівняння з аналогічними рухомими платформами, виявлення переваг та недоліків системи.

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

MP	—	модель роботу;
KM	—	кінематична модель;
WM	—	Wolfram Mathematica;
TP	—	траєкторія руху;
MM	—	математична модель;

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ТА РОЗРОБКА КІНЕМАТИЧНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З ТРЬОМА СТУПЕНЯМИ.

1.1 Аналіз основних принципів побудови кінематичної моделі.

У фізиці кінематика - це розділ механіки, який вивчає методи опису руху об'єктів без урахування їхньої маси, сил, що діють на них, або причин їхнього руху.

Основні поняття

За час свого розвитку зміст механіки як науки про рух матеріальних точок і абсолютно твердих тіл зі швидкостями значно розширився. Серед інших, поняттями сучасної кінематики є наступні ступені свободи абсолютно твердого тіла або системи матеріальних точок. Механічний рух - часові зміни положення матеріального тіла, матеріальної точки або його частини в просторі відносно інших тіл. Для них прикладом служать рух небесних тіл і рух літальних апаратів, рух машин і механізмів різного призначення, деформація елементів конструкцій і споруд, рух рідин і газів, вібрація матеріальних тіл, у тому числі вібрація земної кори і водойм під впливом Місяця - прямолінійний, криволінійний, обертальний, поступальний, рівноприскорений (рівносповільнений), нерівноприскорений, плоский тощо.

Кінематика руху матеріальної точки:

Траєкторія – це неперервна лінія в русі точки.

Швидкість – це векторна величина, що характеризує швидкість переміщення об'єкту, а також напрямок руху матеріальної точки в просторі відносно обраної системи відліку.

Прискорення – це векторна величина, яка показує, змінення вектора швидкості точки за одиницю часу.

Тіло відліку – це тіло відносно якого розглядається певний рух.

Система відліку – це утворюється тілом відліку або системою нерухомих один відносно інших тіл відліку, системою координат, що пов'язана з тілом відліку, та синхронізовані між собою годинниками, які можуть бути розташовані в будь-якій точці простору, пов'язаній із системою відліку. Такі як рухомі та нерухомі, інерціальні та не інерціальні.

Система координат – це спосіб визначення положення матеріальної точки за допомогою числових та інших символів. Введення відповідної системи координат означає введення системи домовленостей проте, як присвоїти "адресу" кожній точці системи відліку. Кожна точка системи відліку має власну "адресу", відмінну від інших точок, і кожна "адреса" відповідає лише одній точці системи відліку.

Залежно від властивостей досліджуваного матеріального тіла, що рухається, розрізняють кінематику:

- Матеріальної точки (матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з характерними відстанями між тілами);

- Абсолютно твердого тіла (тіло, відстань між двома будь-якими точками якого не змінюється, тобто воно не деформується);

- Середовища, що деформується (пружно або пластично), та рідин і газів.

Основні задачі кінематики: визначення закону руху (положення матеріального тіла, що рухається, у будь-який момент часу) та знаходження кінематичних рівнянь руху — швидкості та прискорення з визначеними початковими умовами. Крім того, кінематика вивчає складні (складені) рухи матеріальної точки або абсолютно твердого тіла, тобто рухи, що здійснюються відносно декількох систем відліку, які взаємно переміщуються.

Залежно від того, чи будуть функції координат, швидкості та прискорення задані аналітично, чисельно (таблицями) або графічно, для вирішення задач кінематики застосовують аналітичні, чисельні або графічні методи. Математичний опис механічного руху в кінематиці здійснюють за допомогою

методів геометрії, алгебри, диференціального та інтегрального числення, варіаційного числення, диференціальної геометрії тощо.

1.2 Побудова кінематичної моделі рухомої платформи

Припустимо, що робот складається з ідеальної твердої основи, на якій встановлена співвісна колісна пара з диференціальним приводом. Також вважаємо, що колеса, що управляють, мають точковий контакт з плоскою поверхнею, по якій вони рухаються без прослизання. Стан робота (двоколійної платформи) на площині визначається трьома змінними: декартовими координатами x та y базової точки A , яка розташована на осі обертання коліс і рівновіддалена від них обох, а також кутом φ між вектором швидкості базової точки і позитивним напрямом осі абсцис (див. Рис.1.1).

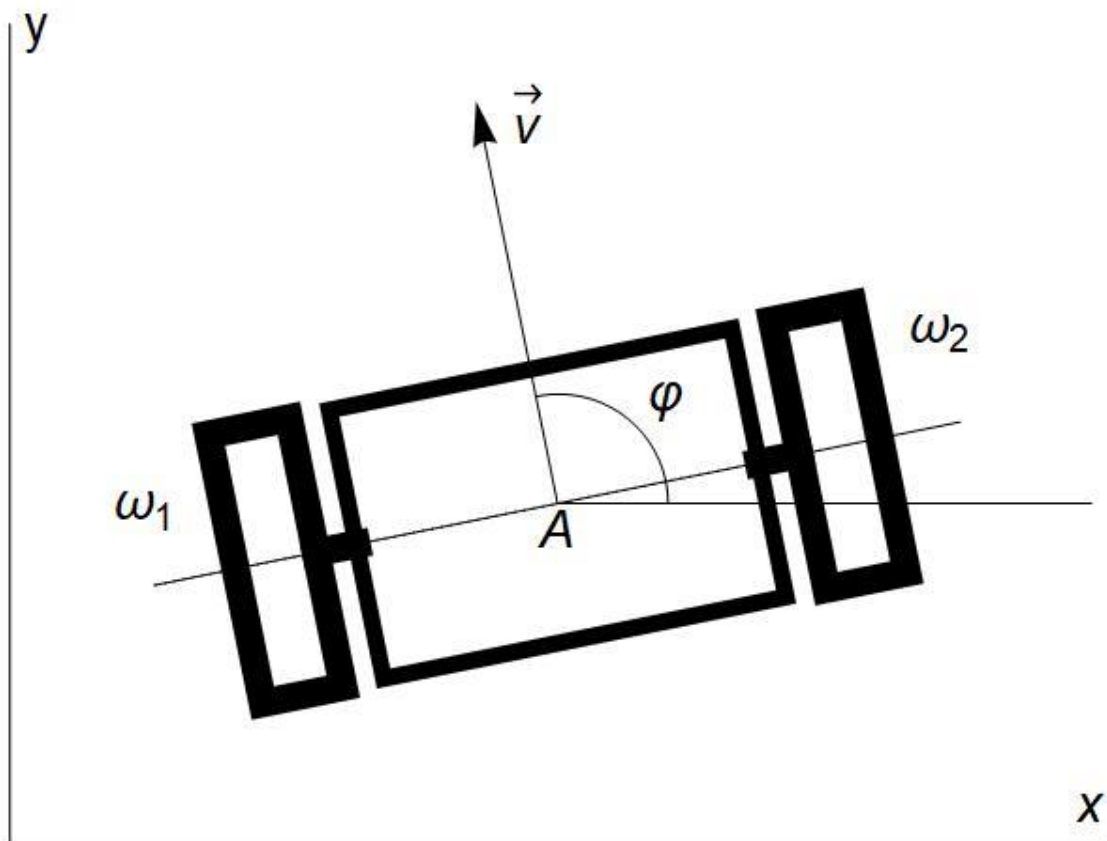


Рис.1.1. Кінематична схема двоколійного робота

Управління роботом здійснюється зміною кутових швидкостей обертання ω_1 і ω_2 , що у свою чергу призводить до зміни лінійних швидкостей руху коліс. Очевидно, що лінійні та кутові швидкості коліс пов'язані співвідношеннями

$$v_i = \omega_i r, \quad (1.1)$$

де $i = 1, 2$ і відповідає номеру колеса - радіус колеса.

Розкладемо швидкість $\vec{v}$ на компоненти v_x, v_y вздовж відповідних осей

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y, \quad (1.2)$$

де $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ поодинокі орти. Тоді

$$\begin{cases} v_x = v \cdot \cos \phi \\ v_y = v \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (1.3)$$

Щоб визначити, як швидкості v_1, v_2 кожного з коліс пов'язані зі швидкістю v базової точки A зобразимо рисунок 1.2.

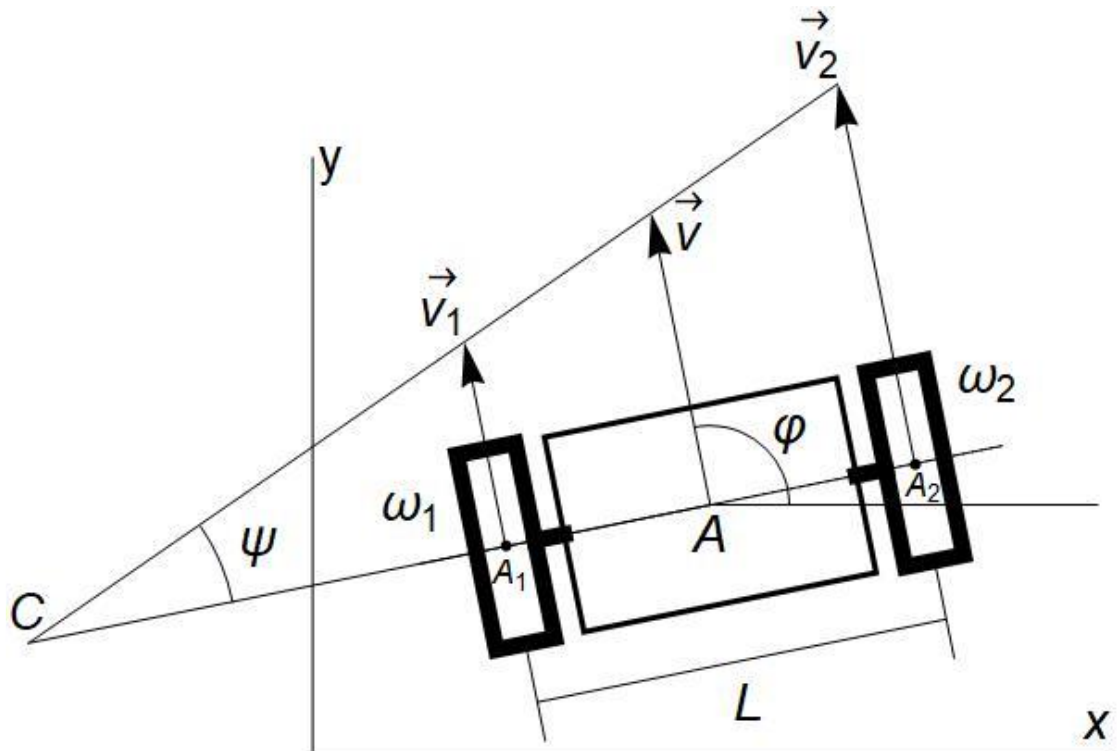


Рис.1.2. Розрахунок кінематичних залежностей двокісного робота

Розглядаючи цей малюнок, ми бачимо, що швидкості v_1, v_2 і v пов'язані лінійно. Більше того, платформа як ціле обертається навколо центру обертання точки C з кутовою швидкістю $\Omega = \dot{\psi}$. Якщо швидкості v_1, v_2 залежать від часу, то C є миттєвим центром обертання. У будь-якому випадку радіус обертання визначається відрізком

$$R = A_1C + L/2, \quad (1.4)$$

де L – відстань між центрами коліс.

Так як базова точка A знаходиться, за визначенням, по центру між точками A_1 та A_2 (див. рис.1.2), то швидкість v залежить від v_1, v_2 як

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (1.5)$$

Цю саму формулу можна отримати і з фізичних міркувань. Швидкості v_1, v_2 та v пов'язані з кутовою швидкістю обертання платформи Ω наступним чином

$$\begin{aligned} v_1 &= \Omega \cdot A_1C \\ v &= \Omega \cdot (A_1C + L/2) \\ v_2 &= \Omega \cdot (A_1C + L) \end{aligned}. \quad (1.6)$$

Формулу (1.6) можна переписати як

$$v = \Omega \cdot \frac{2A_1C + L}{2} = \frac{\Omega \cdot A_1C + \Omega \cdot (A_1C + L)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad (1.7)$$

що збігається з (5).

Знайдемо зв'язок між кутовою швидкістю Ω та лінійними швидкостями v_1, v_2 . З рис.1.2 випливає що

$$\frac{A_1 C}{v_1} = \frac{A_1 C + L}{v_2} \quad . \quad (1.8)$$

Тоді отримуємо

$$\frac{A_1 C}{v_1} - \frac{A_1 C}{v_2} = \frac{L}{v_2} \Rightarrow A_1 C \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{L}{v_2} \quad . \quad (1.9)$$

Остаточно знаходимо

$$A_1 C = \frac{v_1 L}{v_2 - v_1} \quad . \quad (1.10)$$

З урахуванням (1.6) маємо

$$\Omega = \frac{v_1}{A_1 C} = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad . \quad (1.11)$$

Вираз для радіусу повороту знаходиться з (1.4) та (1.10)

$$R = \frac{v_1 L}{v_2 - v_1} + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \left(\frac{2v_1}{v_2 - v_1} + \frac{v_2 - v_1}{v_2 - v_1} \right) = \frac{L}{2} \frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1} \quad . \quad (1.12)$$

Зауважимо, що якщо швидкості коліс однакові $v_1 = v_2$, то кутова швидкість обертання робота як цілого дорівнює нулю, а радіус повороту прагне нескінченності, що відповідає руху вздовж прямої.

Зазначимо ще такий факт. Ми вважаємо, що платформа повертає (здійснює обертання певний кут) як тверде тіло. Це означає, що з повороту на кут $d\psi$ всі вектори жорстко пов'язані з твердим тілом, наприклад $\vec{v}$, також повертаються цей кут, тобто $d\psi = d\phi$. Звідси слідує що

$$\Omega = \dot{\psi} = \dot{\phi} \quad . \quad (1.13)$$

Таким чином враховуючи (3), (11) та (13) отримуємо кінематичні рівняння руху двоколісного робота

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos \phi \\ \dot{y} = v \cdot \sin \phi \\ \dot{\phi} = (v_2 - v_1)/L \end{cases} . \quad (1.14)$$

Вираз (14) можна переписати з урахуванням (1.1) та (1.5) у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega_1(t) + \omega_2(t)}{2} r \cdot \cos \phi(t) \\ \dot{y} = \frac{\omega_1(t) + \omega_2(t)}{2} r \cdot \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} = \frac{r}{L} (\omega_2(t) - \omega_1(t)) \end{cases} . \quad (1.15)$$

Отриману систему рівнянь (1.15) можна знайти в ряді робіт, так як управління мобільним роботом здійснюється за допомогою зміни кутових швидкостей обертання коліс $\omega_1(t)$ та $\omega_2(t)$ від часу.

