

Скалярний добуток

Лекції для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М

14 грудня 2013 р.

Зміст

1	Лінійні функціонали та форми	4
1.1	Двоїстий (спряжений) простір — простір лінійних функціоналів та лінійних форм.	4
1.2	Дуальний (спряжений) базис у просторі лінійних функціоналів і у просторі лінійних форм.	10
1.3	Зміна координат лінійного функціонала при зміні базису в основному лінійному просторі.	14
2	Скалярний добуток	16
2.1	Скалярний добуток на дійсній площині та в тривимірному дійсному просторі	16
2.2	Обчислення скалярного добутку за координатним записом множників на дійсній площині та в тривимірному дійсному просторі.	20
3	Скалярний добуток в багатовимірному дійсному просторі	25

3.1	Білінійні функціонали та форми	25
3.2	Означення скалярного добутку в дійсному n -вимірному просторі	26
3.3	Приклади скалярного добутку	27
3.4	Довжина (норма) вектора. Нерівність Коші-Буняковського та нерівність тикутника. Кут між векторами. . .	28
3.5	Ортонормований базис — означення та обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі	32
3.6	Процес ортогоналізації Грама - Шмідта	37
4	Квадратичні функціонали та форми. Індокси інерції. Критерій додатної визначеності.	40
4.1	Квадратичні функціонали та форми над довільним полем	40
4.2	Квадратичні функціонали і форми над полем дійсних чисел	48
4.3	Приклади роботи з квадратичними формами . .	55
5	Ортогональне доповнення.	57
5.1	Означення ортогонального доповнення та його властивості	57
5.2	Ортогональна проєкція на підпростір та ортогональна складова вектора відносно підпростору. .	62
6	Застосування скалярного добутку	63
6.1	Точковий евклідовий простір, що асоційований із даним векторним простором. Система координат, репер.	63

6.2	Лінійні многовиди точкового простору і неоднорідні системи лінійних рівнянь. Відстань від точки до многовиду	68
6.3	Розв’язування несумісних систем лінійних рівнянь — метод найменших квадратів.	71
7	Ортогональні многочлени	74
7.1	Многочлени Чебишева першого та другого роду	74
7.2	Многочлени Лежандра	77
7.3	Тригонометричні многочлени	78
7.4	Об’єм у багатовимірному дійсному просторі . . .	79
8	Узагальнення скалярного добутку	81
8.1	Ермітів скалярний добуток у комплексному просторі	81
8.2	Геометрія Мінковського	83
9	Контрольна робота з теми “Скалярний добуток”.	83
9.1	Завдання 1. Знайти ортонормований базис лінійної оболонки векторів e_1, e_2, e_3	83
9.2	Завдання 2. Задані метричні коефіцієнти — скалярні добутки базисних векторів — $g_{11} = (e_1, e_1)$, $g_{12} = (e_1, e_2)$, $g_{22} = (e_2, e_2)$ і три радіус-вектори A, B, C . Знайти кут A і довжини сторін трикутника ABC .	86
9.3	Завдання 3. Знайти ортогональну проекцію вектора a на лінійну оболонку векторів e_1, e_2 і ортогональну складову цього вектора.	88
9.4	Завдання 4. Знайти базис ортогонального доповнення до лінійної оболонки векторів e_1, e_2	89

9.5 Завдання 5. Знайти відстань від точки $a = (-11, 10, 3, 7)$ до лінійного многовиду M , що заданий неоднорідною системою рівнянь. 90

1 Лінійні функціонали та форми

1.1 Двоїстий (спряжений) простір — простір лінійних функціоналів та лінійних форм.

Вважаємо, що є лінійний простір V над полем F . Будемо називати його первісним, початковим, заданим. Коли простір V скінченновимірний, то вважаємо, що його вимірність дорівнює n .

Означення 1.1 Відображення $f : V \rightarrow F$ називають функціоналом, функціонал називається лінійним, якщо він адитивний

$$a, b \in V \Rightarrow f(a + b) = f(a) + f(b),$$

і однорідний

$$a \in V, \lambda \in F \Rightarrow f(\lambda a) = \lambda f(a).$$

Для прикладу, похідна в точці 0 є лінійним функціоналом у лінійному просторі функцій, що мають похідні будь-якого порядку в точці 0 . Відображення, яке ставить у відповідність кожному вектору число 0 також є лінійним функціоналом, його називають нульовим і позначають 0 .

Позначимо множину лінійних функціоналів на лінійному просторі V над полем F через V^* . На непорожній множині V^* введемо операцію додавання лінійних функціоналів: для $f, g \in$

$V^*, x \in V$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

а також введемо множення функціонала на число: для $f \in V^*, \lambda \in F, x \in V$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Теорема 1.1 Множина V^* разом із введеним додаванням функціоналів та множенням функціоналів на числа є лінійним простором. Цей простір називають спряженим (або дуальним чи двоїтим) до V і позначають V^* .

Доведення. Технічну перевірку коректності визначення суми лінійних функціоналів, множення лінійного функціонала на число і того, що разом із введеними операціями V^* утворює лінійний простір, оминемо — як приклад такої технічної перевірки наведемо перевірку того, що сума лінійних функціоналів адативна. Незай $f, g \in V^*, x, y \in V$.

$$\begin{aligned}(f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = \\ &= (f(x) + f(y)) + (g(x) + g(y)) = f(x + y) + g(x + y).\end{aligned}$$

■

Лінійні функціонали на скінченновимірних просторах задають лійними формами і, навпаки, кожна лінійна форма задає лінійний функціонал на просторі відповідної вимірності, якщо в цьому просторі вибраний базис.

Означення 1.2 Вирази вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad n \geq 1,$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ сталі числа, а x_1, x_2, \dots, x_n — змінні, називають лінійними формами (від n змінних).

Прикладами лінійних форм є $2x_1 - 3x_2, \sum_{i=1}^n x_i$. Окремим випадком лінійної форми є нульова форма — всі коефіцієнти нульової форми дорівнюють нулю.

Лінійні форми можна додавати

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x_i,$$

і множити на число

$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) x_i.$$

Якщо на лінійному просторі V вимірності n з базисом $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ є лінійний функціонал $f : L \rightarrow F$, то для $x \in L, x = \sum x_i e_i$ значення $f(x)$ можна обчислити наступним чином:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i = f(e_i).$$

Таким чином, значення функціонала f на векторах обчислюється за допомогою лінійної форми. І навпаки, коли заданий набір чисел $a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n$, то визначаємо $f(e_i) = a_i$ і $f(x) = \sum x_i a_i$, тобто за лінійною формою ми можемо побудувати лінійний функціонал. Але це відбувається виключно за наявності базиса. Відповідність між формами та функціоналами канонічна (всім єдиним чином зрозуміла, природна) за наявності базиса і узгоджена з операціями додавання та множення на числа. Отже лінійні простори лінійних функціоналів і лінійних

форм канонічно ізоморфні. Наявність канонічного ізоморфізму дозволяє називати і той і другий простір спряженим до заданого лінійного простору.

Зауважимо, що одному і тому ж функціоналу (в різних базисах) можуть відповідати різні лінійні форми, а одній лінійній формі в різних базисах можуть відповідати різні лінійні функціонали.

Для прикладу розглянемо лінійний простір многочленів $x(t)$ від t степеня не вище 3 і в ньому лінійний функціонал f знаходження похідної в точці 1:

$$x(t) \rightarrow f(x(t)) = x'(1).$$

Якщо у вибраному просторі многочленів виділити базис $1, t, t^2, t^3$, то кожен многочлен записується у вигляді

$$x(t) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + x_4t^3, \quad x'(t) = x_2 + 2x_3t + 3x_4t^2$$

і функціонал f задається формою

$$f(x) = x_2 + 2x_3 + 3x_4.$$

Якщо у вибраному лінійному просторі вибрати базис $1, t, t(t+1), t(t+1)(t+2)$, то

$$x(t) = x_1 + x_2t + x_3t(t+1) + x_4t(t+1)(t+2), \quad x'(t) = x_2 + 3x_3t + 11x_4t^2$$

і функціонал f задається формою

$$f(x) = x_2 + 3x_3 + 11x_4.$$

Приклад Нехай є 5-вимірний лінійний простір V над полем

дійсних чисел, його елементами є вектори

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Спряжений простір також 5-вимірний, його елементами є лінійні функціонали, що задані лінійними формами

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5. \quad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Розглянемо лінійний підпростір $A \subset V$ з базисом

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо підпростір $A^* = B \subseteq V^*$, таких лінійних функціоналів $f \in V^*$, що $f(x) = 0$ для будь-якого вектора $x \in A$.

Оскільки

$$(\forall x \in A) f(x) = 0 \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2) = 0,$$

то для знаходження лінійних форм із B маємо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 3a_4 + 3a_5 = 0, \\ -a_1 + 4a_3 + 5a_4 + a_5 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язування починаємо із запису матриці системи:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі методом Гауса проводимо матрицю M до спрощеного вигляду

$$M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Тут перший перехід — до першого рядка додали другий, помножений на 2; другий перехід — поміняли місцями перший і другий рядок; третій перехід — перший рядок помножили на (-1). За одержаною матрицею у спрощеному вигляді пишемо систему рівнянь (що ріносильна системі (2)):

$$\begin{cases} a_1 - 4a_3 - 5a_4 - a_5 = 0, \\ a_2 + 8a_3 + 13a_4 + 5a_5 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Розділяємо змінні на основні (a_1, a_2) і вільні (a_3, a_4, a_5) , переносимо доданки із вільними змінними направо

$$\begin{cases} a_1 = 4a_3 + 5a_4 + a_5, \\ a_2 = -8a_3 - 13a_4 - 5a_5. \end{cases} \quad (4)$$

Складаємо табличку для знаходження базисних векторів простору розв'язків, в ній замість вільних змінних ставимо $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, (гарантуємо лінійну незалежність і повноту знайденої сукупно-

сті розв'язків):

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline f_1 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ f_2 & 5 & -13 & 0 & 1 & 0 \\ f_3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Записуємо відповідь: базисними формами лінійного простору B є

$$\begin{aligned} f_1 &= 4x_1 - 8x_2 + x_3, \\ f_2 &= 5x_1 - 13x_2 + x_4, \\ f_3 &= x_1 - 5x_2 + x_5, \end{aligned}$$

лінійний підпростір A є простором всіх розв'язків системи

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 13x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

1.2 Дуальний (спряжений) базис у просторі лінійних функціоналів і у просторі лінійних форм.

Теорема 1.2 (про вимірність спряженого простору) *Спряжений простір має ту ж вимірність, що і заданий лінійний простір.*

Доведення. Припустимо, що заданий лінійний простір n -вимірний і має базис e_1, e_2, \dots, e_n . Будуємо функціонали f_1, f_2, \dots, f_n так, що

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

Побудовані функціонали задаються формами: для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Для доведення теореми досить переконатися, що побудовані функціонали утворюють повну лінійно незалежну систему.

Оскільки для будь-якого функціоналу f

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i)x_i = \sum_{i=1}^n f(e_i)f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)f_i \right) x$$

то система f_1, \dots, f_n повна.

Перевіряємо лінійну незалежність функціоналів f_1, \dots, f_n . Виберемо лінійну комбінацію, що дорівнює нулю $a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n = 0$. Застосуємо цю лінійну комбінацію до вектора e_1 :

$$0 = (a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n)(e_1) = a_1.$$

Одержали рівність $a_1 = 0$. Подібним чином переконуємося в тому, що і решта коефіцієнтів a_2, a_3, \dots, a_n дорівнюють нулю.

Теорема доведена.

■

Означення 1.3 *Якщо в лінійному просторі V є базис e_1, e_2, \dots, e_n , то базис (5) називають дуальним (або двоїстим, чи спряженим) базисом у просторі функціоналів, а базис (6) називають дуальним базисом у просторі форм.*

Нехай, для прикладу, маємо три лінійні форми від 3-х змінних

$$f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, \quad f_2 = -x_2 + x_3, \quad f_3 = -2x_1 + x_2 + x_3$$

і вектор $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Тоді

$$f_1(a) = 5+2-1 = 6, \quad f_2(a) = 1-1 = 0, \quad f_3(a) = -10+1+1 = 8.$$

Форми f_1, f_2, f_3 в спряженому базисі мають координати

$$f_1 = (1, 2, -1), \quad f_2 = (0, -1, 1), \quad f_3 = (-2, 1, 1).$$

Застосування лінійного функціонала, що заданий формою, до вектора називають згорткою. Щоб одержати згортку, рядок координат форми (лівий множник) множать на стовпчик координат вектора (правий множник). В нашому прикладі

$$f_1(a) = (1, 2, -1) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6, \quad f_2(a) = (0, -1, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$f_3(a) = (-2, 1, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -8.$$

Теорема 1.3 (про відповідність між підпросторами простору та сп

Нехай маємо лінійний простір V , $\dim V = n$ над деяким полем F і V^ спряжений до V простір лінійних функціоналів. Між підпросторами*

$$L \subseteq V, \quad M \subseteq V^*$$

існує природна (канонічна) взаємно однозначна відповідність, яка встановлюється правилами

$$a \in L \Leftrightarrow \forall f \in M f(a) = 0, \quad (7)$$

$$f \in M \Leftrightarrow \forall a \in L f(a) = 0. \quad (8)$$

Доведення. Нехай L є підпростір $L \subseteq V$ простору V вимірності $\dim L = n$. Побудуємо підпростір $M \subseteq V^*$ за допомогою умови (8). Далі побудуємо підпростір L_1 за допомогою умови

$$a \in L_1 \Leftrightarrow \forall f \in M f(a) = 0, \quad (9)$$

Доведення теореми буде завершено, коли ми переконаємося, що $L_1 = L$.

