

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ

51 |



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

83813 ХДХ

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

В Ы П У С К 51

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВЫЩА ШКОЛА»

1989

Сборник содержит статьи по интерполяционным задачам, аналитическим матриц-функциям, теории распределения значений, краевым задачам, аналитическим функциям многих переменных и аналитическим вопросам теории вероятностей.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секр.), Ю. М. Березанский, М. С. Бродский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, М. Г. Крейн, А. В. Кужель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией Е. П. Иващенко

МАЖОРАНТЫ В КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При исследовании экстремальных задач в классах голоморфных функций мы часто сталкиваемся со следующим явлением: в рассматриваемом классе нет экстремальной функции, а в несколько более широком классе субгармонических функций экстремум достигается на некоторой функции класса. Такие задачи естественно ставить и решать в классах субгармонических функций. Исследованию этих классов посвящаются три статьи автора.

В первой статье выделяются классы субгармонических функций и проводится общее изучение мажорант таких классов*.

Во второй** — изучается связь мажорант со специальными конформными отображениями, дающая метод для решения некоторых экстремальных задач.

В третьей мы изучаем специальные отображения полуплоскости S , которые называем E -правильными. Они дают возможность ввести классификацию замкнутых множеств на вещественной оси. Кроме того, мы устанавливаем некоторые признаки конечности мажоранты.

В 1974 г. значительная часть этих результатов была систематически изложена в цикле лекций, прочитанных автором в Ростовском государственном университете. Некоторые результаты были доложены на конференциях по теории функций, в частности в Харькове (1971) и Черноголовке (1981). Часть результатов опубликована ранее [1—3].

Основные свойства мажорант и их представление. Ч. 1

В этой статье определяются мажоранты для некоторых классов субгармонических функций и проводится общее изучение таких мажорант. В конце статьи дается интегральное представление мажоранты.

1.1. Определение классов K_φ и основные свойства их мажорант. Для того чтобы дать общее определение рассматриваемых ниже классов субгармонических функций, остановимся сначала на специальной операции, которую будем называть операцией «выглаживания» субгармонической функции.

* В работе П. Кусиса [4] развита теория мажорант как аппарат для получения теоремы А. Берлинга и П. Малявена о мультипликаторе.

** Вторая и третья статьи автора будут помещены в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 52.

Пусть g — субгармоническая функция во всей плоскости C^* и c — произвольный круг в этой плоскости. Выглаженной в c функцией g_c назовем субгармоническую в C функцию, совпадающую с g в дополнении к c и с ее гармонической мажорантой в c^{**} .

Пусть $\varphi(x) \geq 0$ — произвольная функция, заданная на вещественной оси R , причем значения $\varphi(x) = +\infty$ не исключаются.

Назовем классом K_φ любой класс субгармонических в C функций g , который удовлетворяет следующим условиям:

1) все функции g этого класса удовлетворяют на R неравенству $g(x) \leq \varphi(x)$ (1.2);

2) если $g \in K_\varphi$ и при некотором круге c выглаженная функция g_c удовлетворяет условию (1), то $g_c \in K_\varphi$;

3) если $g_1 \in K_\varphi$ и $g_2 \in K_\varphi$, то и $\max\{g_1(z), g_2(z)\} \in K_\varphi$;

4) $0 \in K_\varphi$;

5) существует функция $g \in K_\varphi$, отличная от постоянной.

Приведем несколько примеров классов K_φ .

Субгармоническую функцию $g(z)$ при $z \in C$ назовем функцией конечной степени, если она растет при $|z| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая линейная функция от $|z|$, т. е.

$$\sigma = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{|z|} < \infty. \quad (1.3)$$

Число σ называется степенью функции $g(z)$.

1) Обозначим через K_φ^σ класс всех субгармонических функций в C , степень которых не превосходит данного числа $\sigma \geq 0$ и которые удовлетворяют неравенству (1.2) на вещественной оси.

2) Через $K_{\varphi, \lambda}^\lambda$ будет обозначен класс всех субгармонических функций в C , удовлетворяющих неравенству (1.2) и ограничению на рост

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{\ln |z|} \leq \lambda < \infty. \quad (1.4)$$

3) Символом $K_{\varphi, l}$ обозначим класс всех субгармонических функций в C , удовлетворяющих неравенству (1.2) и ограничению на рост

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{\ln |z|} < \infty. \quad (1.5)$$

4) Будем обозначать $K_{\varphi, \psi}^0$ — класс функций из K_φ^0 , удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(\pm iy)}{\psi(|y|)} \leq \gamma < \infty, \quad (1.6)$$

где $\psi(|y|)$ — некоторая монотонно растущая функция.

* Обозначим таким образом плоскость x, y , в которой рассматриваются вещественные субгармонические функции, так как в дальнейшем будет использована ее комплексная структура.

** Эта операция совпадает с операцией выметания масс из круга c .

Легко проверить, что все перечисленные классы относятся к классам K_φ .

Перейдем к определению понятия мажоранты класса K_φ . Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\hat{g}(z, K_\varphi) = \sup_{g \in K_\varphi} \{g(z)\}, \quad (1.7)$$

которая мажорирует в плоскости C все функции класса. Таким же свойством обладает субгармоническая функция $v(z, K_\varphi)$, полученная из $\hat{g}(z, K_\varphi)$ путем «регуляризации»,

$$v(z, K_\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{|z - \zeta| < \delta} \hat{g}(\zeta, K_\varphi) \right), \quad (1.8)$$

которая и называется мажорантой данного класса K_φ .

В дальнейшем вместо $v(z, K_\varphi)$ часто будем писать $v(z)$, а вместо $\hat{g}(z, K_\varphi)$ — просто $\hat{g}(z)$.

Теорема 1.1. *Мажоранта $\hat{g}(z)$ класса K_φ либо равна $+\infty$ всюду в полуплоскости $C_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, либо всюду конечна в этой полуплоскости. В последнем случае эта мажоранта есть гармоническая функция в C_+ . Аналогичные утверждения верны относительно полуплоскости $C_- = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$.*

Доказательство. Пусть для определенности $z_0 \in C_+$ и $\{g_n(z)\}_1^\infty$ такая последовательность $g_n \in K_\varphi$, что $g_n(z) \rightarrow \hat{g}(z_0) \leq \infty$. По этой последовательности можно построить монотонную в C_+ последовательность $\tilde{g}_n(z) = \max_{i < n} \{g_i(z)\}$, и затем — последовательность

$g_c^n \in K_\varphi$, полученную из $\{\tilde{g}_n(z)\}$ выглаживанием этих функций в круге $c(z_0) = \{z: |z - z_0| < \operatorname{Im} z_0\}$. Эта монотонная последовательность гармонических в $c(z_0)$ функций $\{g_c^n(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится по теореме Гарнака в каждом круге $c_\rho = \{z: |z - z_0| \leq \rho < \operatorname{Im} z_0\}$ к бесконечности, если $\hat{g}(z_0) = \infty$, и к некоторой гармонической функции $g_0(z)$, если $\hat{g}(z_0) < \infty$. Тогда $g_0(z_0) = \hat{g}(z_0)$. Если $\hat{g}(z_0) = \infty$, то получается, что $\hat{g}(z) = \infty$ во всем круге $c(z_0)$. Соединив точку z_0 с произвольной точкой $z_1 \in C_+$ прямолинейным отрезком и применив алгоритм, аналогичный алгоритму аналитического продолжения, мы получим, что $\hat{g}(z_1) = \infty$. Итак, если функция $\hat{g}(z)$ равна $+\infty$ в какой-нибудь точке C_+ , то она равна $+\infty$ во всей полуплоскости C_+ . Пусть теперь $\hat{g}(z_0) < \infty$. Мы докажем, что в этом случае $\hat{g}(z) = g_0(z)$ в круге c_ρ , т. е. гармоническая в окрестности точки z_0 . В силу произвольности $z_0 \in C_+$ отсюда будет следовать, что $\hat{g}(z)$ — гармоническая функция в C_+ . Чтобы это доказать, мы выберем произвольную точку $z_1 \in c_\rho$ и построим также, как прежде, монотонную последовательность $\{g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ функций из K_φ , такую, что $g_n(z_1) \rightarrow \hat{g}(z_1)$. Затем построим последовательность $\tilde{g}_n(z) = \max \{g_n(z), g_1(z)\}$ и, наконец, $\{\tilde{g}_c^n(z)\}_1^\infty$, которая получается выглаживанием функций $\tilde{g}_n$ в $c(z_0)$. Очевидно, что $\tilde{g}_c^n(z) \geq g_c^n(z)$ при $z \in c_\rho$. Последовательность $\{\tilde{g}_c^n(z)\}_1^\infty$ сходится к гармонической функции $g_1(z) \geq$

$\geq g_0(z)$. Но $g_1(z_0) = g_0(z_0) = \hat{g}(z_0)$, и поэтому $g_1(z) \equiv g_0(z)$. По построению последовательности g_c^n имеем $g_c^n(z_1) \uparrow \hat{g}(z_1)$ и, следовательно, $\hat{g}(z_1) = g_1(z_1) = g_0(z_1)$. В силу произвольности $z_1 \in C_\rho$ получаем, что $\hat{g}(z) = g_0(z)$ при $z \in C_\rho$. Итак, функция $\hat{g}(z)$ гармоническая всюду, где она конечна ■

Замечание 1. Из теоремы 1.1 следует, что $v(z) = \hat{g}(z)$ на множестве $C_+ \cup C_-$ ▲

Замечание 2. Если существует такой круг s с центром в точке x_0 вещественной оси, что выглаживание произвольной функции $g(z) \in K_\varphi$ в этом круге не выводит ее из класса, то, несущественно изменяя доказательство, можно установить, что функция $v(z)$ — гармоническая в точке x_0 . В частности, это будет иметь место, если $\varphi(x) = +\infty$ в некоторой окрестности точки x_0 ▲

Среди классов K_φ естественно выделить такие, в которые вместе с каждой функцией $g(z)$ входит функция $g(\bar{z})$. Такие классы будем называть симметричными. Все классы K_φ , приведенные раньше, симметричны. Нетрудно построить примеры несимметричных классов K_φ .

Теорема 1.2. Если класс K_φ симметричен и его мажоранта $v(z)$ конечна в некоторой точке плоскости, то она конечна всюду в плоскости C и является положительной гармонической функцией в C_+ и C_- ▲

Доказательство. Заметим прежде всего, что если функция $v(z)$ конечна в некоторой точке вещественной оси, то в силу полунепрерывности функции $v(z)$ сверху она ограничена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому нужно рассмотреть лишь тот случай, когда $v(z)$ конечна в некоторой точке $z_0 \in C_+$. По симметрии она конечна также в точке $z_0 \in C_-$. По теореме 1.1 она конечна при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и гармоническая в каждой из полуплоскостей C_+ и C_- . Из свойств 4) и 5) класса K_φ следует, что каждая из этих гармонических функций положительна в соответствующей полуплоскости.

Для доказательства теоремы нужно лишь установить, что мажоранта $v(z)$ конечна в каждой точке вещественной оси. Для этого воспользуемся представлением положительной в C_+ гармонической функции. Чтобы получить это представление, отобразим C_+ на единичный круг с помощью функции $\xi = \frac{z-i}{z+i}$. Тогда $v(z) = t(\xi)$ — положительная гармоническая функция в единичном круге $|\xi| < 1$ и потому (по известной теореме Рисса—Герглотца) имеет представление

$$t(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{2\pi+0} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\psi-\theta) + r^2} d\mu(\psi), \quad \xi = re^{i\theta},$$

где $\mu(\psi)$ — неубывающая функция и $\mu(2\pi+0) - \mu(+0) = 2\pi t(0)$. Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(t)}{(t-x)^2 + y^2} + \sigma_1 y, \quad (1.10)$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{2\pi} [\mu_1(2\pi + 0) - \mu_1(2\pi - 0)] \geq 0$; $\mu_1(t)$ — неубывающая функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(t)}{1+t^2} + \sigma_1 = v(i) < \infty. \quad (1.11)$$

Интегрируя (1.10), под знаком интеграла получим

$$\int_a^b V(x + iy) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t, y)}{\pi} d\mu_1(t), \quad (1.12)$$

где $\alpha(t, y)$ — угол, под которым виден из точки t на вещественной оси прямолинейный отрезок $[a + iy, b + iy]$. Разобьем последний интеграл в (1.12) на интегралы по сегменту $t \in [a, b]$ и по внешности сегмента $t \notin [a, b]$. На интервале (a, b) функция $\alpha(t, y) \uparrow \pi$, на концах сегмента $\alpha(t, y) \uparrow \frac{\pi}{2}$, а вне сегмента $\alpha(t, y) \downarrow 0$.

Переходя в (1.12) к пределу при $y \downarrow 0$, получаем

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_a^b v(x + iy) dx = \mu_1(b) - \mu_1(a), \quad (1.13)$$

где $\mu_1(x) = \frac{1}{2} \{ \mu_1(x + 0) + \mu_1(x - 0) \}$.

По симметрии аналогичное равенство имеет место и при $y \uparrow 0$. Поэтому при любом вещественном x_0 и достаточно малом $\delta > 0$ имеем неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} v(x_0 + t + iy) dt dy < 2\delta [\mu_1(x_0 + \delta) - \mu_1(x_0 - \delta) + 1] \stackrel{\text{def}}{=} M(x_0, \delta),$$

из которого следует

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} v(x_0 + \rho e^{i\psi}) \rho d\rho d\psi < \frac{M(x_0, \delta)}{\pi\delta^2}.$$

Таким образом, функция $v(x)$ — конечна во всех точках вещественной оси*.

Замечание 1. Формула (1.10), очевидно, верна не только для мажоранты, но для любой положительной гармонической функции в полуплоскости $y > 0$. Если при этом гармоническая функция

* Если класс K_{φ} не симметричен, то, как видно из приведенных рассуждений, конечность мажоранты получается, если потребовать, чтобы она была конечна в двух точках: $z_1 \in C_+$ и $z_2 \in C_-$.

непрерывно продолжается на вещественную ось, то в силу (1.13) формула (1.10) принимает вид

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt + \sigma_+ y. \quad (1.14)$$

Если же, кроме того, функция $v(z)$ непрерывно продолжается в C_- и является в нижней полуплоскости положительной гармонической функцией, то при $z \in C_-$

$$v(z) = -\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt - \sigma_- y \blacktriangle \quad (1.14')$$

Замечание 2. Если мажоранта класса K_{φ}^{σ} конечна при каком-нибудь $\sigma_1 > 0$, то она конечна при любом $\sigma \geq 0$.

Действительно, при $\sigma < \sigma_1$ класс K_{φ}^{σ} уже, чем класс $K_{\varphi}^{\sigma_1}$, и, следовательно, мажоранта этого класса не больше, чем мажоранта класса $K_{\varphi}^{\sigma_1}$. Если же $\sigma > \sigma_1$, то, умножая все функции класса $K_{\varphi}^{\sigma_1}$ на число $\lambda = \sigma/\sigma_1 > 1$, получим весь класс функций $K_{\lambda\varphi}^{\sigma}$. Мажоранта этого класса, очевидно, получается умножением на λ мажоранты $v(z)$ класса $K_{\varphi}^{\sigma_1}$. Но всякая функция класса K_{φ}^{σ} входит в класс $K_{\lambda\varphi}^{\sigma}$. Поэтому мажоранта этого класса $v(z, K_{\varphi}^{\sigma}) \leq \lambda v(z, K_{\varphi}^{\sigma_1})$ и, следовательно, конечна ■

1.2. Представление мажоранты и условия ее конечности. Для дальнейшего исследования свойств мажорант нам понадобится несколько обобщить теорему М. Г. Крейна [5].

Пусть $f(z)$ — целая функция и $g(z) = \ln |f(z)|$ имеет положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_- . Тогда $f(z)$ является функцией конечной степени и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(x)}{1+x^2} dx < \infty. \quad (1.14'')$$

Здесь, как обычно, $g_+(z) = \max(g(z), 0)$. Обобщение состоит в том, что вместо специальной субгармонической функции $\ln |f(z)|$ мы рассмотрим произвольные субгармонические функции $g(z)$. Для получения этого обобщения воспользуемся следующим хорошо известным представлением функции $g(z)$, субгармонической в полуплоскости C_+ и допускающей в этой полуплоскости положительную гармоническую мажоранту:

$$g(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{|t-z|^2} + \iint_{C_+} \ln \left| \frac{\xi-z}{\bar{\xi}-z} \right| d\nu(\xi) + \sigma y, \quad (1.15)$$

где $d\mu(t)$ и $dv(\zeta)$ — меры, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty, \quad \iint_{C_+} \frac{\eta dv(\zeta)}{1+|\zeta|^2} < \infty, \quad (\zeta = \xi + i\eta)^*,$$

а σ — некоторая вещественная постоянная. Кроме того, будет использована следующая теорема У. Хеймана.

Теорема 1.3. Если функция $g(z)$ допускает в полуплоскости C_+ представление (1.15) при $\sigma = 0$, то всюду в полуплоскости C_+ (кроме, быть может, некоторых исключительных кружков $\{c_j\}$) имеет место асимптотическое равенство

$$|g(z)| = o(|z|). \quad (1.16)$$

Множество исключительных кружков $\{c_j\}$ таково, что ряд, составленный из углов $\{\varphi_j\}$, под которыми эти кружки видны из начала координат, сходится**▲

Такое множество кружков назовем «множеством конечного обзора».

Теорема 1.4. Если функция $g(z)$ — субгармоническая во всей плоскости и имеет положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_- , то она конечной степени и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt < \infty. \quad (1.17)$$

Кроме того, вне некоторого множества кружков $\{c_j\}$ конечного обзора имеют место асимптотические оценки

$$\begin{aligned} g(z) &= \sigma_+ y + o(|z|), \quad y > 0; \\ g(z) &= -\sigma_- y + o(|z|), \quad y < 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где σ_+ и σ_- соответственно степени $g(z)$ в C_+ и C_- , а $\max(\sigma_+, \sigma_-)$ — степень функции $g(z)$ в C ▲

Доказательство. Из теоремы У. Хеймана и В. С. Азарина непосредственно следует, что выполняется (1.18) при некоторых постоянных σ_+ и σ_- вне множества кружков конечного обзора. Применяя принцип максимума к функции $g(z)$ в областях, покрытых этими кружками, легко убедиться в том, что $g(z)$ конечной степени, причем степень ее в C_+ равна σ_+ , а в C_- равна σ_- . Для доказательства сходимости интеграла (1.17) заметим, что функция $g_+(z)$ имеет те же положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_- , что и функция $g(z)$. Пусть $\tilde{g}(z)$ — положительная гармоническая мажоранта функции $g(z)$ в C_+ и в C_- . Очевидно, что при

* Это представление можно получить с помощью отображения полуплоскости C на единичный круг и теоремы о представлении в единичном круге субгармонической функции, имеющей положительную гармоническую мажоранту.

** В статье [6] доказано несколько меньше, а именно, что асимптотическое равенство (1.16) выполняется при всех $z \in C_+$, но $|z| \notin E$, где E — множество конечной логарифмической длины, т. е. $\int_E x^{-1} dx < \infty$. Приведенный здесь

более совершенный вариант теоремы установлен в [7].