Висновки за розділом 1

У першому розділі були розглянуті основні принципи опису кінематики, як науки для подальшого розрахунку кінематичних залежностей рухомої платформи. Було розроблено кінематичну модель враховуючи кінематичні залежності та виявлено необхідні припущення для проведення подальших розрахунків, розробки необхідних математичних моделей руху для моделі робота та їх подальших обчислень.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ ТА РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ДЛЯ МОДЕЛІ РОБОТА.

2.1 Аналіз основних принципів побудови математичних моделей.

Етапи створення математичної моделі

Основою моделювання є методологія системного аналізу. Це дає змогу досліджувати систему, яка проектується або аналізується, за технологією операційного дослідження, включаючи такі взаємопов'язані етапи:

- 1) вивчення об'єкта моделювання;
- 2) концептуальне визначення проблеми;
- 3) математичне формулювання проблеми;
- 4) вибір та обґрунтування методів розв'язання задачі;
- 5) реалізація математичної моделі за допомогою комп'ютерної програми;
- 6) перевірка достовірності моделі;
- 7) практичне застосування та аналіз результатів моделювання;

На першому етапі виконуються наступні завдання. Виявлення факторів, що впливають на поведінку об'єкта, збір та перевірка експериментальних даних на аналогічних об'єктах (або на одному і тому ж об'єкті), огляд літератури та аналіз раніше створених моделей, узагальнення накопиченого матеріалу, розробка загального плану створення математичної моделі. Результатом є технічне завдання на розробку моделі.

Другий етап - концептуальна постановка задачі. Це перелік ключових питань і набір гіпотез з точки зору певної галузі науки.

Третій етап - математичне формулювання проблеми, тобто набір математичних співвідношень, що описують поведінку об'єкта. Математичне формулювання також включає в себе

- 1) контроль екстремальних умов;
- 2) контроль граничних умов;

- 3) контроль фізичного тлумачення;
- 4) математичні залежності (має бути розв'язок задачі).

При розробці програмної реалізації моделі визначається інструмент програмування, тобто мова програмування або пакет. Наприклад, можна використовувати загальну мову програмування, таку як C або PASCAL, або спеціальні інструменти моделювання (Arena, Automod, Extend, GPSS, iThink тощо). Перевагами використання мов програмування є те, що вони, як відомо, дешевші у придбанні, а час запуску моделей з їх допомогою коротший. З іншого боку, використання програмного забезпечення для моделювання допомагає скоротити час програмування та загальні витрати на проект.

Спеціалізовані пакети для моделювання включають MATLAB з його інтерактивним модулем Simulink, пакет MATLAB – це всесвітньо визнане універсальне середовище з відкритим вихідним кодом, а також мова програмування та інструменти для обчислень, візуалізації, програмування та моделювання. Моделі програмуються, налагоджуються, тестуються за допомогою еталонних даних та аналізуються на чутливість, щоб визначити, які елементи моделі мають значний вплив на продуктивність системи і потребують дуже точного моделювання.

Після кожного з перерахованих вище етапів модель перевіряється на достовірність. Верифікація передбачає визначення відповідності моделі системі, що моделюється, тобто на скільки система і модель ізоморфні. Верифікація – це процес перевірки того, чи модель (а не комп'ютерна програма) точно представляє систему для даної дослідницької мети. Валідація – це логіко-методологічна процедура встановлення правильності наукової гіпотези на основі емпіричних даних або узгодження емпіричних даних з відповідними теоретичними положеннями.

На заключному етапі (практичне використання та аналіз результатів моделювання) надаються рекомендації щодо вдосконалення моделі, тобто створення нової моделі.

2.2 Розробка математичних моделей руху двоколісної моделі робота з диференціальним приводом

Знаючи залежність швидкостей $\omega_1(t)$ і $\omega_2(t)$ від часу визначити траєкторію руху. По суті, пряме завдання кінематики — це інтегрування системи (1.15). У методичних цілях розбиратимемо рішення поставленої задачі на простих прикладах, а потім наведемо загальне рішення.

По-перше зауважимо, що кутові швидкості ω_1 і ω_2 можуть бути як позитивними так і негативними. Знаки вибиратимемо наступним чином: якщо обертання колеса таке, що воно призводить до руху робота вперед, то вважаємо $\omega_i > 0$, в іншому випадку $\omega_i < 0$. Також якщо $\omega_2 > \omega_1$, то $\Omega > 0$, Що відповідає повороту всієї платформи проти годинникової стрілки навколо центру повороту, точки C .

2.2.1 Рівноприскорений рух.

Як перший приклад розглянемо обертання коліс у позитивному напрямку з однаковою швидкістю $\omega_2 = \omega_1 = \omega = const$, яка не залежить від часу. Тоді система (1.15) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega r \cdot \cos \phi \\ \dot{y} = \omega r \cdot \sin \phi \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} . \quad (2.1)$$

Інтегрування третього рівняння елементарно

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int \frac{d\phi}{dt} dt = \int d\phi = \phi_0 = const . \quad (2.2)$$

Фізично це означає, що вектор швидкості $\vec{v}$ не змінює свого напрямку. Підставляючи (2.2) у перше та друге рівняння системи (2.1) отримуємо

$$\begin{cases} x = \int \dot{x} dt = \int \omega r \cdot \cos \phi_0 dt = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_0 \\ y = \int \dot{y} dt = \int \omega r \cdot \sin \phi_0 dt = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_0 \end{cases}$$

$$. \quad (2.3)$$

Зазначимо, що вирази $\omega r \cos \phi_0$ і $\omega r \sin \phi_0$ є константи, таким чином вираз (2.3) задає рівняння прямої в параметричному вигляді. З одержаних виразів очевидно, що компоненти швидкості руху платформи, точніше базової точки A є

$$\begin{cases} v_x = \omega r \cdot \cos \phi_0 \\ v_y = \omega r \cdot \sin \phi_0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

а сама швидкість визначається виразом

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r, \quad (2.5)$$

що, втім, було очевидним відразу. Підсумовуючи вищевикладене, отримуємо, що в цьому випадку робот рухається прямолінійно з постійною швидкістю як по модулю, так і у напрямку.

2.2.2 Круговий рух з постійною кутовою швидкістю.

Тепер розглянемо рухи робота у разі обертання коліс у різних напрямках з однаковою постійною кутовою швидкістю ω . Нехай для певності $\omega_2 = \omega$, $\omega_1 = -\omega$. Тоді (1.15) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{\phi} = 2 \frac{r}{L} \omega \end{cases}. \quad (2.6)$$

Інтегрування першого та другого рівнянь у (2.6) елементарно

$$\begin{cases} x = \int \dot{x} dt = \int \frac{dx}{dt} dt = \int dx = x_0 \\ y = \int \dot{y} dt = \int \frac{dy}{dt} dt = \int dy = y_0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

де x_0, y_0 - початкові (постійні) координати точки A .

Інтегрування третього рівняння дає

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int 2 \frac{r}{L} \omega dt = 2 \frac{r}{L} \omega \cdot t + \phi_0, \quad (2.8)$$

де ϕ_0 - початковий напрямок вектора швидкості $\vec{v}$. Таким чином, ми приходимо до висновку, що в цьому випадку робот обертається навколо нерухомої точки А з позитивною (тобто проти годинникової стрілки) постійною кутовою швидкістю

$$\Omega = 2 \frac{r}{L} \omega. \quad (2.9)$$

Зауважимо, що у разі $\omega_2 = -\omega$, $\omega_1 = \omega$ обертання здійснювалося б за годинниковою стрілкою, а $\Omega < 0$. Вираз (2.9) також цілком очевидним.

2.2.3 Круговий рух з різною постійною кутовою швидкістю.

Розглянемо рух робота у разі обертання коліс в одному напрямку з різними, але постійними кутовими швидкостями $\omega_1 \neq \omega_2$. Тоді (1.15) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \cdot \cos \phi \\ \dot{y} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \cdot \sin \phi \\ \dot{\phi} = \frac{r}{L} (\omega_2 - \omega_1) \end{cases}. \quad (2.10)$$

Інтегрування (2.10) почнемо з третього рівняння

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int \frac{r}{L} (\omega_2 - \omega_1) dt = \frac{r}{L} (\omega_2 - \omega_1) \cdot t + \phi_0 = \Omega \cdot t + \phi_0, \quad (2.11)$$

де $\Omega = \frac{r}{L} (\omega_2 - \omega_1)$ - постійна кутова швидкість обертання робота як цілого.

Підставляючи (2.11) у перше та друге рівняння (2.10) отримуємо

де $\Omega = \frac{r}{L}(\omega_2 - \omega_1)$ - постійна кутова швидкість обертання робота як цілого.

Підставляючи (2.11) у перше та друге рівняння (2.10) отримуємо

$$\begin{cases} x = \int \dot{x} dt = \int \omega_+ r \cdot \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) dt = \frac{\omega_+ r}{\Omega} \sin(\Omega \cdot t + \phi_0) + C_x \\ y = \int \dot{y} dt = \int \omega_+ r \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0) dt = -\frac{\omega_+ r}{\Omega} \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) + C_y \end{cases} \quad (2.12)$$

де $\omega_+ = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а C_x, C_y - координати точки C , тобто. центру повороту усієї платформи як цілого (див. рис.1.2).

Для простішого розуміння результату обчислень розберемо приклад № 3 на конкретних числах.

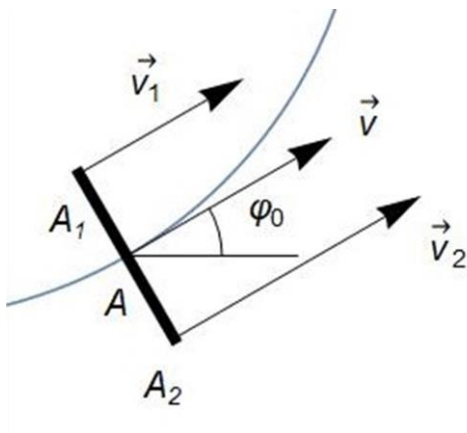


Рис.2.1. Схематичне завдання орієнтації двокілісного робота

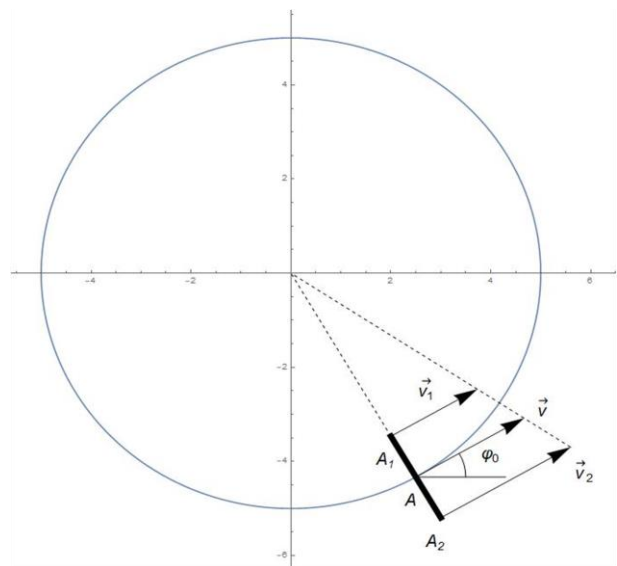


Рис.2.2. Початкове положення двокілісного робота та його траєкторія руху

Нехай робот має такі параметри $r = 1$, $L = 2$. Задамо кутові швидкості обертання $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, а початкове значення кута між швидкістю та позитивним напрямом осі абсцис приймемо рівним $\phi_0 = \pi/6$. Таким чином, ми повністю визначили орієнтацію робота на площині, однак таке розташування

платформи може здійснюватися в будь-якій точці площини (див. рис.2.1). Щоб однозначно поставити робота, нам потрібно або задати координати точки A , або координати центру обертання. Вираз (2.12) дає можливість повністю визначити траєкторію робота якщо задати координати центру обертання. Нехай $C_x = 0, C_y = 0$, тоді і початкове положення робота та його траєкторія, згідно (2.12), представлена на рисунку 2.2.

Вираз (2.12) визначає радіус повороту

$$R = \frac{\omega_+ r}{\Omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \frac{L}{r(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{L}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (2.13)$$

що збігається з (1.12), з урахуванням (1.1).

З практичних цілей зручніше в початковий час задавати не координати центру обертання, а координати x_0, y_0 початкової точки, тим паче, зазвичай, вони й відомі. Для того щоб висловити C_x, C_y через x_0, y_0 покладемо (2.12) $t = 0$ і враховуючи (2.13) маємо

$$\begin{cases} x_0 = R \sin(\phi_0) + C_x \\ y_0 = -R \cos(\phi_0) + C_y \end{cases}, \quad (2.14)$$

тоді

$$\begin{cases} C_x = x_0 - R \sin \phi_0 \\ C_y = y_0 + R \cos \phi_0 \end{cases}. \quad (2.15)$$

Підставляючи (30) (27) отримуємо

$$\begin{cases} x(t) = R \sin(\Omega \cdot t + \phi_0) + x_0 - R \sin \phi_0 \\ y(t) = -R \cos(\Omega \cdot t + \phi_0) + y_0 + R \cos \phi_0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Тепер, щоб побудувати рис.2.2 за формулою (2.16) необхідно поруч із тими самими значеннями параметрів покласти координати початкової точки $x_0 = 5/2, y_0 = 5\sqrt{3}/2$.

У прикладах під номерами 1,2,3 ми вважали, що кутова швидкість обертання коліс стала і змінюється згодом. Фізично очевидно, що робот, що спочатку покоївся, не може миттєво почати рухатися з деякою швидкістю. Тому на цьому етапі наступний випадок.

2.2.4 Прямолінійний рух з постійним кутовим прискоренням.