У просторі V вибираємо певний базис, і у просторі V^* вибирається дуальний базис. Простір V^* стає простором лінійних форм. Вибираємо в L будь-який базис e_1, e_2, \dots, e_r . Умова (8) переписується у вигляді

$$f \in M \Leftrightarrow f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_r) = 0. \quad (10)$$

Права частина еквіваленції (рівносильності) (10) є системою r незалежних лінійних однорідних рівнянь для знаходження лінійної форми f . Вважаємо відомо, що простір розв'язків такої системи має вимірність $n - r$, тобто

$$\dim M = n - r.$$

Виберемо в M базис f_1, f_2, \dots, f_{n-r} і перепишемо умову (9) у вигляді

$$x \in L_1 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-r}(x) = 0, \quad (11)$$

тобто L_1 є лінійним простором розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-r}(x) = 0$. Тому

$$\dim L_1 = n - (n - r) = r.$$

За побудовою підпростору M бачимо, що $L \subseteq L_1$. Але оскільки $\dim L = \dim L_1$, то $L = L_1$.

Теорема доведена. ■

Безпосереднім наслідком доведеної теореми є

Теорема 1.4 (про задання підпростору системою лінійних однорідних

Нехай F^n n -вимірний лінійний простір матриць-стовпчиків над полем F . Тоді для кожного лінійного підпростору $L \subseteq F^n$ існує система лінійних однорідних рівнянь, для якої L є простором розв'язків.

Для прикладу, нехай потрібно знайти систему лінійних однорідних рівнянь, для якої вектори $e_1 = (-1, 0, 3)$, $e_2 = (2, 2, -1)$ є базисом простору розв'язків.

Шукаємо всі лінійні форми $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ такі, що $f(e_1) = f(e_2) = 0$, тобто

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_3 = 0, \\ 2a_1 + 2a_2 - a_3 = 0. \end{cases}$$

Шукаємо базис простору розв'язків одержаної системи

$$\begin{cases} a_1 = 3a_3, \\ 2a_2 = 5a_3. \end{cases}$$

Оскільки вільна змінна a_3 одна, то простір розв'язків одновимірний, взявши $a_3 = 2$ одержуємо $a_1 = 6$, $a_2 = 5$, і один вектор f_1 потрібного базису має вигляд $f_1(x) = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$.

1.3 Зміна координат лінійного функціонала при зміні базису в основному лінійному просторі.

Вибравши базис e_1, e_2, \dots, e_n в лінійному просторі V ми для кожного лінійного функціонала $f : V \rightarrow F$ одержуємо задання

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i,$$

де числа $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ є координатами функціонала f у дуальному базисі спряженого простору.

Теорема 1.5 *Нехай у лінійному просторі V є два базиси: старий базис e_1, e_2, \dots, e_n і новий базис u_1, u_2, \dots, u_n . Лінійний функціонал $f \in V^*$ одержує два набори координат: a_1, a_2, \dots, a_n в базисі, що спряжений до старого, і b_1, b_2, \dots, b_n в базисі, що спряжений до нового. Якщо C – матриця переходу від старого базиса до нового, то*

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)C, \quad (12)$$

або стисло, позначивши $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$b = aC. \quad (13)$$

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для $i = 1, 2, \dots, n$

$$b_i = f(u_i) = f\left(\sum_{j=1}^n c_{ji}e_j\right) = \sum_{j=1}^n c_{ji}f(e_j) = \sum_{j=1}^n a_j c_{ji}.$$

■

Якщо записати означення матриці переходу від старого базиса до нового у вигляді

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C, \quad (14)$$

і порівняти із зміною координат лінійного функціонала (12), то побачимо, що вони змінюються однаково або, як кажуть, коваріантно.

2 Скалярний добуток

2.1 Скалярний добуток на дійсній площині та в тривимірному дійсному просторі

Скалярний добуток векторів вводиться в дійсному просторі довільної вимірності, а в дійсній площині (двовимірному просторі) та у просторі (тривимірному дійсному просторі) — це окремі випадки. Але зважаючи на особливу практичну важливість двовимірного та тривимірного випадку, зупинимось та них окремо, тобто розглядаємо скалярний добуток на множині колінеарних векторів \mathbb{R}^1 , на множині компланарних векторів \mathbb{R}^2 і на множині всіх вільних векторів \mathbb{R}^3 дійсного тривимірного простору.

Означення 2.1 Скалярним добутком (a, b) векторів називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між променями, що задані векторами, тобто

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi, \quad (15)$$

де φ — кут між додатніми напрямками осей, що задані векторами a, b .

В якому напрямку обчислюється кут — від першого вектора до другого, чи від другого до першого, не має значення, оскільки

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi).$$

Теорема 2.1 Позначимо через a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 довільні вектори із \mathbb{R}^1 , чи із \mathbb{R}^2 , чи із \mathbb{R}^3 , а через λ, μ довільні числа. Скалярний добуток є

- позитивним, тобто $a \neq 0 \Rightarrow (a, a) > 0$;
- симетричним, тобто $(a, b) = (b, a)$;
- білінійним, тобто $(\lambda a_1 + \mu a_2, b) = \lambda(a_1, b) + \mu(a_2, b)$, $(a, \lambda b_1 + \mu b_2) = \lambda(a, b_1) + \mu(a, b_2)$,

функціоналом в $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Доведення. Позитивність випливає з того, що квадрат довжини вектора завжди невід'ємне число і дорівнює нулю лише в одному випадку, коли вектор дорівнює нулю.

Симетричність впливає з того, що кут між позитивними напрямками осей не залежить від того, яка вісь названа першою, а яка другою.

Перейдемо до перевірки білінійності.

Лема 2.1 В прямокутній системі координат скалярний добуток векторів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ можна обчислювати за формулою

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (16)$$

Доведення. Позначимо через φ_1, φ_2 кут між віссю OX та, відповідно, векторами a, b , а через φ кут між самими векторами a, b . Тоді

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \quad (17)$$

За означенням координат вектора

$$a_1 = |a| \cos \varphi_1, \quad a_2 = |a| \sin \varphi_1, \quad b_1 = |b| \cos \varphi_2, \quad b_2 = |b| \sin \varphi_2,$$

ВІДПОВІДНО

$$\frac{a_1}{|a|} = \cos \varphi_1, \quad \frac{a_2}{|a|} = \sin \varphi_1, \quad \frac{b_1}{|b|} = \cos \varphi_2, \quad \frac{b_2}{|b|} = \sin \varphi_2.$$

Підставимо одержані формули для косинусів кутів в (17):

$$\cos \varphi = \frac{a_1}{|a|} \cdot \frac{b_1}{|b|} + \frac{a_2}{|a|} \cdot \frac{b_2}{|b|}.$$

Тому

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi = |a| \cdot |b| \cdot \left(\frac{a_1}{|a|} \cdot \frac{b_1}{|b|} + \frac{a_2}{|a|} \cdot \frac{b_2}{|b|} \right) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Лема доведена. ■

Формула (16) дозволяє перевірити лінійність скалярного добутку за першим аргументом, тобто

$$(\lambda a_1 + \mu a_2, b) = \lambda(a_1, b) + \mu(a_2, b), \quad (18)$$

в прямокутній системі координат. Дійсно, нехай маємо вектори

$$a' = (a'_1, a'_2), a'' = (a''_1, a''_2), b = (b_1, b_2), a = \lambda a' + \mu a'', (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} (a, b) &= (\lambda a'_1 + \mu a''_1) b_1 + (\lambda a'_2 + \mu a''_2) b_2 = \lambda a'_1 b_1 + \mu a''_1 b_1 + \mu a''_2 b_2 + \lambda a'_2 b_2 = \\ &= \lambda(a'_1 b_1 + a'_2 b_2) + \mu(a''_1 b_1 + a''_2 b_2) = \lambda(a', b) + \mu(a'', b). \end{aligned}$$

Формула (18) і, таким чином, лінійність скалярного добутку за обома аргументами (білінійність) перевірена. Перевірка відбулася в прямокутній системі координат, але це не суттєво, оскільки скалярний добуток визначений безвідносно до системи координат.

Перевіримо лінійність скалярного добутку (a, b) в тривимірному дійсному просторі. Як і раніше, враховуючи симетричність скалярного добутку, перевіряємо лінійність лише за одним аргументом, за першим, коли другим множник b сталий, не змінюється. Лінійність за першим аргументом очевидна, коли вектор b дорівнює нулю, всі скалярні добутки на нульовий вектор є нулями. Тому обмежимося лише випадком, коли $b \neq 0$. Для доведення виберемо прямокутну систему координат, в якій перша координатна вісь, вісь OX , має той же напрям, що і вектор b .

Лема 2.2 *В прямокутній системі координат скалярний добуток векторів $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, 0, 0)$, $b > 0$ можна обчислювати за формулою*

$$(a, b) = a_1 b_1. \quad (19)$$

Доведення. Система координат вибрана так, що кут φ між векторами a, b збігається із кутом між вектором a і віссю OX , тобто $|a| \cos \varphi = a_1$, крім того, $|b| = b_1$. Тому

$$(a, b) = |a| \cos \varphi \cdot |b| = a_1 \cdot b_1.$$

Лема доведена. ■

Лема 2.2 забезпечує лінійність за першим аргументом, і, враховуючи симетричність скалярного добутку, за обома аргументами. Те що, ми використовували спеціальні систему координат не є суттєвим, оскільки означення скалярного добутку не залежить від вибору системи координат. ■

2.2 Обчислення скалярного добутку за координатним записом множників на дійсній площині та в тривимірному дійсному просторі.

Одержимо формулу для обчислення скалярного добутку векторів, що задані координатним записом, у випадку, коли відомі довжини базисних векторів і кути між ними.

Нехай є базис e_1, e_2, e_3 , відомі довжини базисних векторів і кути між ними. Отже ми можемо обчислити скалярні добутки $(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_2, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_3)$. Візьмемо два довільні вектори в координатному записі $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$. За означенням координатного запису маємо

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3.$$

Скориставшись білінійністю скалярного добутку ми можемо записати

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = \\ &= a_1b_1(e_1e_1) + (a_1b_2 + b_1a_2)(e_1e_2) + \\ &+ (a_1b_3 + b_1a_3)(e_1e_3) + a_2b_2(e_2e_2) + (a_2b_3 + b_2a_3)(e_2e_3) + a_3b_3(e_3e_3). \end{aligned}$$

Стисло за допомогою знака підсумовування одержану формулу можна переписати у вигляді

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (e_i, e_j). \quad (20)$$

Матрицю g , елементами якої є $g_{ij} = (e_i, e_j)$, називають матрицею Грама, або метричним тензором, а самі числа g_{ij} називають метричними коефіцієнтами.

Оформимо сказане у вигляді теореми.

Теорема 2.2 (про обчислення скалярного добутку в довільному базисі)

Скалярний добуток (a, b) векторів $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ в базисі з матрицею Грама

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} \end{pmatrix}, \quad g_{i,j} = g_{j,i}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

обчислюється за формулою

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j g_{i,j} = (a_1, a_2, a_3) G \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Скалярний добуток (a, b) векторів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ в базисі з матрицею Грама

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}, \quad g_{i,j} = g_{j,i}, \quad i, j = 1, 2,$$

обчислюється за формулою

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^2 a_i b_j g_{i,j} = (a_1, a_2) G \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Найбільш важливим типом базису є такий, в якому вектори взаємно ортогональні (перпендикулярні один до одного) і нормовані (є ортами, довжина кожного базисного вектора дорівнює 1). Такий базис називають ортонормованим. Якщо базис (e_1, e_2, e_3) ортонормований, то косинус кута між різними векторами дорівнює нулю і

$$(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1, \quad (e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0,$$

або в стислому записі

$$(e_i, e_j) = \delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Функцію $\delta(i, j)$ називають символом Кронекера. За означенням ортонормованого базису матриця Грама ортонормованого базиса є одиничною. Завдяки одержаним формулам для скалярного добутку базисних векторів ми можемо написати формулу для обчислення скалярного добутку векторів в координатному записі. Результат оформимо у вигляді теореми.

Теорема 2.3 (про обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі)

Якщо $a, b \in \mathbb{R}^2$, базис ортонормований, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, то

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Якщо $a, b \in \mathbb{R}^3$, базис ортонормований, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Для прикладу, знайдемо скалярний добуток векторів $a = (1, 2)$ та $b = (5, 7)$ в ортонормованому базисі:

$$(a, b) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19.$$

Скалярний добуток цих же векторів в базисі з матрицею Грама

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

буде

$$(a, b) = 1 \cdot 5 \cdot g_{1,1} + 2 \cdot 7 \cdot g_{2,2} + 1 \cdot 7 \cdot g_{1,2} + 2 \cdot 5 \cdot g_{2,1} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1 = 50.$$

Розглянемо ситуацію, коли відомо, як обчислювати скалярний добуток — відома форму обчислення, коли задані координати, а потрібно знайти довжину вектора, чи знайти кут між двома векторами. Використовуючи означення скалярного добутку (15) можна записати

$$(a, a) = |a| \cdot |a| \cos 0 = |a|^2 \rightarrow |a| = \sqrt{(a, a)}, \quad (24)$$

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}. \quad (25)$$

Якщо базис ортонормований, то для довільного вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

а якщо $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ два вектори і φ кут між ними, то

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Зауваження 1. Якщо не сказано щось інше, базис вважається ортонормованим.

В ортонормованому базисі вектор $a = (1, 2)$ має довжину (норму) $\sqrt{5}$, а в базисі з метричними коефіцієнтами

$$g_{1,1} = 1, \quad g_{2,1} = 1, \quad g_{1,2} = 1, \quad g_{2,2} = 2$$

довжина цього вектора дорівнює

$$|a| = \sqrt{a, a} = \sqrt{1 + 2 + 2 + 8} = \sqrt{13}.$$

Довжина вектора $b = (5, 7)$ дорівнює

$$|b| = \sqrt{b, b} = \sqrt{25 + 35 + 35 + 98} = \sqrt{193}.$$

При знаходженні кута між векторами звичайно обмежуються знаходженням косинуса цього кута. Так, так на площині з базисом, що має матрицю Грама (23), для знаходження кута між векторами $a = (1, 2)$, $b = (5, 7)$ обмежуємося знаходженням косинуса цього кута:

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{50}{\sqrt{13}\sqrt{193}}.$$

Зауваження 2. Часто буває корисним пам'ятати, що на площині в ортнормованому базисі

- вектори (x, y) та $(-y, x)$ взаємно ортогональні і довжини у них однакові;
- вектор має довжину 1 тоді і тільки тоді, коли його можна записати у вигляді $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ для деякого кута φ .