$z \in C_+$, функция $\tilde{g}(z + \tau)$ положительная гармоническая от τ , непрерывно продолжающаяся на вещественную ось, и, следовательно, по замечанию 1 к теореме 1.2

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}(z + \tau)}{1 + \tau^2} d\tau = \tilde{g}(z + i) - \sigma_+.$$

Отсюда при любом $z \in C_+$ и $R > 0$ имеет место неравенство

$$g_+^R(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{g_+(z + \tau)}{1 + \tau^2} d\tau < \tilde{g}(z + i) - \sigma_+. \quad (1.19)$$

Аналогичное неравенство имеет место при $z \in C_-$. Введя обозначение

$$g_{+h}(z) = \frac{1}{\pi h^2} \int_0^{2\pi} \int_0^h g_+(z + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta \quad (1.20)$$

и применив эту операцию усреднения к предыдущему неравенству, получим

$$g_{+h}^R(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{g_{+h}(\tau)}{1 + \tau^2} d\tau < \tilde{g}_h(i) + \tilde{g}_h(-i). \quad (1.21)$$

Из субгармоничности $g_+(z)$ следует, что $g_{+h}(z) \downarrow g_+(z)$ при $h \downarrow 0$, и поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{g_+(\tau)}{1 + \tau^2} d\tau \leq \tilde{g}(i) + \tilde{g}(-i).$$

Для получения (1.17) достаточно перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$ ■ Из теоремы 1.2 и 1.4 непосредственно следует факт, который ввиду его важности выделим как теорему.

Теорема 1.5. Если класс субгармонических функций K_φ имеет конечную мажоранту, то он входит в некоторый класс K_φ^σ ▲

Действительно, если мажоранта $v(z, K_\varphi)$ конечна, то она является субгармонической функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 1.4. Поэтому $v(z, K_\varphi)$ конечной степени, а, следовательно, и мажорируемые ею функции тоже конечной степени, не превосходящей степени σ функции $v(z, K_\varphi)$ ■

В дальнейшем будут указаны некоторые необходимые и достаточные условия конечности мажоранты. Предварительно сделаем следующее

Замечание. Из (1.21) следует, что при выполнении условий теоремы 1.4 непрерывная во всей плоскости субгармоническая функция $g_{+h}(z)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{+h}(t)}{1 + t^2} dt < \infty. \quad (1.22)$$

Кроме того, очевидно, что $g_{+h}(z)$ конечной степени σ ▲

Это замечание будет использовано для того, чтобы получить представление наилучшей гармонической мажоранты в C_+ (и C_-) функции $g(z)$.

Теорема 1.6. *Наилучшая положительная гармоническая мажоранта в C_+ и C_- функции $g(z)$, удовлетворяющей предположениям теоремы 1.4, имеет вид*

$$\bar{g}(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2} dt + \sigma |y|, \quad (1.23)$$

где σ — степень функции $g(z)$ * ▲

Доказательство. По функции $g_{+h}^{(z)}$ построим гармоническую в C_+ функцию

$$\bar{g}_h(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{+h}(t)}{|t-z|^2} dt + \sigma y,$$

которая существует в силу условия (1.22). По теореме У. Хеймана для нее верна асимптотическая формула $\bar{g}_h(z) = \sigma |y| + o(|z|)$ всюду вне множества кружков «конечного обзора». Кроме того, на вещественной оси функции $\bar{g}_h(z)$ имеет предельные значения и $\bar{g}_h(z) = g_{+h}(z)$. Рассмотрим разность $w_\varepsilon(z) = g_{+h}(z) - \bar{g}_h(z) - \varepsilon y$, которая является субгармонической функцией в C_+ , принимающей всюду на вещественной оси значение нуль. Она ограничена сверху на оси OY . Применяя теорему Фрагмена — Линделефа в каждом из квадрантов $x \geq 0, y \geq 0$ и $x \leq 0, y \geq 0$, получим, что $w_\varepsilon(z) \leq M < \infty$ при $z \in C_+$. Еще раз применяя теорему Фрагмена — Линделефа в полуплоскости $y \geq 0$, получаем, что $w_\varepsilon(z) \leq 0, z \in C_+$, т. е. $g_{+h}(z) \leq \bar{g}_h(z) + \varepsilon y$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $g_{+h}(z) \leq \bar{g}_h(z)$. Очевидно, что $\bar{g}_h(z)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $g_{+h}(z)$. При $h \downarrow 0$ обе функции в этом неравенстве монотонно убывают и, переходя к пределу, получаем с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$g_+(z) \leq \bar{g}(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2} dt + \sigma y.$$

Аналогичная формула в нижней полуплоскости получается точно так же ■

При доказательстве теоремы 1.6 было использовано собственно не существование в C_+ положительной гармонической мажоранты у функции $g(z)$, а лишь вытекающие из этого предположения факты

* Предполагаем $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$, что не нарушает общности. Можно получить это равенство, прибавив к $g(z)$ функцию $\frac{1}{2}(\sigma_- - \sigma_+)y$. Из (1.18) следует, что $\sigma \geq 0$.

существования интеграла (1.14) и принадлежности функции $\bar{g}(z)$ к функциям конечной степени. Поэтому справедливо замечание.

Замечание. Если субгармоническая функция $g(z)$ имеет конечную степень σ и выполнено условие (1.14"), то

$$g(z) \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2} dt + \sigma |y|, \quad (1.24)$$

причем правая часть совпадает в C_+ и в C_- с наилучшей неотрицательной гармонической мажорантой функции $g(z)$ ▲

Теорема 1.7. Если мажоранта $v(z)$ симметричного класса* K_φ конечна, то она имеет представление

$$v(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{|t-z|^2} dt + \kappa |y|, \quad (1.25)$$

где $\kappa = \text{Inf} \sigma$, при которых $K_\varphi \subset K_\varphi^\sigma$ ▲

Доказательство. Функция $v(z)$ — неотрицательная, субгармоническая во всей плоскости и сама является своей гармонической мажорантой в C_+ и C_- . По теореме 1.6 она представляется в форме

$$v(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{|t-z|^2} dt + \sigma_v |y|, \quad (1.26)$$

где σ_v — степень функции $v(z)$.

Отсюда следует, что все функции класса K_φ имеют степень, не превосходящую σ_v , т. е. $K_\varphi \subseteq K_\varphi^{\sigma_v}$ и, следовательно, $\kappa \leq \sigma_v$. Пусть теперь $K_\varphi \subseteq K_\varphi^\sigma$ при некотором $\sigma \geq 0$. Тогда все функции этого класса удовлетворяют неравенству $g(z) \leq v(z, K_\varphi^\sigma)$.

Беря супремум в левой части и регуляризируя, получаем

$$v(z, K_\varphi) \leq v(z, K_\varphi^\sigma) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, K_\varphi^\sigma)}{|t-z|^2} dt + \sigma |y|$$

и, следовательно, $\sigma_v \leq \kappa$. Итак, $\sigma_v = \kappa$ ■

Замечание. Если симметричная мажоранта $v(z)$ класса K_φ конечна, то всюду в плоскости верно асимптотическое при $|z| \rightarrow \infty$ равенство

$$v(z) = \kappa |y| + o(|z|) \quad \blacktriangle \quad (1.28)$$

* Если класс K_φ не симметричен, то в представлении (1.25) будут, вообще говоря, различные постоянные $\kappa_\pm$ в C_+ и C_- . В этом случае функция

$v_1(z) = v(z) - \frac{1}{2}(\kappa_+ - \kappa_-)y$ симметрична, т. е. $v_1(z) = v_1(\bar{z})$, и является мажорантой для симметричного класса, состоящего из функций $\frac{1}{2}[g_1(z) + g_1(\bar{z})]$, где $g_1(z) = g(z) - \frac{1}{2}(\kappa_+ - \kappa_-)y$ при $g(z) \in K_\varphi$.

Доказательство. Из представления (1.25) и теоремы 1.3 следует, что асимптотическое равенство (1.28) имеет место во всей плоскости, за исключением, быть может, множества кружков «конечного обзора». По принципу максимума и минимума для гармонической функции отсюда следует, что равенство (1.28) имеет место вне исключительных кружков, пересекающих вещественную ось. Применяя в этих оставшихся кружках принцип максимума к субгармонической функции $v(z)$, получим, что в них имеет место неравенство $v(z) \leq o(|z|)$.

Так как, с другой стороны, $v(z) \geq 0$, то на этом множестве кружков имеем равенство $v(z) = o(|z|)$, которое совпадает с (1.28) ■

Перейдем теперь к критериям конечности мажоранты.

Теорема 1.8*. Для того чтобы мажоранта $v(z)$ класса K_Φ субгармонических функций была конечна, необходимо и достаточно, чтобы степени функций класса были ограничены в совокупности и выполнялось условие

$$M = \sup_{g \in K_\Phi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt \right\} < \infty \quad \blacktriangle \quad (1.30)$$

Доказательство. Необходимость первого условия следует из теоремы 1.5. Кроме того, если мажоранта $v(z)$ — конечна, то каждая из функций класса K_Φ имеет положительную гармоническую в C_+ (и C_-) мажоранту $\tilde{g}(z) \leq v(z)$. Но по теореме 1.6

$$\tilde{g}(i) - \sigma \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt,$$

и поэтому для всех функций класса K_Φ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt \leq v(i) - \sigma_v,$$

где σ_v — степень функции $v(z)$.

Достаточность непосредственно следует из замечания к теореме 1.6. Действительно, в силу (1.24) получаем при $0 < \delta < 1$ и $|z - i| < \delta$ оценку

$$g(z) \leq C_\delta \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt + \sigma \right) \leq C_\delta (M + \sigma),$$

в которой C_δ — постоянная. Таким образом, в δ -окрестности точки i имеется оценка $\tilde{g}(z) \leq C_\delta (M + \sigma)$, из которой следует $v(i) \leq C_\delta (M + \sigma)$ ■

* Этот критерий аналогичен критерию Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна, относящемуся к вопросу о полноте множества полиномов в пространстве непрерывных функций с весом $\varphi(x)$ [8].

Замечание. Если функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt < \infty, \quad (1.31)$$

то выполняется условие (1.30). Таким образом, при ограниченности множества степеней функций класса K_φ , условие (1.31) является достаточным условием конечности мажоранты $v(z)$ ▲

Приведем еще один критерий конечности мажоранты.

Теорема 1.9*. Для того чтобы мажоранта $v(z)$ класса K_φ была конечна, необходимо и достаточно, чтобы степени всех функций класса K_φ были ограничены в совокупности и выполнялось условие

$$M_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(t)}{1+t^2} dt < \infty, \quad (1.32)$$

где $\hat{g}(z) = \sup_{g \in K_\varphi} g(z)$ ▲

Доказательство. Заметим, прежде всего, что по теореме А. Картана всюду в плоскости, за исключением, быть может, множества нулевой емкости, $\hat{g}(z) = v(z)$. Поэтому в (1.32) M_φ не изменится, если заменить $\hat{g}(t)$ на $v(t)$.

Необходимость условия (1.32) следует из представления (1.26) мажоранты и получается подстановкой $z = i$. Ограниченность всех степеней функций класса K_φ следует из теоремы 1.5.

Достаточность получается, если заметить, что из (1.32) следует (1.30) ■

Кривую $y = \hat{g}(x)$ будем называть оболочкой кривой $y = \varphi(x)$ для класса K_φ .

Замечание 1. Если $\varphi(x)$ — выпуклая функция от $\ln|x|$, а класс K_φ содержит все линейные функции от $\ln|z|$, подчиненные условию (1.2), то оболочка кривой $y = \varphi(x)$ совпадает с $\varphi(x)^{**}$.

Для доказательства проведем в произвольной точке с абсциссой x_0 кривой $y = \varphi(x)$ опорную прямую $y = k \ln|x| + l$. Функция $g(z) = k \ln|z| + l$ принадлежит K_φ , и в точке x_0 имеем $g(x_0) = \varphi(x_0)$. Поэтому $\hat{g}(x) = \varphi(x)$ всюду на $\mathbf{R}$.

Из этого замечания и теоремы 1.9 непосредственно следует

Замечание 2. Если функция $\varphi(x)$ и класс K_φ удовлетворяют условиям замечания 1 и $K_\varphi \equiv K_\varphi^\sigma$ при некотором $\sigma \geq 0$, то условие (1.31) является необходимым и достаточным для конечности мажоранты $v(z, K_\varphi)$ ▲

Из определения функции $\hat{g}(z)$, конечно, следует, что $\hat{g}(x) \leq \varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$). Однако после регуляризации неравенство $v(x) \leq \varphi(x)$ выполняется не обязательно даже в случае конечности мажоранты $v(z)$. Поэтому представляет интерес следующая теорема.

* Эта теорема аналогична теореме С. Н. Мергеляна о мажоранте Холла [9].

** Очевидно, в этом случае $\varphi(x)$ — четная функция от x .

Теорема 1.10. Если мажоранта $v(z)$ класса K_Φ конечна и функция $\varphi(x)$ — полунепрерывная сверху в некоторой точке x_0 , то $v(x_0) \leq \varphi(x_0)$ ▲

Доказательство. Из полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ в некотором интервале $|x - x_0| < \delta$, ($\delta = \delta(\varepsilon)$) выполняется неравенство $\varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon$. Из равенства (1.25) легко получается, что все функции $g(z) \in K_\Phi^\sigma$ удовлетворяют следующей оценке:

$$g(z) \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{\varphi(t) + \varepsilon}{|t - z|^2} dt + \frac{|y|}{\pi} \int_{|t - x_0| > \delta} \frac{v(t)}{|t - z|^2} dt + \sigma |y|.$$

В круге $|z - x_0| < \gamma$ при γ достаточно малом сумма всех слагаемых, кроме первого, меньше ε , и, следовательно, в этой окрестности $g(z) < \varphi(x_0) + 2\varepsilon$. Поэтому $\hat{g}(z) \leq \varphi(x_0) + 2\varepsilon$ и $v(x_0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{|z - x_0| < \gamma} \times g(z) \leq \varphi(x_0) + 2\varepsilon$. Отсюда, конечно, следует $v(x_0) \leq \varphi(x_0)$ ■

Обратим внимание на важное следствие из этой теоремы.

Следствие. Если функция $\varphi(x)$ полунепрерывна сверху всюду, где она конечна, и если мажоранта $v(z)$ класса K_Φ^σ конечна, то $v(z) \in K_\Phi^\sigma$ ▲

Заметим, что требование полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ существенно. Действительно, если выбрать $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 1$ при $0 < |x| < 1$ и $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$ при $|x| > 1$, то условие (1.31) будет выполнено, и функция $v(z)$ конечна. Кроме того, субгармонические функции $g(z) = |z|^\alpha$, ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$), очевидно, принадлежат K_Φ^σ при любом $\sigma \geq 0$. Устремляя α к нулю, получаем, что в области $0 < |z| \leq 1$ выполняется равенство $g(z) = 1$ и, следовательно, $v(0) = 1$, в то время как $\hat{g}(0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится теорема более сильная, чем теорема 1.10. Для того чтобы ее сформулировать, введем понятие о регулярной точке множества.

Пусть E — некоторое замкнутое множество на вещественной оси. Точка $x_0 \in E$ называется регулярной точкой этого множества, если существует такой круг $K_\delta(x_0) = \{z : |z - x_0| < \delta\}$, что на множестве $K_\delta(x_0) \setminus E$ имеется гармоническая функция $\gamma(z)$, принимающая предельное значение, равное единице на окружности $C_\delta(x_0) = \{z : |z - x_0| = \delta\}$, и предельное значение, равное нулю в точке x_0 , притом такая, что $0 < \gamma(z) < 1^*$.

Теорема 1.11. Пусть функция $\varphi(x)$ конечна на некотором замкнутом множестве E , пусть все лебеговы множества $E_\varepsilon(x_0) = \{x : \varphi(x) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon\}$, ($\varepsilon > 0$) замкнуты и точка x_0 является

* Это определение эквивалентно тому, которое обычно принимается в теории потенциала.

регулярной точкой каждого такого множества. Если при этом мажоранта $v(z)$ класса K_φ конечна, то $v(x_0) \leq \varphi(x_0)$ ▲

Доказательство. Из полунепрерывности функции $v(z)$ сверху следует, что она ограничена сверху на любом компакте. Поэтому $\sup_{z \in C_\delta(x_0)} v(z) = M_\delta < \infty$. Так как x_0 является регулярной точкой

множества $E_\varepsilon(x_0)$, то существует гармоническая в $\Omega_{\delta,\varepsilon} = K_\delta(x_0) \setminus E_\varepsilon(x_0)$ функция $\gamma_{\varepsilon,M}(z)$, принимающая в точке x_0 значение $\varphi(x_0) + \varepsilon$, на окружности $C_\delta(x_0)$ значение M_δ и всюду в области $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ $\varphi(x_0) + \varepsilon < \gamma_{\varepsilon,M}(z) < M_\delta$. Эта функция мажорирует на $E_\varepsilon(x_0)$ и на $C_\delta(x_0)$ любую функцию класса K_φ , и поэтому всюду в $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ имеем $g(z) \leq \gamma_\varepsilon(z)$. Отсюда получается, что $\hat{g}(z) \leq \gamma_\varepsilon(z)$ и, следовательно, $v(x_0) \leq \gamma_\varepsilon(x_0) = \varphi(x_0) + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем нужное неравенство ■

Следствие 1. Если функция $\varphi(x)$ конечна на замкнутом множестве E и полунепрерывна сверху на этом множестве в некоторой регулярной точке x_0 этого множества, а мажоранта $v(z)$ конечна, то $v(x_0) \leq \varphi(x_0)$ ▲

Действительно, из полунепрерывности функции $\varphi(x)$ сверху в точке x_0 следует, что на некотором отрезке $I_\delta = \{x: |x - x_0| \leq \delta\}$ множества $E_\varepsilon(x_0)$ и E совпадают, т. е. выполняются условия теоремы 1.11.

Следствие 2. Если функция $\varphi(x)$ конечна и полунепрерывна снизу в каждой точке замкнутого множества E и некоторая точка x_0 является регулярной для всех лебеговых множеств $E_\varepsilon(x_0)$, то в этой точке $v(x_0) \leq \varphi(x_0)$ ▲

Для доказательства достаточно заметить, что лебеговы множества $E_\varepsilon(x_0)$ полунепрерывной снизу функции замкнуты, и сослаться на теорему 1.11 ■

В заключение этого раздела заметим, что вместо мажорант классов K_φ^σ можно рассматривать мажоранты каких-нибудь подклассов K_φ^σ , например, подкласс функций вида $g(z) = \ln |E(z)|$, где $E(z)$ — целая функция конечной степени $\leq \sigma$. Назовем этот класс $K_\varphi^\sigma(E)$.

Следующий пример указывает на различие между мажорантами класса K_φ^σ и класса $K_\varphi^\sigma(E)$. Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — последовательность вещественных чисел и $x_n \rightarrow \infty$. Пусть $\varphi(x_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\varphi(x) = +\infty$ при $x \neq x_n$. Можно считать, что числа x_n перенумерованы в порядке возрастания их модулей. Тогда ряд

$$g(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \ln \left| 1 - \frac{z}{x_n} \right|$$

сходится при всех $z \neq x_n$, представляет субгармоническую функцию и $g(z) \leq 0$ ($\ln |z|$). При $N > 0$ функция $g_N(z) = N g_+(z) \in K_\varphi^\sigma$ при любом $N > 0$. Очевидно, что $g_N(i) > 0$ и, в силу произвольности $N > 0$, можно утверждать, что $v(z) \equiv \infty$.

Если же рассматривать класс $K_{\varphi}^{\sigma}(E)$ при $x_{2n} = n$, $x_{2n+1} = -n$ ($n = 0, 1, \dots$) и $\sigma < \pi$, то по известной теореме М. Картрайт* из неравенств $|E(x_n)| \leq 1$ следует $|E(x)| \leq c(\sigma) < \infty$ при $-\infty < x < \infty$ и, как легко видеть, из неравенства $v_{\varphi, \varepsilon}^{\sigma}(z) \leq \ln c(\sigma) + \sigma |y|$ следует конечность мажоранты $v_{\varphi, \varepsilon}^{\sigma}(z)$ для класса $K_{\varphi}^{\sigma}(E)$.

Интересно еще сравнить мажоранту $v_{\varphi, \varepsilon}^{\sigma}(E)$ с мажорантой Холла [9] $M_{\varphi}(z) = v_{\varphi, \rho}(z)$, где за подкласс $K_{\varphi, \rho}$ выбраны функции вида $\ln |P(z)|$ ($P(z)$ — полином).