Обертання коліс у позитивному напрямку з постійним кутовим прискоренням. Причому нехай кутові швидкості обертання коліс є

$$\omega_2(t) = \omega_1(t) = \omega = \varepsilon t + \omega_0 \quad , \quad (2.17)$$

де ω_0 - початкове значення кутової швидкості коліс. Зауважимо, що значення кутового прискорення ε визначається експериментально виходячи з конструкційних особливостей робота, а початкова кутова швидкість для робота, що спочатку покоївся $\omega_0 = 0$. Тоді система (1.15) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = r \cdot (\varepsilon t + \omega_0) \cos \phi \\ \dot{y} = r \cdot (\varepsilon t + \omega_0) \sin \phi \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad . \quad (2.18)$$

З третього рівняння системи (2.18) випливає, що

$$\phi = \phi_0 = \text{const} \quad . \quad (2.19)$$

Тоді (2.18) зручно переписати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x(t) = (r\varepsilon \cos \phi_0)t + r\omega_0 \cos \phi_0 \\ \dot{y} = v_y(t) = (r\varepsilon \sin \phi_0)t + r\omega_0 \sin \phi_0 \end{cases} \quad . \quad (2.20)$$

Інтегрування (2.20) дає наступний результат

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_x t^2}{2} + v_{0x} t + x_0 \\ y(t) = \frac{a_y t^2}{2} + v_{0y} t + y_0 \end{cases} \quad , \quad (2.21)$$

де $a_x = r\varepsilon \cos \phi_0 = a \cos \phi_0$, $a_y = r\varepsilon \sin \phi_0 = a \sin \phi_0$ - компоненти прискорення вздовж відповідних координат; $v_{0x} = r\omega_0 \cos \phi_0 = v_0 \cos \phi_0$, $v_{0y} = r\omega_0 \sin \phi_0 = v_0 \sin \phi_0$ - швидкості вздовж відповідних координат; $a = r\varepsilon = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ - повне прискорення, $v_0 = r\omega_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ - початкова швидкість; x_0, y_0 - початкові координати точки A . Рівняння (2.19) і (2.21) показують, що робот буде рухатися вздовж прямої яка розташована під кутом ϕ_0 до осі абсцис з постійним прискоренням a .

2.2.5 Рух по спіралі, яка закручується.

Цей приклад навіяно такими фізичними міркуваннями. Нехай робот їде вперед прямолінійно із постійною швидкістю, див. приклад №1. Це відповідає обертанню коліс у позитивному напрямку з рівними та постійними кутовими швидкостями $\omega_1 = \omega_2 = \omega = const$. Попереду намічається плавний поворот радіусом R . Завдання ставиться так, щоб пройти цей поворот з тією ж лінійною швидкістю, що і при русі вздовж прямолінійної ділянки траєкторії. Майже очевидно відповіддю є те, що необхідно, наприклад, при повороті наліво, зменшити швидкість обертання першого колеса на $\Delta\omega$, при цьому швидкість обертання другого колеса на збільшити на ту саму величину $\Delta\omega$. Так як радіуси коліс однакові, то і лінійні швидкості зміняться відповідним чином на одну і ту ж величину Δv , лінійна швидкість базової точки A при цьому не зміниться, тому що згідно (1.5) маємо

$$v = \frac{v_1 - \Delta v + v_2 + \Delta v}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (2.22)$$

Але миттєво змінити швидкість неможливо, тому найпростіший варіант - це змінювати швидкості коліс з одним і тим самим постійним кутовим прискоренням ε , це призведе до того, що лінійна швидкість базової точки в будь-який момент часу буде та сама. Отже, маємо

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_0 - \varepsilon t \\ \omega_2(t) &= \omega_0 + \varepsilon t\end{aligned}, \quad (2.23)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість обертання коліс. Після того як кутові швидкості приймуть необхідні значення, ω_1, ω_2 потрібний радіус повороту (2.13) буде досягнутий і далі (певний час) не повинні змінюватися.

Підставляючи (2.23) у (1.15) отримуємо

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega_0 - \varepsilon t + \omega_0 + \varepsilon t}{2} r \cdot \cos \phi(t) \\ \dot{y} = \frac{\omega_0 - \varepsilon t + \omega_0 + \varepsilon t}{2} r \cdot \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} = \frac{r}{L} (\omega_0 + \varepsilon t - \omega_0 + \varepsilon t) \end{cases}.$$
(2.24)

Звідки

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_0 r \cdot \cos \phi(t) \\ \dot{y} = \omega_0 r \cdot \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} = 2 \frac{r}{L} \varepsilon t \end{cases}.$$
(2.25)

Інтегрування третього рівняння (2.25) дає

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int 2 \frac{r}{L} \varepsilon t dt = 2 \frac{r}{L} \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} + \phi_0 = \frac{r \varepsilon t^2}{L} + \phi_0 = \frac{\xi t^2}{2} + \phi_0,$$
(2.26)

де $\xi = \frac{2r\varepsilon}{L}$ - кутове прискорення робота як цілого.

Перше і друге рівняння (2.25) приводяться до вигляду

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \omega_0 r \cdot \cos \left(\frac{\xi t^2}{2} + \phi_0 \right) dt \\ \int_{y_0}^y dy = \int_0^t \omega_0 r \cdot \sin \left(\frac{\xi t^2}{2} + \phi_0 \right) dt \end{cases}.$$
(2.27)

На жаль, проінтегрувати (2.27) у елементарних функціях неможливо. Підінтегральні вирази (2.27) можна звести інтегралам Френеля $C(z), S(z)$, які визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} C(z) &= \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \\ S(z) &= \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \end{aligned} \quad . \quad (2.28)$$

Розглянемо перший інтеграл (2.27)

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\xi t^2}{2} + \phi_0\right) dt = \int_0^t \left[\cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \cos(\phi_0) - \sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \sin(\phi_0) \right] dt \quad . \quad (2.29)$$

Таким чином слід обчислити наступні інтеграли

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt, \quad \int_0^t \sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt \quad . \quad (2.30)$$

Зробивши в (2.30) заміну змінних $t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} = \tau$ маємо

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \int_0^{t\sqrt{\xi/\pi}} \cos\left(\frac{\pi \tau^2}{2}\right) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \quad , \quad (2.31)$$

$$\int_0^t \sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \int_0^{t\sqrt{\xi/\pi}} \sin\left(\frac{\pi \tau^2}{2}\right) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \quad . \quad (2.32)$$

Підставляючи (2.29), (2.31), (2.32) в перший вираз у 2.27 знаходимо

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \int_0^t \omega_0 r \cdot \cos\left(\frac{\xi t^2}{2} + \phi_0\right) dt = \\
&= \omega_0 r \int_0^t \left[\cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \cos(\phi_0) - \sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \sin(\phi_0) \right] dt = \\
&= \omega_0 r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \cos(\phi_0) - S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \sin(\phi_0) \right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Аналогічний підхід дозволить проінтегрувати і друге рівняння (2.27).

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= \omega_0 r \int_0^t \sin\left(\frac{\xi t^2}{2} + \phi_0\right) dt = \\
&= \omega_0 r \int_0^t \left[\sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \cos(\phi_0) + \cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) \sin(\phi_0) \right] dt = \\
&= \omega_0 r \left[\cos(\phi_0) \int_0^t \sin\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt + \sin(\phi_0) \int_0^t \cos\left(\frac{\xi t^2}{2}\right) dt \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи (2.31), (2.32) знаходимо

$$y - y_0 = \omega_0 r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \cos(\phi_0) + C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \sin(\phi_0) \right] \tag{2.34}$$

Об'єднуючи (2.26), (2.33) та (2.34) отримуємо наступне рішення задачі кінематики

$$\begin{cases} x = x_0 + \omega_0 r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \cos(\phi_0) - S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \sin(\phi_0) \right] \\ y = y_0 + \omega_0 r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \cos(\phi_0) + C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\right) \sin(\phi_0) \right] \\ \phi = \frac{\xi t^2}{2} + \phi_0 \end{cases}, \tag{2.35}$$

де $\xi = 2r\varepsilon/L$.

Рівняння (2.35) визначають рух по спіралі, що закручується, радіус кривизни якої зменшується від нескінченності за гіперболічним законом. Підставляючи у (2.13) вирази (2.23) маємо

$$R(t) = \frac{L}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} = L \frac{\omega_0}{\varepsilon t} \quad (2.36)$$

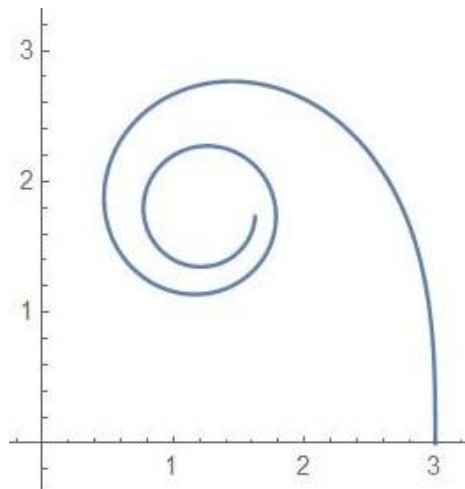


Рис.2.3. Траєкторія руху робота радіус кривизни якої зменшується за гіперболічним законом

Нехай робот має наступні значення параметрів $r = 1$, $L = 2$, початкові значення кутової швидкості обертання коліс дорівнюють $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = 2$, кутове прискорення коліс $\varepsilon = 1$, початкові координати базової точки A і початковий напрям вектора швидкості відповідно дорівнюють $x_0 = 3, y_0 = 0, \phi_0 = \pi/2$, тоді траєкторія руху робота за час від 0 до 5 секунд буде траєкторією зображеною на малюнку 5. Очевидно, що при реальному фізичному русі робота швидше за все не буде необхідності здійснювати траєкторію подібну до наведеної на рис. 2.3. Найімовірніше потрібно буде пройти лише невелику частину траєкторії і вийти на потрібний радіус повороту, потім здійснити поворот і після цього потрібно повернутися на прямолінійну траєкторію руху. У зв'язку з цим виникає завдання, свого роду протилежне прикладу № 5. Іншими

словами, якщо колеса обертаються з кутовими швидкостями $\omega_{10} < \omega_{20}$, то тепер необхідно встановити однакову швидкість обертання. Тобто залежність від часу можна поставити як

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{10} + \varepsilon t \\ \omega_2(t) &= \omega_{20} - \varepsilon t\end{aligned}\quad . \quad (2.37)$$

Якщо різниця кутових швидкостей у початковий момент часу становить $\Delta\omega = \omega_{20} - \omega_{10}$, тоді для відновлення однакої швидкості обертання знадобиться час

$$t_\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon} \quad . \quad (2.38)$$

Дійсно, підставляючи (2.38) до (2.37) отримуємо

$$\begin{aligned}\omega_1(t_\varepsilon) &= \omega_{10} + \varepsilon \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon} = \omega_{10} + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2(t_\varepsilon) &= \omega_{20} - \varepsilon \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon} = \omega_{20} - \frac{\Delta\omega}{2}\end{aligned}\quad , \quad (2.39)$$

що одне й теж, оскільки

$$\begin{aligned}\omega_1(t_\varepsilon) &= \omega_{10} + \frac{\omega_{20} - \omega_{10}}{2} = \frac{\omega_{20} + \omega_{10}}{2} \\ \omega_2(t_\varepsilon) &= \omega_{20} - \frac{\omega_{20} - \omega_{10}}{2} = \frac{\omega_{20} + \omega_{10}}{2}\end{aligned}\quad . \quad (2.40)$$

2.2.6 Рух по спіралі, мій варіант.

Отримаємо формули для параметричного завдання траєкторії у разі

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{10} + \varepsilon t \\ \omega_2(t) &= \omega_{20} - \varepsilon t\end{aligned}\quad , \quad (2.41)$$

якщо $\Delta\omega = \omega_{20} - \omega_{10} > 0$.

Підставляючи (2.41) у (1.15) отримуємо

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega_{10} + \varepsilon t + \omega_{20} - \varepsilon t}{2} r \cdot \cos \phi(t) \\ \dot{y} = \frac{\omega_{10} + \varepsilon t + \omega_{20} - \varepsilon t}{2} r \cdot \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} = \frac{r}{L} (\omega_{20} - \varepsilon t - \omega_{10} - \varepsilon t) \end{cases} . \quad (2.42)$$

Звідки

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_k r \cdot \cos \phi(t) \\ \dot{y} = \omega_k r \cdot \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} = \Omega_0 - \xi t \end{cases} , \quad (2.43)$$

де $\omega_k = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ - кінцева кутова швидкість обертання коліс; $\Omega_0 = r(\omega_{20} - \omega_{10})/L$, $\xi = 2r\varepsilon/L$ - початкова кутова швидкість обертання та кутове прискорення робота як цілого.

З третього рівняння (2.43) знаходимо

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int (\Omega_0 - \xi t) dt = \phi_0 + \Omega_0 t - \frac{\xi t^2}{2} . \quad (2.44)$$

Перше і друге рівняння (2.43) наводяться до вигляду

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \omega_k r \cdot \cos \left(\phi_0 + \Omega_0 t - \frac{\xi t^2}{2} \right) dt \\ \int_{y_0}^y dy = \int_0^t \omega_k r \cdot \sin \left(\phi_0 + \Omega_0 t - \frac{\xi t^2}{2} \right) dt \\ \int_{y_0}^y dx = \int_0^t \omega_k r \cdot \cos \left(\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0 \right) dt \\ \int_{y_0}^y dy = - \int_0^t \omega_k r \cdot \sin \left(\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0 \right) dt \end{cases} . \quad (2.45)$$

Для приведення (2.45) до інтегралів Френеля спочатку виділимо повний квадрат

$$\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0 = \frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t + \frac{\Omega_0^2}{2\xi} - \frac{\Omega_0^2}{2\xi} - \phi_0 = \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_0^2}{2\xi} + \phi_0 \right) \quad . \quad (2.46)$$

Позначимо

$$\Phi = \frac{\Omega_0^2}{2\xi} + \phi_0 \quad , \quad (2.47)$$

тоді отримуємо

$$\begin{aligned} & \cos \left[\left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 - \Phi \right] = \\ & = \cos \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 \cos(\Phi) + \sin \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 \sin(\Phi) \end{aligned} \quad . \quad (2.48)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^t \cos \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt \quad . \quad (2.49)$$

Для приведення до стандартного вигляду зробимо заміну змінної інтегрування

$$\left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \tau^2 \quad . \quad (2.50)$$

Тоді

$$t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau$$

(2.51)

або

$$t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} = \tau, \quad (2.52)$$

а також

$$dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} d\tau. \quad (2.53)$$

Для інтеграла (2.49) знаходимо

$$\int_0^t \cos \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \int_{-\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}}^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau, \quad (2.54)$$

тут коли $t = 0$, то $\tau = -\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}$ згідно (2.52).