Зауваження 3 Процес поділу ненульового вектора на його довжину називають нормуванням, нормуванням вектора. Після нормування ми одержуємо вектор одиничної довжини і того ж напрямку, що і заданий. Але користуючись певною розкутістю, інколи кажуть про нормування як про процес множення ненульового вектора на число так, щоб одержаний вектор задовольняв певну умову — не обов'язково, щоб довжина була одиницею. Так коли вектром є многочлен, то його можна нормувати умовою: “многочлен в точці 1 дорівнює 1”. аме такою умовою нормуються так звані многочлени Лежандра.

3 Скалярний добуток в багатовимірному дійсному просторі

Нижче будемо вважати, що V — n -вимірний лінійний простір, $n = 1, 2, \dots$, над полем F .

3.1 Білінійні функціонали та форми

Означення 3.1 Функціонал f від m змінних

$$f : \underbrace{V \times V \times \dots \times V \times V}_m \rightarrow F$$

називається *полілінійним*, якщо він лінійний за кожною змінною, тобто для будь-яких

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in F, \quad x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{i,j}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^p \alpha_j f(x_1, x_2, \dots, x_{i,j}, \dots, x_m).$$

Дл прикладу, визначник квадратної матриці є полілінійним функціоналом від рядків цієї матриці і полілінійним функціоналом від стовпчиків цієї матриці. Наразі будемо розглядати випадки $n = 1$ (лінійні функціонали,) та $n = 2$ (білінійні функціонали), які уже згадувалися вище.

Коли у просторі V є виділений базис e_1, \dots, e_n , тоді для будь-яких $x, y \in V$ і будь-якого білінійного функціонала $f(x, y)$ можна записати

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j, \quad f(e_i, e_j) = a_{i,j} \in F$$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i y_j. \quad (26)$$

Отже, в n -вимірному просторі із заданим базисом білінійний функціонал f задають білінійною формою, тобто виразом вигляду $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$.

Рівність (26) можна переписати у матричному вигляді

$$f(x, y) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

або у вигляді

$$f(x, y) = x^T A y,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 3.2 Матрицю A називають матрицею білінійної форми (26).

3.2 Означення скалярного добутку в дійсному n -вимірному просторі

Нижче розглядаємо лінійні (векторні) простори над полем дійсних чисел. Таким чином, всі числа, що зустрічаються в цьому розділі, — це дійсні числа.

Означення 3.3 Функціонал, який зіставляє будь-яким двом векторам $a, b \in L$ дійсного лінійного простору L число (a, b) , називається скалярним добутком, якщо він

1. симетричний, тобто

$$(a, b) = (b, a)$$

для будь-яких векторів $a, b \in L$;

2. позитивний, тобто

$$(a, a) > 0 \text{ при } a \neq 0;$$

3. білінійний, тобто

$$(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a, c) + \mu(b, c);$$

$$(a, \lambda b + \mu c) = \lambda(a, b) + \mu(a, c).$$

Таким чином, коротко можна сказати, що скалярний добуток векторів у дійсному просторі — це симетричний, позитивний, білінійний функціонал.

3.3 Приклади скалярного добутку

Прикладом скалярного добутку є скалярний добуток векторів на дійсній площині чи у тривимірному просторі, які розглядалися вище.

Іншим прикладом скалярного добутку є скалярний добуток визначених на відрізку $[0, 1]$ абсолютно інтегровних на цьому відрізку функцій f, g , що задається за допомогою інтеграла

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

У будь-якому n -вимірному лінійному просторі L із будь-яким базисом можна ввести скалярний добуток векторів

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \rightarrow (a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Означення 3.4 *Дійсний лінійний простір зі скалярним добутком називається евклідовим векторним простором.*

Далі вважаємо, що заданий лінійний простір L є евклідовим, тобто в ньому задано скалярний добуток (x, y) .

3.4 Довжина (норма) вектора. Нерівність Коші-Буняковського та нерівність трикутника. Кут між векторами.

Означення 3.5 *Для кожного вектора $x \in L$ із евклідового простору L додатне число*

$$|x| = \sqrt{(x, x)} \geq 0$$

називається довжиною (або нормою) вектора x .

Зрозуміло, що

- довжина ненульового вектора завжди додатна;
- довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Нехай V — лінійний простір із скалярним добутком (x, y) і нормою $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Теорема 3.1 *Для будь-яких $x, y \in V$*

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (27)$$

причому рівність в (27) досягається в тому і тільки тому випадку, якщо вектори однаково напрямлені;

$$|x + y| \geq |x| - |y|, \quad (28)$$

причому рівність в (28) досягається в тому і тільки тому випадку, якщо $|x| \geq |y|$ і вектори x, y протилежно напрямлені (нерівності (27), (28) називаються нерівностями трикутника), і

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|. \quad (29)$$

причому рівність в (29) досягається тоді і тільки тоді, коли вектори x, y лінійно залежні. Нерівність (29) називається нерівністю Коші — Буняковського.

Доведення. Оскільки норма вектора завжди невід’ємна, то для доведення (27) досить довести нерівність

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2. \quad (30)$$

Враховуючи, що $\cos \varphi \leq 1$, причому рівність досягається лише у випадку $\varphi = 0$, маємо

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi \leq \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Нерівність (30) і, відповідно, нерівність (27), доведені.

Коли $|x| < |y|$, Тоді права частина нерівності (28) від’ємна, а ліва не від’ємна, отже нерівність справджується, оскільки будь-яке від’ємне число менше будь-якого не від’ємного, і рівності бути не може. Тому далі вважаємо $|x| \geq |y|$ і довести потрібно, що

$$|x + y|^2 \geq (|x| - |y|)^2 \quad (32)$$

Справді, враховуючи, що $-1 \leq \cos \varphi$, причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли вектори протилежно напрямлені, можна написати

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi \geq \\ &\geq |x|^2 + |y|^2 + -2|x| \cdot |y| = (|x| - |y|)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Для доведення нерівності (29) Розглянемо вектор $a = x + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $(a, a) \geq 0$, то квадратний тричлен

$$f(\lambda) = |x|^2 + 2\lambda(x, y) + |y|^2 \geq 0$$

для будь-яких векторів $x, y \in V$. А це означає, що дискримінант квадратного тричлена $D = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0$, і нерівність (29) справджується.

Подивимось, за якої умови нерівність (29) перетворюється в рівність. Оскільки $(a, a) = 0$ в єдиному випадку, коли $a = x + \lambda y = 0$, то дискримінант дорівнює нулю в єдиному випадку, коли вектори $x, y \in L$ лінійно залежні.

■

Нерівність Коші — Буняковського дозволяє ввести наступне означення

Означення 3.6 *Кут ϕ між ненульовими векторами x, y визначається умовами:*

$$\cos \phi = \frac{(x, y)}{|x||y|}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Кут між векторами, один з яких дорівнює нулю, не визначений.

Ділення вектора на його довжину називається *іт* нормуванням вектора .

Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається *нормованим*.

Два вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю , називаються *ортогональними*.

Система векторів, в якій кожен вектор має довжину 1 і будь-які два різних вектора ортогональні, називається *ортонормованою системою векторів*.

Розглянемо вектор $a = (-1, 3, 0, 3)$. З'ясуємо, чи є він нормованим, і якщо ні, то нормуємо його.

Оскільки нічого не сказано, як обчислювати скалярний добуток, то за домовленістю вважаємо базис ортонормованим,

$$|a|^2 = (a, a) = 1 + 9 + 9 = 8 \neq 1,$$

вектор не нормований, і при нормуванні одержується вектор

$$b = \frac{a}{|a|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{0}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}} \right).$$

Знайдемо кут між векторами $a = (0, 2, -1, 1, 4)$, $b = (3, -7, 0, 2, 1)$.

Оскільки не вказано спосіб обчислення скалярного добутку, то обчислюємо його так, мовби базис ортонормований. Отже

$$|a|^2 = 4 + 1 + 1 + 16 = 22, |b|^2 = 9 + 49 + 4 + 1 = 63,$$

$$(a, b) = -14 + 2 + 4 = -8, \cos \varphi = \frac{-8}{\sqrt{22}\sqrt{63}}.$$

Оскільки $(a, b) < 0$, то кут між векторами тупий.

3.5 Ортонормований базис — означення та обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі

Означення 3.7 *Базис, що складається із взаємно ортогональних нормованих векторів, називається ортонормованим базисом.*

Теорема 3.2 (про обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі) *Базис евклідового простору є ортонормованим тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток векторів*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

обчислюється за допомогою формули

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (34)$$

Доведення. Припустимо, що скалярний добуток векторів у просторі з базисом e_1, e_2, \dots, e_n обчислюється за формулою (34).

Для базисних векторів із простору можна записати

$$e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots; \quad e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots; \quad e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + \dots;$$

Тому в координатному записі

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \quad e_3 = (0, 0, 1, \dots), \dots$$

Підставляючи в (34) координати базисних векторів одержуємо

$$(e_i, e_i) = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0,$$

тобто базис ортонормований.

Якщо відомо, що базис e_1, e_2, \dots, e_n ортонормований, то для будь-яких векторів

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

буде

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Теорема доведена. ■

Теорема 3.3 (про координати вектора в ортонормованій системі векторів)

Нехай вектор x в ортонормованому базисі e_1, e_2, \dots, e_n має координати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді

$$x_i = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Доведення. Дійсно, якщо базис e_1, e_2, \dots, e_n ортонормований і $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, то

$$(x, e_i) = \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j, e_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j (e_j, e_i) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{i,j} = x_i.$$
■

Теорема 3.4 (про незалежність ортонормованої системи векторів)

Будь-яка ортонормована система векторів лінійно незалежна.

Доведення. Нехай $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$. Тоді за теоремою 3.3 $x_i = (x, e_i) = x_i = 0$. Лінійна незалежність вибраної ортонормованої системи векторів доведена. ■

Наслідком теореми про координати вектора в ортонормованому базисі є важливий для застосувань наслідок:

Теорема 3.5 *Нехай в двох ортонормованих базисах e_1, e_2, \dots, e_n та u_1, u_2, \dots, u_n вектор x має координати $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ відповідно. Якщо $u_1 = e_1$, то $x_1 = y_1$.*

Означення 3.8 *Матриця називається ортогональною, якщо транспонована до неї збігається із оберненою.*

Для прикладу, розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Для цих матриць

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

і

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриці B, C ортогональні, а матриця A не ортогональна.

Теорема 3.6 *Матриця буде ортогональною тоді і тільки тоді, коли вона є матрицею переходу від ортонормованого базису до ортонормованого.*

Доведення. Для будь-якої квадратної матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

буде

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}, \quad b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

Нехай в n -вимірному просторі є базис $e = e_1, e_2, \dots, e_n$ і система векторів $u = u_1, u_2, \dots, u_n$,

$$u_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k.$$

Якщо A є матрицею переходу від ортонормованого базиса e до ортонормованого базиса u , то

$$(u_i, u_j) = \delta_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = b_{i,j}, \quad (36)$$

$A^T \cdot A = E$ і матриця A ортогональна.

Якщо матриця A ортогональна, то ми можемо вважати базис e ортонормованим і рівності (36) показують, що базис u також ортонормований.

Теорема доведена. ■

Теорема 3.7 (про існування ортонормованого базиса) У кожному ненульовому евклідовому просторі існує ортонормований базис.

Будь-яку ортонормовану систему векторів евклідового простору можна доповнити до ортонормованого базису.

Доведення. Раз простір не нульовий, то в ньому існує ненульовий вектор. Цей вектор можна розділити на його довжину і отримати одиничний вектор — ортонормовану систему векторів, що складається із одного вектора. Отже в просторі існують ортонормовані системи векторів.

Виберемо максимальну ортонормовану систему e_1, e_2, \dots, e_n векторів, тобто таку, що після додавання до неї будь-якого вектора a система перестає бути ортонормованою. Покажемо, що вона є базисом.

Система векторів e_1, e_2, \dots, e_n є лінійно незалежною за теоремою 3.4. Отже потрібно доводити лише повноту цієї сукупності. Для цього вибираємо довільний вектор a і розглядаємо вектор

$$b = a - (a, e_1)e_1 - (a, e_2)e_2 - \dots - (a, e_n)e_n.$$

Припущення $b \neq 0$ приводить до суперечності: система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n, \frac{b}{|b|}$ більша від e_1, e_2, \dots, e_n і ортонормована, а це суперечить максимальності сукупності e_1, e_2, \dots, e_n . Одержана суперечність доводить, що $b = 0$, і, відповідно,

$$a = (a, e_1)e_1 + (a, e_2)e_2 + \dots + (a, e_n)e_n.$$

Повнота системи векторів e_1, e_2, \dots, e_n доведена.

Щоб довести, що кожен ортонормований сукупність векторів можна доповнити до ортонормованого базиса, вибираємо максимальну ортонормовану систему, що містить задану, і, подібно попередньому, переконуємося, що одержали ортонормований базис.

■

Теорема 3.8 (про задання лінійного функціонала скалярним добутком)
Для кожного функціонала f евклідового лінійного простору L

існує і до того ж єдиний вектор $a \in L$ такий, що

$$\forall x \in L \quad f(x) = (a, x).$$

Доведення. Вибираємо в L ортонормований базис e_1, e_2, \dots, e_n і розглядаємо вектор

$$a = \sum_{i=1}^n f(e_i)e_i = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Тоді для будь-якого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = (a, x).$$

Існування вектора a доведено.