Выберем для этого сравнения функцию $\varphi(x)$ так: $\varphi(2^n) = 0$ и $\varphi(x) = +\infty$ при $x \neq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда весь класс $K_{\varphi, \rho}$ состоит из одной функции $P(x) \equiv 0$ и $M_{\varphi}(z) = 0$. С другой стороны, выбрав целую функцию

$$E(z) = \prod_0^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$$

нулевой степени ($\sigma = 0$), убедимся в том, что при любом натуральном N функция $N \ln^+ |E(z)| \in K_{\varphi}^0(E)$. Из произвольности натурального N следует, что $v_{\varphi, E}^0(z) \equiv \infty$. Более тонкий пример принадлежит И. О. Хачатряну [10], который показал, что при $\varphi(x) = x^{\rho_1}$ ($x \geq 0$), $\varphi(x) = x^{\rho_2}$ ($x < 0$) и $0 < \rho_1 < \frac{1}{2} < \rho_2 < 1$ обе мажоранты $v_{\varphi, E}^0(z)$ и $v_{\varphi, \rho}(z)$ конечны, но не совпадают.

Список литературы: 1. Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1960. С. 125—183. 2. Левин Б. Я. Субгармонические мажоранты и их приложения // Тез. докл. на Всесоюз. конф. по теории функций. ФТИНТ АН УССР. 1971. С. 117—120. 3. Левин Б. Я. Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. Х., 1984. С. 1—52. (Препринт ФТИНТ 18—84 и 19—84). 4. Кусис П. La plus petite majorante Surharmonique // Annales de l'Institut Fourier de Grenoble. 1983. 33. S. 110—118. 5. Крейн М. Г. Основные положения теории представления операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. 1949. 2, № 1. С. 3—65. 6. Хейман У. Questions of regularity connected with the phragmen—Lindelöf principle // J. Math. Pures et appl. 1956. 35, № 2. P. 1—123. 7. Азарин В. С. Обобщение одной теоремы Хеймана на субгармонические функции в n -мерном конусе // Мат. сб. 1965. 66(108), № 2. С. 248—264. 8. Ахиезер Н. И. О взвешенном приближении непрерывных функций на всей числовой оси // Успехи мат. наук. 1956. № 4. С. 3—43. 9. Мергелян С. Н. Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. 1956. 11, № 5. С. 107—152. 10. Хачатрян И. О. О взвешенном приближении целых функций нулевой степени полиномами на действительной оси // Уч. зап. Харьк. ун-та, мех.-мат. ф-т. 1963. Сер. 4. 135. Вып. 29. С. 129—142. 11. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с.

Поступила в редколлегию 27.01.88

* См., например, [11]. С. 269—271.

**К ВОПРОСУ О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
КЛАССУ I_0**

В 1957 г. Ю. В. Линник [1, 2] установил необходимые условия принадлежности классу I_0 законов распределения (з. р.) с гауссовой компонентой. Подробно определения и историю вопроса см. в работе [3]. Оказалось, что если з. р. F с гауссовой компонентой принадлежит классу I_0 , то он принадлежит классу L Ю. В. Линника, т. е. его характеристическая функция (х. ф.) имеет вид

$$\varphi(t; F) = \exp \left\{ i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, \quad (1)$$

где $\beta \in R^1$, $K(t, x) = e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}$, $G(x)$ — неубывающая ограниченная функция скачков со скачками во множестве вида $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\mu_{n1} > 0$, $\mu_{n2} < 0$, причем $\mu_{n+1,j}/\mu_{nj}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, $j = 1, 2$ — натуральные числа, отличные от единицы. Позднее А. Е. Фрынтов [4] показал, что результат Ю. В. Линника сохраняет силу для з. р. F с х. ф. вида (1), в котором произвольная неубывающая ограниченная функция $G(x)$ удовлетворяет условиям для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \int_{1/r}^{(1+\varepsilon)/r} x^{-2} dG(x) > 1,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \int_{-(1+\varepsilon)/r}^{-1/r} x^{-2} dG(x) > 1.$$

Чтобы сформулировать полученный в работе результат, заметим, что з. р. F , принадлежащий классу I_0 , является в силу теоремы А. Я. Хинчина безгранично делимым, т. е. его х. ф. имеет вид (1) с произвольной неубывающей ограниченной функцией $G(x)$. Рассмотрим следующие х. ф. $\varphi_+(t)$, $\varphi_-(t)$, которые строятся по х. ф. $\varphi(t, F)$ з. р. F :

$$\varphi_+(t) = \exp \left\{ \int_{-0}^{+\infty} K(t, x) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\},$$

$$\varphi_-(t) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+0} K(t, x) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}.$$

Теорема 1. Пусть з. р. $F \in I_0$ и пусть х. ф. $\varphi_+(t)$, $\varphi_-(t)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln(-\ln|\varphi_{\pm}(t)|))/\ln t > \alpha > 0. \quad (2)$$

Тогда з. р. $F \in L$.

Из этой теоремы следует результат Ю. В. Линника и результат А. Е. Фрынтова. Все же наиболее существенным обстоятельством является тот факт, что, пользуясь основными идеями Ю. В. Линника, удалось сильно сократить доказательство, которое у Ю. В. Линника занимает главу в монографии [3].

Доказательство теоремы 1 опирается на вспомогательные результаты. Потребуем дополнительно от з. р. F , удовлетворяющего условиям теоремы 1, чтобы существовали числа $0 < \beta < 1$, $\mu, \zeta > 0$ ($\max(\mu, \zeta) < \beta/2$) и $\tilde{c} > 0$ такие, что при всех достаточно малых $h' > 0$ выполняются неравенства

$$G(-\mu + h') - G(-\mu) > \tilde{c}h', \quad G(\zeta + 0) - G(\zeta - h') > \tilde{c}h', \\ G(\beta + 0) - G(\beta - h') > \tilde{c}h', \quad G(1 + 0) - G(1 - h') > \tilde{c}h'. \quad (3)$$

Пусть h , $0 < h < \frac{1}{2} \min(\mu, \zeta)$, такое, что для всех $h' \leq h$ выполняется условие (3). Потребуем также, что если точка β — рациональная, т. е. $\beta = m/n$, m, n — натуральные взаимно простые числа, то $m \neq 1$, а n — достаточно велико, $n \geq c$. Через c здесь и в дальнейшем обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от функции $G(x)$, чисел $\beta, \mu, \zeta, \alpha, h$ и возникающей в теореме 3 функции $f_1(t)$.

Обозначим

$$f(t) = \int_{\beta-h}^{\beta+0} (e^{itx} - 1) dG(x) + \int_{1-h}^{1+0} (e^{itx} - 1) dG(x), \\ \varphi(t) = \exp \left\{ \int_{-a-0}^{b+0} K(t, x) x^{-2} dG(x) \right\},$$

где $a = b = 0$, если $\gamma = G(+0) - G(0) > 0$, и $a = \mu$, $b = \zeta$, если $\gamma = 0$, через $M\{\beta, 1\}$ обозначим минимальную группу, содержащую точки β и 1. Сформулируем и докажем первый вспомогательный результат.

Теорема 2. Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1 и дополнительно соотношениям (3). Тогда для каждой точки $v \in M\{\beta, 1\}$, $0 < v < 10^{-2} \alpha \beta a_0^*$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $\varphi(t) = \hat{\varphi}(t) \exp\{f(t) - \varepsilon(e^{ivt} - 1)\}$ является х. ф. некоторого з. р.

Доказательство. Функция $\hat{\varphi}(t)$ является целой функцией и для $t = u + i\sigma$, $u, \sigma \in \mathbb{R}^1$, при достаточно больших по модулю σ , $|\sigma| \geq c$, и $|u| \geq 1$ имеет место оценка $|\varphi(u + i\sigma)| \leq \hat{\varphi}(i\sigma) \exp \times \times (-c_0 |u|^\alpha)$ (4), где $c_0 = \gamma/2$, если $\gamma > 0$, и $c_0 = 1$, если $\gamma = 0$.

* $a_0 = a$, если $a > 0$, и $a_0 = 1$, если $a = 0$.

Докажем оценку (4), для определенности полагая $\sigma > 0$. При $\sigma < 0$ она доказывается аналогично. В силу соотношения (2), в котором можно считать $\alpha < 2$, имеет место оценка для $|u| \geq u_0 = u_0(\varphi, \alpha)$:

$$|\hat{\varphi}(u + i\sigma)| = \hat{\varphi}(i\sigma) \exp \left\{ -2 \int_{-a-0}^{b+0} e^{-\sigma x} x^{-2} \sin^2 \frac{ux}{2} dG(x) \right\} \leq \\ \leq \hat{\varphi}(i\sigma) \exp \left\{ -2 \int_{-a-0}^{+0} x^{-2} \sin^2 \frac{ux}{2} dG(x) \right\} \leq \hat{\varphi}(i\sigma) e^{-c_0 |u|^\alpha},$$

доказывающая (4) при $|u| \geq u_0$. Если $\gamma > 0$, то оценка (4), очевидно, имеет место для всех u , $\sigma \in \mathbb{R}^1$ с $\alpha = 2$. Пусть $\gamma = 0$. В этом случае в силу условия (2) существует число $u_1 = u_1(\hat{\varphi}, \alpha) \geq u_0 + 2/a$ такое, что $G(-1/u_1) - G(-2/u_1) > 0$. Учитывая это неравенство и неравенство $\sin u \geq 2u/\pi$, $0 \leq u \leq \pi/2$, заключаем для $|u| \leq u_0$ и достаточно больших $\sigma \geq \sigma_0(\hat{\varphi}, \alpha)$:

$$\int_{-a-0}^{+0} e^{-\sigma x} x^{-2} \sin^2 \frac{ux}{2} dG(x) \geq e^{\sigma/u_1} \int_{-2/u_1}^{-1/u_1} x^{-2} \sin^2 \frac{ux}{2} dG(x) \geq \\ \geq \frac{1}{\pi^2} e^{\sigma/u_1} \{G(-1/u_1) - G(-2/u_1)\} u^2 \geq |u|^\alpha.$$

Последнее неравенство приводит к нужной оценке (4) для $1 \leq |u| \leq u_0$.

Обозначим через $p_\varepsilon(x)$ функцию

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Из вида функции $\varphi(t)$ и оценки (4) непосредственно усматриваем, что по теореме Коши контур интегрирования в (5) можно перенести на любую горизонтальную прямую. Отсюда

$$p_\varepsilon(x) = \varphi(-i\sigma) e^{-\sigma x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(u, x) du, \quad (6)$$

где

$$R(u, x) = e^{-iux} \varphi(u - i\sigma) / \varphi(-i\sigma),$$

а параметр $\sigma = \sigma_0$ для $|x| > c$ выбирается из условия $\frac{d}{d\sigma} \{\ln \varphi \times \times (-i\sigma) - \sigma x\} = 0$ (7). Очевидно, для достаточно больших $|x| > c$ уравнение (7) имеет единственное решение и это решение $\sigma_0 \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и $\sigma_0 \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$. Наша ближайшая задача — показать, что для $|x| > c$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$.

Рассмотрим на вещественной прямой множества $D_0 = \{u : |u| \leq \pi\}$, $D_k = \{u : |u - 2\pi qk| \leq \pi/4\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; $c \leq q \leq$

$\leq e^{6\nu\sigma_0/\alpha}$. Параметр q , как и σ_0 , зависит, вообще говоря, от x и его выбор будет сделан ниже. Сразу отметим, что для $x > 0$ q — натуральное число, а для $x < -c$ в случае $a > 0$ $q = 1/a$.

1. Оценки функции $R(u, x)$ на множестве D_0 . Используя неравенство $|\sin u/u| \leq 1$, $u \in \mathbb{R}^1$, получаем для $u \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned} -\ln |R(u, x)| &= 2 \int_{-a-0}^{b+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} s^{-2} dG(s) - 2\epsilon e^{\nu\sigma_0} \times \\ &\times \sin^2 \frac{\nu u}{2} + 2 \int_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) + 2 \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{-a-0}^{b+0} + \int_{\beta-h}^{\beta+0} + \int_{1-h}^{1+0} \right) e^{\sigma_0 s} dG(s) u^2 = \frac{1}{2} \delta(\sigma_0) u^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ $|\sin u| \geq \frac{2}{\pi} |u|$, поэтому для $u \in D_0$ имеем с учетом условия (3)

$$\begin{aligned} -\ln |R(u, x)| &\geq \frac{2u^2}{\pi^2} \int_{-a-0}^{b+0} e^{\sigma_0 s} dG(s) + \frac{\beta^2 u^2}{\pi^2} \int_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \times \\ &\times dG(s) + \frac{u^2}{\pi^2} \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} dG(s) \geq \beta^2 \delta(\sigma_0) u^2 / \pi^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция $\operatorname{Im} \ln R(u, x)$ — нечетная, поэтому ее значение и значение второй ее производной в нуле равно 0. Так как σ_0 удовлетворяет уравнению (7), то и значение первой производной $\operatorname{Im} \ln R(u, x)$ в точке нуль равно 0. Для $u \in \tilde{D}_0 = \{u : |u| \leq (\delta(\sigma_0))^{-5/12}\}$ получаем из формулы Тейлора представление

$$\operatorname{Im} \ln R(u, x) = \frac{1}{3!} (\operatorname{Im} \ln R(v, x))^{(3)}|_{v=\theta u} u^3, \quad 0 < \theta < 1.$$

Из определения функции $\operatorname{Im} \ln R(u, x)$ легко следует такая ее оценка для $u \in \tilde{D}_0$:

$$\begin{aligned} |(\operatorname{Im} \ln R(v, x))^{(3)}|_{v=\theta u}| &\leq \int_{-a-0}^{b+0} |s| e^{\sigma_0 s} dG(s) + \epsilon \nu^3 e^{\nu\sigma_0} + \\ &+ |f^{(3)}(-i\sigma_0)| \leq 2\delta(\sigma_0). \end{aligned}$$

Тогда из предыдущего представления следует неравенство для $u \in \tilde{D}_0$ $|\operatorname{Im} \ln R(u, x)| \leq \frac{1}{3} (\delta(\sigma_0))^{-1/4} \leq \pi/3$ (10).

2. Оценки функции $R(u, x)$ на множествах D_k , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Начиная с этого пункта, считаем $x > c$. Дальнейшие рассуждения

будем вести при условии, что параметр q подобран так, чтобы выполнялись для $u \in D_k$, $k \neq 0$, $|u| < \exp\{\nu\sigma_0/\alpha\}$, неравенства

$$\sin^2 \frac{\nu u}{2} \leq (u - 2\pi qk)^2 + e^{-2\nu\sigma_0}. \quad (11)$$

Обозначим $w = u - 2\pi qk$. Для $u \in D_k$ с учетом неравенств (4), (11) имеем

$$\begin{aligned} -\ln |R(u, x)| &\geq c_0 |u|^\alpha - 2\varepsilon \{w^2 + e^{-2\nu\sigma_0}\} e^{\nu\sigma_0} + \\ &+ 2 \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) \geq c_0 |u|^\alpha - 1 - 2\varepsilon w^2 e^{\nu\sigma_0} + \\ &+ 2 \int_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \left\{ \pi qk(s-1) + \frac{ws}{2} \right\} dG(s). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим теперь, что для $s \in [1 - (4|k|q)^{-1}, 1]$ $|\pi qk(s-1) + ws/2| \leq \pi/2$, поэтому

$$\sin^2 \{ \pi qk(s-1) + ws/2 \} \geq \frac{4}{\pi^2} \{ \pi qk(s-1) + ws/2 \}^2. \quad (13)$$

Поскольку с учетом (3) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \int_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \left\{ \pi qk(s-1) + \frac{ws}{2} \right\}^2 dG(s) &\geq e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \times \\ &\times \int_{1-|w|/(4|k|q\pi)}^{1+0} \frac{1}{16} w^2 s^2 dG(s) \geq c e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \frac{|w|^3}{|k|q} \end{aligned}$$

и для $u \in D_k$, $|k| \geq 1$, $|u| \leq e^{\nu\sigma_0/\alpha}$ выполняется неравенство

$$c_0 |u|^\alpha + c e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \frac{|w|^3}{|k|q} \geq 4\varepsilon w^2 e^{\nu\sigma_0} + 2,$$

поэтому для функции $R(u, x)$ для рассматриваемых u из (12), (13) получаем оценку

$$\begin{aligned} -\ln |R(u, x)| &\geq \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha + \frac{4}{\pi^2} \int_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \left\{ \pi qk(s-1) + \right. \\ &\left. + \frac{ws}{2} \right\}^2 dG(s) = \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha + Aw^2 + Bw + C, \end{aligned} \quad (14)$$

где $Aw^2 + Bw + C$ — неотрицательный для всех $w \in R^1$ полином, в котором коэффициент

$$A = \frac{1}{\pi^2} \int_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} s^2 e^{\sigma_0 s} dG(s) \geq \frac{1}{2\pi^2} \int_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s} dG(s) = \hat{I}/(2\pi^2).$$

Для k , $1 \leq |k| \leq \sigma_0/(16q \ln \sigma_0)$ интеграл I запишем в виде

$$I = \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} dG(s) - \int_{1-h}^{1-(4|k|q)^{-1}} e^{\sigma_0 s} dG(s) = I_1 - I_2.$$

В силу условия (3) первый интеграл этого равенства

$$I_1 \geq \int_{1-1/\sigma_0}^{1+0} e^{\sigma_0 s} dG(s) \geq c \sigma_0^{-1} e^{\sigma_0}.$$

Для второго интеграла выполняется

$$I_2 \leq \int_{1-h}^{1-4|k|q/\sigma_0} e^{\sigma_0 s} dG(s) \leq c \sigma_0^{-4} e^{\sigma_0}.$$

Сравнивая последние два неравенства, для указанных выше k имеем оценку

$$\tilde{I} \geq \frac{1}{4} f(-i\sigma_0). \quad (15)$$

Для k , $|k| \geq \sigma_0/(16q \ln \sigma_0)$ получаем с помощью условия (3)

$$\tilde{I} \geq c e^{\sigma_0 (1-(4|k|q)^{-1})} (|k|q)^{-1} \geq c e^{\sigma_0} (|k|q)^{-5} \geq f(-i\sigma_0) (|k|q)^{-6}. \quad (16)$$

В конце этого пункта отметим такую простую оценку, которой будем пользоваться для $|u| \geq \exp\{\nu\sigma_0/\alpha\}$:

$$-\ln |R(u, x)| \geq c_0 |u|^\alpha - 2\varepsilon e^{\nu\sigma_0} \geq \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha. \quad (17)$$

3. Выбор параметра q . Конкретизируем ситуацию, т. е. в случае, когда точка β — рациональная или иррациональная, укажем выбор множеств D_k , $|k| \geq 1$, с некоторым q , вообще говоря, зависящим от x так, чтобы выполнялось соотношение (11). После такой конкретизации продолжим оценку функции $R(u, x)$ вне множества $\Gamma^0 \cup C\Gamma_x$, где множества Γ^0 и Γ_x определяются следующим образом:

$$\Gamma_x = \{u : |u| \leq e^{\nu|\sigma_0|/\alpha}\}, \quad \Gamma^0 = \Gamma_x \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k.$$

Если точка β — рациональная, т. е. $\beta = m/n$, m, n — взаимно простые натуральные числа, то в качестве q при образовании множеств D_k берем $q = n$.

Если точка β — иррациональная, то, как хорошо известно из теории цепных дробей, для любого $\tau > 1$ можно указать рациональное число m/n (m, n — взаимно простые натуральные числа), что выполняется

$$\beta = mn^{-1} + \theta n^{-1}\tau^{-1}, \quad |\theta| \leq 1, \quad n \leq \tau. \quad (18)$$

В нашем случае в качестве τ возьмем $\tau = \exp\{6\nu\sigma_0/\alpha\}$ и по нему укажем $m = m(x)$ и $n = n(x)$. При этом при образовании множеств D_k берем $q = n = n(x)$.