Так за визначенням (2.28) для отримання функцій Френеля необхідно, щоб інтегрування здійснювалося від нуля, тому перетворюємо (2.54)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \int_{-\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}}^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau &= \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[\int_{-\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}}^0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau + \int_0^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[- \int_0^{-\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau + \int_0^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[\int_0^{\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}} \cos \left(\frac{\pi}{2} (-\tau)^2 \right) d(-\tau) + \int_0^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \right] = \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[\int_0^{\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau + \int_0^{\tau} \cos \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) + C(\tau) \right].$$

Таким чином для (2.54) знаходимо

$$\int_0^t \cos \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) + C \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) \right], \quad (2.56)$$

де було враховано (2.52).

Аналогічно, розглянемо і другий інтеграл (2.46)

$$\int_0^t \sin \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt \quad . \quad (2.57)$$

Заміна змінної за формулою (2.52) призводить до наступного виразу

$$\int_0^t \sin \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \int_{-\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}}^{\tau} \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \quad . \quad (2.58)$$

Також як і (2.55) представимо (2.58) через два інтеграли і з урахуванням того, що τ^2 парна функція маємо для (2.58)

$$\sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[\int_0^{\Omega_0/\sqrt{\pi\xi}} \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau + \int_0^{\tau} \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau^2 \right) d\tau \right] = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) + S(\tau) \right] \quad . \quad (2.59)$$

Тоді

$$\int_0^t \sin \left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}} \right)^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S \left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) + S \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}} \right) \right] \quad . \quad (2.60)$$

Таким чином, перший вираз у (2.43) з урахуванням (2.46) дає

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \omega_k r \cdot \cos\left(\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0\right) dt = \\
& = \omega_k r \left[\cos(\Phi) \int_0^t \cos\left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 dt + \sin(\Phi) \int_0^t \sin\left(t \sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 dt \right] \\
& \quad , (2.61)
\end{aligned}$$

перший інтеграл (2.61) взятий (2.56), а другий (2.60), остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
x - x_0 = \omega_k r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} & \left[\cos(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + C\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \right. \\
& \left. + \sin(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + S\left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \right] \\
& \quad . \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що константа інтегрування x_0 зліва (2.62) дійсно визначає початкове значення координати x , так як вираз праворуч (2.62) дорівнює нулю при $t = 0$.

Займемося тепер інтегруванням другого рівняння (2.45)

$$\int_{y_0}^y dy = - \int_0^t \omega_k r \cdot \sin\left(\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0\right) dt \quad . \quad (2.63)$$

Враховуючи (2.46) та (2.47) отримуємо

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\xi t^2}{2} - \Omega_0 t - \phi_0\right) &= \sin\left[\left(t\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 - \Phi\right] \\
&= \sin\left(t\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 \cos(\Phi) - \cos\left(t\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 \sin(\Phi)
\end{aligned}
\quad . \quad (2.64)$$

Тоді (2.63) можна переписати як

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= -\omega_k r \left[\cos(\Phi) \int_0^t \sin\left(t\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 dt \right. \\
&\quad \left. - \sin(\Phi) \int_0^t \cos\left(t\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2\xi}}\right)^2 dt \right]
\end{aligned}
\quad . \quad (2.65)$$

Внесемо знак мінус усередину квадратної дужки та врахуємо (2.59) та (2.60), отримуємо

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= \omega_k r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[\sin(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + C\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \cos(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + S\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \right]
\end{aligned}
\quad . \quad (2.66)$$

Аналогічно (2.62) константа y_0 визначає початкове значення координати y , так як вираз праворуч (2.66) дорівнює нулю при $t = 0$.

Збираючи (2.44), (2.62) і (2.66) отримаємо остаточне рішення кінематичного завдання приклад №6

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \omega_k r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \times \left[\begin{array}{l} \cos(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + C\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \\ + \sin(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + S\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \end{array} \right] \\ y = y_0 + \omega_k r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \times \left[\begin{array}{l} \sin(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + C\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \\ - \cos(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) + S\left(t\sqrt{\frac{\xi}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] \end{array} \right] \\ \phi = \phi_0 + \Omega_0 t - \frac{\xi t^2}{2} \end{array} \right. , \quad (2.67)$$

де $\omega_k = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ - кінцева кутова швидкість обертання коліс; $\Omega_0 = r(\omega_{20} - \omega_{10})/L$, $\xi = 2r\varepsilon/L$, $\Phi = \frac{\Omega_0^2}{2\xi} + \phi_0$ - початкова кутова швидкість обертання, кутове прискорення та початкова фаза руху робота як цілого.

В якості ілюстрації руху за формулами (2.67) розглянемо робота з наступними параметрами $r = 1$, $L = 2$, початкові значення кутової швидкості обертання коліс дорівнюють $\omega_{10} = 1$; $\omega_{20} = 5$ кутове прискорення коліс $\varepsilon = 1$, початкові координати базової точки A і початковий напрямок вектора швидкості відповідно рівні $x_0 = 3, y_0 = 0, \phi_0 = \pi/2$. Звернемо особливу увагу на те, що кінцевою метою руху за рівняннями (2.67) має стати вихід на прямолінійну траєкторію, що станеться, коли кутові швидкості обертання коліс співпадуть. Це станеться за час t_ε , дивись формулу (2.43)

$$t_\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon} = \frac{\omega_{20} - \omega_{10}}{2\varepsilon} = \frac{5 - 1}{2 \cdot 1} = 2 . \quad (2.68)$$

Зробимо розрахунок та інших властивостей для побудови траєкторії

$$\omega_{\kappa} = \frac{\omega_{10} + \omega_{20}}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3, \quad (2.69)$$

$$\Omega_0 = r \frac{\omega_{20} - \omega_{10}}{L} = 1 \cdot \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad (2.70)$$

$$\xi = \frac{2r\varepsilon}{L} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2} = 1, \quad (2.71)$$

$$\Phi = \frac{\Omega_0^2}{2\xi} + \phi_0 = \frac{2^2}{2 \cdot 1} + \frac{\pi}{2} = \frac{4 + \pi}{2}. \quad (2.72)$$

Знайдемо, на який кут поверне робот за час руху. З (2.67) знаходимо

$$\begin{aligned} \phi(t_{\varepsilon}) &= \phi_0 + \Omega_0 t_{\varepsilon} - \frac{\xi t_{\varepsilon}^2}{2} = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 2^2}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

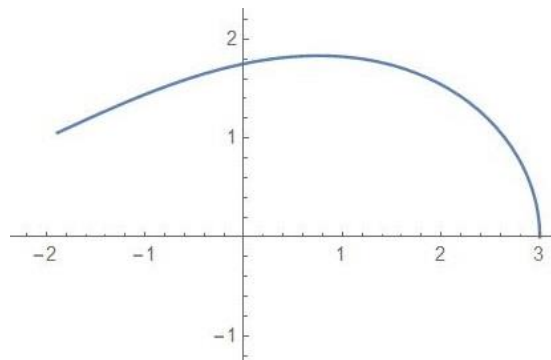


Рис.2.5. Траєкторія руху робота радіус кривизни якої збільшується за гіперболічним законом

Звідки випливає, що робот поверне на додатковий кут 2 радіанам.

Також обчислимо залежність радіусу кривизни від часу за такого руху. З (28) та (2.42) маємо

$$R(t) = \frac{L}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L}{2} \frac{\omega_{10} + \omega_{20}}{\omega_{20} - \omega_{10} - 2\varepsilon t} \quad . \quad (2.74)$$

З (2.74) слід, що у початковий час $t = 0$ радіус кривизни має кінцеве значення, а кінці руху при $t_\varepsilon = (\omega_{20} - \omega_{10})/(2\varepsilon)$ радіус кривизни прагне нескінченності, тобто. виходить на рух прямою лінією.

З розглянутих вище прикладів ясно як слід чинити при інтегруванні системи кінематичних рівнянь (1.15) у випадку якщо задані залежності $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$. Спочатку необхідно отримати залежність від часу кута повороту проінтегрувавши третє рівняння (1.15)

$$\phi(t) = \int \dot{\phi} dt = \int \frac{r}{L} (\omega_2(t) - \omega_1(t)) dt \quad . \quad (2.75)$$

Потім підставити отриманий вираз у перші два рівняння системи (1.15) і зробити інтегрування

$$\begin{cases} x(t) = \int \dot{x} dt = \int \frac{\omega_1(t) + \omega_2(t)}{2} r \cdot \cos \phi(t) dt \\ y(t) = \int \dot{y} dt = \int \frac{\omega_1(t) + \omega_2(t)}{2} r \cdot \sin \phi(t) dt \end{cases} \quad . \quad (2.76)$$

Якщо інтегрування не вдається зробити аналітично, його цілком можна виконати чисельно.

Висновки за розділом 2

У другому розділі були побудовані математичні моделі руху, для розробки та тестування програмної моделі роботи з диференційними проводом. Розроблено такі моделі, як: прямолінійний рівноприскорений рух та з постійним кутовим прискоренням, круговий рух з постійною кутовою швидкістю та з різною постійною кутовою швидкістю, рух по спіралі, яка закручується, та мій варіант руху по спіралі (при використанні інтегралу Френеля). Також була

виконана перевірка математичної моделі на адекватність, простоту та об'єктивність.

РОЗДІЛ 3

КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ ПРАЦЕСПРОМОЖНОСТІ І ГОТОВНОСТІ СИСТЕМИ

3.1 Аналіз основних принципів роботи Wolfram Mathematica

Система Mathematica – це запатентована система комп'ютерної алгебри, розроблена Стівеном Вольфрамом, який заснував компанію Wolfram Research разом з Теодором Грєм у 1988 році, і широко використовується для наукових, інженерних та математичних обчислень.

Система має як аналітичні, так і чисельні можливості, а результати відображаються як в алфавітно-цифровому, так і в графічному вигляді. Обчислювальні та аналітичні функції забезпечуються серверною частиною, яка може бути підключена до різних користувацьких інтерфейсів. Традиційним інтерфейсом, що постачається з системою, є обчислювальний ноутбук, але також є можливість маніпулювати бекендом з інтегрованих середовищ розробки, таких як Eclipse та IntelliJ IDEA. З 2002 року існує безкоштовний інструмент під назвою JMath, який надає інтерфейс командного рядка до системи Mathematica за допомогою інтерфейсу MathLink до системи Mathematica.

Функції:

Аналітичні перетворення: розв'язування поліноміальних, тригонометричних та нерівностей, систем рівнянь та зведених трансцендентних рівнянь, розв'язування одночасних рівнянь, спрощення рівнянь, знаходження екстремумів, інтегрування та похідна функцій, знаходження скінченних і нескінченних сум і добутків, розв'язування диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, перетворення Фур'є та Лапласа, Z-перетворення.

Перетворення функцій в ряд Тейлора, операції з використанням рядів Тейлора: додавання, множення, складання, знаходження обернених функцій тощо.

Чисельні розрахунки: обчислення значень функцій, в тому числі спеціальних, з довільною точністю, розв'язування лінійних рівнянь, знаходження екстремумів, інтегрування та диференціювання, знаходження сум і добутків, розв'язування диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, поліноміальна інтерполяція функцій з довільною кількістю аргументів з множини відомих значень, перетворення Фур'є та Лапласа, Z-перетворення.

Теорія цілих чисел: ідентифікація простих чисел з ординатами, визначення кількості простих чисел, які не перевищують заданого числа, дискретні перетворення Фур'є, розкладання числа на множники, визначення НСД та НСК.

Лінійна алгебра: операції над матрицями: додавання, множення, знаходження оберненої матриці, множення на вектори, обчислення показників, знаходження визначників. Знаходження власних значень та власних векторів.

Графіка та звук: побудова графіків функцій за допомогою параметричних кривих і поверхонь.

Побудова геометричних фігур: лінійних, кіл, прямокутників тощо, відтворення звуків, графіки яких задані функцією розкладання або серією точок, імпорт та експорт графіків і звуків у багатьох растрових і векторних форматах, створення та маніпулювання графікою.

3.2 Побудова траєкторій руху програмної моделі

Побудуємо тепер траєкторію руху робота 1 та 2, якщо залежність кутових швидкостей лівого та правого колеса представлені на малюнку 3.1. Як приклад будемо припускати, що фізичні параметри робота 1 наступні

$$r = 0,2\text{м} \quad L = 0,6\text{м} \quad . \quad (3.1)$$

Початковий стан робота

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{rad} \quad . \quad (3.2)$$

Також будемо вважати, що задані значення кутових швидкостей обертання коліс (див. рис.3.1)

$$\omega_1 = 1,0 \text{rad/c}, \omega = 1,5 \text{rad/c}, \omega_2 = 2,0 \text{rad/c} \quad . \quad (3.3)$$

Нехай також відомі моменти часу

$$t_0 = 0\text{c}, t_1 = 2\text{c}, t_2 = 5\text{c}, t_3 = 8\text{c}, t_4 = 13\text{c}, t_5 = 17\text{c}, t_6 = 20\text{c}, t_7 = 21\text{c} \quad . \quad (3.4)$$

Також припускаємо, що фізичні параметри робота 2 наступні

$$r = 0,5\text{м} \quad L = 0,8\text{м} \quad . \quad (3.5)$$

Початковий стан робота

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \phi_0 = \frac{\pi}{3} \text{rad} \quad . \quad (3.6)$$

Також будемо вважати, що задані значення кутових швидкостей обертання коліс (див. рис.3.1)

$$\omega_1 = 2,0 \text{rad/c}, \omega = 3,5 \text{rad/c}, \omega_2 = 4,0 \text{rad/c} \quad . \quad (3.7)$$

Нехай також відомі моменти часу

$$t_0 = 0\text{c}, t_1 = 5\text{c}, t_2 = 8\text{c}, t_3 = 10\text{c}, t_4 = 18\text{c}, t_5 = 25\text{c}, t_6 = 30\text{c}, t_7 = 35\text{c} \quad . \quad (3.8)$$

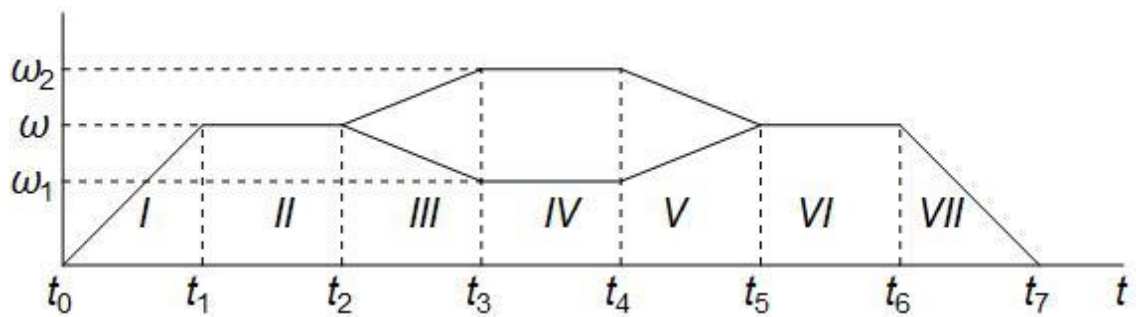


Рис.3.1. Залежність кутових швидкостей обертання коліс від часу

З рисунка 3.1 випливає, що рух робота складається із семи етапів (I, II, III, IV, V, VI, VII). Перший етап триває t_1 секунд і є рівноприскореним розгоном робота зі стану спокою. При цьому і ліве (перше) і праве (друге) колеса за час t_1 розганяються до кутової швидкості ω . На другому етапі два колеса обертаються із цією постійною швидкістю протягом $t_2 - t_1$ секунд. На третьому етапі перше колесо рівномірно уповільнює свою швидкість до значення ω_1 , при цьому друге колесо, за цей самий час $t_3 - t_2$ рівномірно збільшує свою швидкість до значення ω_2 . Четвертий етап триває $t_4 - t_3$ секунд і весь час колеса обертаються з постійними, але різними кутовими швидкостями, які вони придбали на третьому етапі. На п'ятому етапі за час $t_5 - t_4$ ліве колесо збільшує свою швидкість обертання до ω , а праве зменшує до цього значення. На шостому етапі обидва колеса обертаються однаковою швидкістю протягом $t_6 - t_5$ секунд. І нарешті на сьомому етапі обидва колеса поступово зменшують свою швидкість обертання до нуля за $t_7 - t_6$ секунд. Завдання зобразити яку траєкторію руху опише у своїй робот, вірніше його базова точка A .