Доведемо єдиність цього вектора методом від протилежного. Припустимо, що є два вектори $a, b \in L$ такі, що для будь-якого $x \in L$

$$f(x) = (a, x) = (b, x).$$

Тоді для будь-якого $x \in L$ $((a - b), x) = 0$, зокрема $((a - b), (a - b)) = 0$. А це можливо лише у випадку $a = b$.

■

3.6 Процес ортогоналізації Грама - Шмідта

Нехай L ненульовий лінійний простір над полем дійсних чисел і є вектори $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$, $n \geq 1$. Завдання ортогоналізації цієї системи векторів полягає в побудові нової системи векторів

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

яка задовольняє двом умовам:

$$(b_i, b_j) = 0 \text{ при } i \neq j;$$

$$\text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \text{Lin}(b_1, b_2, \dots, b_k), \quad 1 \leq k \leq n,$$

тобто побудовані вектори повинні бути попарно ортогональні і перші k векторів (при кожному $k = 1, 2, \dots, n$) в заданій системі векторів і у знову побудованої повинні породжувати один і той же підпростір, повинні мати одну і ту ж лінійну оболонку.

Вектори b_1, b_2, \dots, b_n шукаються у вигляді

$$b_1 = a_1,$$

$$b_2 = a_2 + \alpha_1 b_1,$$

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2,$$

$$b_4 = a_4 + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3,$$

...

Число α_1 шукається з умови $(b_1, b_2) = 0$:

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, a_2)}{|b_1|^2}.$$

Числа β_1, β_2 шукаються з умов $(b_1, b_3) = (b_2, b_3) = 0$:

$$\beta_1 = -\frac{(b_1, a_3)}{|b_1|^2}, \quad \beta_2 = -\frac{(b_2, a_3)}{|b_2|^2}.$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ шукаються з умов:

$$(b_1, b_4) = 0, \quad (b_2, b_4) = 0, \quad (b_3, b_4) = 0.$$

Якщо вектори b_1, b_2, \dots, b_k вже знайдені, то вектор b_{k+1} шукається у вигляді:

$$b_{k+1} = a_{k+1} + \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_k b_k,$$

де

$$\delta_i = -\frac{(a_{k+1}, b_i)}{|b_i|^2}.$$

Нехай потрібно знайти ортонормований базис b_1, b_2, b_3 лінійної оболонки системи векторів

$$a_1 = (1, 2, 1, -3), a_2 = (1, 1, 0, -4), a_3 = (-2, 3, -1, 1).$$

Для цього вважаємо

$$b_1 = a_1 = (1, 2, 1, -3).$$

Вектор b_2 шукаємо у вигляді

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1.$$

Умова ортогональності векторів b_1, b_2 дозволяє записати рівності $(b_1, b_2) = 0$,

$$((1, 2, 1, -3), (1, 1, 0, -4) + \alpha(1, 2, 1, -3)) = 0,$$

$$15 + 15\alpha = 0, \quad \alpha = -1, \quad b_2 = (0, -1, -1, -1).$$

Третій вектор b_3 шукаємо у вигляді

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2.$$

Невідомі коефіцієнти $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ знайдені з умов ортогональності

$$(b_1, b_3) = (b_2, b_3) = 0.$$

Отже

$$b_3 = a_3 + b_2 = (-2, 3, -1, 1) + (0, -1, -1, -1) = (-2, 2, -2, 0).$$

Необхідний базис знаходять діленням векторів b_1, b_2, b_3 на їх довжини — нормуваннями. Оскільки $|b_1| = \sqrt{1+4+1+9} = \sqrt{15}$, $|b_2| = \sqrt{3}$, $|b_3| = \sqrt{12}$, то новий базис складається із векторів

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{|b_1|} &= \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 1, -3). \\ \frac{b_2}{|b_2|} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, -1, -1). \\ \frac{b_3}{|b_3|} &= \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, 2, -2, 0).\end{aligned}$$

Зауваження. В процесі ортогоналізації може з'явитися нульовий вектор, який неможливо нормувати. В такому разі цей вектор просто видаляють із системи.

4 Квадратичні функціонали та форми. Індекси інерції. Критерій додатної визначеності.

4.1 Квадратичні функціонали та форми над довільним полем

Повернемося до випадку, коли лінійні простори розглядаються над довільним полем, не обов'язково полем дійсних чисел. Через F позначаємо задане поле; n — задане натуральне число (не нуль!).

Означення 4.1 Функціонал $f : V \rightarrow F$ називається квадратичним, якщо для деякого білінійного функціонала $g : V \times V \rightarrow F$ і для всіх $x \in V$ виконується рівність

$$f(x) = g(x, x).$$

Кажуть, що функціонал g в такому разі породжує квадратичний функціонал f .

Означення 4.2 Вирази $\sum_{n \geq i \geq j \geq 1} a_{i,j} x_i x_j$ ($a_{i,j} \in \mathcal{F}$) називають квадратичними формами над полем F від n змінних.

Прикладами квадратичної форми є

$$P = x^2, \quad Q = x_1 x_2 + 5y_2^2, \quad R = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \quad (37)$$

Теорія квадратичних форм у випадку, коли поле F має характеристику 2 (тобто $1+1=0$ у цьому полі), суттєво відрізняється від теорії квадратичних форм над іншими полями. Тому при першому знайомстві вважається (так будемо робити далі), що у полі F виконується умова $1 + 1 \neq 0$, тобто характеристика поля F не дорівнює двом.

Для зручності квадратичні форми записують в вигляді

$$Q = Q(x) = \sum a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i>j} a_{ij} x_i x_j$$

(нагадаємо, що у полі характеристик p відрізняється від 2, тобто $2 \neq 0$) або у вигляді

$$Q = Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}). \quad (38)$$

Означення 4.3 Симетрична матриця

$$A = A_Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею квадратичної форми (38)

Квадратичні форми із (37) мають матриці

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Означення 4.4 Квадратичні форми із одиничною матрицею мають так званий “нормальний вигляд”, а форми із діагональною матрицею мають так званий “діагональний” чи “канонічний” вигляд.

Так квадратична форма $x^2 + y^2 + z^2$ має нормальний вигляд, квадратична форма $x^2 + y^2 + z^2$ має канонічний або діагональний вигляд.

Теорема 4.1 Для кожної квадратичної форми Q існує і при тому одна симетрична білінійна форма $f(x, y)$ така, що $Q(x) = f(x, x)$.

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для $f(x, y) = \sum b_{ij}x_{ij}y_{ij}$ ($b_{ij} = b_{ji}$)

$$Q(x) = f(x, x) \iff 2a_{ij} = 2b_{ij} \iff a_{ij} = b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

■

Означення 4.5 Білінійна симетрична форма, що породжує задану квадратичну форму, називається полярою для Q .

Для прикладу, полярою для квадратичної форми $x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3$ буде $x_1y_1 + 3x_2y_2 - 7x_3y_3 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4y_1x_3$.

Означення 4.6 *Заміна*

$$\begin{aligned}x_1 &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n, \\x_2 &= c_{21}y_1 + \dots + c_{2n}y_n, \\&\dots \\x_n &= c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n\end{aligned}$$

називається невивродженою лінійною заміною змінних з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

коли $\det C \neq 0$.

Теорема 4.2 *Нехай $Q(x)$ квадратична форма з матрицею A і $R(y)$ квадратична форма, яка одержується із $Q(x)$ за допомогою невивродженої заміни змінних з матрицею C , і B матриця форми $R(y)$. Тоді*

$$B = C^T A C, \tag{39}$$

де C^T матриця, що транспонована до C .

Доведення. Доведення (39) полягає в тому, що

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = Cy,$$

і, відповідно,

$$Q(x) = x^T A x = y^T C^T A C y = y^T (C^T A C) y = y^T B y = R(y).$$

■
Для прикладу, обчислимо коефіцієнти квадратичної форми $R(y)$ яка одержується із квадратичної форми

$$Q(x) = 2x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_2x_3$$

шляхом невиродженої заміни змінних

$$\begin{aligned}x_1 &= 2y_1 - y_2, \\x_2 &= 3y_1 + y_2 + y_3, \\x_3 &= 2y_2 - 3y_3\end{aligned}$$

Спочатку виписуємо матрицю A форми $Q(x)$ і матрицю C заміни змінних:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі шукаємо матрицю квадратичної форми з новими змінними

$$\begin{aligned}B &= C^T A C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} C = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -17 & -15 \\ 0 & -19 & -11 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -57 & 28 \\ -57 & -41 & 14 \\ 28 & 14 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Відповідно, нова квадратична форма має вигляд

$$R(y) = -31y_1^2 - 41y_2^2 - 4y_3^2 - 114y_1y_2 + 56y_1y_3 + 28y_2y_3.$$

Теорема 4.3 (Теорема Лагранжа) Для кожної квадратичної форми $Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ існує невироджена лінійна заміна змінних, що перетворює Q в форму, що має діагональний вигляд $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ (сума квадратів змінних з певними коефіцієнтами)

Доведення проводиться методом повної математичної індукції за кількістю змінних в квадратичній формі.

База індукції — $n = 1$, в такому разі квадратична форма є квадратом однієї змінної з певним коефіцієнтом. Отже теорема справджується.

Індуктивне припущення — припускаємо, що є невироджена заміна змінних, яка приводить квадратичну форму до діагонального вигляду, якщо змінних менше ніж n .

Індуктивний перехід — вважаємо, що квадратична форма залежить від n змінних x_1, \dots, x_n .

При $a_{1,1} \neq 0$ індуктивний перехід забезпечується так званим “виділенням повного квадрату”, який полягає в заміні суми

$$a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + \dots + 2a_{1,n}x_1x_n$$

всіх доданків із змінною x_1 на

$$\frac{1}{a_{1,1}} (a_{1,1}x_1 + (a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n))^2 - (a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n)^2,$$

і наступною невиродженою заміною змінних $y_1 = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n$, $y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$. Зрозуміло, що “виділення повного квадрату” можна застосувати, коли бодай один коефіцієнт із $a_{i,-i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ не дорівнює нулю.

У випадку, коли $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$, але $a_{12} \neq 0$, ситуація приводиться до попередньої за допомогою заміни $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \dots$. Останню заміну змінних називають стандартною.

Метод приведення квадратичної форми до діагонального вигляду методом виділення повних квадратів називають також методом Лагранжа.

Одержані результати про перетворення квадратичних форм заданого квадратичного функціонала зведемо в одну наступну теорему.

Теорема 4.4 *Нехай у лінійному просторі V над полем F є*

- *два базиси — старий e_1, e_2, \dots, e_n і новий u_1, u_2, \dots, u_n ;*
- *матриця переходу*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix};$$

- *квадратичний функціонал $f : V \rightarrow F$;*
- *квадратична форма $Q(x)$, що відповідає функціоналу f в старому базисі;*
- *квадратична форма $R(y)$, що відповідає функціоналу f в новому базисі.*

Тоді ми маємо

- Зв'язок

$$\begin{cases} u_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n, \\ u_2 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + \dots + c_{n,2}e_n, \\ \dots \\ u_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n \end{cases}$$

між векторами старого і нового базисів, який скорочено можна записати у вигляді

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$$

або у вигляді $u = eC$, де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$;

- зв'язок $x = C \cdot y$ між координатними записами

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

одного і того ж вектора в старому і новому базисах;

- невироджену заміну змінних

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

яка переводить квадратичну форму $Q(x)$ в квадратичну форму $R(y)$;

- зв'язок між матрицями A, B квадратичних форм $Q(x)$ та $R(y)$.

4.2 Квадратичні функціонали і форми над полем дійсних чисел

Нижче розглядаємо випадок, коли поле $F = \mathbb{R}$.

Означення 4.7 *Квадратична форма Q називається позитивною, або додатно визначеною, коли*

$$x \neq 0 \implies Q(x) > 0.$$

Так, квадратична форма $x^2 + 3y^2 + 11z^2$ є додатно визначеною, а форма $x^2 + 3y^2 - 11z^2$ не є додатно визначеною, тому що при обчисленні цієї форми від ненульового вектора $(0, 0, 1)$ одержуємо не додатний (від'ємний) результат — -11 .

Теорема 4.5 *Нехай квадратичний функціонал $f : V \rightarrow F$ в двох базисах*

$$e_1, e_2, \dots, e_n \in V, \quad v_1, v_2, \dots, v_n \in V$$

має відповідно квадратичні форми

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2,$$

де

$$a_i > 0, \quad \text{коли } 1 \leq i \leq p,$$

$$a_i < 0, \quad \text{коли } p + 1 \leq i \leq p + q,$$

$$a_i = 0, \quad \text{коли } p + q \leq i \leq n,$$

і

$$R(y) = \sum_{i=1}^n b_i y_i^2,$$

де

$$b_i > 0, \text{ коли } 1 \leq i \leq r,$$

$$b_i < 0, \text{ коли } r + 1 \leq i \leq r + s,$$

$$b_i = 0, \text{ коли } r + s \leq i \leq n.$$

Тоді $p = r$ і $q = s$.

Доведення. Доведемо рівність $p = r$ методом від протилежного. Припустимо, що $p \neq r$, для визначеності нехай $p > r$. Розглянемо два підпростори

$$L_1 = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_p), \quad L_2 = \text{Lin}(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n).$$

Тоді

$$x \neq 0, x \in L_1 \Rightarrow f(x) > 0; \quad (40)$$

$$x \neq 0, x \in L_2 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (41)$$

Оскільки

$$\dim L_1 = p, \quad \dim L_2 = n - r,$$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = n + (p - r) > n,$$

і

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2),$$

то $\dim(L_1 \cap L_2) \geq 1$, що суперечить імплікаціям (40) та (41).

Рівність $p = r$ доведена.

Подібні міркування доводять рівність $q = s$.