То, что при таком выборе q условие (11) выполняется, проверим чуть ниже. Пока выясним, в каком множестве содержатся точки $u \in \Gamma_x$, для которых

$$\begin{aligned} f(-i\sigma_0) - \operatorname{Re} f(u - i\sigma_0) &= 2 \int_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) + \\ &+ 2 \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) \leq \exp(v\sigma_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, что те $u \in \Gamma_x$, для которых выполняется (19), удовлетворяют соотношениям

$$\left| \sin \frac{u}{2} \right| \leq \exp \left\{ -\sigma_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{v}{\alpha} \right) \right\} = \xi, \quad (20)$$

$$\left| \sin \frac{\beta u}{2} \right| \leq \exp \left\{ -\sigma_0 \left(\frac{1}{3} \beta - \frac{v}{\alpha} \right) \right\} = \eta. \quad (21)$$

Действительно, если бы не выполнялось (20), т. е. $\left| \sin \frac{1}{2} u \right| > \xi$, то при s , $0 \leq 1-s \leq \xi \exp(-v\sigma_0/\alpha) = \xi_1$ и $u \in \Gamma_x$ получаем с помощью формулы Тейлора неравенство $|\sin \{u(1+(s-1))/2\}| > \xi/2$. Из него с учетом (3) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} dG(s) &\geq \int_{1-\xi_1}^{1+0} \frac{1}{4} \xi^2 e^{\sigma_0 s} dG(s) \geq \\ &\geq c \xi^3 e^{\sigma_0 - v\sigma_0/\alpha} \geq c e^{2v\sigma_0/\alpha}, \end{aligned}$$

которая при достаточно больших $x \geq c$ противоречит (19). Аналогично доказывается соотношение (21).

4. Оценка функции $f(u - i\sigma_0)$ на множестве $\Sigma\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ для рационального β . В этом случае $v = m_1/n$, $m_1 \in N$, и условие (11), очевидно, выполнено. Из соотношений (20), (21) следует, что $u = 2\pi k_1 + B_1 \xi$, $\frac{m}{n} u = 2\pi k_2 + B_2 \eta$, $|B_j| \leq 2$ (22). Числа m, n — взаимно простые, поэтому найдутся взаимно простые целые числа $\tilde{m}, \tilde{n}$, $|\tilde{m}| < n$, $|\tilde{n}| < m$, что $m\tilde{m} + n\tilde{n} = 1$. Умножая первое из соотношений (22) на $\tilde{n}n$, а второе — на $\tilde{m}n$ и складывая их, получаем $u = 2\pi q(k_1 \tilde{n} + k_2 \tilde{m}) + (B_1 \tilde{n} \xi + B_2 \tilde{m} \eta) q$. Отсюда видно, что для $x \geq c$ множество тех $u \in \Gamma_x$, для которых выполнено неравенство (19), содержится во множестве Γ^0 . Значит, для $u \in \Sigma\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ выполняется $f(-i\sigma_0) - \operatorname{Re} f(u - i\sigma_0) > \exp(v\sigma_0)$ (23).

5. Оценка функции $f(u - i\sigma_0)$ на множестве $\Sigma\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ для иррационального β . Проверим сначала выполнение условия (11). Так как $v \in M\{\beta, 1\}$, то $v = p_1 \beta + p_2$, где p_1, p_2 — целые числа. Поэтому число v представимо в виде

$$v = p_1(mn^{-1} + \theta n^{-1} \tau^{-1}) + p_2 = (p_2 n + p_1 m) q^{-1} + p_1 \theta q^{-1} \tau^{-1}.$$

Пусть $u \in D_k \cap \Gamma_x$, т. е. $u = 2\pi qk + \tau$, $|\omega| \leq \pi/4$, $|k| \leq e^{\nu\sigma_0/\alpha}$, тогда имеем

$$\sin^2 \frac{\nu u}{2} = \sin^2 \left(\pi p_1 \theta k \tau^{-1} + \frac{\omega \nu}{2} \right) \leq \omega^2 + e^{-2\nu\sigma_0},$$

что и требовалось показать.

Вернемся к соотношениям (20), (21) для $u \in \Gamma_x$. Для чисел $u \in \Gamma_x$ им удовлетворяющих с учетом представления (18) числа β получаем

$$u = 2\pi k_1 + B_1 \xi, \quad \frac{m}{n} u = 2\pi k_2 + B_2 \eta + \frac{\theta u}{\pi \tau}, \quad |B_j| \leq 2. \quad (24)$$

Отсюда так же, как и в пункте 4, приходим к представлению

$$u = 2\pi q(k_1 \tilde{n} + k_2 \tilde{m}) + (B_1 \tilde{n} \xi + B_2 \tilde{m} \eta) q + \frac{\theta \tilde{m} u}{\tau}. \quad (25)$$

Пусть $q < \exp(4\nu\sigma_0/\alpha)$ и $u \in \Gamma_x$, тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |B_1 \tilde{n} \xi + B_2 \tilde{m} \eta| q + \frac{\theta \tilde{m} |u|}{\tau} &\leq c \left(q^2 \eta + \frac{q |u|}{\tau} \right) \leq \\ &\leq c \left(\exp \left\{ -\sigma_0 \left(\frac{1}{3} \beta - \frac{9\nu}{\alpha} \right) \right\} + \exp \left(-\frac{\nu\sigma_0}{\alpha} \right) \right). \end{aligned}$$

Эта оценка в применении к (25) показывает, что рассматриваемые u лежат во множестве Γ^0 . Значит, вне Γ^0 для рассматриваемых u выполнено неравенство (23).

Пусть $q \geq \exp(4\nu\sigma_0/\alpha)$ и $u \in \Gamma_x$, т. е. $|u| \leq q^{1/4}$. Деля обе части равенства (25) на q , получаем $k_1 \tilde{n} + k_2 \tilde{m} = 0$. Поскольку $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$ взаимно просты, имеем отсюда $k_1 = k_3 \tilde{m}$, $k_2 = -k_3 \tilde{n}$, $k_3 \in \mathbb{Z}$. Если $|\tilde{m}| \geq q^{2/3}$, то, деля обе части первого из равенств (24) на $\tilde{m}$, получаем $k_3 = 0$ и числа $u \in D_0$. Если $|\tilde{m}| < q^{2/3}$, то принадлежность $u \in D^0$ следует, как легко видеть, из соотношения (25). Значит, и в этом случае рассматриваемые u принадлежат множеству Γ^0 и вне $\Gamma^0 \cup C\Gamma_x$ выполнено неравенство (23).

6. Оценки интегралов от функции $R(u, x)$, $x > c$. Обозначим через $I(S, R)$ — интеграл от функции $R(u, x)$ по множеству S . Оценим сначала снизу $I(D_0, R)$. Для этого воспользуемся неравенствами (8) — (10). Получаем

$$\begin{aligned} I(D_0, R) &\geq I(\tilde{D}_0, R) - |I(D_0 \setminus \tilde{D}_0, R)| \geq \\ &\geq \int_{\tilde{D}_0} |R(u, x)| \cos \{ \operatorname{Im} \ln R(u, x) \} du - \int_{D_0 \setminus \tilde{D}_0} |R(u, x)| du \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\tilde{D}_0} |R(u, x)| du - \int_{D_0 \setminus \tilde{D}_0} |R(u, x)| du \geq \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{2} \delta(\sigma_0) u^2} du - \\ &- \int_{|u| > (\delta(\sigma_0))^{-5/12}} e^{-\frac{\beta^2}{2\pi^2} \delta(\sigma_0) u^2} du \geq (\delta(\sigma_0))^{-1/2} - \\ &- (\delta(\sigma_0))^{-1/2} e^{-(\delta(\sigma_0))^{1/12}} \geq \frac{1}{2} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для оценки интегралов $I(D_k, R)$, $D_k \subset \Gamma_x$, воспользуемся неравенством (14). Из этого неравенства легко получаем

$$|I(D_k, R)| \leq e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Aw^2 - Bw - C} dw \leq e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2}. \quad (27)$$

Отсюда с помощью оценки (15) и $\delta(\sigma_0) \leq 2f(-i\sigma_0)$ имеем

$$|I(\bigcup_{1 \leq |k| < |\sigma_0|/(16q \ln|\sigma_0|)} D_k, R)| \leq 20(f(-i\sigma_0))^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \leq \leq 40\Gamma(1 + 1/\alpha) c_0^{-1/\alpha} q^{-1} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (28)$$

Из (27) и (16) получаем

$$|I(\Gamma_x \cap \bigcup_{|k| > |\sigma_0|/(16q \ln|\sigma_0|)} D_k, R)| \leq (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \sum_{|k| > |\sigma_0|/(16q \ln|\sigma_0|)} |qk|^4 \times \times e^{-c_0 q^\alpha |k|^\alpha} \leq c e^{-\sigma_0^{\alpha/2}} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leq c e^{-|\sigma_0|^{\alpha/2}} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (29)$$

Из неравенства (17) вытекает оценка

$$|I(C\Gamma_x, R)| \leq \int_{C\Gamma_x} e^{-\frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha} du \leq e^{\frac{1}{4} c_0 e^{v\sigma_0}} \leq \leq e^{-\sigma_0} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leq 2e^{-|\sigma_0|} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (30)$$

Поскольку, как доказано в пп. 4, 5, на множестве $C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ справедливо соотношение (23), то приходим к неравенству

$$|I(C\Gamma^0 \cap \Gamma_x, R)| \leq \int_{C\Gamma^0 \cap \Gamma_x} e^{-\frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha - (1-\varepsilon)e^{v\sigma_0}} du \leq \leq e^{-\sigma_0} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leq 2e^{-|\sigma_0|} (\delta(-i\sigma_0))^{-1/2}. \quad (31)$$

7. Оценки интегралов от функции $R(u, x)$, $x < -c$. Предположим сначала, что $\gamma = G(+0) - G(0) > 0$. Тогда $\hat{\Phi}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t^2\right)$ и для отрицательных $x < -c$ в формуле (6) положим $\sigma_0 = x/2\gamma$. Такой выбор σ_0 проводим только в случае $\gamma > 0$ и $a = b = 0$. Из вида функции $R(u, x)$ непосредственно усматриваем, что оценка (10) для $\text{Im} \ln R(u, x)$ сохраняется для всех $u \in \mathbf{R}^1$. Кроме того, оценка (8) была получена для любых σ_0 и, значит, верна при нашем выборе $\sigma_0 = x/2\gamma$. Учитывая эти два обстоятельства, имеем для $x \leq -c$ и $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$I(\mathbf{R}^1, R) = \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, x)| \cos \{\text{Im} \ln R(u, x)\} du \geq \geq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, x)| du \geq 0.$$

Пусть $\gamma = 0$ и $a = \mu > 0$. В этом случае справедливы оценки (8) — (10) п. 1, доказанные для $|x| \geq c$, и потому верны оценки (26) для $x \leq -c$. При образовании множеств D_k считаем $q = 1/a$. На каждом множестве D_k , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, справедлива оценка

$$-\ln |R(u, x)| \geq \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha + \left(\frac{2}{\pi a}\right)^2 \int_{-a}^{-a(1-(4|k|)^{-1})} e^{\sigma_0 s} \times \\ \times \left\{ \frac{\pi k}{a} (s+a) + \frac{ws}{2} \right\}^2 dG(s) - 1 \geq \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha - 1 + Aw^2 + Bw + C, \quad (32)$$

где $Aw^2 + Bw + C$ — неотрицательный для всех $w \in \mathbb{R}^1$ многочлен, у которого коэффициент A допускает оценки

$$A \geq -\frac{1}{4\pi^2} (\ln \hat{\varphi})^{(2)}(-i\sigma_0), \quad |k| \leq |\sigma_0|/(16q \ln |\sigma_0|), \quad (33)$$

$$A \geq -\frac{1}{\pi^2 |qk|^6} (\ln \hat{\varphi})^{(2)}(-i\sigma_0), \quad |k| > |\sigma_0|/(16q \ln |\sigma_0|). \quad (34)$$

Неравенство (32) является для $x \leq -c$ аналогом неравенства (14), а неравенства (33), (34) являются аналогами неравенств (15), (16) и доказываются они почти дословным повторением рассуждений, приведенных в п. 2. Поэтому для $x \leq -c$ справедливы оценки (28), (29). Для $u \in \Gamma_x$, очевидно, справедлива оценка (17) при $x < -c$, что влечет за собой для таких x оценку (30). Почти дословно повторяя рассуждение п. 3, получаем для $u \in \Gamma^0 \cap \Gamma_x$ и достаточно малых $x < -c$ $\ln \hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \ln |\hat{\varphi}(u - i\sigma_0)| > \exp(v|\sigma_0|)$ (35), что влечет за собой оценку (31). Таким образом, полученные нами оценки интегралов от функции $R(u, x)$ для достаточно больших $x > c$ сохраняет силу и для достаточно малых $x < -c$.

8. Оценки функции $p_\varepsilon(x)$ для больших по модулю x . Покажем теперь, что для $|x| > c$ и малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$. Для этого запишем неравенство:

$$I(R^1, R) \geq I(D_0, R) - |I(\Gamma_x \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} D_k, R)| - \\ - |I(C\Gamma_x, R)| - |I(C\Gamma^0 \cap \Gamma_x, R)|.$$

Воспользуемся оценками (26) — (31). С их помощью получаем неравенство при $x < 0$, $a > 0$ и $x > 0$, $a \geq 0$:

$$I(R^1, R) \geq \left\{ \frac{1}{2} - \frac{40\Gamma(1+1/\alpha)}{qc_0^{1/\alpha}} - ce^{-|\sigma_0|\alpha/2} - 4e^{-|\sigma_0|} \right\} (\delta(\sigma_0))^{-1/2},$$

верное для достаточно больших по модулю x . Поскольку параметр q предполагается достаточно большим, $q \geq 10^3 \Gamma(1+1/\alpha) c_0^{-1/\alpha}$, и для таких больших q справедливо предыдущее неравенство для $|x| \geq c$, то из него извлекаем нужную оценку при $x < -c$, $a > 0$ и $x > c$, $a \geq 0$:

$$I(R^1, R) \geq \frac{1}{4} (\delta(\sigma_0))^{-1/2} > 0. \quad (36)$$

Из оценок (9), (27) — (31) аналогично получаем такое неравенство:

$$I(R^1, R) \leq 2\pi(\delta(\sigma_0))^{-1/2}, \quad (37)$$

которое нам понадобится ниже, верное при $x < -c$, $a > 0$ и $x > c$, $a \geq 0$.

Вернемся к формуле (6). Функция $\varphi(t)$ при $\varepsilon = 0$ является х. ф. безгранично делимого з. р. F_0 . Так как выполнено условие (2), то или $\gamma > 0$, или в любой сколь угодно малой полуокрестности нуля имеются точки роста функции $G(x)$. В первом случае у з. р. F_0 существует $p_0(x)$ — непрерывная строго положительная для всех $x \in \mathbb{R}^1$ плотность. То же самое имеет место и во втором случае, что следует из такой леммы.

Лемма 1. Пусть х. ф. $\varphi(t; F)$ безгранично делимого з. р. F принадлежит пространству $L(-\infty, \infty)$ и в любой сколь угодно малой полуокрестности нуля имеются точки роста функции $G(x)$. Тогда у з. р. F существует непрерывная строго положительная для всех $x \in \mathbb{R}^1$ плотность.

Доказательство леммы в силу его простоты не приводим. Из определения функций $\varphi(t)$ видим, что на каждом конечном отрезке выполняется $p_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p_0(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$ и для $|x| \leq c$. Тем самым теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда функция $\varphi(t)$ из теоремы 2, где $\nu = 1/n$, а вместо $f(t)$ берется функция

$$f_1(t) = d_1(e^{i\beta t} - 1) + d_2(e^{it} - 1), \quad \beta = m/n,$$

$d_i > 0$, $j = 1, 2$, — постоянные $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, $m < n$ — взаимно простые, является при достаточно малых $\varepsilon > 0$ х. ф. некоторого з. р.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \exp\{f_1(t) - \varepsilon(e^{it/n} - 1)\}.$$

Эта функция является $2\pi n$ -периодической целой функцией и допускает представление

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt/n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Из формулы Эйлера для коэффициентов Фурье следует

$$b_k = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi n}^{\pi n} e^{-ikt/n} g(t) dt = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi n - i\sigma_0}^{\pi n - i\sigma_0} e^{-ikz/n} \times \\ \times g(z) dz = g(-i\sigma_0) e^{-\sigma_0 k/n} \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi n}^{\pi n} R_1(u, k/n) du,$$

где функция $R_1(u, k/n)$ строится по той же формуле, что функция $R(u, x)$, только с заменой функции $\varphi(t)$ на функцию $g(t)$, σ_0 является решением уравнения (7) для функции $g(t)$. Легко видеть, что

для достаточно больших $k \geq c$ у уравнения (7) для $g(t)$ имеется единственное решение $\sigma_0 > c$. Определим, как и ранее, множество D_0 . Легко видеть, что для функции $g(t)$ сохраняются рассуждения п. 1, а потому оценки (8) — (10), из которых следует оценка (26) для $I(D_0, R_1)$ с $\delta(\sigma_0) = f_1(-i\sigma_0)$. Для функции $f_1(t)$ сохраняются, очевидно, выводы пп. 3, 4 при выборе $q = n$. Значит, для $f_1(t)$ при $u \in CD_0 \cap [-\pi n, \pi n] = \tilde{\Gamma}$ справедлива оценка (23), которая влечет за собой оценку (31) для интеграла $I(\tilde{\Gamma}, R_1)$. Из аналогов оценок (26), (31) для функции $R_1(u, k/n)$ для достаточно больших $k \geq k_0 = k_0(f_1)$ и малых $\varepsilon > 0$ легко получаем

$$2\pi n \{g(-i\sigma_0)\}^{-1} e^{\sigma_0 k/n} b_k \geq I(D_0, R_1) - |\tilde{I}(\Gamma, R_1)| \geq \frac{1}{4} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (38)$$

Вернемся к функции $\varphi(t)$ и рассмотрим функцию $p_\varepsilon(x)$, определенную в (5). Эта функция, очевидно, записывается в виде

$$p_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \hat{p}(x - k/n),$$

где $\hat{p}(x)$ — плотность з. р. с х. ф. $\hat{\varphi}(t)$, непрерывная, строго положительная в силу леммы 1 функция. Эта плотность обладает еще одним нужным нам свойством, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. Для плотности $\hat{p}(x)$ з. р. с х. ф. $\hat{\varphi}(t)$ выполняется соотношение для любого фиксированного $d > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}(x + d)/\hat{p}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}(x - d)/\hat{p}(x) = 0.$$

Доказательство леммы приведем ниже, а пока с ее помощью закончим доказательство теоремы 3. Для достаточно больших по модулю x , $|x| \geq c$, в силу леммы 2 справедливо неравенство

$$-\sum_{k=1}^{k_0} b_k \hat{p}(x - k/n) \leq \frac{1}{2} b_0 \hat{p}(x) + \frac{1}{2} b_{k_0+1} \hat{p}(x - (k_0 + 1)/n), \quad (39)$$

верное для малых $\varepsilon > 0$, поскольку в силу (38) $b_{k_0+1} > c$ и $b_0 > e^{-d_1 - d_2}$ для всех малых $\varepsilon > 0$. Из этого неравенства видим, что $p_\varepsilon(x) > 0$ для $|x| \geq c$. Число отрицательных коэффициентов b_k не превосходит $k_0 \leq c$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ они стремятся к неотрицательным пределам. Поэтому для $|x| \leq c$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенство (39) сохраняет свою силу, из чего заключаем, что $p_\varepsilon(x) > 0$ для $|x| \leq c$ и малых $\varepsilon > 0$. Теорема 3 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем ее для $x \rightarrow +\infty$. Для $x \rightarrow -\infty$ она доказывается аналогично. В случае, когда $\hat{p}(x)$ — плотность з. р. Гаусса, утверждение леммы 2 очевидно. Пусть $\gamma = 0$. В теореме 2 для интегралов $I(R^1, R)$ были доказаны неравенства (36), (37), верные для больших по модулю x . Легко видеть, что эти неравенства остаются справедливыми для больших по модулю

x , если в определении функции $\varphi(t)$ потребовать, чтобы $f(t) \equiv 0$, $\varepsilon = 0$. Иными словами, имеет место оценка

$$\frac{1}{4} (\delta(\sigma_0))^{-1/2} \hat{\varphi}(-i\sigma_0) e^{-\sigma_0 x} \leq \tilde{p}(x) \leq 2\pi (\delta_0(\sigma_0))^{-1/2} \times \\ \times \hat{\varphi}(-i\sigma_0) e^{-\sigma_0 x}, \quad \delta(\sigma_0) = -(\ln \hat{\varphi})^{(2)}(-i\sigma_0), \quad |x| \geq c. \quad (40)$$

Предварительно отметим, что параметр σ_0 зависит от x , т. е. $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ и является дифференцируемой монотонно растущей к $+\infty$ функцией. Из определения параметра σ_0 видим, что для больших x $c_1 x \leq \delta(\sigma_0) \leq c_2 x$, $c_j > 0$, $j = 1, 2$, — постоянные. Поэтому с помощью соотношения (40) запишем

$$\frac{\tilde{p}(y+d)}{\tilde{p}(y)} \leq 10\pi \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \exp \left\{ \int_y^{y+d} \frac{d}{dx} (\ln \hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \sigma_0 x) dx \right\}. \quad (41)$$

Учитывая определение σ_0 , получаем

$$\frac{d}{dx} (\ln \hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \sigma_0 x) = -\sigma_0.$$

Поскольку $\sigma_0(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, то из неравенства (41) получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Сейчас нам понадобится одна лемма Ю. В. Линника, доказанная, по существу, на с. 156—157 в [3].