3.2.1 Побудова траєкторії руху робота 1

Для побудови траєкторії руху робота 1 розглянемо наступні етапи руху двоколісного робота. Перший етап відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.21) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ м/с

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{1x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{1y}t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.9)$$

де $a_1 = r\varepsilon_1$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega}{t_1 - t_0} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ рад/с}^2, \quad (3.10)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{1x} = a_1 \cos \phi_0$, $a_{1y} = a_1 \sin \phi_0$.

Другий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.3)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{20} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{20} \end{cases}, \quad (3.11)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ рад та $\omega = 1,5$ рад/с задані в (3.2) і (3.3). Початкові значення x_{20} , y_{20} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.9)

$$\begin{cases} x_{20} = x(t_1) \\ y_{20} = y(t_1) \end{cases}. \quad (3.12)$$

Третій етап продовжується $t_3 - t_2$ секунд і відповідає прикладу 2.2.5. Залежність кутових швидкостей визначається за формулою (2.23)

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_{30} - \varepsilon_3 t \\ \omega_2(t) &= \omega_{30} + \varepsilon_3 \end{aligned}, \quad (3.13)$$

де $\omega_{30} = \omega = 1,5$ рад/с - початкова кутова швидкість на третьому етапі.

Кутове прискорення визначаємо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_2 - \omega}{t_3 - t_2} = \frac{2 - 1,5}{7} = 0,07143 \text{ рад/с}^2 \quad . \quad (3.14)$$

Траєкторія на третьому етапі задається (2.35)

$$\begin{cases} x = x_{30} + \omega_{30} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \cos(\phi_0) - S \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \sin(\phi_0) \right] \\ y = y_{30} + \omega_{30} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \cos(\phi_0) + C \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \sin(\phi_0) \right] \\ \phi = \frac{\xi t^2}{2} + \phi_0 \end{cases} \quad , \quad (3.15)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ рад - початкове значення кута, x_{30} , y_{30} - початкові значення координат з (3.11)

$$\begin{cases} x_{30} = x(t_2) \\ y_{30} = y(t_2) \end{cases} \quad , \quad (3.16)$$

де параметр t в (3.15) змінюється від нуля до $t_3 - t_2$.

Кутове прискорення робота з (3.1) та (3.14) дорівнює

$$\xi = 2r\varepsilon_3/L = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,07143/0,5 = 0,05714 \text{ рад/с}^2 \quad . \quad (3.17)$$

Четвертий етап продовжується $t_4 - t_3$ секунд і відповідає руху по колу (див. приклад 2.3). Кутові швидкості обертання коліс з (3.11)

$$\omega_1 = 1 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 2 \text{ рад/с} \quad . \quad (3.18)$$

Рівняння траєкторії визначається формулою (2.28)

$$\begin{cases} x(t) = R \sin(\Omega \cdot t + \phi_{40}) + x_{40} - R \sin \phi_{40} \\ y(t) = -R \cos(\Omega \cdot t + \phi_{40}) + y_{40} + R \cos \phi_{40} \end{cases} \quad , \quad (3.19)$$

де $R = L \cdot (\omega_1 + \omega_2)/(2 \cdot (\omega_2 - \omega_1))$, $\Omega = r \cdot (\omega_2 - \omega_1)/L$.

Початкові значення $x_{40}, y_{40}, \phi_{40}$ визначаються рівняннями

$$\begin{cases} x_{40} = x(t_3) \\ y_{40} = y(t_3) \\ \phi_{40} = \xi t_3^2 / 2 + \phi_0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

параметр t в (3.19) змінюється від 0 до $t_4 - t_3$.

П'ятий етап продовжується $t_5 - t_4$ секунд і відповідає руху по спіралі, що розкручується (див. приклад 2.2.6). Кутові швидкості обертання коліс залежать від часу (2.41)

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_{150} + \varepsilon_5 t \\ \omega_2(t) &= \omega_{250} - \varepsilon_5 t \end{aligned}, \quad (3.21)$$

де $\omega_{150} = 1 \text{ рад/с}$, $\omega_{250} = 2 \text{ рад/с}$ - кутові швидкості, кутове прискорення ε_5 знаходиться з рисунка 3.1

$$\varepsilon_5 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_5 - t_4} = \frac{2 - 1,5}{2} = 0,25 \text{ рад/с}^2, \quad (3.22)$$

траєкторія на етапі V задається з (2.67)

$$\begin{cases} x = x_{50} + \omega_{5k} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi_5}} \times \left[\cos(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + C\left(t \sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \right. \\ \left. + \sin(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + S\left(t \sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \right] \\ y = y_{50} + \omega_{5k} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi_5}} \times \left[\sin(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + C\left(t \sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \right. \\ \left. - \cos(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + S\left(t \sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \right] \\ \phi = \phi_{50} + \Omega_{50} t - \frac{\xi_5 t^2}{2} \end{cases}, (3.23)$$

де $\omega_{5k} = (\omega_{150} + \omega_{250})/2 = 1,5$ рад/с - кінцева кутова швидкість обертання коліс, $\Omega_0 = r(\omega_{250} - \omega_{150})/L$, $\xi_5 = 2r\varepsilon_5/L$, $\Phi = \frac{\Omega_0^2}{2\xi_5} + \phi_{50}$ - початкова кутова швидкість обертання, кутове прискорення та початкова фаза руху робота, як цілого.

Початкові значення x_{50}, y_{50} визначаються з (3.19)

$$\begin{cases} x_{50} = x(t_4) \\ y_{50} = y(t_4) \end{cases}, (3.24)$$

а початкове значення кута ϕ_{50} за допомогою формули

$$\phi_{50} = \Omega \cdot t_4 + \phi_{40}, (3.25)$$

де кутова швидкість обертання платформи Ω та кут ϕ_{40} визначені на етапі IV (див. формули (3.19) і (3.20). Параметр t в (3.23) змінюється від нуля до $t_5 - t_4$.

Шостий етап відповідає прикладу 2.1 та подібний другому етапу. Траєкторія руху визначається рівняннями (2.1.3)

$$\begin{cases} x = \omega_6 \cdot r \cos \phi_{60} \cdot t + x_{60} \\ y = \omega_6 \cdot r \sin \phi_{60} \cdot t + y_{60} \end{cases}, \quad (3.26)$$

де $\omega_6 = \omega = 1,5 \text{ рад/с}$, початкові значення x_{60}, y_{60} і ϕ_{60} знаходяться з (3.23) при $t = t_5$. Початкові значення координат x_{60}, y_{60} та кута обертання коліс ϕ_{60} визначаються з (3.19)

$$\begin{cases} x_{60} = x(t_5) \\ y_{60} = y(t_5) \\ \phi_{60} = \phi(t_5) \end{cases}, \quad (3.27)$$

параметр t в (3.26) змінюється від нуля до $t_6 - t_5$.

Сьомий етап подібний до першого етапу, але має негативне кутове прискорення (робот поступово зупиняється). Кутове прискорення з рисунку 3.1

$$\varepsilon_7 = -\frac{\omega}{t_7 - t_6} = -\frac{1,5}{1} = -1,5 \text{ рад/с}^2. \quad (3.28)$$

Компоненти прискорення уздовж відповідних координат є

$$a_{7x} = r\varepsilon_7 \cos \phi_{70}, \quad a_{7y} = r\varepsilon_7 \sin \phi_{70}, \quad (3.29)$$

де початкова фаза ϕ_{70} співпадає з фазою шостому етапі ($\phi_{70} = \phi_{60}$).

Траєкторію руху на ділянці VII знайдемо за формулою (2.23)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{7x}t^2}{2} + v_{70x}t + x_{70} \\ y(t) = \frac{a_{7y}t^2}{2} + v_{70y}t + y_{70} \end{cases}, \quad (3.30)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{70} = x(t_6) \\ y_{70} = y(t_6) \end{cases}. \quad (3.31)$$

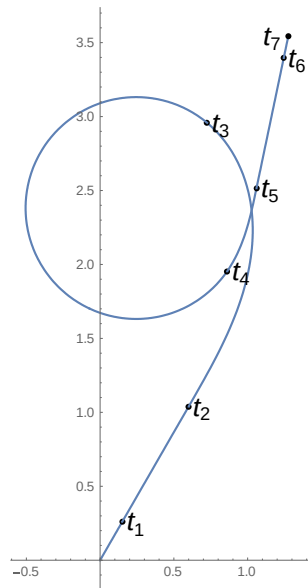


Рисунок 3.2. Траєкторія руху робота 1

3.2.2 Побудова траєкторії руху робота 2

Для побудови траєкторії руху робота 2 розглянемо наступні етапи руху робота з диференційними приводами. Перший етап відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.21) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ м/с

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{1x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{1y}t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.32)$$

де $a_1 = r\varepsilon_1$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega}{t_1 - t_0} = \frac{3,5}{5} = 0,7 \text{ рад/с}^2, \quad (3.33)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{1x} = a_1 \cos \phi_0$, $a_{1y} = a_1 \sin \phi_0$.

Другий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (1.18)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{20} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{20} \end{cases}, \quad (3.34)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад та $\omega = 3,5$ рад/с задані в (3.6) і (3.7). Початкові значення x_{20} , y_{20} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.32)

$$\begin{cases} x_{20} = x(t_1) \\ y_{20} = y(t_1) \end{cases}. \quad (3.35)$$

Третій етап продовжується $t_3 - t_2$ секунд і відповідає прикладу 2.2.5. Залежність кутових швидкостей визначається за формулою (2.23)

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_{30} - \varepsilon_3 t \\ \omega_2(t) &= \omega_{30} + \varepsilon_3 \end{aligned}. \quad (3.36)$$

де $\omega_{30} = \omega = 3,5$ рад/с - початкова кутова швидкість на третьому етапі.

Кутове прискорення визначаємо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_2 - \omega}{t_3 - t_2} = \frac{4 - 3,5}{7} = 1,6666 \text{ рад/с}^2. \quad (3.37)$$

Траєкторія на третьому етапі задається (2.35)

$$\begin{cases} x = x_{30} + \omega_{30} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[C \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \cos(\phi_0) - S \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \sin(\phi_0) \right] \\ y = y_{30} + \omega_{30} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \left[S \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \cos(\phi_0) + C \left(t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \right) \sin(\phi_0) \right] \\ \phi = \frac{\xi t^2}{2} + \phi_0 \end{cases}, \quad (3.38)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад - початкове значення кута, x_{30} , y_{30} - початкові значення координат з (3.34)

$$\begin{cases} x_{30} = x(t_2) \\ y_{30} = y(t_2) \end{cases}, \quad (3.39)$$

де параметр t в (3.38) змінюється від нуля до $t_3 - t_2$.

Кутове прискорення робота з (3.1) та (3.37) дорівнює

$$\xi = 2r\varepsilon_3/L = 2 \cdot 0,6 \cdot 1,6666/0,8 = 2,4999 \text{ рад/с}^2. \quad (3.40)$$

Четвертий етап продовжується $t_4 - t_3$ секунд і відповідає руху по колу (див. приклад 2.3). Кутові швидкості обертання коліс з (3.34)

$$\omega_1 = 2 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 4 \text{ рад/с}. \quad (3.41)$$

Рівняння траєкторії визначається формулою (2.28)

$$\begin{cases} x(t) = R \sin(\Omega \cdot t + \phi_{40}) + x_{40} - R \sin \phi_{40} \\ y(t) = -R \cos(\Omega \cdot t + \phi_{40}) + y_{40} + R \cos \phi_{40} \end{cases}, \quad (3.42)$$

де $R = L \cdot (\omega_1 + \omega_2)/(2 \cdot (\omega_2 - \omega_1))$, $\Omega = r \cdot (\omega_2 - \omega_1)/L$.

Початкові значення x_{40} , y_{40} , ϕ_{40} визначаються рівняннями

$$\begin{cases} x_{40} = x(t_3) \\ y_{40} = y(t_3) \\ \phi_{40} = \xi t_3^2/2 + \phi_0 \end{cases}, \quad (3.43)$$

параметр t в (3.42) змінюється від 0 до $t_4 - t_3$.