■

Доведена теорема дозволяє ввести наступне означення. Н

Означення 4.8 *Кількість додатних коефіцієнтів, які має діагональний вигляд, до якого можливо привести квадратичну*

форму невиродженою заміною змінних, називається додатним індексом інерції цієї квадратичної форми, а кількість від'ємних коефіцієнтів в такому діагональному вигляді називають від'ємним індексом інерції. Пара чисел — додатний та від'ємний індекси інерції, утворюють сигнатуру, а суму додатного та від'ємного індексів інерції називють рангом квадратичної форми. Якщо від кількості змінних відняти ранг то одержане число називається дефектом квадратичної форми.

Квадратичними формами задають квадрат норми вектора, якщо скалярний добуток заданий білінійною формою. Така квадратична форма за означенням повинна бути додатно визначеною, позитивною. Тому актуальною є наступні дві теореми, які дають критерії додатної визначеності квадратичної форми.

Теорема 4.6 *Квадратична форма є позитивною тоді і тільки тоді, коли її додатний індекс інерції дорівнює кількості змінних.*

Доведення. Нехай квадратична форма після деякої невиродженої заміни змінних обчислюється за формулою

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2.$$

Якщо всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ додатні, тоді для будь-якого ненульового вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n$

$$Q(f) = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \dots + \alpha_n a_n^2 > 0$$

і форма Q додатно визначена. Якщо серед коефіцієнтів форми Q є не додатний (від'ємний чи нуль) тоді значення форми Q від

вектора, одна координата якого, що має номер не додатного коефіцієнта, дорівнює 1, буде не додатним і форма не позитивна.

■

Наведена теорема дає критерій позитивності квадратичної форми, коли цю форму привели до діагонального вигляду. Наступна теорема дає критерій позитивності у випадку, коли форма знаходиться в загальному вигляді.

Теорема 4.7 (Критерій Якобі) *Квадратична форма $Q(x)$ з матрицею*

$$A = A_Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

додатно визначена, коли всі її головні мінори додатні, тобто коли

$$d_1 = a_{1,1} > 0, d_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \dots, d_n = \det A > 0.$$

Доведення. Нахай $Q(x)$ квадратична форма і $f(x, y)$ поляра, так що $Q(x) = f(x, x)$. Вважаємо, що білінійна симетрична форма $f(x, y)$ задає певний білінійний симетричний функціонал у просторі V з базисом e_1, e_2, \dots, e_n , і таки чином

$$a_{i,j} = f(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

а головні мінори d_k мають вигляд

$$d_k = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \dots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \dots & f(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(e_k, e_1) & f(e_k, e_2) & \dots & f(e_k, e_k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Лема 4.1 Нехай $d_k \neq 0$ при деякому $1 \leq k \leq n - 1$. Тоді існує вектор u_{k+1} такий, що

$$d_{k+1} = f(u_{k+1}, u_{k+1}) \cdot d_k \quad (42)$$

і

$$\text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}) = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_k, u_{k+1}). \quad (43)$$

Доведення. При доведенні використовуємо метод, дещо схожий на метод Грама — Шмідта, а саме, вектор u_{k+1} при заданому $1 \leq k \leq n - 1$ шукаємо так, щоб

$$e_{k+1} = u_{k+1} + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k. \quad (44)$$

і

$$f(u_{k+1}, e_i) = 0 \text{ для всіх } i = 1, 2, \dots, k. \quad (45)$$

Система рівнянь (45) для знаходження необхідних x_1, x_2, \dots, x_k переписується у вигляді

$$f(u_{k+1}, e_i) + \sum_{j=1}^k x_j f(e_j, e_i) = 0. \quad (46)$$

Визначник основної матриці створеної системи лінійних рівнянь дорівнює d_k і за умовою не дорівнює 0. Тому система має розв'язок, і вектор u_{k+1} , що задовольняє умови (44), (45), існує.

Позначимо через $w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}$ рядки матриці

$$W = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \dots & f(e_1, e_{k+1}) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \dots & f(e_2, e_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(e_k, e_1) & f(e_k, e_2) & \dots & f(e_k, e_{k+1}) \\ f(e_{k+1}, e_1) & f(e_{k+1}, e_2) & \dots & f(e_{k+1}, e_{k+1}) \end{pmatrix},$$

тобто

$$w_i = (f(e_i, e_1), f(e_i, e_2), \dots, f(e_i, e_{k+1})), \quad i = 1, 2, \dots, k + 1.$$

В цих позначеннях

$$d_{k+1} = \det W = \det(w_1, w_2, \dots, w_{k+1}).$$

Віднімемо із останнього рядка матриці W лінійну комбінацію попередніх рядків з коефіцієнтами x_1, \dots, x_k , що знайдені із системи (46). Отже останній рядок прийме вигляд

$$\begin{aligned} w_{k+1} - \sum_{i=1}^k x_i w_i &= (f(u_{k+1}, e_1), \dots, f(u_{k+1}, e_k), f(u_{k+1}, e_{k+1})) = \\ &= (0, 0, \dots, 0, f(u_{k+1}, u_{k+1})), \end{aligned}$$

а визначник одержаної матриці не змінився, він дорвнює d_{k+1} . Розкладаючи визначник одержаної матриці за елементами останнього рядка одержимо потрібну нам рівність:

$$d_{k+1} = d_k \cdot f(u_{k+1}, u_{k+1}).$$

Умова (43) виконується тому, що

$$u_{k+1} \in \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}), \quad e_{k+1} \in \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_k, u_{k+1}).$$

■

Припустимо, що квадратична форма додатно визначна. Тоді умова (42) забезпечує нам те, що всі головні мінори мають один і той же знак. Але знак d_1 ми знаємо, це додатне число, оскільки $d_1 = a_{1,1} = f(e_1, e_1) > 0$. Отже всі головні мінори матриці квадратичної форми додатні.

Доведемо другу частину теореми. Припустимо, що всі головні мінори матриці квадратичної форми додатні. Побудуємо вектори u_1, u_2, u_n як в лемі. Умова (43) забезпечує нам те, що ці вектори утворюють базис лінійного простору V .

Умова (42) забезпечує нам, що $f(u_i, u_i) > 0$ для будь-якого $1 \leq i \leq n$.

Умова (45) і умова (43) забезпечують нам

$$i \neq j \Rightarrow f(u_i, u_j) = 0.$$

Отже для будь-якого $a \in V, a \neq 0$ для деяких $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ буде

$$a = \sum_{i=1}^n a_i u_i, Q(a) = f(a, a) = \sum_{i=1}^n a_i^2 f(u_i, u_i) > 0.$$

Позитивна визначеність квадратичної форми $Q(x)$ доведена.

Доведення теореми завершено.

■

Для прикладу, квадратична форма

$$x^2 + 14xy - 6xz + y^2 + 10yz + 9z^2$$

не є додатно визначеною, оскільки в її матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 7 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

головний мінор

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -48 < 0$$

не додатний. А квадратична форма

$$x^2 + 2xy - 6xz + 3y^2 - 10yz + 14z^2$$

додатно визначена, оскільки в її матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

головні мінори

$$d_1 = 1 > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

додатні.

4.3 Приклади роботи з квадратичними формами

1. Приведемо квадратичну форму

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

методом Лагранжа до нормального вигляду:

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3) - (2x_2 + x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = \\
 &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 = \\
 &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(-3x_2 - x_3) + \frac{1}{3}x_3^2 + 3x_3^2 = \\
 &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 + \frac{10}{3}x_3^2 = \\
 &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \left(\frac{3x_2+x_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{10}{3}}x_3\right)^2 = \\
 &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,
 \end{aligned}$$

де $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3$, $y_3 = \sqrt{\frac{10}{3}}x_3$. Причому матриця переходу має вигляд

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{10}{3}} \end{pmatrix}$$

Додатний індекс інерції Q дорівнює 2, а від'ємний -1 .

2. Приведемо квадратичну форму

$$Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

методом Лагранжа до нормального вигляду.

Оскільки всі коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють нулю, то спочатку застосовується стандартна заміна:

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4$$

$$\begin{aligned}
 Q(y) &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_1y_4 + y_2y_4 + y_1y_3 + y_2y_3 + y_1y_4 + \\
 &+ y_2y_4 + y_3y_4 = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + y_3y_4 = (y_1 + y_3 + y_4)^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(y_3 + y_4)^2 - y_2^2 + y_3 y_4 &= (y_1 + y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_3 y_4 = \\
&= (y_1 + y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - (y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 + \frac{1}{4}y_4^2 - y_4^2 = (y_1 + y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - \\
&= (y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - \frac{3}{4}y_4^2 = (y_1 + y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - (y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}y_4)^2 = \\
&= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2,
\end{aligned}$$

де $z_1 = y_1 + y_3 + y_4$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3 + \frac{1}{2}y_4$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}y_4$.

3. Квадратична форма

$$Q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

з матрицею

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

позитивна, коли додатні всі її головні мінори, тобто коли

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} > 0, \text{ тобто коли } \lambda > 2.$$

5 Ортогональне доповнення.

5.1 Означення ортогонального доповнення та його властивості

Нехай в лінійному просторі V є скалярний добуток (a, b) .

Означення 5.1 Для кожного підпростору $L \subseteq V$ підпростір

$$\{y \in V \mid \forall x \in L (x, y) = 0\}$$

називається ортогональним доповненням до підпростору L і позначається L^\perp

Можна сказати, що ортогональне доповнення складається із тих векторів простору, що ортогональні кожному вектору із підпростору. Ортогональне доповнення справді є підпростором, оскільки за білінійністю скалярного добутку із того, що $(x_1, y) = 0, (x_2, y) = 0$ випливає, що $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = 0$ для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, y \in L$.

Теорема 5.1 (Про вимірність ортогонального доповнення)

Для будь-якого підпростору L скінченновимірного простору V

$$\dim L^\perp = \dim V - \dim L.$$

Доведення. Нехай $\dim v = n, \dim L = r$, і u_1, u_2, \dots, u_r — ортонормований базис L . Доповнимо цей базис векторами v_1, v_2, \dots, v_{n-r} до ортонормованого базису V . Будь-який вектор $a \in V$ можна записати у вигляді

$$a = \sum_{i=1}^r x_i u_i + \sum_{i=1}^{n-r} y_i v_i. \quad (47)$$

Можна стверджувати, що

$$K = \text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_{n-r}) = L^\perp. \quad (48)$$

Дійсно, Кожен вектор із множини v_1, v_2, \dots, v_{n-r} перпендикулярний кожному вектору із L і тому L^\perp . З другої сторони, якщо вектор $a \notin K$, то одна із його координат x_1, x_2, \dots, x_r (скажемо x_1) в розкладенні (47) не дорівнює нулю, але тоді $(a, u_1) = x_1 \neq 0$ і, відповідно, $a \notin K$.

Формула (48) доводить теорему. Теорема доведена. ■

Доводячи теорему ми довели ще кілька фактів

$$L \cap L^\perp = 0, \quad L + L^\perp = V,$$

і

$$(L^\perp)^\perp = L, \tag{49}$$

тобто

Теорема 5.2 *Ортогональне доповнення до ортогонального доповнення збігається із основним підпростором.*

Пряма сума підпростору та його ортогонального доповнення дорівнює всьому простору.

Ці факти випливають із формул (47), (48).

Для прикладу, нехай підпростір $L \subset \mathbb{R}_5$ заданий системою лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Знайти ортогональне доповнення L^\perp до L .

Вектори, чії координати збігаються із коефіцієнтами рівнянь системи, і є твірними (тобто їх лінійна оболонка збається із усм простром, а оскільки вони лінійно незалежні, то і базисними) векторами ортогонального доповнення. Отже

$$L^\perp = \text{Lin}((2, -7, 0, 0, 1), (3, 0, 1, 1, 0)).$$

Теорема 5.3 *(про ортогональне доповнення суми та перетину двох підпросторів) Якщо K, L — два підпростори лінійного простору V , то*

$$(K + L)^\perp = K^\perp \cap L^\perp, \tag{51}$$

$$(K \cap L)^\perp = K^\perp + L^\perp. \quad (52)$$

Доведення. Для доведення (51) зауважимо, що вектор належить $(K + L)^\perp$ тоді і тільки тоді, коли він належить і K^\perp і L^\perp , тобто тоді і тільки тоді, коли він належить $K^\perp \cap L^\perp$. Перевірка рівності (51) завершена.

Для доведення рівності (52) використовуємо (51) і (49):

$$(K \cap L)^\perp = \left((K^\perp)^\perp \cap (L^\perp)^\perp \right)^\perp = \left((K^\perp + L^\perp)^\perp \right)^\perp = K^\perp + L^\perp.$$

■

Для прикладу, нехай потрібно знайти ортогональне доповнення до суми $L_1 + L_2$ підпросторів L_1, L_2 , що задані системами рівнянь

$$L_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 11x_5 = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Скористаємося тим, що $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$. За коефіцієнтами рівнянь пишемо твірні вектори ортогональних доповнень L_1^\perp, L_2^\perp , тобто вектори, лінійна оболонка яких збігається відповідно з L_1^\perp та L_2^\perp . Маємо

$$e_1 = (1, 0, -1, 0, 1), \quad e_2 = (3, 0, 1, 1, 0), \quad \text{Lin}(e_1, e_2) = L_1^\perp,$$

$$u_1 = (2, -7, 5, 1, 1), \quad u_2 = (3, -1, 1, 1, -11), \quad \text{Lin}(u_1, u_2) = L_2^\perp.$$

Вектор лежить в перетині підпросторів L_1^\perp, L_2^\perp , якщо його можна записати і у вигляді $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ і у вигляді $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$. Тому шукаємо розв'язки системи

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2,$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\beta_1 - 3\beta_2 = 0, \\ 7\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 + 11\beta_2 = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Записуємо матрицю A системи (54)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Спростуємо матрицю A елементарними перетвореннями рядків:

$$A \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

В одержаній матриці легко підраховується мінор d , що стоїть в перших чотирьох рядках

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 + 77) \neq 0.$$

Отже ранг матриці A дорівнює 4 і система має єдиний розв'язок нульовий і шуканий перетин $L_1^\perp \cap L_2^\perp$ нульовий.