Лемма 3. Пусть $G(x)$ — непрерывная монотонная функция на отрезке $[\rho_1, \rho_2]$ и $|G(\rho_2) - G(\rho_1)| > 0$. Тогда найдутся числа ξ_1, ξ_2 , $\rho_1 < \xi_1 < \xi_2 < \rho_2$, такие, что

$$|G(\xi_1) - G(\xi_1 - h)| > ch, \quad |G(\xi_2) - G(\xi_2 - h)| > ch,$$

для достаточно малых $h > 0$, а число ξ_1/ξ_2 или иррациональное или рациональное со знаменателем, большим наперед заданного положительного числа.

Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что на правой полуоси функция $G(x)$ — дискретная и ее точки роста, упорядоченные по возрастанию, таковы, что следующая делится нацело на предыдущую. Докажем сначала, что $G(x)$ на правой полуоси нельзя представить в виде $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$, где $G_j \times \times(x)$, $j = 1, 2$, — убывающие функции, причем $G_2(x)$ — непостоянна и непрерывна. Если бы это было так, то в силу леммы 3 нашлись бы точки $\xi_1 < \xi_2$, удовлетворяющие условиям леммы 3. Не уменьшая общности, считаем, что $\xi_1 = \beta$, $0 < \beta < 1$, а $\xi_2 = 1$. Поскольку из условия (2) теоремы следует, что или в точке 0 у функции $G(x)$ есть скачок, или в любой сколь угодно малой левой и правой полуокрестностях точки нуль есть точки роста функции $G(x)$, то с помощью леммы 3 заключаем, что во втором случае найдутся точки $\mu, \xi > 0$, удовлетворяющие условию (3). Таким образом, если $G_2(x)$ — непостоянна, то $\varphi(t; F) = \varphi(t) \varphi_1(t)$, где функция $\varphi(t)$ определена в теореме 2 и потому является для малых $\varepsilon > 0$ х. ф. некоторого з. р., а $\varphi_1(t)$, очевидно, х. ф. некоторого з. р.

Поскольку $\varphi(t)$ — х. ф. не безгранично делимого з. р., то у з. р. F в силу теоремы А. Я. Хинчина имеется неразложимая компонента, чего в силу условий теоремы 1 быть не может. Значит, на правой полуоси функция $G(x)$ дискретна. Выберем на этой полуоси любые ее две точки роста. Если отношение двух таких точек — иррациональное число, то, повторяя предыдущее рассуждение, снова с помощью теоремы 2 придем к наличию у з. р. F неразложимой компоненты, что невозможно. Таким образом, отношение ξ_1/ξ_2 любых двух положительных точек роста $\xi_1, \xi_2, \xi_1 < \xi_2$, функции $G(x)$ — рациональное число. Представим это отношение в виде $m/n, m, n \in \mathbb{N}$ — взаимно простые. Не уменьшая общности, считаем, что одна из точек роста $\xi_1 = \beta = m/n$, а вторая $\xi_2 = 1$. Если $m \neq 1$, то приведенное выше рассуждение проходит для функции $\varphi(t)$, определенной в теореме 3. Но это означает, что положительные точки роста функции $G(x)$ можно занумеровать в порядке возрастания и каждая следующая точка роста функции $G(x)$ делится на предыдущую.

Ясно, что рассуждение, приведенное для $x > 0$, сохраняет силу и для $x < 0$. Тем самым теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I // Теория вероятн. и ее примен. 1958. 3, №1. С. 3—40. 2. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. II // Теория вероятн. и ее примен. 1959. 4, № 1. С. 55—85. 3. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 4. Фрынтов А. Е. О факторизации безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1975. 20, №3. С. 661—664.

Поступила в редколлегию 15. 05. 87

УДК 517.955

В. М. БОРОК, С. В. ЕВДОКИМОВА

РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

В 50-х годах было установлено, что классы единственности решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений (и систем) с постоянными коэффициентами и классы корректной разрешимости такой задачи определяются совершенно различными характеристиками уравнения: за условия единственности решения «отвечает» только порядок уравнения [1], а классы корректной разрешимости задачи зависят от алгебраических свойств соответствующего дифференциального выражения [2]. Оказывается, что для ряда других задач ситуация иная: единственность решения задачи в классе ограниченных (гладких) функций влечет ее корректную разрешимость в этом классе. Такие задачи мы называли регулярными. Целью настоящей статьи является исследование условий регулярности двух типов задач: задачи Коши в полосе для линейного дифференциаль-

ного уравнения с «нагрузками» по временной координате и нелокальной многоточечной задачи в полосе для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

§ 1. Основные определения и обозначения. Пусть $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$, $k = \overline{0, N}$ — произвольные (комплекснозначные) полиномы $\prod_{k=0}^N Q_k(\sigma) \neq 0$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$.

В полосе $\Pi_T = \mathbf{R} \times [0, T]$ рассмотрим два типа задач:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + \sum_{k=1}^N Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

$$\text{и } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad (\tilde{1})$$

$$\sum_{k=0}^N Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t_k) = u_0(x). \quad (\tilde{2})$$

Обозначим $H_m = \{\varphi \in C^m(\mathbf{R}), \|\varphi\|_m = \max_{0 \leq k \leq m} \sup_{\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty\}$, $H = \bigcup_{m \geq 0} H_m$.

Определение 1. Задача (1) — (2) (($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$)) называется корректной (в H), если для $\forall m \geq 0 \exists l \geq 0$ такое, что для любой $u_0(x) \in H$ существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2) (($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$)), которое при $\forall t \in [0, T]$ принадлежит пространству H_m , причем

$$\sup_{[0, T]} \|u(x, t)\|_m \leq C \|u_0(x)\|_l.$$

Задачи (1) — (2), ($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$) имеют не более одного решения в H_0 тогда и только тогда, когда [3, 4] $\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$ ($\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$) где

$$\Delta(\sigma) = \begin{cases} P(i\sigma) + \sum_{j=1}^N Q_j(i\sigma) - \sum_{j=1}^N Q_j(i\sigma) e^{t_j P(i\sigma)} & \text{при } \sigma : P(i\sigma) \neq 0, \\ 1 - \sum_{j=1}^N Q_j(i\sigma) t_j & \text{при } \sigma : P(i\sigma) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(для задачи (1) — (2))

$$\text{и } \tilde{\Delta}(i\sigma) = \sum_{j=1}^N Q_j(i\sigma) e^{t_j P(i\sigma)} \quad (\tilde{3})$$

(для задачи ($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$)).

Если решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2) (или ($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$)) и все его производные, входящие в (1) (($\tilde{1}$) — ($\tilde{2}$)), а также функция $u_0(x)$

абсолютно интегрируемы, и $v(\sigma, t)$, $v_0(\sigma)(w(\sigma, t), w_0(\sigma))$ — их преобразования Фурье, то, как легко видеть,

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = P(i\sigma) v(\sigma, t) + \sum_{k=1}^N Q_k(i\sigma) v(\sigma, t_k), \quad (4)$$

$$v(\sigma, 0) = v_0(\sigma) \quad (5)$$

или, соответственно,

$$\frac{dw(\sigma, t)}{dt} = P(i\sigma) w(\sigma, t), \quad \sum_{k=0}^N Q_k(i\sigma) w(\sigma, t_k) = w_0(\sigma),$$

откуда получаем

$$v(\sigma, t) = R(\sigma, t) v_0(\sigma), \quad w(\sigma, t) = \tilde{R}(\sigma, t) w_0(\sigma),$$

где

$$R(\sigma, t) = \{\Delta(\sigma) + (P(i\sigma) + \sum_{k=1}^N Q_k(i\sigma)) \cdot r(\sigma, t)\} / \Delta(\sigma),$$

$$r(\sigma, t) = \begin{cases} e^{tP(i\sigma)} - 1, & \text{если } \sigma : P(i\sigma) \neq 0, \\ t, & \text{если } \sigma : P(i\sigma) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad (6)$$

$$\tilde{R}(\sigma, t) = e^{tP(i\sigma)} / \tilde{\Delta}(\sigma).$$

В работах [5] и [4] доказаны условные теоремы о корректности H задач (1) — (2) и $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ в предположениях, что функции $R(\sigma, t)$ и $\tilde{R}(\sigma, t)$ в некоторой области комплексной плоскости $z = \sigma + it$ имеют рост не выше степенного относительно z . Анализ этих доказательств дает следующее

Утверждение 1. Если $\forall p \geq 0 \exists \alpha_p \in \mathbf{R}$:

$$\left| \frac{\partial^p R(\sigma, t)}{\partial \sigma^p} \right| \leq C_p (1 + |\sigma|)^{\alpha_p}, \quad (\sigma, t) \in \Pi_T \quad (7)$$

(соответственно,

$$\left| \frac{\partial^p \tilde{R}(\sigma, t)}{\partial \sigma^p} \right| \leq \tilde{C}_p (1 + |\sigma|)^{\alpha_p}, \quad (\sigma, t) \in \Pi_T), \quad (\tilde{7})$$

то задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) корректна в H ; обратно, если задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) корректна в H , то оценка (7) ($(\tilde{7})$) заведомо имеет место при $p = 0$.

На основании этого утверждения найдем (теоремы 1, 2) условия корректности (в H) рассматриваемых задач в терминах $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$ и параметров t_k ($k = \overline{0, N}$).

Определение 2. Задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) называется регулярной, если для любых полиномов $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$, $\prod_{k=1}^N Q_k(\sigma) \not\equiv 0$ из того, что при некотором $t \geq 0$ однородная задача ($u_0(x) \equiv 0$)

имеет в H_m только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$, следует ее корректность (в H).

В теоремах 3, 4 даны условия регулярности задач (1) — (2) и $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ (в терминах параметров t_k) и затем показана необходимость или существенность этих условий.

§ 2. Основная лемма. Лемма 1. Пусть $\delta(\sigma) \equiv Q_0(\sigma) + \sum_{k=1}^N Q_k(\sigma) \times \times e^{t_k P(\sigma)} \neq 0$ ($\sigma \in R$) и $t_1 : t_2 : \dots : t_N = m_1 : m_2 : \dots : m_N$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, N}$. Тогда $\exists C > 0$, $\exists \alpha \in R$:

$$|\delta(\sigma)| \geq C(1 + |\sigma|)^\alpha \quad (8).$$

Доказательство. Оценка (8) без каких-либо дополнительных условий на t_j , $j = \overline{1, N}$, очевидна в следующих трех случаях:

- а) $P(\sigma) \equiv \text{const}$, в этом случае $\delta(\sigma)$ — полином, и $\alpha = \deg \delta(\sigma)$;
- б) $\text{Re } P(\sigma) \neq \text{const}$, при этом $\alpha \geq \deg Q_0(\sigma)$;
- в) $P(\sigma) \neq \text{const}$, $\text{Re } P(\sigma) \equiv \text{const}$; $\exists k \in \{0, \dots, N\} : \max_{j \neq k} \deg \times$

$\times Q_j(\sigma) < \deg Q_k(\sigma) = m$, при этом $\alpha = m$.

Пусть теперь $\text{Re } P(\sigma) \equiv \text{const}$, $P(\sigma) \neq \text{const}$ и среди полиномов $Q_j(\sigma)$, $j = \overline{0, N}$, не менее двух имеют (одинаковую) наибольшую степень m . Положив $H(\sigma) = \text{Im } P(\sigma) \frac{t_N}{m_N}$, $m_0 = 0$, запишем $\delta(\sigma)$ в виде:

$$\delta(\sigma) \equiv \sum_{j=0}^m \sigma^j \sum_{l=0}^N \exp(im_l H(\sigma)) A_{jl} \equiv \sum_{j=0}^m \sigma^j h_j(\exp(iH(\sigma))),$$

где полином $h_j(\xi)$ определяется формулой

$$h_j(\xi) \equiv \sum_{l=0}^N \xi^{m_l} A_{jl}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Если оценка (8) не верна, то $\forall n \in N \exists \sigma_n \in R: |\delta(\sigma_n)| < n^{-1}(1 + |\sigma_n|)^{-n}$ (9). Обозначим $\xi_n = \exp(iH(\sigma_n))$. Не уменьшая общности, можем считать $h_m(\sigma_n) \neq 0$ ($\forall n \in N$). Из последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_k} \rightarrow \xi_0 = \exp(i\varphi_0)$. Полагая $\eta_k = \sigma_{n_k}$, получим $H(\eta_k) = \varphi_0 + \alpha_k + 2\pi h(k)$, где $h(k) \in Z$, $\alpha_k = o(1)$ ($k \rightarrow \infty$).

Таким образом,

$$\delta(\eta_k) = \sum_{j=0}^m \eta_k^j \sum_{l=0}^N A_{jl} \xi_0^{m_l} \exp\{i\alpha_k m_l\} = \sum_{j=0}^m \eta_k^j \sum_{r=0}^\infty \alpha_k^r B_{jr}, \quad (10)$$

где $B_{jr} = \sum_{l=0}^N A_{jl} \xi_0^{m_l} \frac{(im_l)^r}{r!}$. При этом среди чисел $B_{j0} = h_j(\xi_0)$, $j = \overline{0, m}$, имеются ненулевые, так как в противном случае $\delta(\sigma) = 0$ для тех значений σ , для которых $\exp\{iH(\sigma)\} = \xi_0$. Пусть $B_{jr} = 0$ при $r = \overline{0, r_{j-1}}$ и $B_{jr_j} \neq 0$. Тогда, учитывая (9), заключаем, что среди мономов $\eta_k^j \alpha_k^{r_j}$, $j = \overline{0, m}$ имеется не менее двух, имеющих

одинаковый порядок роста при $k \rightarrow \infty$, не меньший порядка роста любого другого монома $\eta_k^j \alpha_k^r$. Отсюда следует, что

$$\alpha_k = \gamma_1 \eta_k^{-\mu_1} (1 + \alpha_{k1}), \quad \gamma_1 \neq 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \alpha_{k1} = \bar{O}(1) (k \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Теперь, подставляя (11) в (10), приходим к выражению

$$\delta(\eta_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=s}^{\infty} \sum_{j=0}^m \eta_k^{j-\mu_1 r} B_{jrs} \right) \alpha_{k1}^s. \quad (12)$$

При этом $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \eta_k^{j-\mu_1 r} B_{jro}$ — свободный относительно α_{k1} член ряда (12) — при достаточно больших значениях k не обращается в 0. Последнее следует из того, что иначе на последовательности η_k решений уравнения $H(\eta) = \varphi_0 + \gamma_1 \eta^{-\mu_1} + 2\pi h(k)$ получим противоречие с условием $\delta(\sigma) \neq 0 (\sigma \in \mathbf{R})$. Тогда, аналогично предыдущему шагу, из (12) и условия (9) делаем вывод, что

$$\alpha_{k1} = \gamma_2 \eta_k^{-\mu_2} (1 + \alpha_{k2}), \quad \gamma_2 \neq 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \alpha_{k2} = \bar{O}(1) (k \rightarrow \infty).$$

Повторяя этот процесс аналогично построению ряда Ньютона [6], получаем асимптотический ряд:

$$\alpha_k = \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s \eta_k^{-\mu_s}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots, \quad \rho_s \neq 0. \quad (13)$$

Из (10) и (13) следует, что и $\delta(\eta_k)$ разлагается в асимптотический ряд вида (13):

$$\delta(\eta_k) = \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s \eta_k^{\lambda_s}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots, \quad \omega_1 \neq 0,$$

что противоречит предположению (9). Лемма доказана.

§ 3. Теоремы корректности и регулярности. Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) $\Delta(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbf{R}$,

2) $t_1 : t_2 : \dots : t_N = m_1 : m_2 : \dots : m_N, \quad m_j \in \mathbf{N}, \quad j = \overline{1, N}$, а в случае $t_N < T$, кроме того, условие

3) $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < \infty$.

Тогда задача (1) — (2) корректна (в H) в полосе Π^* .

Доказательство. С помощью индукции легко установить, что для производных функции $R(\sigma, t)$ (см. (6)) справедлива формула

$$\frac{\partial^k R(\sigma, t)}{\partial \sigma^k} = [\Delta(\sigma)]^{-(k+1)} \sum_{r=1}^{R_k} g_{rk}(\sigma, t) \exp \{ \gamma_{rk}(t) P(i\sigma) \} \quad (14)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, где $0 \leq \gamma_{rk}(t) \leq (k+1)T$ (при $t \in [0, T]$), $g_{rk}(\sigma, t)$ — полином по σ и t , $\deg g_{rk}(\sigma, t) \leq k(2a-1) + a$, где $a = \max \{ \deg P(i\sigma), \deg Q_1(i\sigma), \dots, \deg Q_N(i\sigma) \}$. Если $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < \infty$, то оценки (7) вытекают непосредственно из формулы (14)

* Условия 2) и 3) излишни, если $p(i\sigma) + \Sigma Q_j(i\sigma) \equiv 0$.

и леммы 1, примененной к $\Delta(\sigma)$. Пусть теперь $t_N = T$. Тогда в случае $\operatorname{Re} P(i\sigma) \rightarrow +\infty$ (например, при $\sigma \rightarrow +\infty$) представим $\Delta(\sigma)$ в виде $\Delta(\sigma) = \exp\{TP(i\sigma)\} \Delta_1(\sigma)$. Очевидно, для $\Delta_1(\sigma)$ выполнены условия леммы 1. Кроме того, при $\sigma \rightarrow +\infty$ $|\exp(\gamma_{rk}(t)P(i\sigma))| \leq \exp \times \{(k+1)T \operatorname{Re} P(i\sigma)\}$. Теперь из формулы (14), учитывая (8) (для $\Delta_1(\sigma)$), приходим к оценкам (7) при достаточно больших значениях σ . Оценки (7), в силу утверждения 1, обеспечивают корректность задачи (1) — (2) в H . Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R$,

2) $t_0 : t_1 : \dots : t_N = m_0 : m_1 : \dots : m_N$, $m_j \in N_0 = N \cup \{0\}$

и, кроме того,

3) если $t_N < T$, то $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < +\infty$,

4) если $t_0 > 0$, то $\inf \operatorname{Re} P(i\sigma) > -\infty$.