П'ятий етап продовжується $t_5 - t_4$ секунд і відповідає руху по спіралі, що розкручується (див. приклад 2.2.6). Кутові швидкості обертання коліс залежать від часу (2.41)

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{150} + \varepsilon_5 t \\ \omega_2(t) &= \omega_{250} - \varepsilon_5 t\end{aligned}, \quad (3.44)$$

де $\omega_{150} = 2\text{рад/с}$, $\omega_{250} = 4\text{рад/с}$ - кутові швидкості, кутове прискорення ε_5 знаходиться з рисунка 3.1

$$\varepsilon_5 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_5 - t_4} = \frac{4 - 3,5}{7} = 0,7143\text{рад/с}^2, \quad (3.45)$$

траєкторія на етапі V задається з (2.67)

$$\begin{cases} x = x_{50} + \omega_{5k} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi_5}} \times \begin{bmatrix} \cos(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + C\left(t\sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \\ + \sin(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + S\left(t\sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \end{bmatrix} \\ y = y_{50} + \omega_{5k} r \sqrt{\frac{\pi}{\xi_5}} \times \begin{bmatrix} \sin(\Phi) \left[C\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + C\left(t\sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \\ - \cos(\Phi) \left[S\left(\frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) + S\left(t\sqrt{\frac{\xi_5}{\pi}} - \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi\xi_5}}\right) \right] \end{bmatrix} \\ \phi = \phi_{50} + \Omega_{50} t - \frac{\xi_5 t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.46)$$

де $\omega_{5k} = (\omega_{150} + \omega_{250})/2 = 1,5 \text{ рад/с}$ - кінцева кутова швидкість обертання коліс, $\Omega_0 = r(\omega_{250} - \omega_{150})/L$, $\xi_5 = 2r\varepsilon_5/L$, $\Phi = \frac{\Omega_0^2}{2\xi_5} + \phi_{50}$ - початкова кутова швидкість обертання, кутове прискорення та початкова фаза руху робота, як цілого.

Початкові значення x_{50}, y_{50} визначаються з (3.42)

$$\begin{cases} x_{50} = x(t_4) \\ y_{50} = y(t_4) \end{cases}, \quad (3.47)$$

а початкове значення кута ϕ_{50} за допомогою формули

$$\phi_{50} = \Omega \cdot t_4 + \phi_{40}, \quad (3.48)$$

де кутова швидкість обертання платформи Ω та кут ϕ_{40} визначені на етапі IV (див. формули (3.42) і (3.43). Параметр t в (3.47) змінюється від нуля до $t_5 - t_4$.

Шостий етап відповідає прикладу 2.1 та подібний другому етапу. Траєкторія руху визначається рівняннями (2.1.3)

$$\begin{cases} x = \omega_6 \cdot r \cos \phi_{60} \cdot t + x_{60} \\ y = \omega_6 \cdot r \sin \phi_{60} \cdot t + y_{60} \end{cases}, \quad (3.49)$$

де $\omega_6 = \omega = 3,5 \text{ рад/с}$, початкові значення x_{60}, y_{60} і ϕ_{60} знаходяться з (3.47) при $t = t_5$. Початкові значення координат x_{60}, y_{60} та кута обертання коліс ϕ_{60} визначаються з (3.42)

$$\begin{cases} x_{60} = x(t_5) \\ y_{60} = y(t_5) \\ \phi_{60} = \phi(t_5) \end{cases}, \quad (3.50)$$

параметр t в (3.49) змінюється від нуля до $t_6 - t_5$.

Сьомий етап подібний до першого етапу, але має негативне кутове прискорення (робот поступово зупиняється). Кутове прискорення з рисунку 3.1

$$\varepsilon_7 = -\frac{\omega}{t_7 - t_6} = -\frac{1,5}{1} = -0,7 \text{ рад/с}^2. \quad (3.51)$$

Компоненти прискорення уздовж відповідних координат є

$$a_{7x} = r\varepsilon_7 \cos \phi_{70}, \quad a_{7y} = r\varepsilon_7 \sin \phi_{70}, \quad (3.52)$$

де початкова фаза ϕ_{70} співпадає з фазою шостому етапі ($\phi_{70} = \phi_{60}$).

Траєкторію руху на ділянці VII знайдемо за формулою (2.23)

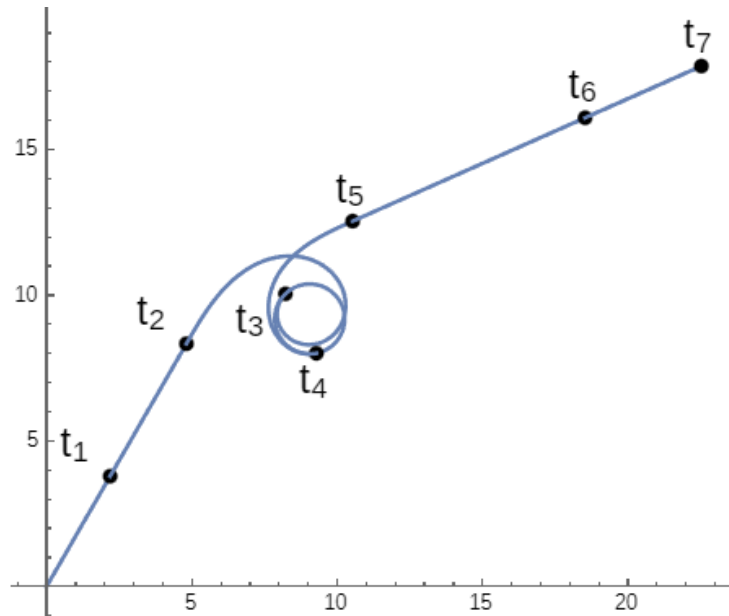


Рисунок 3.3. Траєкторія руху робота 2

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{7x}t^2}{2} + v_{70x}t + x_{70} \\ y(t) = \frac{a_{7y}t^2}{2} + v_{70y}t + y_{70} \end{cases}, \quad (3.53)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{70} = x(t_6) \\ y_{70} = y(t_6) \end{cases}. \quad (3.54)$$

У розділі 3 «Траєкторія руху робота 1 та 2» всі розрахунки етапів руху двоколісного робота та побудову траєкторії руху робота проводили за допомогою середовища програмування WM (див. рис. 3.3 та 3.2).

3.3 Побудова траєкторії руху робота 1 та 2 з використанням ламаної кривої

Для прикладу використаємо рис. 3.1, але змінимо з третього по шостий етапи на ламану криву звідси виходить що при повороті МР необхідно зробити повну зупинку, для побудови траєкторії руху робота 1 розглянемо наступні етапи руху моделі.

Перший етап відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.23) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ м/с

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{1x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{1y}t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.55)$$

де $a_1 = r\varepsilon_1$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega}{t_1 - t_0} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ рад/с}^2, \quad (3.56)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{1x} = a_1 \cos \phi_0$, $a_{1y} = a_1 \sin \phi_0$.

Другий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (1.18)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{20} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{20} \end{cases}, \quad (3.57)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ рад та $\omega = 1,5$ рад/с задані в (3.2) і (3.3). Початкові значення x_{20} , y_{20} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.55)

$$\begin{cases} x_{20} = x(t_1) \\ y_{20} = y(t_1) \end{cases}. \quad (3.58)$$

Траєкторію руху на ділянці III знайдемо за формулою (2.23)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{3x}t^2}{2} + v_{30x}t + x_{30} \\ y(t) = \frac{a_{3y}t^2}{2} + v_{30y}t + y_{30} \end{cases}, \quad (3.59)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{30} = x(t_2) \\ y_{30} = y(t_2) \end{cases}. \quad (3.60)$$

Четвертий етап продовжується $t_4 - t_3$ секунд і відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями

$$\begin{cases} x_{40} = 0 \\ y_{40} = 0 \\ \phi = 2\frac{r}{L}\omega \cdot t + \phi_0 \end{cases}. \quad (3.61)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{40} = x(t_3) \\ y_{40} = y(t_3) \end{cases}. \quad (3.62)$$

П'ятий етап продовжується $t_5 - t_4$ секунд і відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.23) $v_0 = 0 \text{ м/с}$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{5x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{5y}t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.63)$$

де $a_5 = r\varepsilon_5$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_5 = \frac{\omega}{t_5 - t_4} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ рад/с}^2, \quad (3.64)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{5x} = a_5 \cos \phi_0$, $a_{5y} = a_5 \sin \phi_0$.

Шостий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.3)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{60} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{60} \end{cases}, \quad (3.65)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ рад та $\omega = 1,5$ рад/с задані в (3.2) і (3.3). Початкові значення x_{60} , y_{60} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.55)

$$\begin{cases} x_{60} = x(t_5) \\ y_{60} = y(t_5) \end{cases}. \quad (3.67)$$

Сьомий етап подібний до першого етапу, але має негативне кутове прискорення (робот поступово зупиняється). Кутове прискорення

$$\varepsilon_7 = -\frac{\omega}{t_7 - t_6} = -\frac{1,5}{1} = -1,5 \text{ рад/с}^2. \quad (3.68)$$

Компоненти прискорення уздовж відповідних координат є

$$a_{7x} = r\varepsilon_7 \cos \phi_{70}, \quad a_{7y} = r\varepsilon_7 \sin \phi_{70}, \quad (3.69)$$

де початкова фаза ϕ_{70} співпадає з фазою шостому етапі ($\phi_{70} = \phi_{60}$).

Траєкторію руху на ділянці VII знайдемо за формулою (2.23)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{7x}t^2}{2} + v_{70x}t + x_{70} \\ y(t) = \frac{a_{7y}t^2}{2} + v_{70y}t + y_{70} \end{cases}$$

$$(3.70)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{70} = x(t_6) \\ y_{70} = y(t_6) \end{cases}$$

$$(3.71)$$

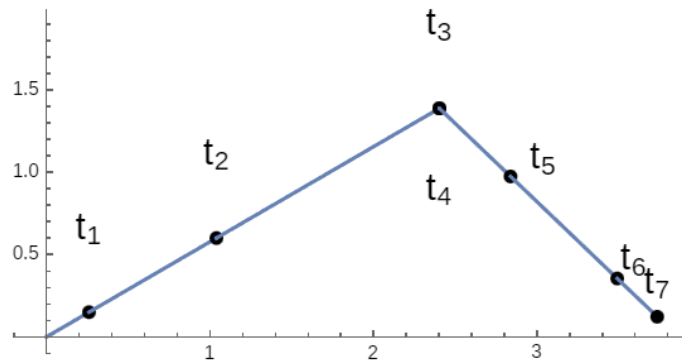


Рисунок 3.4. Траєкторія руху робота 1 по ламаній кривій

Для побудови траєкторії руху робота 2 розглянемо наступні етапи руху програмної моделі.

Перший етап відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.23) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$ м/с

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{1x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{1y}t^2}{2} \end{cases}$$

$$(3.72)$$

де $a_1 = r\varepsilon_1$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega}{t_1 - t_0} = \frac{3,5}{2} = 1,75 \text{ рад/с}^2$$

$$(3.73)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{1x} = a_1 \cos \phi_0$, $a_{1y} = a_1 \sin \phi_0$.

Другий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.3)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{20} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{20} \end{cases}, \quad (3.74)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад та $\omega = 3,5$ рад/с задані в (3.6) і (3.7). Початкові значення x_{20} , y_{20} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.72)

$$\begin{cases} x_{20} = x(t_1) \\ y_{20} = y(t_1) \end{cases}. \quad 5)$$

Траєкторію руху на ділянці III знайдемо за формулою (2.23)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{3x}t^2}{2} + v_{30x}t + x_{30} \\ y(t) = \frac{a_{3y}t^2}{2} + v_{30y}t + y_{30} \end{cases}, \quad (3.76)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{30} = x(t_2) \\ y_{30} = y(t_2) \end{cases}. \quad (3.77)$$

Четвертий етап продовжується $t_4 - t_3$ секунд і відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.3)

$$\begin{cases} x_{40} = 0 \\ y_{40} = 0 \\ \phi = 2 \frac{r}{L} \omega \cdot t + \phi_0 \end{cases}, \quad (3.78)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{40} = x(t_3) \\ y_{40} = y(t_3) \end{cases}$$

(3.79)

П'ятий етап продовжується $t_5 - t_4$ секунд і відповідає прикладу 2, у якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.23) $v_0 = 0 \text{ м/с}$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{5x}t^2}{2} \\ y(t) = \frac{a_{5y}t^2}{2} \end{cases}, \quad (3.80)$$

де $a_5 = r\varepsilon_5$ - повне прискорення на першому етапі.

Кутове прискорення на етапі I знаходимо з рисунка 3.1

$$\varepsilon_5 = \frac{\omega}{t_5 - t_4} = \frac{3,5}{2} = 1,75 \text{ рад/с}^2, \quad (3.81)$$

де компоненти прискорення вздовж відповідних координат визначаються як $a_{5x} = a_5 \cos \phi_0$, $a_{5y} = a_5 \sin \phi_0$.

Шостий етап відповідає прикладу 2.2.1, в якому траєкторія руху визначається рівняннями (2.3)

$$\begin{cases} x = \omega r \cos \phi_0 \cdot t + x_{60} \\ y = \omega r \sin \phi_0 \cdot t + y_{60} \end{cases}, \quad (3.82)$$

де $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад та $\omega = 3,5$ рад/с задані в (3.6) і (3.7). Початкові значення x_{60} , y_{60} знаходяться як кінцеві точки з першого етапу за формулою (3.72)

$$\begin{cases} x_{60} = x(t_5) \\ y_{60} = y(t_5) \end{cases}. \quad (3.83)$$

Сьомий етап подібний до першого етапу, але має негативне кутове прискорення (робот поступово зупиняється). Кутове прискорення

$$\varepsilon_7 = -\frac{\omega}{t_7 - t_6} = -\frac{3,5}{1} = -3,5 \text{ рад/с}^2$$

$$\cdot \quad (3.84)$$

Компоненти прискорення уздовж відповідних координат є

$$a_{7x} = r\varepsilon_7 \cos \phi_{70}, \quad a_{7y} = r\varepsilon_7 \sin \phi_{70}, \quad (3.85)$$

де початкова фаза ϕ_{70} співпадає з фазою шостому етапі ($\phi_{70} = \phi_{60}$).

Траєкторію руху на ділянці VII знайдемо за формулою (2.23)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_{7x}t^2}{2} + v_{70x}t + x_{70} \\ y(t) = \frac{a_{7y}t^2}{2} + v_{70y}t + y_{70} \end{cases}, \quad (3.86)$$

де початкові компоненти швидкості

$$\begin{cases} x_{70} = x(t_6) \\ y_{70} = y(t_6) \end{cases}. \quad (3.87)$$

Як зображено на рис. 3.4 та 3.5 модель робота має понижену ефективність на такій траєкторії, через постійні зупинки постійне відновлення швидкості, також за рахунок цього йде втрата енергоресурсів.