5.2 Ортогональна проекція на підпростір та ортогональна складова вектора відносно підпростору.

Означення 5.2 Нехай ϵ відпростір $L \subseteq V$ лінійного простору V а $a \in V$. Оскільки $V = L + L^\perp$, то $a = x + y$, де $x \in L$, $y \in L^\perp$. Вектор x називають ортогональною проекцією вектора a на підпростір L , а вектор y називють ортогональною складовою вектора a відносно підпростору L . Довжина $|y|$ ортогональної складової y вектора a називається відстанню від вектора a до підпростору L .

Розглянемо приклад. У п'ятивимірному просторі з ортонормованим базисом є підпростір L з базисними векторами

$$e_1 = (-5, 1, 2, -1, 3), \quad e_2 = (0, 0, 1, 2, 0)$$

і вектор $a = (-11, -1, -1, -7, 7)$. Знайдемо ортогональну проекцію x вектора a на підпростір L , ортогональну складову y вектора a відносно підпростору L і відстань від вектора a до підпростору L .

За означенням проекції і ортогональної складової

$$a = x + y, x \in L, y \in L^\perp \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2, (y, e_1) = (y, e_2) = 0.$$

Звідси маємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} (a, e_1) = (e_1, e_1)x_1 + (e_2, e_1)x_2, \\ (a, e_2) = (e_1, e_2)x_1 + (e_2, e_2)x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 80 = 40x_1, \\ -15 = 5x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3. \end{cases}$$

Знайдені числа $x_1 = 2, x_2 = -3$ дозволяють знайти ортогональну проекцію x :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = 2(-5, 1, 2, -1, 3) - 3(0, 0, 1, 2, 0) = (-10, 2, 1, -8, 6),$$

і ортогональну складову y :

$$y = a - x = (-11, -1, -1, -7, 7) - (-10, 2, 1, -8, 6) = (-1, -3, -2, 1, 1).$$

Скалярний добуток проекції на ортогональну складову обов'язково дорівнює нулю. Тому перевірка

$$(x, y) = 0$$

суттєво зменшує ймовірність того, що при обчисленнях припустилися арифметичної помилки.

Норма $|y|$ ортогональної складової дорівнює відстані від вектора до підпростору:

$$|y| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{16} = 4.$$

6 Застосування скалярного добутку

6.1 Точковий евклідовий простір, що асоційований із даним векторним простором. Система координат, репер.

В шкільному курсі геометрії спочатку вивчаються прямі, площини і тривимірний простір, які складаються із точок. Точки, та прямі — це первісні об'єкти геометрії, які не підлягають означенню, а лише уява про них створюється належною кількістю прикладів. Взаємини точок, прямих, площин і тривимірного

простору регулюються відповідними аксіомами. Далі означаються відрізки, довжини відрізків, напрямлені відрізки, прикладені та вільні вектори. Так відбувається в так званій елементарній геометрії. В вищій геометрії первісним об'єктом є вектор лінійного (чи векторного) простору над певним полем певної вимірності (скажемо n , $n \geq 0$). І далі за допомогою векторів будуються точки, одновимірні площини (прямі), двовимірні площини, тривимірні площини і т.д. аж до площини вимірності n , яка збігається із множиною всі точок. Площини, що мають вимірність $n - 1$ називають гіперплощинами.

Отже нижче вважаємо, що вибрано векторний простір V над деяким полем F (не обов'язково над полем дійсних чисел).

Означення 6.1 *Точковим простором вимірності n над полем F називають множину P (її елементи називають точками) разом із таким співставленням будь-яким двом точкам $A, B \in P$ вектора $\overrightarrow{AB} \in V$, що виконуються умови*

- для будь-якої точки A і для будь-якого вектора $a \in V$ існує єдина точка $B \in P$ така, що

$$\overrightarrow{AB} = a;$$

- Для будь-яких трьох точок $A, B, C \in P$ (не обов'язково різних) виконується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Якщо поле F не є полем дійсних чи комплексних чисел, або бажано підкреслити, що у векторному просторі V , який використовується в означенні точкового простору, не введений

скалярний добуток, то кажуть що точковий простір є афінним (простецьким).

Якщо поле F є полем дійсних чисел і у лінійному просторі V заданий скалярний добуток, то точковий простір, як і векторний, називають евклідовим.

Векторний простір V називають асоційованим з точковим простором P

Зауважимо, що для будь-якої точки $A \in P$ буде $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ і, відповідно,

$$\overrightarrow{AA} = 0.$$

Також для $A, B \in P$ рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ дозволяє записати

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Означення 6.2 Нехай P є точковий простір над полем F і в цьому точковому просторі вибрана певна точка O (будемо називати її точкою відліку), тоді вектор \overrightarrow{OA} називається радіус-вектором точки $A \in P$.

Означення 6.3 Підмножина $M \subseteq P$ точкового простору P , що асоційований з векторним простором V називається лінійним многовидом, якщо для деякої точки $A \in M$ і підпростору $L \subseteq V$

$$B \in M \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in L. \quad (55)$$

Якщо лінійний підпростір має вимірність $k = 0, 1, 2, \dots, \dim V$, то кажуть що відповідний лінійний многовид має також вимірність k . k -виірні лінійні многовиди також називають k -вимірними

площинами. *Нільвимірний лінійний многовид це точка, 1-вимірний лінійний многовид називають прямою, 2-вимірний лінійний многовид називають площиною, $(\dim V - 1)$ -вимірний лінійний многовид називають гіперплощиною.*

Із означення лінійного многовиду M бачимо, що коли в точковому просторі P вибрана точка відліку O , в підпросторі $L \subseteq V$ вибраний базис e_1, e_2, \dots, e_k , то еквіваленцію (55) можна переписати у вигляді

$$B \in M \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_k e_k. \quad (56)$$

Означення 6.4 *Репером $\langle O; e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ (системою координат) в точковому просторі P називають вибрану точку відліку O разом із базисом асоційованого векторного простору. Координати радіус-вектора \overrightarrow{OA} в базисі e_1, e_2, \dots, e_k називаються координатами точки A в системі координат $\langle O; e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$*

Якщо в точковому просторі вибрана точка відліку O , змінний вектор \overrightarrow{OB} позначено через x , сталий вектор \overrightarrow{OA} позначено через a , то (56) дозволяє записати рівняння k -вимірному лінійному многовиду у вигляді

$$x = a + t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_k e_k. \quad (57)$$

Відповідно, у вибраній системі координат рівняння прямої запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

а рівняння площини запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \dots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ \dots \\ c_{n,2} \end{pmatrix},$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

змінний радіус-вектор змінної точки лінійного многовиду,

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

сталий радіус-вектор вибраної точки лінійного многовиду,

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ненульовий вектор, а вектори

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \dots \\ c_{n,1} \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ \dots \\ c_{n,2} \end{pmatrix}$$

лінійно незалежні.

6.2 Лінійні многовиди точкового простору і неоднорідні системи лінійних рівнянь. Відстань від точки до многовиду

Теорема 6.1 (про задання лінійного многовиду) *Нехай F — певне поле і P точковий простір, що асоційований з F^n . Тоді множина розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь від n змінних над полем F є лінійним многовидом, і для кожного лінійного многовиду можна вказати систему лінійних рівнянь, для якої цей многовид є множиною всіх розв'язків.*

Доведення. Твердження теореми випливає з трьох уже відомих фактів: запису всіх елементів лінійного многовиду у вигляді (57); представлення розв'язків неоднорідної системи у вигляді суми одного окремого розв'язку і всіх розв'язків відповідної однорідної системи; теореми 1.4 про задання будь-якого підпростору системою лінійних однорідних рівнянь.

■

Нижче будемо вважати, що точковий простір P асоціюється із лінійним простором \mathbb{R}^n , в точковому просторі вибрана система координат $\langle O; e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ і лінійні многовиди задані неоднорідними системами рівнянь. Вважаємо, що в \mathbb{R}^n заданий скалярний добуток, — отже \mathbb{R}^n є евклідовим векторним простором, а P є евклідовим точковим простором

Означення 6.5 *Нехай $A \in P$ точка точкового простору P асоційованого з лінійним простором V , а $M \subseteq P$ лінійний многовид. Число*

$$d(A, M) = \min\{|\overrightarrow{AB}| \mid B \in M\}$$

називається відстанню від точки A до многовиду M .

Теорема 6.2 Нехай $A \in P$ точка точкового простору P , а $M \subseteq P$ лінійний многовид, для деякої точки $B \in M$ і лінійного підпростору $L \subseteq V$

$$M = \{C \in P \mid \exists a \in L (\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + a)\}$$

Відстань $d(A, M)$ дорівнює довжині (нормі) ортогональної складової вектора \overrightarrow{AB} відносно підпростору L .

Доведення. Нехай $\overrightarrow{AB} = x + y$, де x проекція вектора \overrightarrow{AB} на підпростір L , а y його ортогональна складова. Для довільної точки $C \in P$ запишемо

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = x + y + \overrightarrow{BC}.$$

Оскільки $B, C \in M$, то $\overrightarrow{BC} \in L$ і вектор y ортогональний і x і \overrightarrow{BC} . Звідси випливає, що

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |y|^2 + |x + \overrightarrow{BC}|^2, \quad (58)$$

і свого найменшого значення $|y|^2$ число $|\overrightarrow{AC}|^2$ досягає, коли $x + \overrightarrow{BC} = 0$.

Теорема доведена. ■

Нехай для прикладу потрібно знайти відстань від точки $a = (-5, 4, -4, -1)$ до многовиду, що заданий лінійною системою

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + 4x_2 - 12x_3 - x_4 = 11. \end{cases} \quad (59)$$

Знайдемо загальний розв'язок системи (58). Для цього створимо розширену матрицю системи

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & -12 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Елементарними перетвореннями рядків приведемо матрицю A до спрощеного вигляду

$$U \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 18 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & -7 & 61 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 18 \end{pmatrix} = W.$$

Матриця W знаходиться у спрощеному вигляді — у перших двох стовпчиках стоїть одинична матриця. Перехід (1) здійснили доддавши до другого рядка перший, а перехід (2) здійснили доддавши до першого рядка три другі. За матрицею B пишемо систему, що рівносильна заданій системі

$$\begin{cases} x_1 - 16x_3 - 7x_4 = 61, \\ x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 18, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 16x_3 + 7x_4 + 61, \\ x_2 = 7x_3 + 2x_4 + 18. \end{cases} \quad (60)$$

Ми одержали загальний розв'язок системи — x_3, x_4 вільні змінні, а x_1, x_2 основні змінні. Підставивши замість x_3, x_4 числа $x_3 = 0, x_4 = -9$ (так будуть менші числа) одержуємо $x_1 = -2, x_2 = 0$, і окремим розв'язком буде $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -9$.

Знайдемо базис лінійного підпростору, що асоційований із многовидом. Для цього виписуємо однорідну систему, що відповідає заданій

$$\begin{cases} x_1 - 16x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 16x_3 + 7x_4, \\ x_2 = 7x_3 + 2x_4. \end{cases} \quad (61)$$

і обчислюємо координати базисних векторів e_1, e_2 асоційованого підпростору заповнюючи таблицю при $x_3 = 1, x_4 = 0$, та $x_3 = 0, x_4 = 1$,

	x_1	x_2	x_3	x_4
e_1	16	7	1	0
e_2	7	2	0	1

Тепер ми можемо написати рівняння потрібного нам многовиду у вигляді

$$x = x^0 + t_1 e_1 + t_2 e_2,$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

і можемо застосувати теорему 6.2, узгодивши попередньо позначення. Отже вектор $\overrightarrow{OA} = a$, вектор $\overrightarrow{OB} = x^0$, ортогональну складову вектора \overrightarrow{AB} відносно підпростору розв'язків системи позначимо h , а проекцію позначимо через k . Таким чином

$$a - x^0 = \overrightarrow{AB} = k + h, \quad k = t_1 e_1 + t_2 e_2, \quad (h, e_1) = (h, e_2) = 0,$$

і потрібна нам відстань дорівнює $|h|$.

6.3 Розв'язування несумісних систем лінійних рівнянь — метод найменших квадратів.

Нехай маємо прямокутну неоднорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими над полем дійсних чисел

$$Ax = b, \tag{62}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Перепишемо систему (62) у вигляді

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (63)$$

де

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

до сих пір вираз “розв’язати систему (62)” означало “знайти такі значення змінних, за яких рівність (62) виконується безоглядно точно”. Коли такі значення змінних знайти неможливо, змінюють розуміння виразу “розв’язати систему (62)” — йому надають значення “зайти такі значення змінних, за яких рівність (62) виконується найбільш точно, тобто похибка наменша із можливих”. Отже підставивши в (63) значення змінних ми одержимо вектор

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix},$$

а довжина вектора $(b - c)$ є похибкою. Найпоширенішим підходом до обчислення похибки d є обчислення її за формулою

$$d^2 = \sum_{i=1}^m (b_i - c_i)^2. \quad (64)$$

Щоб підкреслити, що для обчислення похибки використовується формула (64), кажуть, що використовується ”метод найменших квадратів”.

Отже, за методом найменших квадратів при розв'язуванні системи (63) шукаємо вектор

$$c \in \text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

такий, що норма вектора $b - c$ найменша. Таким вектором c є проєкція вектора b на лінійну оболонку векторів a_1, a_2, \dots, a_n , при цьому похибкою буде довжина ортогональної складової вектора b на лінійну оболонку векторів a_1, a_2, \dots .

Покажемо на прикладі, як використовується метод найменших квадратів.

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x = 2, \\ x + y = 2, \\ y = 1. \end{cases} \quad (65)$$

Перепишемо систему у вигляді

$$a_1x + a_2y = b, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$L = \text{Lin}(a_1, a_2), \quad b = c + h, \quad c \in L, \quad c = xa_1 + ya_2, \quad h \in L^\perp.$$

Векторне рівняння $a_1x + a_2y = b$ домножаємо на a_1 і на a_2 .