Тогда задача $(\tilde{I}) - (\tilde{2})$ корректна (в H) в полосе Π_T .

Замечание 1. Если $[t_0, t_N] \in]0, T[$, то условия 3) и 4) теоремы 2 означают, что $\operatorname{Re} P(i\sigma) = \text{const}$.

Замечание 2. Условие $\Delta(\sigma) \neq 0$ является необходимым в силу теоремы единственности. Существенность условия 2) показана ниже; в случаях а) — в), рассмотренных при доказательстве леммы, оно является лишним. Условие 3) теоремы 1 и условия 3) и 4) теоремы 2, в силу утверждения 1 и формулы (6), являются необходимыми.

На основании теорем 1 и 2, используя условия единственности, решения рассмотренных задач ($\Delta(\sigma) \neq 0$ или $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R - [3, 4]$), теперь легко сформулировать условия регулярности для задач (1) — (2) и $(\tilde{I}) - (\tilde{2})$.

Теорема 3. Задача (1) — (2) является регулярной, если

1) $t_N = T$,

2) $t_1 : \dots : t_N = m_1 : \dots : m_N$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 4. Задача $(\tilde{I}) - (\tilde{2})$ является регулярной, если

1) $t_0 = 0$, $t_N = T$,

2) $t_1 : \dots : t_N = m_1 : \dots : m_N$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, N}$.

Отметим, что первое условие в каждой из этих теорем является необходимым (ср. замечание 2). Существенность второго условия показывает пример задачи Коши для уравнения:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + 2 \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, \beta)}{\partial x}.$$

Здесь $\Delta(\sigma) = \begin{cases} i\sigma(3 - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}), & \sigma \neq 0, \\ 1, & \sigma = 0. \end{cases}$

Если $\beta \in Q$, то $\Delta(\sigma) \neq 0$ ($\sigma \in R$). Возьмем $\sigma_k = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда $|\Delta(\sigma_k)| = 4\pi k \cdot \left| \sin \left\{ \pi k \left(\beta - \frac{2m+1}{2k} \right) \right\} \right|$, $m \in N$. В силу теоремы Хинчина [7] для любой положительной функции $\varphi(q)$ натураль-

ного аргумента q найдется иррациональное число β , для которого неравенство

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \varphi(q)$$

имеет бесконечное число решений вида $p = 2m + 1$, $q = 2r$, $m, r \in \mathbb{N}$. Тогда, взяв в качестве функции $\varphi(q)$ достаточно быстро убывающую функцию, получаем, что существуют подпоследовательности $\{m_n\}$, $\{k_n\} \rightarrow \infty$ и иррациональное число $\beta > 0$ такие, что

$$\left| \beta - \frac{2m_n + 1}{2k_n} \right| < \varphi(k_n).$$

Покажем, что это влечет за собой нарушение необходимого условия корректности. Действительно, в нашем случае

$$R(\sigma, t) = \frac{3e^{i\sigma t} - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}}{3 - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}} \quad (\sigma \neq 0).$$

Возьмем $0 < t' = \frac{p}{q} < 1 = t_1$, $p, q \in \mathbb{N}$, представим k_n в виде $k_n = q_1 q + q_2$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq q_2 \leq q - 1$ и рассмотрим классы $I_j = \{k_n : q_2 = j\}$, $j = 0, q - 1$. Выберем j' такое, что $I_{j'}$ содержит бесконечное число элементов, причем $j' \neq 0$. Если это невозможно, то возьмем другое q (т. е. другое число $t' = \frac{p}{q}$). Обозначая $n' = q_1 q + j'$, получаем теперь $|R(\sigma_{n'}, t)| \geq \frac{M}{\varphi(n')}$, где $\sigma_{n'} = 2\pi n'$, $n' \rightarrow \infty$, что означает нарушение необходимого условия (7) корректности задачи (1) — (2). Аналогично можно построить пример некорректной задачи $(\tilde{1}) - (\tilde{2})$, для которой $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, но условие 2) теоремы 4 не выполняется.

По-видимому, используя теорему о приближении алгебраических чисел рациональными [7], условие 2) можно несколько ослабить.

Список литературы: 1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи мат. наук. 1953. 8, вып. 6. С. 3—54. 2. Петровский И. Г. О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. гос. ун-та, секция А. 1938. 1. С. 1—72. 3. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. 1. Единственность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 9. С. 5—12. 4. Макаров А. А. О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1981. 17, № 2. С. 320—324. 5. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. 11. Корректность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 10. С. 3—9. 6. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 10—20. 7. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., 1978. 120 с.

Поступила в редколлегию 28.05.87

КРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЖИМАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

В настоящей статье рассматривается интерполяционная задача, которую можно трактовать как аналог степенной проблемы моментов для сжимающих матриц-функций в единичном круге.

Метод решения интерполяционных задач анализа, предложенный В. П. Потаповым [1, 2], в основу которого положена адекватность интерполяционной задачи заданию определенных объектов j -теории аналитических матриц-функций, позволяет и эту задачу связать с такими объектами j -теории, как кратная j -элементарная матрица-функция с полюсом ζ_0 на границе единичного круга ($|\zeta_0| = 1$) и произведение Бляшке — Потапова двучленных j -элементарных множителей.

Отметим, что такой подход к решению предлагаемой задачи целесообразен, так как дает возможность выразить общее решение через интерполяционные данные, в то время как использование для этой цели результатов исследования проблемы моментов и преобразования Кэли привело бы к значительному искажению исходных данных в записи общего решения задачи.

§ 1. Кратная граничная интерполяционная задача (SK)

1.1°. Формулируется задача следующим образом: пусть дана последовательность квадратных матриц m -го порядка $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ ($s_0 s_0^* = I$).

Требуется найти сжимающую в единичном круге ($|\zeta| < 1$) матрицу-функцию $S(\zeta)$ $I - S(\zeta) S^*(\zeta) \geq 0$ такую, для которой справедливы в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) асимптотические соотношения:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \dots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k$$

для $\forall k = 0, 1, 2, \dots$; установить критерии разрешимости; выявить, когда проблема имеет единственное решение; в том случае, когда решений несколько, дать описание их совокупности.

1.2°. Рассмотрим сначала усеченную задачу. Усеченная задача представляет самостоятельный интерес. Она, в частности, возникает в связи с синтезом цепей с потерями методом Дарлингтона [3]. В работе [4] обсуждается и более общая задача, однако в ней отсутствуют алгебраические формулы, позволяющие находить резольвентную матрицу задачи непосредственно по исходным данным.

* Здесь и в дальнейшем ζ стремится к ζ_0 по любому некасательному пути.

Заметим еще, что задача для случая $n = 1$ (не кратного) для интерполяционных условий в нескольких граничных точках в классе сжимающих матриц-функций решена в работе автора [2], а в классе j -нерастягивающих матриц-функций — в работе Е. Я. Меламуд [5].

Кратная усеченная задача (SK) формулируется так: пусть дана конечная последовательность квадратных матриц m -го порядка $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}, s_{2n-1}^*$ ($s_0 s_0^* = I$). Требуется найти сжимающую в единичном круге ($|\zeta| < 1$) матрицу-функцию $S(\zeta)$ такую, для которой справедливы в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) асимптотические соотношения:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \dots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = \tilde{s}_k, \quad (1)$$

причем

$$\tilde{s}_k = s_k \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2 \quad (2)$$

и

$$(-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} \tilde{s}_{2n-1} s_0^* \leq (-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} s_{2n-1} s_0^*.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1. Для того чтобы матрица-функция $S(\zeta)$ была решением усеченной задачи (SK), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла основному матричному неравенству (ОМН)

$$\left| \frac{S}{S^*(\zeta) b^*(\zeta) - c^*(\zeta)} - \frac{b(\zeta) S(\zeta) - c(\zeta)}{\frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}} \right| \geq 0, \quad (SK),$$

где $S = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{\tilde{S}}$:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (2);$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} \zeta_0 I - \zeta_0^2 I & \dots & (-1)^{n-1} \zeta_0^n I \\ 0 & -\zeta_0^3 I & \dots & (-1)^{n-1} C'_{n-1} \zeta_0^{n+1} I \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} I \end{bmatrix} \quad (3);$$

$$\hat{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} s_0^* & s_1^* & \dots & s_{n-1}^* \\ 0 & s_0^* & \dots & s_{n-2}^* \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \dots & s_0^* \end{bmatrix} \quad (4); \quad b(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta - \zeta_0} \\ \sim & \sim & \sim \\ \frac{I}{(\zeta - \zeta_0)^n} \end{bmatrix} \quad (5);$$

$$c(\zeta) = \hat{\tilde{S}}^* b(\zeta) \quad (6).$$

Доказательство. Необходимость. Составим для сжимающей в $|\zeta| < 1$ матрицы-функции $S(\zeta)$ неравенство Шварца — Пика в точках $z_1, z_2, \dots, z_n, \zeta$:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \frac{I - S(z_k) S^*(z_l)}{1 - z_k \bar{z}_l} & \frac{S(z_k) - S(\zeta)}{z_k - \zeta} \\ \hline \frac{S^*(z_l) - S^*(\zeta)}{\bar{z}_l - \bar{\zeta}} & \frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \zeta} \end{array} \right] \geq 0 \quad (k, l = 1, \dots, n)$$

и преобразуем его с помощью матрицы T : $THT^* \geq 0$, где

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \frac{I}{\varphi_1'(z_1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{I}{\varphi_2'(z_1)} & \frac{I}{\varphi_2'(z_2)} & \dots & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{I}{\varphi_n'(z_1)} & \frac{I}{\varphi_n'(z_2)} & \dots & \frac{I}{\varphi_n'(z_n)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = T, \quad (7)$$

$\varphi_k(z) = (z - z_1) \dots (z - z_k),$

и перейдем к пределу при $z_k \rightarrow \zeta_0$. Элементы A_{kl} ($k, l = 1, 2, \dots, n$) информационного блока S предельной матрицы определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \lim_{z_p, z_q \rightarrow \zeta_0} \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^l \frac{1}{\varphi_k'(z_p)} \frac{I - S(z_p) S^*(z_q)}{1 - z_p \bar{z}_q} \frac{1}{\varphi_l'(z_q)} = \\ &= \frac{1}{(k-1)! (l-1)!} \frac{\partial^{k+l-2}}{\partial \lambda^{k-1} \partial \mu^{l-1}} \left\{ \frac{I - S(\lambda) S^*(\bar{\mu})}{1 - \lambda \bar{\mu}} \right\} \Big|_{\lambda = \zeta_0, \mu = \bar{\zeta}_0}. \end{aligned}$$

Отметим, что существенным моментом вычислений является преобразование частных производных $\partial^{k-1} \Phi / \partial \lambda^{k-1}$, $\partial^{l-1} \Phi / \partial \mu^{l-1}$ с помощью соотношений, вытекающих из тождества $S(\zeta) S^{-1}(\zeta) \equiv I^*$, которые удобно записать в матричной форме:

$$\left[\begin{array}{ccccc} s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta_0 s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta_0^2 s_2 & \zeta_0 s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \zeta_0^n s_n & \zeta_0^{n-1} s_{n-1} & \zeta_0^{n-2} s_{n-2} & \dots & s_0 \end{array} \right] \times$$

* Не предполагая унитарности $S(\zeta)$ на дуге окружности в окрестности ζ_0 , мы, однако, предполагаем, как обычно в J -теории, что $S(\zeta)$ подчиняется закону зеркальной симметрии, т. е. что для нее справедливо равенство $S^{-1}(\zeta) = S^*(\bar{\zeta})$, $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$, $\forall |\zeta| < 1$.

$$\begin{bmatrix} s_0^* \\ -\bar{\xi}_0 s_1^* \\ \bar{\xi}_0 (s_1^* + \bar{\xi}_0 s_2^*) \\ -\bar{\xi}_0 (s_1^* + 2\bar{\xi}_0 s_2^* + \bar{\xi}_0^2 s_3^*) \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ (-1)^n \bar{\xi}_0 (s_1^* + C_{n-1}' \bar{\xi}_0 s_2^* + \dots + \bar{\xi}_0^{n-1} s_n^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sim \sim \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Заметим, что в матрице $\hat{S}$ правый нижний угловой элемент при вычислении получается равным $\bar{s}_{2n-1}$. Заменяя его на s_{2n-1} , мы только усиливаем неравенство.

Для вычисления элементов $A_{k,n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) пользуемся формулой

$$A_{k,n+1} = \lim_{z_p \rightarrow \zeta_0} \sum_{p=1}^k \frac{1}{\Psi_k'(z_p)} \frac{S(\zeta) - S(z_p)}{\zeta - z_p} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} \left\{ \frac{S(\zeta) - S(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right\}_{\lambda=\zeta_0}.$$

Достаточность. Пусть теперь матрица-функция $S(\zeta)$ удовлетворяет ОМН (SK). Тогда, в силу неотрицательности блока

$$\frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \zeta} \geq 0,$$

$S(\zeta)$ является сжимающей в $|\zeta| < 1$. Более того, существование конечного углового предела $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \zeta} < +\infty$ [2] свидетельствует о том, что $S(\zeta)$ обладает в точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) асимптотикой

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \dots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k$$

для $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Для того чтобы убедиться в том, что ОМН (SK) содержит всю информацию об асимптотическом поведении $S(\zeta)$ в точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$), осуществим операцию «растяжения» ОМН.

С этой целью, умножая неравенство (SK) справа на Z_1 , слева — на Z_1^* , где

$$Z_1 = \begin{bmatrix} I & \hat{S}^{-1} S_0^{-1} X_1 \\ 0 & \frac{1}{\zeta - \zeta_0} I \end{bmatrix}; \quad X_1 = \begin{bmatrix} -(\zeta - \zeta_0)^{-1} I \\ 0 \\ \sim \sim \sim \sim \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

приходим к новому неравенству:

$$\begin{aligned} & Z_1^* \begin{bmatrix} S & B \\ B^* & C \end{bmatrix} Z_1 = \\ & = \begin{bmatrix} S & \begin{array}{c} (\zeta - \zeta_0)^{-2} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0)] \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \end{array} \\ \begin{array}{c} (\zeta - \zeta_0)^{-(n+1)} [S(\zeta) - s_0 - \dots - s_n(\zeta - \zeta_0)^n] \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} C_1 \\ \sim \sim \sim \sim \end{array} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10) \end{aligned}$$

эквивалентному ОМН, в котором предел нижнего углового элемента при $\zeta \rightarrow \zeta_0$ существует и равен

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} C_1 = -\bar{\zeta}_0^2 s_2^* s_0 + \bar{\zeta}_0^2 s_2^* s_1 - \bar{\zeta}_0^3 s_3^* s_0,$$

и поэтому справедливо равенство

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-n} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \dots - s_{n-1}(\zeta - \zeta_0)^{n-1}] = s_n.$$

Умножая неравенство (10) шаг за шагом справа на матрицы

$$Z_k = \begin{bmatrix} I & \hat{S}^{-1} S_0^{-1} X_k \\ 0 & (\zeta - \zeta_0)^{-1} I \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \sim \sim \sim \sim \\ -(\zeta - \zeta_0)^{-1} I \\ \sim \sim \sim \sim \\ 0 \end{bmatrix} k, \\ k = 2, 3, \dots, n-1,$$

слева — на Z_k^* , мы получим неравенства

$$Z_k^* \dots Z_2^* Z_1^* \begin{bmatrix} S \\ B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_k \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \quad (11)$$

доставляющие последовательно соотношения

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-l} [S(\zeta) - s_0 - \dots - s_{l-1}(\zeta - \zeta_0)^{l-1}] = s_l, \\ l = n+1, \dots, 2n-2.$$

Покажем, наконец, что $(-1)^{n-1} \bar{\zeta}_0^{2n-1} \bar{s}_{2n-1}^* s_0^* \leq (-1)^{n-1} \bar{\zeta}_0^{2n-1} \times \times s_{2n-1}^* s_0^*$.

С этой целью перейдем в неравенстве (11) к пределу при $\zeta \rightarrow \zeta_0$ и получим неравенство

$$H = \begin{bmatrix} \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{S} & \begin{matrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \sim \sim \sim \sim \\ \bar{s}_{2n-1} \end{matrix} \\ \hline s_n^* \ s_{n+1}^* \ \dots \ \bar{s}_{2n-1}^* & [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, \bar{s}_{2n-1}^*] \begin{bmatrix} \bar{S}_0 & \begin{matrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \sim \\ s_0 \end{matrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (12)$$

Преобразуем его с помощью неособенной матрицы

$$Z = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ 0 & \zeta_0 & I & & & & \\ 0 & 0 & \zeta_0^2 & I & & & \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & \bar{\zeta}_0^{n-1} I & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{\zeta}_0^n s_0 \end{bmatrix},$$

где $[b_1^*, b_2^*, \dots, b_{n-1}^*, (-1)^{n-1} \zeta_0^n I] = [s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_1, s_0] S_0^* \times \times \zeta_0^{n-1} s_0^* I$, и рассмотрим нижний главный блок-минор второго порядка, который имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, s_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \times \\ s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \times \\ \times s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \\ \times s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \end{array} \right] \geq 0. \quad (13)$$

Третье условие леммы о неотрицательной блок-матрице для него имеет вид

$$\begin{aligned} s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, s_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* &\geq \\ \geq s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \dots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* &\geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) уже вытекает, что

$$(-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} s_{2n-1} s_0^* \geq (-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} \tilde{s}_{2n-1} s_0^*, \quad (15)$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Сопутствующее тождество для блока $S = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{S}$ ОМН (SK) может быть получено из неравенства $\left(\frac{I - S(z_k) S^*(z_e)}{1 - z_k \bar{z}_e} \right) \geq \geq 0$ путем преобразования последнего с помощью матрицы T_1 (7) и последующего перехода к пределу при $z_k \rightarrow \zeta_0$. Оно имеет вид

$$- [b(\xi), -c(\xi)] i \begin{bmatrix} b^*(\eta) \\ -c^*(\eta) \end{bmatrix} = \xi R_\xi S + S_\eta^* R_\eta^* - S, \quad (16)$$

где

$$R_{\xi} = \begin{bmatrix} \frac{I}{\xi - \xi_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{I}{(\xi - \xi_0)^2} & \frac{I}{\xi - \xi_0} & \dots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{I}{(\xi - \xi_0)^n} & \frac{I}{(\xi - \xi_0)^{n-1}} & \dots & \frac{I}{\xi - \xi_0} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(I\xi - \begin{bmatrix} \xi_0 I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \xi_0 I & \dots & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \dots & I & \xi_0 I \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

§ 2. Решение ОМН (SK)

2.1°. Наметим схему решения ОМН (SK)

$$\begin{bmatrix} S & b(\xi) S(\xi) - c(\xi) \\ S^*(\xi) b^*(\xi) - c^*(\xi) & \frac{I - S^*(\xi) S(\xi)}{1 - \xi \bar{\xi}} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (SK)$$

в предположении невырожденности информационного блока $S > 0$.