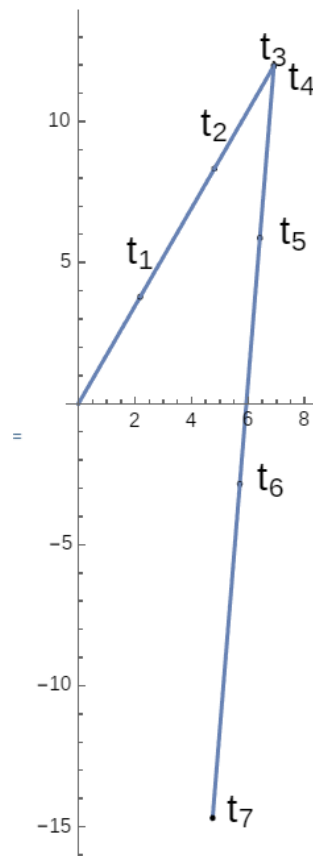


Рисунок 3.5. Траєкторія руху робота 2 по ламаній кривій

3.4 Порівняння програмної моделі робота з аналогом

При пошуку аналогових моделей для порівняння з розробленою програмною моделлю робота виникли труднощі, через некоректність та не інформативність знайдених робіт. Протягом пошуку було знайдено дві роботи, які ідентичні одна до одної, тому була обрана одна з них за інформаційним джерелом. Як зображено на рисунку 3.4 подалі буде порівнюватись рух моделей по спіралі.

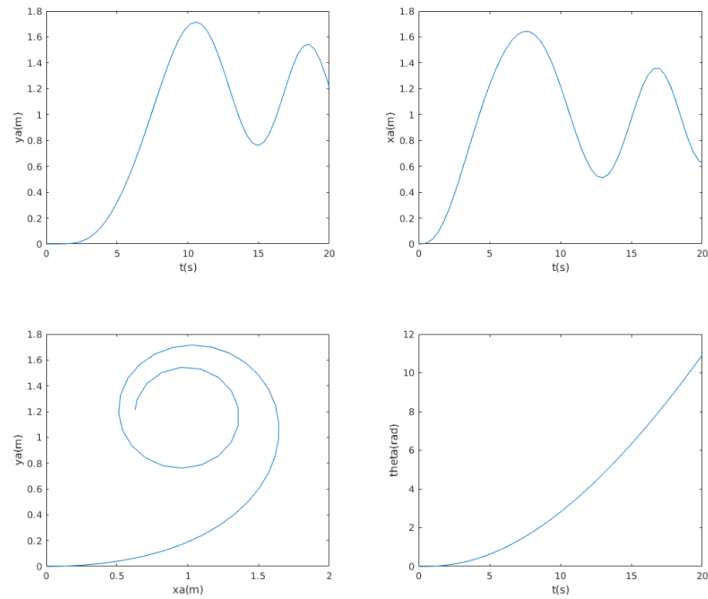


Рисунок 3.6. Траєкторія руху аналогічного робота

Був розроблений аналогічний рух для розробленої як зображено на рисунку 3.4

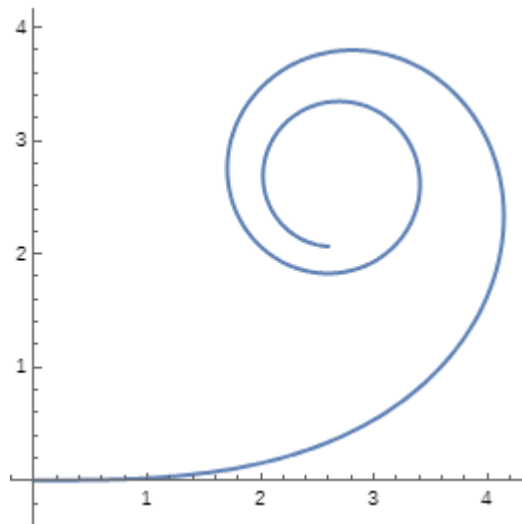


Рисунок 3.7. Траєкторія руху розробленої моделі

Як можна побачити з рухів роботів, які зображені вище(див. Рис 3.2, Рис 3.3), в розроблені моделі має кращий метод побудови та прогнозування руху, ніж аналогічна модель при однакових вхідних характеристиках, за рахунок

використання інтеграла Френеля, як спосіб побудови руху по спіралі, а аналогічна модель в свою чергу використовує гірший метод прогнозування, замість використання плавного повороту зміненням кутових швидкостей моделі з співвісною парою виконує зупинки, що призводять до погіршення та втраті часу. Також важливим зауваженням відмінностей обох цих МР це рух з постійною швидкістю за гладкою кривою, яка є диференційована, тобто в кожній точці кривої існує похідна, в кожній точці можна побудувати дотичну, а аналогічна модель будує рух по ламаній кривій, що є повною протилежністю, коли роботу необхідно зупинитися для того щоб зробити поворот а потім знову набрати задану швидкість.

Висновки за розділом 3

Таким чином розроблена програмна модель повністю виконує задачу побудови руху, має найкращі показники на гладкій кривій та погіршення цих показників на ламаній кривій через необхідність постійної зупинки, має кращі показники ефективності побудови руху, за рахунок нового розробленого методу задання руху, із використанням інтегралу Френеля. Як можна побачити за даним розділом, сама траєкторія руху має значний вплив на затрати в часі та енергоресурсам в кожній програмній моделі.

ВИСНОВКИ

В першому розділі роботи було проведено аналіз основних принципів побудови кінематичних моделей.

На підставі проведеного аналізу була розроблена КМ для рухомої платформи.

В другому розділі розглянути методи та підхід, які пропонуються для вирішення завдання дослідження. Для розробки готовності та працездатності програмної моделі було використано графічний метод. Цей метод базується на графічному аналізі параметрів системи і дозволяє прогнозувати її поведінку при різних умовах.

На базі вибраного метода побудована математична модель розрахунку показників надійності програмної моделі з урахуванням вказаних припущень.

Запропонована ММ дозволяє проводити дослідження готовності фізичної моделі робота. Вона дозволяє на підставі розробленого маршруту проводити тестування моделі для подальшої її експлуатації.

В математичній моделі враховувались додаткові фактори - наприклад, робот складається з ідеальної твердої основи, на якій встановлена співвісна колісна пара з диференціальним приводом, також вважаємо, що колеса, що управляють, мають точковий контакт з плоскою поверхнею, по якій вони рухаються без прослизання.

Перевірка математичної моделі на адекватність, простоту, об'єктивність, чутливість та стійкість є важливим етапом в процесі її створення та використання. Оцінка цих характеристик допомагає забезпечити надійність та точність моделі та підвищити її ефективність. Отримані розрахунки з використанням запропонованої математичної моделі відповідають теоретичним положенням теорії надійності.

У третьому розділі приведено приклади побудови руху з різних вхідних даних та порівняння з аналогічною моделлю для зображення нової та ефективнішої моделі для побудови руху.

Показано що, розроблена модель руху має кращій метод побудови руху через використання інтегралу Френеля, як метод руху по спіралі. З наведених викладок слідує що, програмна модель роботи має більшу ефективність ніж аналоги на обраному маршруті, за рахунок нового розробленого методу побудови руху.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Zhou, Z., Zhu, P., Zeng, Z., Xiao, J., Lu, H., Zhou, Z. Robot navigation in a crowd by integrating deep reinforcement learning and online planning / Zhou, Z., Zhu, P., Zeng, Z., Xiao, J., Lu, H., Zhou, Z. // Appl. Intell. 2022.
2. Поліщук С.Т. Цілеспрямоване керування станом організму людини // Електроніка та системи управління. - 2007.
3. J. J. Park, S. Lee, B. Kuipers, Discrete-time dynamic modeling and calibration of differential-drive mobile robots with friction, in: Robotics and Automation / J. J. Park, S. Lee, B. Kuipers // IEEE International Conference on, IEEE, 2017.
4. Lomakin A., Deutscher J. Identification of dynamic parameters for rigid robots based on polynomial approximation / Lomakin A., Deutscher J. // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems; Las Vegas, NV, USA, 2021.
5. Uddin N. Adaptive control system design for two-wheeled robot stabilization / Uddin N. // Proceedings of the 12th South East Asian Technical University Consortium; Yogyakarta, Indonesia. 12–13 March 2018.
6. О. М. Штельма Математичне моделювання і оптимізація // Харків: Методичні вказівки, 2018.
7. Глушков В.М. Енциклопедія кібернетики // Кібернетика та обчислювальні техніки, Київ, 1973.
8. Dynamic model of Differential Drive Mobile Robot [Електронний ресурс]. – режим доступу: URL: https://hackmd.io/@libernormous/dynamic_ddmr (дата звернення 28.05.2023)
9. Dynamic modelling and control of differential-drive mobile robot [Електронний ресурс]. – режим доступу: URL: https://easychair.org/publications/preprint_open/ZvfD1 (дата звернення 15.06.2023)

10. Wolfram Mathematica [Електронний ресурс]. – режим доступу: <https://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-math-students/en/variables-and-functions/> (дата звернення 15.04.2023)
11. E. Ivanjko, T. Petrinic, I. Petrovic, Modelling of mobile robot dynamics / E. Ivanjko, T. Petrinic, I. Petrovic // 7th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, volume 2, 2010.
12. Barzamini, R., Yazdizadeh, A., and Rahmani A., a New Adaptive Tracking Control For Wheeled Mobile Robot / Barzamini, R., Yazdizadeh, A., and Rahmani A. // IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, RAMECH, 2006.
13. Martins, F.N., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli R., a Velocity-Based Dynamic Model and Its Properties for Differential Drive Mobile Robots / Martins, F.N., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli R. // Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2017.
14. Zhang Y., Hong D., Chung J.H., Velinsky S.A. Dynamic model based robust tracking control of a differentially steered wheeled mobile robot / Zhang Y., Hong D., Chung J.H., Velinsky S.A. // Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, USA, 1998.
15. De La Cruz C., Carelli R., dynamic model based formation control and obstacle avoidance of multi-robot systems // Robotica, 2008.
16. Liu Y., Zhao C., Ren M., an Enhanced Hybrid Visual–Inertial Odometry System for Indoor Mobile Robot / Liu Y., Zhao C., Ren M. // Sensors. 2022.
17. Гуц А. К., Фролова Ю. В. Математичні методи в соціології. // ЛКИ, 2007.
18. Теплицький І. О., Елементи комп'ютерного моделювання // навч. посібник, Кривий Ріг, КДПУ, 2010.
19. Barros, T.T.T. and Lages, W.F., a Mobile Manipulator Controller Implemented in the Robot Operating System / Barros, T.T.T. and Lages, W.F. // International Symposium on Robotics, ISR/Robotik, 2014.

20. Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., and Noguchi T. , a stable tracking control method for an autonomous mobile robot / Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., and Noguchi T. // In Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990.

ДОДАТКИ

Додаток А

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет комп'ютерних наук

Кафедра теоретичної та прикладної системотехніки

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) Магістр

Галузь знань: **15 – Автоматизація та приладобудування**

Спеціальність: **151 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри теоретичної та
прикладної системотехніки

д.т.н., проф. Шматков С. І.



«08 » грудня 2022 року

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Бережний Артем Андрійович

(прізвище, ім'я, по батькові студента)

1. Тема роботи «Програмна модель робота з диференційним приводом»

керівник роботи Котвицький Альберт Тадеушевич, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «10» листопада 2023 року № 4101-5/3197

2. Строк подання студентом роботи 28.11.2023

3. Перелік питань, які потрібно розробити)

1. Аналіз та розробка кінематичної моделі та рішення прямих задач кінематики.

2. Побудувати математичну модель руху робота.

3. Реалізувати програмну модель робота в середовищі Wolfram Mathematica.

4. Протестувати виявлені задачі кінематики під управлінням розробленої програми.

5. Скласти звіт про знайдені в процесі тестування помилки.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи	Термін виконання етапів роботи
1.	Аналіз літератури з кінематичних моделей роботів	08.12.22-30.06.23
2.	Дослідження кінематичної схеми	08.12.22-13.01.2023
3.	Дослідження кінематичних залежностей	08.12.22-20.02.2023
4.	Дослідження прямих задач кінематики	08.12.22-27.03.2023
5.	Побудова формальної моделі принципів управління	27.03.2023-07.04.2023
6.	Аналіз властивостей спеціальних функцій Френеля	27.03.2023 - 15.05.2023
7.	Вивчення основних методів роботи в середовищі Wolfram Mathematica	15.05.2023-30.06.2023
8.	Розробка програмної моделі на мові Wolfram Language	30.06.2023-30.07.2023
9.	Встановлення траєкторії руху робота	30.07.2023-30.08.2023
10.	Аналіз руху програмованої платформи по розробленій траєкторії	30.08.2023-07.09.2023
11.	Підготовка до попереднього захисту кваліфікаційної роботи	07.09.2023-18.10.2023
12.	Представлення кваліфікаційної роботи та моделі керівнику та рецензенту	28.10.2023 – 28.11.2023

5. Дата видачі завдання 08.12.2022 р

Студент

А.А. Бережний

ініціали, прізвище

підпис

Керівник роботи

А. Т. Котвицький

ініціали, прізвище

підпис

Додаток Б

Затверджую

«23» травня 2023 р.

Технічне завдання
на розробку програмного виробу
«Програмна модель роботу з диференційними приводами».

1.	Введення	1.1. Назва: Програмна модель роботу з диференційним приводом 1.2. Галузь застосування: Автоматизація та приладобудування
2.	Підстава для розробки	2.1. Навчальний план за спеціальністю 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології 2.2. Завдання на кваліфікаційну роботу магістра затверджено наказом ректора № 4101-5/3197 від 10.11.2023.
3.	Призначення розробки	3.1. Мета розробки: є розробка та аналіз програмної моделі для керування роботом з диференціальним приводом. Дослідження спрямоване на вдосконалення та оптимізацію алгоритмів керування та розробку нових підходів у робототехніці. 3.2. Призначення розробки надає можливість скориставшись розробленою програмною моделлю двоколісного робота з певними вхідними даними побудувати розроблений рух та оцінити ефективність керування.