Одержуємо систему

$$\begin{cases} (a_1, a_1)x + (a_2, a_1)y = (b, a_1), \\ (a_1, a_2)x + (a_2, a_2)y = (b, a_2). \end{cases}$$

Знаходимо потрібні скалярні добутки:

$$(a_1, a_1) = 6, \quad (a_1, a_2) = 7, \quad (a_2, a_2) = 11, \quad (b, a_1) = 5, \quad (b, a_2) = 3.$$

Таким чином, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 6x + 7y = 5, \\ 7x + 11y = 3. \end{cases}$$

Її розв'язком є $x = 2, y = -7$ — це відповідь до задачі, розв'язок системи (65) методом найменших квадратів. А точно ми розв'язали систему $a_1x + a_2y = c$, де

$$c = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Похибкою d є довжина вектора

$$h = b - c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

тобто

$$d = \sqrt{1 + 1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

7 Ортогональні многочлени

7.1 Многочлени Чебишева першого та другого роду

Многочлени Чебишева 1-го роду

$$T_0(x), T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x), \dots \quad (66)$$

розглядаються у просторі $\mathbb{R}(x)$ із скалярним добутком

$$f, g \in \mathbb{R}(x) \Rightarrow (f, g) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

Ці многочлени визначаються умовами

- при $n \neq m$ $(T_n, T_m) = 0$, тобто різні многочлени ортогональні;
- $(T_0, T_1, \dots, T_n) = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, тобто многочлени (66) з точністю до множника можуть бути знайдені за допомогою метода Грама-Шмідта;
- старший коефіцієнт T_0 дорівнює 1, а при $n = 1, 2, \dots$ старший коефіцієнт T_n дорівнює 2^{n-1} — ця умова однозначно встановлює множник, з точністю до якого знаходиться многочлен T_n методом Грама-Шмідта.

Многочленами Чебишева першого роду будуть

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \end{aligned}$$

В практичному вжитку для обчислення коефіцієнтів многочленів Чебишева користуються не методом Грама — Шмідта, а рекурентним співвідношенням

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n - T_{n-1},$$

однак існує і явна формула для обчислення многочленів T_n

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Наявність в наведеній формулі виразу $\sqrt{x^2 - 1}$ не повинна бентежити — вважається, що $(\sqrt{x^2 - 1})^2 = x^2 - 1$, і після виконання належних дій вираз $\sqrt{x^2 - 1}$ в кінцевій формулі зникає.

Многочлени Чебишева другого роду

$$U_0(x), U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x), \dots \quad (67)$$

визначаються практично тими ж умовами:

- при $n \neq m$ $(U_n, U_m) = 0$;
- $(U_0, U_1, \dots, U_n) = (1, x, x^2, \dots, x^n)$;
- старший коефіцієнт старший коефіцієнт U_n дорівнює 2^n .

належать тому ж простору многочленів $\mathbb{R}(x)$, але із іншим скалярним добутком

$$f, g \in \mathbb{R}(x) \Rightarrow (f, g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \cdot f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

Многочленами Чебишева другого роду будуть

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \end{aligned}$$

Явна формула для многочленів Чебишева другого роду має вигляд $U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

7.2 Многочлени Лежандра

Многочлени Лежандра

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (68)$$

розглядаються у просторі $\mathbb{R}(x)$ із скалярним добутком

$$f, g \in \mathbb{R}(x) \Rightarrow (f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

Ці многочлени визначаються за допомогою процесу ортогоналізації Грама — Шмідта із многочленів $1, x, x^2, \dots$ і, таким чином $\text{Lin}(P_0, P_1, \dots, P_n) = \text{Lin}(1, x, x^2, \dots, x^n)$. Після ортогоналізації многочлени множаться на певний множник так, щоб виконувалася умова $P_i(1) = 1$.

Многочленами Лежандра будуть

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

Для обчислення коефіцієнтів многочленів Лежандра користуються рекурентною формулою

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

7.3 Тригонометричні многочлени

Означення 7.1 Тригонометричними многочленами або многочленами Фур'є називають лінійні комбінації функцій

$$\cos nx, \quad \sin nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

Прикладами тригонометричних многочленів (поліномів) є

$$-3 + 5 \sin 2x + 4 \cos 6x + 3 \sin 6x, \quad 1 + \sin x + \cos x.$$

Скалярний добуток (f, g) тригонометричних многочленів f, g визначається формулою

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

Система поліномів (69) ортогональна, оскільки

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \cdot dx = \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{коли } m = n > 0, \\ 0, & \text{коли } m \neq n, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \cos mx \cdot dx &= 0. \end{aligned}$$

Наведені рівності показують, що функції $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ та $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ $n = 1, 2, 3, \dots$ утворюють ортонормовану систему векторів у просторі тригонометричних поліномів.

7.4 Об'єм у багатовимірному дійсному просторі

Скалярний добуток в багатовимірному дійсному просторі дозволяє ввести поняття об'єму та орієнтованого об'єму паралелепіпеда, що побудований на послідовності векторів. Узагальнюється правило “об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.” Отже маємо n -вимірний лінійний простір над полем дійсних чисел і в ньому k векторів a_1, a_2, \dots, a_k . Означення об'єму паралелепіпеда, що побудований на векторах a_1, a_2, \dots, a_k індуктивне — індукція проводиться за кількістю k цих векторів.

База індуктивного означення: $k = 1$ Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторі дорівнює довжині цього вектора.

Індуктивне припущення. Припускаємо, щоо нам відомо, що таке об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах a_1, a_2, \dots, a_k .

Індуктивний перехід. Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, що побудований на векторах a_1, a_2, \dots, a_k , помноженому на довжину ортогональної складової вектора a_{k+1} на лінійну оболонку векторів a_1, a_2, \dots, a_k .

Теорема 7.1 *Квадрат об'єма паралелепіпеда, що побудований на векторах $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ дорівнює визначнику матриці*

$$W = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_{k+1}) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_{k+1}) \\ (a_{k+1}, a_1) & (a_{k+1}, a_2) & \dots & (a_{k+1}, a_{k+1}) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Доведення теореми значною мірою повторює встановлення зв'язку між послдовними головними мінорами матриці скалярного добутку при доведенні теореми Якобі, і ми його пропустимо.

■

Якщо в n -вимірному просторі є n векторів a_1, a_2, \dots, a_n , з координатами

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}),$$

то ми можемо побудувати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (70)$$

Оскільки

$$A \cdot A^T = W,$$

то $(\det A)^2 = \det W \det A$ з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, що побудований на векторах a_1, a_2, \dots, a_n . Сказане дозволяє узагальнити поняття змішаного добутку.

Означення 7.2 *Змішаним добутком векторів a_1, a_2, \dots, a_n в n -вимірному лінійному просторі з ортонормованим базисом називають визначник матриці (70).*

Означення 7.3 *Векторним добутком $[a_2, a_3, \dots, a_n]$ $n - 1$ -го вектора a_2, a_3, \dots, a_n в n -вимірному лінійному просторі з ортонормованим базисом e_1, e_2, \dots, e_n називають визначник ма-*

триці (70), в якій перший рядок замінено на послідовність базисних векторів, тобто

$$[a_2, a_3, \dots, a_n] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n e_i M_{1,i} (-1)^{i+1}.$$

8 Узагальнення скалярного добутку

Інколи довільний білінійний функціонал в довільному лінійному просторі над довільним полем називають скалярним добутком. Але якщо зберігати умову позитивності, то з нехобхідністю поле повинно містити поле раціональних чисел. Якщо зберегти умову симетричності, то виникають проблеми з полями характеристики 2.

8.1 Ермітів скалярний добуток у комплексному просторі

Нижче розглядаємо лінійний простір V над полем комплексних чисел \mathbb{C} . Число, що комплексно спряжене до числа $z \in \mathbb{C}$, позначаємо \bar{z} , тобто

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

Означення 8.1 Двомісний функціонал $f(x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ від двох змінних у лінійному просторі V над полем комплексних чисел називають півторалінійними, якщо для $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y), \quad (71)$$

тобто він лінійний за першим аргументом, і

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2), \quad (72)$$

тобто він напівлінійний за другим аргументом.

Двомісний функціонал $f(x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ від двох змінних у лінійному просторі V над полем комплексних чисел називають ермітовосиметричним, якщо для будь-яких $x, y \in V$

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Означення 8.2 Скалярним добутком у лінійному просторі над полем комплексних чисел (ермітовим скалярним добутком) називають ермітовосиметричний, півторалінійний позитивний функціонал. Комплексний простір, на якому є вибраний ермітовий скалярний добуток, називають унітарним. Визначення довжини вектора, ортогоганальності двох векторів, ортонормованості системи векторів для евклідового і для унітарного просторів збігаються

Якщо у комплексному просторі V вибрано базис $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ то ермітовосиметричний півторалінійний функціонал $f(x, y)$ для

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

обчислюється наступним чином

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} f(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} a_{i,j}$$

Отже функціонал $f(x, y)$ однозначно визначається матрицею з елементами $a_{i,j}$ $1 \leq i, j \leq n$, що задовольняють умову

$$a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Для прикладу, нехай у тривимірному комплексному просторі є ортонормований базис і в цьому базисі вектор a має координати $a = (1-i, 2+3i, -i)$. Потрібно знайти довжину $|a|$ цього вектора.

За означенням

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(1-i)(1+i) + (2+3i)(2-3i) + (-i) \cdot i} = \\ &= \sqrt{2 + 13 + 1} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

8.2 Геометрія Мінковського

Простір Мінковського це чотривимірний дійсний простір, в якому заданий скалярний добуток (білінійний функціонал), який в певній системі координат має метричний тензор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9 Контрольна робота з теми “Скалярний добуток”.

9.1 Завдання 1. Знайти ортонормований базис лінійної оболонки векторів e_1, e_2, e_3 .

1. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 + 3u_1 = (0, 7, 7, 11), e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$

2. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 + 2u_1 = (-2, 6, 5, 8), e_3 = u_3 - u_1 - 2u_2 = (11, -9, 6, -9);$
3. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 2u_1 = (-10, 2, -3, -4), e_3 = u_3 + u_1 - 2u_2 = (15, -7, 10, -3);$
4. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 3u_1 = (-12, 1, -5, -7), e_3 = u_3 + u_1 - 3u_2 = (21, -11, 9, -5);$
5. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 3u_1 = (-12, 1, -5, -7), e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$
6. $e_1 = u_3 = (1, 0, 10, -2); e_2 = u_3 + u_2 = (-5, 4, 11, 0); e_3 = u_3 + u_1 + u_2 = (-3, 5, 13, 3);$
7. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - u_2 = (8, -3, 1, 1); e_3 = u_3 - u_1 - u_2 = (5, -5, 7, -7);$
8. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + u_2 = (-4, 5, 3, 5); e_3 = u_3 - u_1 + u_2 = (-7, 3, 9, -3);$
9. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + 2u_2 = (-10, 9, 4, 7); e_3 = u_3 - u_1 + 2u_2 = (-13, 7, 10, -1);$
10. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - 2u_2 = (14, -7, 0, -1); e_3 = u_3 - u_1 - 2u_2 = (11, -9, 6, -9);$
11. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - 3u_2 = (20, -11, -1, -3); e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$
12. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + 3u_2 = (-16, 13, 5, 9); e_3 = u_3 - u_1 + 3u_2 = (-19, 11, 11, 1);$
13. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 + 3u_1 = (0, 7, 7, 11), e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$

14. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 + 2u_1 = (-2, 6, 5, 8), e_3 = u_3 - u_1 - 2u_2 = (11, -9, 6, -9);$
15. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 2u_1 = (-10, 2, -3, -4), e_3 = u_3 + u_1 - 2u_2 = (15, -7, 10, -3);$
16. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 3u_1 = (-12, 1, -5, -7), e_3 = u_3 + u_1 - 3u_2 = (21, -11, 9, -5);$
17. $e_1 = u_1 = (2, 1, 2, 3), e_2 = u_2 - 3u_1 = (-12, 1, -5, -7), e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$
18. $e_1 = u_3 = (1, 0, 10, -2); e_2 = u_3 + u_2 = (-5, 4, 11, 0); e_3 = u_3 + u_1 + u_2 = (-3, 5, 13, 3);$
19. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - u_2 = (8, -3, 1, 1); e_3 = u_3 - u_1 - u_2 = (5, -5, 7, -7);$
20. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + u_2 = (-4, 5, 3, 5); e_3 = u_3 - u_1 + u_2 = (-7, 3, 9, -3);$
21. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + 2u_2 = (-10, 9, 4, 7); e_3 = u_3 - u_1 + 2u_2 = (-13, 7, 10, -1);$
22. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - 2u_2 = (14, -7, 0, -1); e_3 = u_3 - u_1 - 2u_2 = (11, -9, 6, -9);$
23. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 - 3u_2 = (20, -11, -1, -3); e_3 = u_3 - u_1 - 3u_2 = (17, -13, 5, -11);$
24. $e_1 = u_2 = (-6, 4, 1, 2); e_2 = u_1 + 3u_2 = (-16, 13, 5, 9); e_3 = u_3 - u_1 + 3u_2 = (-19, 11, 11, 1);$

9.2 Завдання 2. Задані метричні коефіцієнти — скалярні добутки базисних векторів — $g_{11} = (e_1, e_1)$, $g_{12} = (e_1, e_2)$, $g_{22} = (e_2, e_2)$ і три радіус-вектори A, B, C . Знайти кут A і довжини сторін трикутника ABC .