1. Вводим в рассмотрение матрицу-функцию

$$H(\xi, \eta) = \left(\frac{\eta}{\xi} - 1 \right) \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\eta), c(\eta)], \quad \tilde{\xi} = \bar{\xi}^{-1}, \quad (17)$$

с помощью которой неравенство

$$\frac{I - S^*(\xi) S(\xi)}{1 - \xi \bar{\xi}} - [S^*(\xi), I] \begin{bmatrix} b^*(\xi) \\ -c^*(\xi) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\xi), -c(\xi)] \begin{bmatrix} S(\xi) \\ I \end{bmatrix} \geq 0,$$

эквивалентное ОМН (SK), переписывается в виде

$$[S^*(\xi), I] \frac{j + jH(\tilde{\xi}, \xi)j}{1 - \xi \bar{\xi}} \begin{bmatrix} S(\xi) \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (18)$$

2. Строим матрицу-функцию

$$T(\xi, \eta) = I + H(\xi, \eta)j \quad (19)$$

и проверяем, что имеет место цепное тождество

$$T(\xi, \eta)T(\eta, \xi) \equiv T(\xi, \xi). \quad (20)$$

Доказательство (20) опирается на вспомогательные равенства, в которых и проявляется индивидуальность задачи:

$$1. \xi R_{\xi} S + \xi^{-1} S R_{\xi}^* - S = -[b(\xi), -c(\xi)] j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix},$$

$$2. R_{\xi} b(\eta) = -\frac{b(\xi) - b(\eta)}{\xi - \eta}, \quad R_{\xi} c(\eta) = -\frac{c(\xi) - c(\eta)}{\xi - \eta}.$$

Отметим свойства матрицы-функции $T(\xi, \eta)$, вытекающие из свойств матрицы $H(\xi, \eta)$ и цепного тождества:

1°. $T(\xi, \eta)$ голоморфна всюду, кроме $\xi, \eta = \xi_0$;

2°. $T(\xi, \xi) = I$;

3°. $T^{-1}(\xi, \eta) = T(\eta, \xi)$;

4°. $jT^{*-1}(\xi, \eta)j = T(\xi, \tilde{\eta})$.

3. С их помощью устанавливается связь между значениями матрицы-функции

$$W_\zeta = j + jH(\tilde{\zeta}, \zeta)j = jT(\tilde{\zeta}, \zeta) \quad (21)$$

в двух произвольных точках $\xi \neq \xi_0, \eta \neq \xi_0$:

$$W_\xi = T^{*-1}(\zeta, \eta) W_\eta T^{-1}(\zeta, \eta). \quad (22)$$

Полагая в (22) $\xi = \zeta, \eta = 1, T(\zeta, 1) = A_n(\zeta)$, приходим к факторизации матрицы-функции

$$W_\zeta = A_n^{*-1}(\zeta) j A_n^{-1}(\zeta), \quad (23)$$

т. е. к факторизации ОМН (SK):

$$[S^*(\zeta), I] \frac{A_n^{*-1}(\zeta) j A_n^{-1}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\xi} \begin{bmatrix} S(\xi) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (24)$$

Матрица-функция

$$\begin{aligned} A_n(\zeta) &= T(\zeta, 1) = I + H(\zeta, 1)j = \\ &= I + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1}[b(1), c(1)]j \end{aligned} \quad (25)$$

является параметризованной [6] j -элементарной матрицей-функцией полного ранга с полюсом кратности n в граничной точке ξ_0 ($|\xi_0| = 1$).

4. Для завершения построений проведем следующие рассуждения: пусть голоморфная в $|\zeta| < 1$ матрица-функция $S(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (24). Тогда из j -растягиваемости $A_n(\zeta)$ в $|\zeta| < 1$ следует, что $S(\zeta)$ — сжимающая в $|\zeta| < 1$. Далее, положив

$$\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix}, \quad (26)$$

замечаем, что $p(\zeta), q(\zeta)$ образуют неособенную сжимающую пару голоморфных в $|\zeta| < 1$ матриц-функций.

Если теперь записать $A_n(\zeta)$ в блочной форме:

$$A_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{bmatrix},$$

то из (26) видно, что

$$\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = A_n(\zeta) \begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta)p(\zeta) + \beta(\zeta)q(\zeta) \\ \gamma(\zeta)p(\zeta) + \delta(\zeta)q(\zeta) \end{bmatrix},$$

откуда и определится $S(\xi)$:

$$S(\xi) = [\alpha(\xi) p(\xi) + \beta(\xi) q(\xi)] [\gamma(\xi) p(\xi) + \delta(\xi) q(\xi)]^{-1}. \quad (27)$$

Итак, каждое решение $S(\xi)$ ОМН (SK) представляется в виде дробно-линейного преобразования некоторой неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix}$ голоморфных в $|\xi| < 1$ матриц-функций с матрицей коэффициентов $A_n(\xi)$.

5. Обратное утверждение проверяется проще: дробно-линейное преобразование (27) произвольной неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix}$ голоморфных в $|\xi| < 1$ матриц-функций является решением ОМН (SK).

Действительно, пусть

$$\begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix} = A_n(\xi) \begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Тогда

$$[u^*, v^*] j \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [p^*, q^*] A_n^* j A_n \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq [p^*, q^*] j \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0,$$

следовательно, пара $\begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}$ — сжимающая, а значит, ее компонента $v(\xi)$ обратима. Но тогда имеет смысл функция $S(\xi) = u(\xi) v^{-1} \times \times (\xi) = [\alpha p + \beta q] [\gamma p + \delta q]^{-1}$ (29), причем в силу неравенства

$$0 \leq [p^*, q^*] j \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = [u^*(\xi), v^*(\xi)] A_n^{*-1}(\xi) j A_n^{-1}(\xi) \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix}$$

$S(\xi)$ удовлетворяет в $|\xi| < 1$ неравенству (24), а значит, и ОМН (SK).

Таким образом, доказана основная теорема о решении ОМН (SK):

Теорема 2.1. Если информационный блок S обратим, то общее решение $S(\xi)$ ОМН (SK) представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной голоморфной неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix}$:

$$S(\xi) = [\alpha(\xi) p(\xi) + \beta(\xi) q(\xi)] [\gamma(\xi) p(\xi) + \delta(\xi) q(\xi)]^{-1},$$

матрица коэффициентов (резольвентная матрица) которого строится по матрице $S > 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha(\xi) & \beta(\xi) \\ \gamma(\xi) & \delta(\xi) \end{bmatrix} = A_n(\xi) = I + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \begin{bmatrix} b^*(\xi) \\ c^*(\xi) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), c(1)] j \quad (30)$$

и является кратной j -элементарной матрицей-функцией полного ранга с полюсом кратности n в точке ξ_0 ($|\xi_0| = 1$).

2.2°. Доказанная теорема 2.1 свидетельствует об адекватности усеченной задачи (SK) с невырожденным информационным блоком

$S > 0$ заданию кратной j -элементарной матрицы-функции $A_n(\xi)$ полного ранга.

В самом деле, решение такой задачи приводит к построению кратной матрицы-функции $A_n(\xi)$ вида (30).

Наоборот, имея произвольную кратную j -элементарную матрицу-функцию $\omega(\xi)$ полного ранга, параметризуем ее:

$$\omega(\xi) = I + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), -c(1)],$$

а затем, рассматривая параметры $s_0 (s_0 s_0^* = I)$, $s_1, \dots, s_{2n-1}$ этого представления как интерполяционные условия, формулируем кратную граничную задачу.

§ 3. Пошаговый процесс Шура

Метод, позволяющий до конца исследовать бесконечную интерполяционную задачу (типа Неванлинны — Пика, проблемы моментов), впервые использован И. Шуром. Сущность его заключается в том, что на первом шаге задача решается лишь для одного — первого, из счетного множества поставленных условий. Далее, из совокупности решений выделяется подмножество реализующих и второе условие. Этот отбор диктуется пересчетом исходных данных и приводит к тому, что решение задачи с новым первым условием дает общий вид функций, удовлетворяющих уже двум первым первоначально заданным условиям и т. д. Процесс Шура реализуется в виде суперпозиции элементарных дробно-линейных преобразований.

С позиций j -теории методика Шура адекватна разложению матриц $A_n(\xi) = A(\xi)$ на двучленные j -элементарные параметризованные множители.

Настоящий параграф состоит из двух частей. Первая посвящена разложению $A_n(\xi)$ на параметризованные множители; вторая — интерпретации Шуровского процесса.

3.1°. Пусть

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{(\xi - \xi_0)^k} = I + \frac{1 - \xi}{\xi} j \begin{bmatrix} b_n^*(\tilde{\xi}) \\ -c_n^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S_n^{-1} [b_n(1), -c_n(1)] \quad (31)$$

параметризованная j -элементарная матрица-функция. Отщепляемый от $A_n(\xi)$ слева двучленный множитель $\hat{b}_1(\xi) = I + \frac{1 - \xi}{(1 - \xi_0)(\xi - \xi_0)} E_1$ определяется по формулам [2]: $B_n^* j B_{n-1} x = -B_n^*$, $E_1 = B_n x j$ и имеет полный ранг. По теореме о параметризации [6] (для $n = 1$) он представим в виде

$$\hat{b}_1(\xi) = I + \frac{1 - \xi}{(1 - \xi_0)(\xi - \xi_0)} j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^* \end{bmatrix} (\xi_0 s_1 s_0^*)^{-1} [I, -s_0], \quad (32)$$

где параметры $s_0 (s_0 s_0^* = I)$, $s_1 (\zeta_0 s_1 s_0^* > 0)$ в (32) необходимо совпадают с s_0 , s_1 в выражении (31).

Выполняя деление $A_n(\zeta)$ на $\hat{b}_1(\zeta)$, получим частное

$$\hat{b}_1^{-1}(\zeta) A_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S_{n-1}^{(2)-1} [b_{n-1}, -c_{n-1}] \quad (33)$$

уже с полюсом кратности $n-1$ в точке $\zeta_0 (|\zeta_0| = 1)$.

Новые параметры $s_0^{(2)}$, $s_1^{(2)}$, ..., $s_{2n-3}^{(2)}$ связаны с s_0 , s_1 , ..., s_{2n-1} соотношением

$$Y S_{n-1}^{(2)} Y^* = C - B^* a_{11}^{-1} B > 0, \quad (34)$$

где

$$S_n = \begin{bmatrix} a_{11} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} > 0,$$

$$Y = \begin{bmatrix} \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2 \right) s_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{s_2}{1-\zeta_0} - s_3 \right) s_1^{-1} \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2 \right) s_1^{-1} & \dots & \dots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \left(\frac{s_{n-1}}{1-\zeta_0} - s_n \right) s_1^{-1} \left(\frac{s_{n-2}}{1-\zeta_0} - s_{n-1} \right) s_1^{-1} & \dots & \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2 \right) s_1^{-1} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Вид частного подсказывает, что описанный процесс можно повторить.

Второй множитель $\hat{b}_2(\zeta)$, отщепляемый слева от $\hat{b}_1^{-1}(\zeta) A_n(\zeta)$, по аналогии с (32), имеет вид

$$b_2(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(2)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(2)} s_0^{(2)*})^{-1} [I, -s_0^{(2)}] \quad (36)$$

и в его построении участвуют лишь $s_0^{(2)} (s_0^{(2)} s_0^{(2)*} = I)$ и $s_1^{(2)} (\zeta_0 s_1^{(2)} \times s_0^{(2)*} > 0)$, т. е. структура $\hat{b}_2(\zeta)$ зависит только от величин двух первых условий задачи: s_0 , s_1 , s_2 , s_3 .

Вовлекая с каждым новым актом отщепления следующую пару интерполяционных условий, мы после $n-1$ шагов получим равенство $A_n(\zeta) = \hat{b}_1(\zeta) \hat{b}_2(\zeta) \dots \hat{b}_n(\zeta)$ (37), где

$$\hat{b}_k(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)} E_k;$$

$$E_k = j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(k)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*})^{-1} [I, -s_0^{(k)}];$$

$$E_k^2 = 0, \quad E_k f \geq 0, \quad \text{rang } E_k = m.$$

Величины s_0 , s_1 , $s_0^{(2)}$, $s_1^{(2)}$, ..., $s_0^{(n)}$, $s_1^{(n)}$ называют параметрами Шура. Условия $s_0^{(k)} s_0^{(k)*} = I$, $\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*} > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) обеспечиваются положительностью информационного блока $S_n > 0$.

Еще раз подчеркнем, что для построения $s_0^{(k)}, s_1^{(k)}$ используются лишь первые $2k$ данных задачи (SK): $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{2k-2}, s_{2k-1}$.

Независимость $\hat{b}_k(\zeta)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) от условий задачи с номерами, большими k , позволяет утверждать, что разложение параметризованной матрицы-функции, порожденной k -й усеченной задачей ($k = 1, 2, \dots, n$), на параметризованные двучленные множители состоит из первых k множителей разложения (37): $\hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2 \times \dots \times \hat{b}_k(\zeta)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

3.2°. Полученное разложение $A_n(\zeta)$ в произведение двучленных множителей полного ранга важно тем, что оно имеет место при любом $n = 1, 2, \dots$ без какой-либо перестройки сомножителей. Это позволяет нам поставить в соответствие с полной (неусеченной) задачей (SK) бесконечную цепочку двучленных множителей $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n, \dots$. Интерпретируя произведения $\hat{b}_1, \hat{b}_1 \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_k \dots$ как матрицы коэффициентов дробно-линейных преобразований, мы получим решение усеченных задач с одним, двумя и т. д. k заданными условиями.

В самом деле, так как первый множитель разложения (37)

$$\hat{b}_1(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)} j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^* \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1 s_0^*)^{-1} [I, -s_0] = \begin{bmatrix} \alpha_1(\zeta) & \beta_1(\zeta) \\ \gamma_1(\zeta) & \delta_1(\zeta) \end{bmatrix}$$

равен $A_1(\zeta)$, то дробно-линейное преобразование произвольной неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}^*$

$$S(\zeta) = [\alpha_1(\zeta) p(\zeta) + \beta_1(\zeta) q(\zeta)] [\gamma_1(\zeta) p(\zeta) + \delta_1(\zeta) q(\zeta)]^{-1} = \hat{b}_1(\zeta) \left\{ \begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} \right\} \quad (38)$$

с матрицей коэффициентов $\hat{b}_1(\zeta) = A_1(\zeta)$ по теореме 1.1 является решением ОМН

$$\left[\begin{array}{c|c} \zeta_0 s_1 s_0^* & \frac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} \\ \hline \frac{S^*(\zeta) - s_0^*}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} & \frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} \zeta} \end{array} \right] \geq 0,$$

а значит, и решением усеченной задачи, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} S(\zeta) = s_0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{s_0^* [S(\zeta) - s_0]}{\bar{\zeta}_0 (\zeta - \zeta_0)} \leq s_0^* s_1 \zeta_0.$$

* В силу того что компонента $q(\zeta)$ неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$

всегда обратима, пара $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ эквивалентна паре $\begin{bmatrix} S_2(\zeta) \\ \sim I \end{bmatrix}$, где $S_2(\zeta) = p q^{-1}$ — произвольная сжимающая в $|\zeta| < 1$ матрица-функция.

Замечание 1. Если в качестве параметра в (38) рассматривать пару $\left[\begin{smallmatrix} S_2(\zeta) \\ I \end{smallmatrix} \right]$, где $S_2(\zeta)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\text{rang} \{ \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} [S_2(\zeta) - s_0] \} = m, \quad (39)$$

то $S(\zeta)$ (38) будет решением задачи (SK), удовлетворяющей первой паре интерполяционных условий:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} S(\zeta) = s_0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} = s_1.$$

Далее, дробно-линейное преобразование

$$S(\zeta) = [\alpha_2(\zeta) S_3(\zeta) + \beta_2(\zeta)] [\gamma_2(\zeta) S_3(\zeta) + \delta_2(\zeta)]^{-1} = \hat{b}_1(\zeta) \{ \hat{b}_2(\zeta) \{ S_3 \} \},$$

матрицей коэффициентов которого является произведение

$$A_2(\zeta) = \hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha_2(\zeta) & \beta_2(\zeta) \\ \gamma_2(\zeta) & \delta_2(\zeta) \end{bmatrix},$$

суть решение неравенства

$$\left[\begin{array}{c|c} S_2 & \frac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} \\ \hline \times & \frac{S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} \\ \hline & \frac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array} \right] \geq 0,$$

а значит, с учетом аналогичного замечания 1 относительно параметра $S_3(\zeta)$, и решение задачи (SK) с двумя парами интерполяционных условий s_0, s_1, s_2, s_3 и т. д.

Итак, постановке любой задачи (SK), удовлетворяющей условию $S_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), соответствует бесконечное произведение двучленных множителей полного ранга $\hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2(\zeta) \dots \hat{b}_n(\zeta) \dots$ (40) так, что частичные произведения $\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_k$ являются матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования, дающего общее решение усеченной проблемы, определяемой первыми k парами условий.

Имеет место и обратное утверждение: каждому бесконечному произведению двучленных j -элементарных множителей полного ранга

$$\prod_{i=1}^{\infty} b_i(\zeta)$$

(единственное ограничение состоит в том, что $s_0^{(k)} - s_0^{(k+1)}$ — невырожденная матрица для $\forall k = 1, 2, \dots$) соответствует сжимающая матрица-функция $S(\zeta)$, обладающая асимптотикой

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-k} [S(\zeta) - s_0 - \dots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

причем для $\forall k$ $S_k > 0$.

Тем самым задача (SK) со строго положительными информационными блоками $S_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ адекватна заданию бесконечного произведения Бляшке — Потапова двучленных j -элементарных множителей полного ранга с полюсом в точке ζ_0 на границе единичного круга

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k(\zeta), \quad b_k(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)} E_k, \quad (41)$$

$$E_k = j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(k)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*})^{-1} [I, -s_0^{(k)}], \quad E_k j \geq 0, \quad E_k^2 = 0.$$

Исследовать задачу (SK) означает изучить вопросы, связанные со сходимостью или расходимостью этого бесконечного произведения.

Замечание. В рассмотренном выше бесконечном произведении (41) отдельные множители $\hat{b}_k(\zeta)$ нормированы к I в точке $\zeta = 1$. Однако более целесообразной является нормировка каждого множителя в бесконечном произведении к модулю [7] в некоторой внутренней точке области, например, в точке $\zeta = 0$. Такая нормировка позволяет использовать тонкие теоремы В. П. Потапова [7] о модуле при исследовании сходимости бесконечного произведения.

Перенормировка множителей произведения (41) осуществляется следующим образом:

1) Легко проверяется, что

$$\hat{b}_k(\zeta) = \left(I - \frac{1}{2} \frac{\zeta + \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} E_k \right) \left(I + \frac{1}{2} \frac{1 + \zeta_0}{1 - \zeta_0} E_k \right) = B_k(\zeta) \cdot U_k, \quad (42)$$

где $B_k(\zeta)$ — j -элементарная матрица-функция полного ранга, нормированная в точке $\zeta = 0$ к модулю

$$B_k(0) = I + \frac{1}{2} E_k = e^{1/2 E_k},$$

$$U_k = I + \frac{1}{2} \frac{1 + \zeta_0}{1 - \zeta_0} E_k,$$

j -унитарная матрица: $U_k^* j U_k = j$;

2) произведение (41) переписывается в виде

$$\widehat{\prod_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k(\zeta)} = \widehat{\prod_{k=1}^{\infty} B_k(\zeta) U_k} = B_1(\zeta) \cdot U_1 B_2(\zeta) U_1^{-1} \dots$$

$$\dots (U_1 U_2 \dots U_{n-1}) B_n(\zeta) (U_1 U_2 \dots U_{n-1})^{-1} \dots$$

или

$$\widehat{\prod_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k(\zeta)} = \widehat{\prod_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k(\zeta)}, \quad (43)$$

где $\tilde{B}_1(\zeta) = B_1(\zeta)$,

$$\tilde{B}_k(\zeta) = (U_1 U_2 \dots U_{k-1}) B_k(\zeta) (U_1 U_2 \dots U_{k-1})^{-1}, \quad (44)$$

$$(k = 2, 3, \dots).$$

3) Очевидно,

$$\tilde{B}_k(\zeta) = I - \frac{1}{2} \frac{\zeta + \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \tilde{E}_k, \quad \tilde{E}_k = (U_1 \dots U_{k-1}) E_k (U_1 \dots U_{k-1})^{-1}$$

и, следовательно, множители произведения (43) нормированы к модулю в точке $\zeta = 0$:

$$\tilde{B}_k(0) = I + \frac{1}{2} \tilde{E}_k = e^{1/2} \tilde{E}_k.$$

Таким образом, задача (SK) ($S_n > 0$, $\forall n$) адекватна заданию бесконечного произведения Бляшке—Потапова двучленных j -элементарных матриц-функций полного ранга с полюсами в точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$), нормированных к модулю в точке $\zeta = 0$.