		3.3. Вихідні дані розробки: програмна модель роботу Вхідні дані: положення, розміри, початкові кутові швидкості час руху.
4.	Технічні вимоги до програмного виробу	4.1. Вимоги до функціональних характеристик: адекватність, простота, об'єктивність, точність. 4.2. Вимоги до надійності: модель повинна бути придатна для вирішення конкретних задач. Це означає, що модель повинна мати достатню точність та розширюватися для вирішення нових задач. 4.3. Вимоги до умов експлуатації: немає 4.4. Вимоги до складу і параметрів технічних засобів: для виконання програми повинен підходити ПК із будь-якою операційною системою сімейства Windows, Linux/Unix, Mac OS X, OS/2, Amiga. 4.5. Вимоги до інформаційної та програмної сумісності: підтримка ОС Linux або Windows 10, підтримка програми Wolfram Mathematica, підтримка різних платформ. 4.6. Вимоги до маркування та упаковки: вимоги до маркування та упакування не представляються. 4.7. Вимоги до транспортування і зберігання: вимоги до транспортування та зберігання не представляються. 4.8. Спеціальні вимоги: спеціальні вимоги до програмного виробу не пред'являються.
5.	Вимоги до програмної документації	Програмною документацією до виробу «Програмна модель роботу з диференціальним приводом» вважати:

		1) Справжнє Технічне завдання на розробку виробу (представити у вигляді Додатку Б до пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи). 2) Методику розрахунку інформативності змінних стану (у вигляді глав 3.2, 3.2.1, 3.2.2 та 3.3 пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи). 3) Опис виробу (представити в розділі 3 пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи)	
6.	Вимоги до техніко-економічних показників	Програмною документацією до виробу «Програмна модель роботу з диференційним приводом» вважати: 1) Справжнє Технічне завдання на розробку виробу (представити у вигляді Додатку Б до пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи). 2) Опис програмного виробу (представити в Розділі 3 пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи). 3) Джерела базової інформації.	
7.	Стадії і етапи розробки	Дата	Назва етапу
		від 12 листопад 2022 до 8 грудня 2022	Аналіз літератури з кінематичних моделей роботів
		від 9 грудня 2022 до 13 січня 2023	Дослідження кінематичної схеми

	від 14 січня 2023 до 20 лютого 2023	Дослідження кінематичних залежностей
	від 21 лютого 2023 до 27 березень 2023	Дослідження прямих задач кінематики
	від 28 березень 2023 до 7 квітень 2023	Побудова формальної моделі принципів управління
	від 8 квітень 2023 до 15 травня 2023	Аналіз властивостей спеціальних функцій Френеля
	від 16 травня 2023 до 30 червень 2023	Вивчення основних методів роботи в середовищі Wolfram Mathematica
	від 1 липень 2023 до 30 липень 2023	Розробка програмної моделі на мові Wolfram Language
	від 31 липень 2023 до 30 серпень 2023	Встановлення траєкторії руху робота
	від 31 серпень 2023 до 7 вересень 2023	Аналіз руху програмованої платформи по розробленій траєкторії

		від 6 вересень 2023 до 18 жовтень 2023	Підготовка до попереднього захисту дипломної роботи
		від 19 жовтень 2023 до 28 листопад 2023	Представлення дипломного проекту та моделі керівнику дипломного проекту та рецензенту
8.	Порядок контролю і приймання програмного продукту (моделі)	1. Перевірку ходу розробки програми виконувати раз в 3 тижні. 2. Захист розробленої моделі провести на засіданні Атестаційної комісії. 3. Пояснювальну записку подати на паперових носіях в примірнику і в електронному вигляді в 1 примірнику на CD-R компакт-диску.	

Виконавець

студент групи КУ- 61

Бережний А.А.



Замовник

к.ф.-м.н., доцент

Котвицький А. Т.



Додаток В**Програма і методика випробувань програмного виробу**

«Програмна модель роботу з диференційним приводом»

1 Об'єкт випробувань

Назва програмного виробу : «Програмна модель роботу з диференційним приводом»

1. Галузь застосування : Автоматизація та приладобудування
2. Перераховані відомості запозичуються з відповідних розділів Технічного завдання.

2. Мета випробувань

Перевірка відповідності функціональності програмної реалізації системи заявленим функціональним можливостям в технічному завданні (Додаток Б до пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи).

3. Загальні положення**1. Підстави для проведення випробувань**

Підставою для проведення випробувань є наказ про призначення атестаційної комісії.

2. Місце і тривалість випробувань

Приймальні (приймально-здавальні) випробування проводяться на базі комп'ютерного класу кафедри в період роботи атестаційної комісії.

3. Обсяг випробувань

Приймальні випробування програмного виробу проводяться в обсязі відповідному цієї програми і методики випробувань.

4. Організації, які беруть участь у випробуваннях

Приймальні випробування проводяться атестаційною комісією напередодні засідання (або в процесі засідання) за участю Замовника, Виконавця та інших осіб, присутніх на засіданні.

4. Вимоги до програми або програмного виробу

Модель повинна задовольняти наступним вимогам:

4.1. Вимоги до функціональних характеристик:

адекватність, простота, об'єктивність, чутливість, точність.

4.2. Вимоги до надійності: модель повинна бути придатна для вирішення конкретних задач. Це означає, що модель повинна мати достатню точність та розширюватися для вирішення нових задач.

4.3. Вимоги до умов експлуатації: немає

4.4. Вимоги до складу і параметрів технічних засобів: для виконання програми повинен підходити ПК із будь-якою операційною системою сімейства Windows, Linux/Unix, Mac OS X, OS/2, Amiga.

4.5. Вимоги до інформаційної та програмної сумісності: підтримка ОС Linux або Windows 10, підтримка програми Wolfram Mathematica, підтримка різних платформ.

4.6. Вимоги до маркування та упаковки: вимоги до маркування та упакування не представляються.

4.7. Вимоги до транспортування і зберігання: вимоги до транспортування та зберігання не представляються.

4.8. Спеціальні вимоги: спеціальні вимоги до програмного виробу не пред'являються.

5. Вимоги до програмної документації

Документацією до виробу «Програмна модель роботу з диференційним приводом» вважати:

1) Документація по мові програмування та додаткові мануали.

2) Програму і методику випробувань розробленої програми (представити як Додаток В до пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи).

3) Опис програмного виробу (представити в Розділі 3 пояснювальної записки до кваліфікаційної роботи).

4) Джерела базової інформації.

6. Засоби і порядок випробувань

6.1 Засоби випробувань

Засоби випробувань представлено на ПК на яких встановлено наступні програмні засоби: інтерпретатор мови програмування.

6.2 Порядок проведення випробувань

Як правило, випробування проводяться в два етапи:

- ознайомчий (1-й етап);
- власне випробування програмного виробу (2-й етап).

Перелік перевірок, що проводяться на 1 етапі випробувань, включає в себе:

1) Перевірку комплектності складу програмної документації здійснюється за критерієм наявності зазначеної в ТЗ документації.

2) Перевірку якості програмної документації. Перевірку здійснювати за критерієм відповідності вимогам ГОСТ 19.301-79 ЕСПД. «Програма і методика випробувань».

Перелік перевірок, що проводяться на 2 етапі випробувань, включає в себе:

1) Перевірку відповідності технічних характеристик програми вимогам технічного завдання.

2) Перевірку ступеня виконання функціональних вимог до програми.

3) Методику проведення перевірок:

- а) Запустити програмне забезпечення.

б) Порядок проведення випробувань:

- Зробити налаштування.
- Перевірити чи працює програма.
- Перевірити чи формується звіт.

4) Якщо перевірки на першому та другому етапах виконано успішно, то виріб вважається таким, що пройшов випробування.

Для проведення випробувань пропонується тест 1, тест 2, тест 3, тест 4.

Тест 1

1. Перевірка задання початкових значень;

```

r = 0.2;
L = 0.6;
φ0 = Pi/6;
x0 = 0;
y0 = 0;
w0 = 1.0;
w2 = 1.5;
w1 = 2.0;
t0 = 0;
t1 = t0 + 2;
t2 = t1 + 3;
t3 = t2 + 3;
t4 = t3 + 5;
t5 = t4 + 4;
t6 = t5 + 3;
t7 = t6 + 1;
Print["t0=", t0, " t1=", t1, " t2=", t2, " t3=", t3, " t4=", t4, " t5=", t5, " t6=", t6, " t7=", t7]
t0=0 t1=2 t2=5 t3=8 t4=13 t5=17 t6=20 t7=21

```

Рис. В.1 Тест 1

2. Перевірка побудови графіку

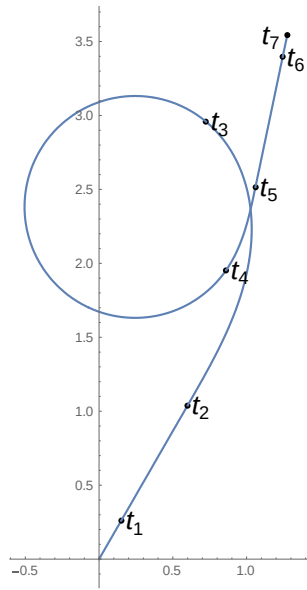


Рис. В.1 Тест 1

Тест 2

1. Перевірка задання початкових значень;

```

r = 0.5;
L = 0.8;
 $\varphi_0 = \pi / 3$ ;
x0 = 0;
y0 = 0;
w0 = 4.0;
w2 = 2.0;
w1 = 3.0;
t0 = 0; |
t1 = t0 + 5;
t2 = t1 + 3;
t3 = t2 + 15;
t4 = t3 + 8;
t5 = t4 + 7;
t6 = t5 + 5;
t7 = t6 + 5;
Print["t0=", t0, " t1=", t1, " t2=", t2, " t3=", t3, " t4=", t4, " t5=", t5, " t6=", t6, " t7=", t7]
t0=0 t1=5 t2=8 t3=23 t4=31 t5=38 t6=43 t7=48

```

Рис. В.2 Тест 2

2. Перевірка побудови графіку

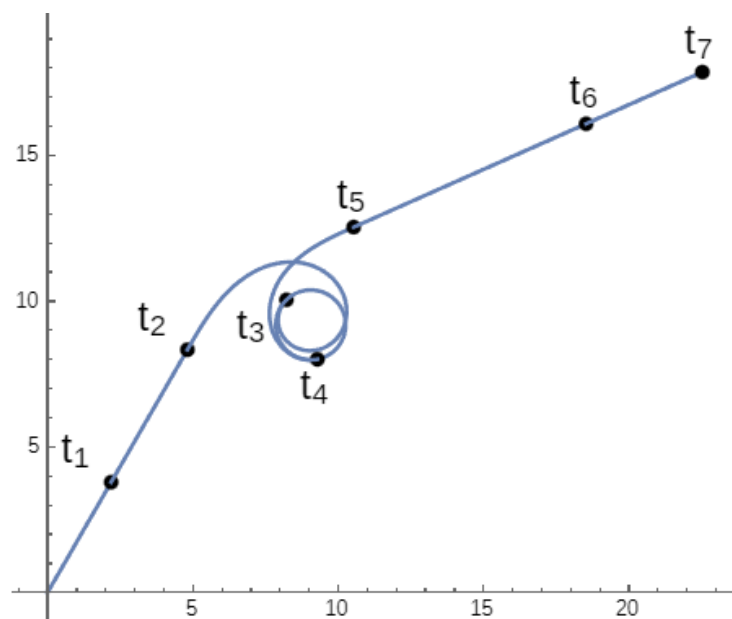


Рис. В.2 Тест 2

Тест 3

1. Перевірка задання початкових значень;

```

r = 0.2;
L = 0.6;
 $\varphi_0 = \text{Pi} / 6$ ;
x0 = 0;
y0 = 0;
w0 = 1.0;
w2 = 1.5;
w1 = 2.0;
t0 = 0;
t1 = t0 + 2;
t2 = t1 + 3;
t3 = t2 + 3;
t4 = t3 + 5;
t5 = t4 + 4;
t6 = t5 + 3;
t7 = t6 + 1;
Print["t0=", t0, " t1=", t1, " t2=", t2, " t3=", t3, " t4=", t4, " t5=", t5, " t6=", t6, " t7=", t7]
t0=0 t1=2 t2=5 t3=8 t4=13 t5=17 t6=20 t7=21

```

Рис. В.3 Тест 3

2. Перевірка побудови графіку

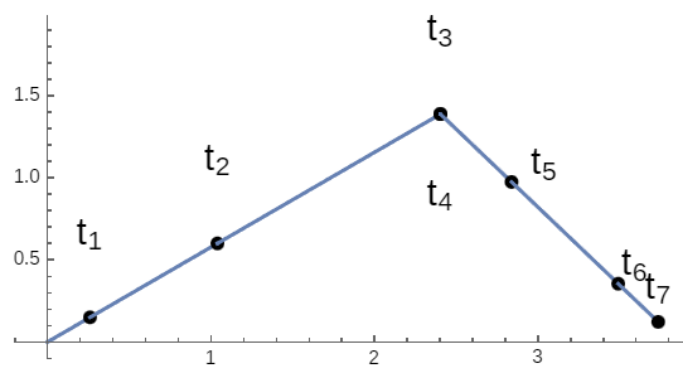


Рис. В.3 Тест 3

Тест 4

1. Перевірка задання початкових значень;

```

r = 0.2;
L = 0.6;
 $\varphi_0 = \pi / 6$ ;
x0 = 0;
y0 = 0;
w0 = 1.0;
w2 = 1.5;
w1 = 2.0;
t0 = 0;
t1 = t0 + 2;
t2 = t1 + 3;
t3 = t2 + 3;
t4 = t3 + 5;
t5 = t4 + 4;
t6 = t5 + 3;
t7 = t6 + 1;
Print["t0=", t0, " t1=", t1, " t2=", t2, " t3=", t3, " t4=", t4, " t5=", t5, " t6=", t6, " t7=", t7]
t0=0 t1=2 t2=5 t3=8 t4=13 t5=17 t6=20 t7=21

```

Рис. В.4 Тест 4

2. Перевірка побудови графіку

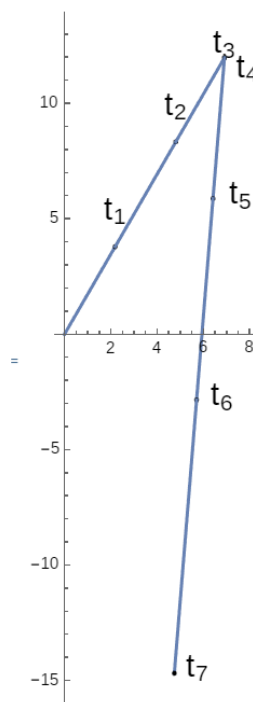


Рис. В.4 Тест 4

Тест вважається пройденим, якщо відбуваються вказані операції і їх відображення у прикладній програмі.

Висновки: тест 1 успішно пройшов випробування, тест 2 успішно пройшов випробування, тест 3 і тест 4 успішно пройшов випробування. Випробування пройшло успішно.

Виконавець: студент групи КУ-41, Бережний А.А..