1. $g_{11} = 1$, $g_{12} = 2$, $g_{22} = 5$, $A = (1, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (2, 5)$.
2. $g_{11} = 3$, $g_{12} = 2$, $g_{22} = 4$, $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$, $C = (2, 6)$.
3. $g_{11} = 2$, $g_{12} = 1$, $g_{22} = 1$, $A = (1, 2)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, 2)$.
4. $g_{11} = 3$, $g_{12} = 1$, $g_{22} = 2$, $A = (1, 2)$, $B = (3, -3)$, $C = (3, -1)$.
5. $g_{11} = 5$, $g_{12} = 4$, $g_{22} = 4$, $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (0, 4)$.
6. $g_{11} = 1$, $g_{12} = 2$, $g_{22} = 6$, $A = (1, 2)$, $B = (4, 7)$, $C = (6, 5)$.
7. $g_{11} = 2$, $g_{12} = 4$, $g_{22} = 9$, $A = (1, 2)$, $B = (-2, 7)$, $C = (6, -1)$.
8. $g_{11} = 2$, $g_{12} = -1$, $g_{22} = 1$, $A = (1, 2)$, $B = (-1, 2)$, $C = (1, 4)$.
9. $g_{11} = 1$, $g_{12} = -1$, $g_{22} = 2$, $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$, $C = (2, -1)$.
10. $g_{11} = 2$, $g_{12} = -2$, $g_{22} = 3$, $A = (1, 2)$, $B = (0, 0)$, $C = (-1, 1)$.

11. $g_{11} = 3, \quad g_{12} = -1, \quad g_{22} = 2, \quad A = (1, 2), \quad B = (-3, 1), \quad C = (0, -2).$
12. $g_{11} = 1, \quad g_{12} = -2, \quad g_{22} = 5, \quad A = (1, 2), \quad B = (-1, -4), \quad C = (-2, -6).$
13. $g_{11} = 1, \quad g_{12} = 2, \quad g_{22} = 5, \quad A = (1, 2), \quad B = (2, 4), \quad C = (2, 5).$
14. $g_{11} = 3, \quad g_{12} = 2, \quad g_{22} = 4, \quad A = (1, 2), \quad B = (2, 5), \quad C = (2, 6).$
15. $g_{11} = 2, \quad g_{12} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad A = (1, 2), \quad B = (0, 1), \quad C = (0, 2).$
16. $g_{11} = 3, \quad g_{12} = 1, \quad g_{22} = 2, \quad A = (1, 2), \quad B = (3, -3), \quad C = (3, -1).$
17. $g_{11} = 5, \quad g_{12} = 4, \quad g_{22} = 4, \quad A = (1, 2), \quad B = (2, 3), \quad C = (0, 4).$
18. $g_{11} = 1, \quad g_{12} = 2, \quad g_{22} = 6, \quad A = (1, 2), \quad B = (4, 7), \quad C = (6, 5).$
19. $g_{11} = 2, \quad g_{12} = 4, \quad g_{22} = 9, \quad A = (1, 2), \quad B = (-2, 7), \quad C = (6, -1).$
20. $g_{11} = 2, \quad g_{12} = -1, \quad g_{22} = 1, \quad A = (1, 2), \quad B = (-1, 2), \quad C = (1, 4).$
21. $g_{11} = 1, \quad g_{12} = -1, \quad g_{22} = 2, \quad A = (1, 2), \quad B = (-2, 3), \quad C = (2, -1).$
22. $g_{11} = 2, \quad g_{12} = -2, \quad g_{22} = 3, \quad A = (1, 2), \quad B = (0, 0), \quad C = (-1, 1).$

23. $g_{11} = 3, \quad g_{12} = -1, \quad g_{22} = 2, \quad A = (1, 2), \quad B = (-3, 1), \quad C = (0, -2).$
24. $g_{11} = 1, \quad g_{12} = -2, \quad g_{22} = 5, \quad A = (1, 2), \quad B = (-1, -4), \quad C = (-2, -6).$

9.3 Завдання 3. Знайти ортогональну проекцію вектора a на лінійну оболонку векторів e_1, e_2 і ортогональну складову цього вектора.

1. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (-1, -3, 7, -5).$
2. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (0, -5, 10, -7).$
3. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (-7, 1, 5, 3).$
4. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (4, -13, 22, -15).$
5. $a = (-11, 10, -9, -2) \quad e_1 = (1, -2, 3, -2), \quad e_2 = (4, -5, 6, -11).$
6. $a = (-11, 10, -9, -2) \quad e_1 = (1, -2, 3, -2), \quad e_2 = (-5, 4, -3, 16).$
7. $a = (-11, 10, -9, -2) \quad e_1 = (1, -2, 3, -2), \quad e_2 = (5, 0, -5, 4).$
8. $a = (-11, 10, -9, -2) \quad e_1 = (1, -2, 3, -2), \quad e_2 = (-4, 3, -2, 1).$
9. $a = (1, 0, -1, 0) \quad e_1 = (-1, -1, 3, 5), \quad e_2 = (-2, 2, -2, -6).$
10. $a = (1, 0, -1, 0) \quad e_1 = (-1, -1, 3, 5), \quad e_2 = (-2, 1, 0, 7).$
11. $a = (1, 0, -1, 0) \quad e_1 = (-1, -1, 3, 5), \quad e_2 = ([-3, 3, -3, 9]).$
12. $a = (1, 0, -1, 0) \quad e_1 = (-1, -1, 3, 5), \quad e_2 = (-6, -3, 12, 27).$
13. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (-1, -3, 7, -5).$
14. $a = (1, 0, -1, -28) \quad e_1 = (-3, 1, 1, -1), \quad e_2 = (0, -5, 10, -7).$

15. $a = (1, 0, -1, -28)$ $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (-7, 1, 5, 3)$.
16. $a = (1, 0, -1, -28)$ $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (4, -13, 22, -15)$.
17. $a = (-11, 10, -9, -2)$ $e_1 = (1, -2, 3, -2)$, $e_2 = (4, -5, 6, -11)$.
18. $a = (-11, 10, -9, -2)$ $e_1 = (1, -2, 3, -2)$, $e_2 = (-5, 4, -3, 16)$.
19. $a = (-11, 10, -9, -2)$ $e_1 = (1, -2, 3, -2)$, $e_2 = (5, 0, -5, 4)$.
20. $a = (-11, 10, -9, -2)$ $e_1 = (1, -2, 3, -2)$, $e_2 = (-4, 3, -2, 1)$.
21. $a = (1, 0, -1, 0)$ $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-2, 2, -2, -6)$.
22. $a = (1, 0, -1, 0)$ $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 7)$.
23. $a = (1, 0, -1, 0)$ $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = ([-3, 3, -3, 9])$.
24. $a = (1, 0, -1, 0)$ $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-6, -3, 12, 27)$.

9.4 Завдання 4. Знайти базис ортогонального доповнення до лінійної оболонки векторів e_1, e_2 .

1. $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-2, 2, -2, -6)$.
2. $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 7)$.
3. $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = ([-3, 3, -3, 9])$.
4. $e_1 = (-1, -1, 3, 5)$, $e_2 = (-6, -3, 12, 27)$.
5. $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (-1, -3, 7, -5)$.
6. $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (0, -5, 10, -7)$.
7. $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (-7, 1, 5, 3)$.
8. $e_1 = (-3, 1, 1, -1)$, $e_2 = (4, -13, 22, -15)$.

9. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (4, -5, 6, -11).$
10. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (-5, 4, -3, 16).$
11. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (5, 0, -5, 4).$
12. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (-4, 3, -2, 1).$
13. $e_1 = (-1, -1, 3, 5), e_2 = (-2, 2, -2, -6).$
14. $e_1 = (-1, -1, 3, 5), e_2 = (-2, 1, 0, 7).$
15. $e_1 = (-1, -1, 3, 5), e_2 = (-3, 3, -3, 9).$
16. $e_1 = (-1, -1, 3, 5), e_2 = (-6, -3, 12, 27).$
17. $e_1 = (-3, 1, 1, -1), e_2 = (-1, -3, 7, -5).$
18. $e_1 = (-3, 1, 1, -1), e_2 = (0, -5, 10, -7).$
19. $e_1 = (-3, 1, 1, -1), e_2 = (-7, 1, 5, 3).$
20. $e_1 = (-3, 1, 1, -1), e_2 = (4, -13, 22, -15).$
21. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (4, -5, 6, -11).$
22. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (-5, 4, -3, 16).$
23. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (5, 0, -5, 4).$
24. $e_1 = (1, -2, 3, -2), e_2 = (-4, 3, -2, 1).$

9.5 Завдання 5. Знайти відстань від точки $a = (-11, 10, 3, 7)$ до лінійного многовиду M , що заданий неоднорідною системою рівнянь.

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 - 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + 9x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 9x_2 - 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 - 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + 9x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$21) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \quad 22) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$23) \quad \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \quad 24) \quad \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 9x_2 - 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Література

- [1] О.А.Борисенко, Л.М.Ушакова “Аналітична геометрія“, — Харків:Основа, 1993.
- [2] В.П.Ольшанський “<Короткий >курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії“: Лекції та лаб.роботи на ПЕОМ : Навч. посібник для студ. техн. вузів / В. П. Ольшанський ; Харківський політехнічний ун-т. — К. : ІСДО, 1994. - 216 с.
- [3] “Аналітична геометрія. Лінійна алгебра“: Навчально- методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. — Чернівці: Рута, 2007. — 244 с.
- [4] Методичні вказівки з теми “Визначники та елементи лінійної алгебри“, укладач Паламарчук В.О. // Краторськ, ДДМА, 2001, 30 стор. — vila.pdf
- [5] Олег Романів “Лінійна алгебра. Перший семестр1“, — Львів, 1 вересня 2013, інтернет
- [6] Л.А.Калужнін, В.А.Вишенський, Ц.А. Шуб “Лнійні простори“ — Київ: Вища Школа, 1971

- [7] В.І. Андрійчук , Б.В. Забавський “Алгебра і теорія чисел“ — Львів. — 2005.
- [8] В.І. Андрійчук , Б.В. Забавський “Лінійна алгебра“ — Львів. — 2008.
- [9] В.І. Андрійчук, Б.В. Забавський “Загальна алгебра“ — Львів. — 2009.
- [10] Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О., Зражевська Г.М., Ющенко О.А. “Збірник задач з вищої математики“ — К., Видавництво Київського університету, 1967 р. 352 с.
- [11] И.В. Проскураков “Сборник задач по линейной алгебре“. — М:Наука, 1967

Показчик

- базис
 - ортономований, 21, 31
- дефект
 - квадратичної форми, 49
- дельта-функція, 10
- добуток
 - скалярний, 26
 - ермітовий, 82
- векторів
 - скалярний, 19
 - векторний, 80
 - змішаний, 80
- додавання
 - форм, 5
 - функціоналів, 4
- доповнення
 - ортогональне, 57
- довжина
 - вектора, 28
- еквіваленція, 12
- форма
 - білінійна, 25
 - кадратична, 41
 - позитивна, 47
 - квадратична
 - додатно визначена, 47
 - лінійна, 5
 - нульова, 5
- форми
 - лінійно незалежні, 5
- формула
 - рекурентна, 77
- функціонал, 3
 - білінійний, 16, 27
 - ермітовосиметричний, 82
 - лінійний, 4
 - напівлінійний, 81
 - нульовий, 4
 - однорідний, 4
 - півторалінійний, 82
 - полілінійний, 24
 - позитивний, 16, 27
 - симетричний, 16, 27
- гіперплощина, 63
- характеристика поля, 41
- індекс інерції
 - додатний, 49
 - від'ємний, 49
- ізоморфізм
 - канонічний, 6

коефіцієнт
 метричний, 20
 критерій
 Якобі, 51
 додатної визначеності, 49
 кут
 між векторами, 30
 лінійний простір
 асоційований з точковим, 64
 дуальний, 4
 двоїстий, 4
 спряжений, 4
 матриця
 Грама, 20
 білінійної форми, 26
 квадратичної форми, 41
 ортогональна, 33
 переходу, 33
 транспонована, 33
 метод
 найменших квадратів, 72
 виділення повних квадратів,
 45
 від протилежного, 48
 методд
 Лагранжа, 45
 мінор
 головний, 51
 многочлен
 Чебишева
 першого роду, 75
 Лежандра, 77
 многочлени
 Фур'є, 78
 тригонометричні, 78
 множення
 форми на число, 5
 функціонала
 на чило, 4
 функціонала на число, 4
 нерівність
 Коші — Буняковського, 28
 трикутника, 28
 норма
 вектора, 28
 нормування, 24, 30
 умовою, 24
 орт, 21
 ортогональна складова
 вектора, 61
 означення
 індуктивне, 79
 площа, 63, 67
 k -вимірна, 63
 поліном
 Фур'є, 78

тригонометричний, 78
 процес
 Грама-Шмідта, 37
 проєкція
 вектора
 на підпростір, 61
 простір
 евклідів, 27
 евклідовий
 точковий, 68
 векторний, 68
 точковий, 63
 евклідів, 63
 тригонометричних поліномів, вектор
 78
 унітарний, 82
 пряма, 63, 67
 радіус-вектор, 63
 ранг
 квадратичної форми, 49
 рівносильність, 12
 рівняння
 площини, 67
 прямої, 67
 сигнатура, 49
 символ
 Кронекера, 21
 система
 векторів
 ортонормована, 30
 сума
 форм, 5
 функціоналів, 4
 тензор
 метричний, 20
 теорема
 Лагранжа, 44
 Якобі, 51
 точка, 63
 точкового простору, 64
 відліку, 64
 нормований, 30
 вектори
 нормовані, 21
 ортогональні, 21, 30
 твірні, 59
 підпростору, 59
 взаємно ортогональні, 21
 вигляд квадратичної форми
 діагональний, 42
 канонічний, 42
 нормальний, 42
 відображення
 адитивне, 4
 однорідне, 4

відповідність

канонічна, 6, 12

взаємно однозначна, 12

відстань

від вектора до підпростору,

61

заміна змінних

невироджена, 45

стандартна, 45

згортка, 11

зміна координат

контраваріантна, 15

коваріантна, 15