§ 4. Общая теория кругов Вейля

4.1⁰. Основы общей теории кругов Вейля, изложенные в [2], остаются неизменными и для задачи (SK). Поэтому сформулируем только выводы:

Каждой матрице Вейля

$$W = A_n^{*-1} j A_n^{-1} = \begin{bmatrix} -R & S \\ S^* & -T \end{bmatrix}, \quad R > I$$

в фиксированной точке λ_0 ($|\lambda_0| < 1$) отвечает круг K_n :

$$S(\lambda_0) = C + \rho_g^{1/2} \cdot u \cdot \rho_d^{1/2}, \quad u^* u \leq I,$$

$$C = R^{-1}S; \quad \rho_g = R^{-1}; \quad \rho_d = S^* R^{-1} S - T.$$

а) С возрастанием параметра n эти круги вкладываются друг в друга;

в) Центры $C = R^{-1}S$ стремятся к конечному пределу;

с) Левый и правый радиусы ρ_g и ρ_d , монотонно убывая, стремятся к пределам $\rho_{g\infty}$ и $\rho_{d\infty}$.

Совокупность матриц $S = (R^{-1}S)_{\infty} + \rho_{g\infty}^{1/2} \cdot u \cdot \rho_{d\infty}^{1/2}$, $\forall u^* u \leq I$ называют **предельным кругом Вейля**. Он, очевидно, содержится во всех кругах K_n . Отметим, что в общем случае $\rho_{g\infty}$, $\rho_{d\infty}$ являются особыми матрицами.

По теореме С. А. Орлова [8], ранги левого и правого предельных радиусов не зависят от выбора точки λ_0 ; это обстоятельство дает возможность классифицировать задачи (SK) по значениям рангов предельных радиусов.

Более полную информацию получим, рассматривая мультипликативное представление матрицы коэффициентов $\tilde{A}_n(\zeta) = \tilde{B}_1(\zeta) \dots \tilde{B}_n(\zeta)$ и вытекающие из него структурные формулы для радиусов круга

$$\rho_g^{(n)} = u_1 \hat{r}_1^{-1/2} u_2 \hat{r}_2^{-1/2} \dots u_n \hat{r}_n^{-1} u_n^* \dots \hat{r}_2^{-1/2} u_2^* \hat{r}_1^{-1/2} \cdot u_1^*, \quad (45)$$

$$\rho_d^{(n)} = v_1 \hat{r}_1^{-1/2} v_2 \hat{r}_2^{-1/2} \dots v_n \hat{r}_n^{-1} v_n^* \dots \hat{r}_2^{-1/2} v_2^* \hat{r}_1^{-1/2} v_1. \quad (46)$$

Здесь положительные эрмитовы матрицы $\hat{r}_1 > I, \dots, \hat{r}_n > I$ и унитарные матрицы $u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n$ однозначно определяются заданным произведением двучленных множителей.

Вывод этих формул ничем принципиально не отличается от вывода аналогичных формул в задаче Неванлинны — Пика [9]; специфика граничного случая проявляется лишь в том, что у $\rho_d^{(n)}$ отсутствует множитель — скалярное произведение Бляшке.

Из структурных формул (45), (46), в частности, вытекает, что либо оба радиуса предельного круга K_∞ имеют полный ранг, либо оба радиуса — вырожденные матрицы. В этом последнем случае не существует какой-либо связи между рангами $\rho_{g\infty}$ и $\rho_{d\infty}$.

Имеющее место обратное утверждение: по любым наперед заданным эрмитовым матрицам $\hat{r}_1 > I, \dots, \hat{r}_n > I$ и унитарным матрицам $u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n$ можно построить произведение $A(\zeta) = \tilde{B}_1(\zeta) \tilde{B}_2(\zeta) \dots \tilde{B}_n(\zeta)$, для которого левый и правый радиусы круга Вейля K_n в заданной точке $|\lambda_0| < 1$ определяются формулами (45), (46), позволяет для любой пары чисел $0 \leq v_g < m, 0 \leq v_d < m$ построить задачу (SK) с заданными v_g и v_d рангами предельных радиусов круга Вейля K_∞ : $\text{rang } \rho_{g\infty} v_d, \text{rang } \rho_{d\infty} = v_d$.

4.2°. Особый интерес представляет случай, когда левый и правый радиусы предельного круга K_∞ являются неособенными матрицами. такую задачу называют вполне неопределенной (в скалярном случае полная неопределенность или единственность исчерпывает все возможные исходы).

Обобщением классического результата Данжуа может служить следующий критерий полной неопределенности задачи (SK):

Теорема 4.1. Для того чтобы задача (SK) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_{kj}. \quad (47)$$

Итак, полная неопределенность задачи (SK) эквивалентна сходимости ряда (47). Последняя же обеспечивает сходимость бесконечного

произведения $A(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k(\zeta)$.

Общее решение задачи представляется в форме дробно-линейного преобразования с матрицей коэффициентов $A(\zeta)$. Таким образом, в случае полной неопределенности получаем исчерпывающее описание всех решений задачи (SK):

Теорема 4.2. Общее решение $S(\zeta)$ задачи (SK) представляется в форме дробно-линейного преобразования произвольной неособенной голоморфной сжимающей в $|\zeta| < 1$ пары матриц-функций $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$

$$S(\zeta) = [\alpha(\zeta) p(\zeta) + \beta(\zeta) q(\zeta)] [\gamma(\zeta) p(\zeta) + \delta(\zeta) q(\zeta)]^{-1},$$

матрица коэффициентов которого является бесконечным произ-

ведением Бляшке—Потапова двучленных j -элементарных множителей полного ранга

$$\begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k(\zeta),$$

нормированных к модулю в точке $\zeta = 0$.

Замечание. Отметим, что в настоящей статье полностью исследован случай полной неопределенности задачи, т. е. $\text{rang } \rho_{g\infty} = \text{rang } \rho_{d\infty} = m$. Случаи вырождения информационного блока S_n при каком-нибудь n ($\det S_n = 0$) или вырождения предельных радиусов

$$0 \leq \text{rang } \rho_{g\infty} < m, \quad 0 \leq \text{rang } \rho_{d\infty} < m \quad (S_n > 0, \forall n)$$

здесь не рассматриваются.

4.3°. В заключение рассмотрим еще одну форму записи допредельных радиусов:

$$\rho_g^{(n)}(\lambda_0) = \left\{ I + (1 - \lambda_0 \bar{\lambda}_0) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^i}{|\lambda_0 - \bar{\zeta}_0|^{2i+2}} P_i(\bar{\lambda}_0) h_i^{-1} P_i^*(\bar{\lambda}_0) \right\}^{-1}, \quad (48)$$

$$\rho_d^{(n)}(\lambda_0) = \left\{ I + (1 - \lambda_0 \bar{\lambda}_0) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{|1 - \lambda_0 \bar{\zeta}_0|^{2i+2}} Q_i(\lambda_0) h_i^{-1} Q_i^*(\lambda_0) \right\}^{-1}, \quad (49)$$

$$P_i(\zeta) = \frac{(1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_0)^{i+1}}{\bar{\zeta}} b_{i+1}^*(\bar{\zeta}) \begin{bmatrix} -S_{i-1}^{-1} B_i \\ I \end{bmatrix}, \quad P_0(\zeta) = I,$$

$$Q_i(\zeta) = \frac{(1 - \zeta) \bar{\zeta}_0^{i+1}}{\zeta} c_{i+1}^*(\bar{\zeta}) \begin{bmatrix} -S_{i-1}^{-1} B_i \\ T \end{bmatrix}, \quad Q_0(\zeta) = s_0,$$

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{i-1} & B_i \\ B_i^* & C_i \end{bmatrix}, \quad h_i = C_i - B_i^* S_{i-1}^{-1} B_i.$$

В скалярном случае соотношения (48), (49) подсказывают критерий полной неопределенности (и однозначности) задачи (SK), аналогичный критерию Гамбургера полной неопределенности проблемы моментов.

Теорема 4.3. Скалярная задача (SK) будет вполне неопределенной в том и только в том случае, когда сходятся ряды

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\lambda_0|^{2i}}{|\lambda_0 - \bar{\zeta}_0|^{2i+2}} \frac{\left| P_i \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_0} \right) \right|^2}{h_i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|1 - \lambda_0 \bar{\zeta}_0|^{2i+2}} \frac{|Q_i(\lambda_0)|^2}{h_i}.$$

Здесь

$$h_i = \frac{\det S_i}{\det S_{i-1}},$$

$$P_i(\zeta) = \frac{1}{\det S_{i-1}} \begin{vmatrix} S_{i-1} & B_i \\ (1 - \zeta \bar{\zeta}_0)^i I & \dots & \zeta^{i-1} (1 - \bar{\zeta}_0 \zeta) I & \zeta^i I \end{vmatrix},$$

$$Q_i(\zeta) = \frac{1}{\det S_{i-1}} \begin{vmatrix} S_{i-1} & B_i \\ \frac{1}{\zeta} (1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_0)^{i+1} C_i^*(\bar{\zeta}) & \kappa_i^*(\bar{\zeta}) \end{vmatrix},$$

$\kappa_i(\bar{\zeta}) = s_i (1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_0)^i + s_{i-1} (1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_0)^{i-1} \dots + s_1 (1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}^{i-1} + s_0 (\bar{\zeta})^i$ можно рассматривать как аналоги ортогональных полиномов.

Список литературы: 1. Ковалишина И. В., Потапов В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика//Докл. АН АрмССР. 1974. 59, № 1, С. 17—22. 2. Ковалишина И. В. О «граничной» производной аналитической сжимающей в круге матрицы-функции. М., 1983. 69 с. Деп. в ВИНТИ 20.05.83. № 2709. 3. Helton W./J. of funct. Anal. 1980. 38, № 2. С. 290—292. 4. Ball J., Helton W. Interpolation problems of Pick — Nevanlinna and Loewner types for meromorphic matrix functions: parametrization of the set of all solutions//Integral Equations and Oper. Theory. 1986. 9. С. 154—203. 5. Меламуд Е. Я. Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической J -нерастягивающей матрицы-функции, Докл. АН АрмССР. 1985. 80, № 1. С. 12—16. 6. Ковалишина И. В. Теория кратной j -элементарной матрицы-функции с полюсом на границе единичного круга//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 10—12. 7. Потапов В. П. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций//Тр. Моск. мат. о-ва. 1955. 4. С. 125—236. 8. Орлов С. А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов предельных матричных кругов//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976, 40, № 3. С. 593—644. 9. Ковалишина И. В., Потапов В. П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны—Пика//Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил. К., 1981. С. 25—49.

Поступила в редколлегию 29.05.85

УДК 517.544

Б. П. БУЗИНОВСКИЙ, В. Н. МАЦКУЛ, А. П. СВЕТНОЙ

К РЕШЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость на две области: D^+ и D^- , содержащую точку $z = \infty$.

Найти интегрируемые на L и аналитические соответственно в областях $D^\pm$ функции $\varphi^\pm(z)$ по краевому условию:

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in L, \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $\varphi^\pm(t)$ — граничные значения функций $\varphi^\pm(z)$ из областей $D^\pm$ соответственно, а функции $a(t) \neq 0$, $b(t)$, $f(t)$ определены на L и в точках $t_j (j = \overline{1, k})$ контура L имеют разрывы первого рода, а на концах дуг $\overline{t_j t_{j+1}} (j = \overline{1, k}; t_{k+1} \equiv t_1)$ существуют односторонние пределы слева и справа у производных от функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ до порядка $r \geq 0$ включительно, но

$$\begin{aligned} a^{(\nu)}(t_j + 0) &\neq a^{(\nu)}(t_j - 0), \quad b^{(\nu)}(t_j + 0) \neq b^{(\nu)}(t_j - 0), \\ f^{(\nu)}(t_j + 0) &\neq f^{(\nu)}(t_j - 0), \quad j = \overline{1, k}; \quad \nu = \overline{0, r}, \end{aligned} \quad (2)$$

а на дугах $\overline{t_j t_{j+1}}$: $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in H_\lambda^{(r)} (0 < \lambda < 1)$.

Отметим, что в (2) при некоторых значениях j и ν могут встречаться и равенства, т. е. точки разрывов функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$.

могут как совпадать, так и не совпадать. Ясно, что краевое условие (1) имеет место всюду на L , за исключением, может быть, точек t_j .

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) разрешима. Теория разрешимости задачи (1) при различных предположениях относительно контура L и коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ рассмотрена в [1]. В настоящее время наиболее полные результаты в этом направлении получены в работах [2], когда $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in H_\lambda$, а также [3], когда $a(t) \in M$ (введенный в [4] класс множителей, не влияющих на факторизацию), $b(t) \in L_\infty$, $f(t) \in L_2$. В [2,3] контур L — единичная окружность либо действительная прямая.

В связи с тем что в приложениях (см., напр. [4]) часто встречается случай разрывных коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, представляет интерес исследование свойств решений задачи (1) вблизи точек разрыва коэффициентов. В настоящей работе разрабатывается метод выделения особенностей решений задачи (1) в точках разрыва ее коэффициентов, основанный на сведении задачи (1) к матричной задаче Римана с разрывными коэффициентами. Полученное решение содержит не только главные части этих особенностей, но и более гладкие их слагаемые.

1°. Сведение обобщенной задачи Римана к матричной задаче Римана

Следуя [1], введем новые неизвестные функции $\Phi_1^\pm(z)$, $\Phi_2^\pm(z)$, аналитические соответственно в $D^\pm$, формулами

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) &= \varphi^+(z), \quad \Phi_2^+(z) = \frac{1}{z} \varphi^-\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^+, \\ \Phi_1^-(z) &= -\varphi^-(z), \quad \Phi_2^-(z) = \frac{1}{z} \varphi^+\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^-. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда условие (1) приводится к краевой задаче Римана для системы двух кусочно-аналитических функций:

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad \Phi^-(\infty) = 0, \quad (4)$$

где $\Phi^\pm(z) = (\Phi_1^\pm(z), \Phi_2^\pm(z))$,

$$\begin{aligned}G(t) &= \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} |b(t)|^2 - |a(t)|^2 & tb(t) \\ \overline{tb(t)} & 1 \end{pmatrix}, \\ g(t) &= \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} \overline{a(t)} f(t) - \overline{b(t)} \overline{f(t)} \\ -\overline{tf(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\det G(t) = -a(t) \neq 0$, $t \in L$, а краевое условие (4) имеет смысл всюду на L , за исключением, быть может, точек t_j ($j = \overline{1, k}$), в которых, вообще говоря,

$$G^{(\nu)}(t_j - 0) \neq G^{(\nu)}(t_j + 0), \quad g^{(\nu)}(t_j - 0) \neq g^{(\nu)}(t_j + 0), \quad j = \overline{1, k}; \quad \nu = \overline{0, r}. \quad (5)$$

Эквивалентность задач (1) и (4) понимаем в том смысле, что каждому исчезающему на бесконечности решению задачи (1) соответствует по формулам (3) решение задачи (4) и наоборот, т. е. можно осуществить переход к решению задачи (1) по формулам

$$\begin{aligned}\varphi^+(z) &= \frac{1}{2} \left(\Phi_1^+(z) + \frac{1}{z} \overline{\Phi_2^-} \left(\frac{1}{z} \right) \right), \quad z \in D^+, \\ \varphi^-(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} \overline{\Phi_2^+} \left(\frac{1}{z} \right) - \Phi_1^-(z) \right), \quad z \in D^-. \end{aligned} \quad (6)$$

2°. Решение матричной задачи Римана с разрывными коэффициентами

Введем вспомогательные разрывные функции. Пусть t_0 — одна из точек разрыва, а z_0 — произвольная точка из D^+ . Обозначим через l простую линию, соединяющую точки z_0, t_0, ∞ и имеющую с L общую точку t_0 . Рассмотрим функцию $u_1(z) = \ln(z - t_0)$ (7), определенную на всей плоскости, разрезанной вдоль l' , где l' — часть l , соединяющая точки t_0 и ∞ . Очевидно, что $u_1(z)$ — аналитическая в D^+ .

Введем в рассмотрение функцию $u_2(z) = \ln(z - z_0)$, определенную на всей плоскости, разрезанной вдоль линии l . Очевидно, что $u_2(t_0 - 0) = u_2(t_0 + 0) - 2\pi i$. И, наконец, рассмотрим функцию

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z) = \ln \frac{z - t_0}{z - z_0}, \quad (8)$$

причем ветвь одной из двух функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$ берется произвольно, а ветвь другой функции подбирается по условию, чтобы $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0$.

Легко видеть, что функция $u(z)$ является аналитической в D^- .

Лемма 1. Пусть $\omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$ — диагональная матрица, а $W = (w_{ik})$ ($i, k = \overline{1, 2}$) — заданная матрица. Тогда матрица $\omega P - P\omega + W$ является диагональной тогда и только тогда, когда внедиагональные элементы матрицы $P = (p_{ik})$ ($i, k = \overline{1, 2}$) имеют вид

$p_{ik} = \frac{w_{ik}}{\omega_k - \omega_i}$, $i \neq k$, а p_{ii} — произвольные числа. При этом $\omega P - P\omega + W = \text{diag}(\omega_{11}, \omega_{22})$. Доказательство леммы содержится в [5].

Лемма 2. Пусть $\omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\omega_0 \neq 0$, а $W = (w_{ik})$ ($i, k = \overline{1, 2}$) — заданная матрица. Тогда матрица $\omega^{-1}P\omega - P + W$ является диагональной с разными элементами на главной диагонали тогда и только тогда, когда

$$w_{21} = 0, \quad p_{21} = \frac{1}{2\omega_0}(\omega_{11} - \omega_{22}), \quad p_{22} - p_{11} = \frac{1}{2}(\omega_{11} - \omega_{22}) + \frac{1}{\omega_0}w_{12},$$

а p_{12} — произвольное число. При этом $\omega^{-1}P\omega - P + W = \frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22})E$, где E — единичная матрица.

Рассмотрим решение однородной задачи Римана ($g(t) \equiv 0$):

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad t \in L, \quad \Phi^-(\infty) = 0. \quad (9)$$

Согласно [6] в точке t_0 определим число

$$\alpha = c^2 - 4 |a(t_0 - 0) \cdot a(t_0 + 0)|^4, \quad (10)$$

где

$$c = |a(t_0 - 0)|^2 + |a(t_0 + 0)|^2 - |b(t_0 + 0) - b(t_0 - 0)|^2. \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда решение задачи (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= X^+(z) A(z) \Phi_0^+(z), \\ \Phi^-(z) &= X^-(z) B(z) \Phi_0^-(z), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= A_0 \prod_{k=1}^r \exp[A_k(z - t_0)^k], \\ B(z) &= B_0 \prod_{k=1}^r \exp\left[B_k \left(\frac{z - t_0}{z - z_0}\right)^k\right], \end{aligned} \quad (13)$$

а $A_0 = G(t_0 + 0) B_0$; B_0 — решение матричного уравнения:

$$B_0^{-1} \Gamma B_0 = \omega_0; \quad (14)$$

$$\Gamma = G^{-1}(t_0 + 0) G(t_0 - 0);$$

$$\omega_0 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2); \quad \lambda_m = \frac{1}{2} (c + (-1)^{m+1} \sqrt{\alpha}), \quad m = \overline{1, 2};$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k M_k N_{n-k}, \quad n \geq 1; \quad N_n = -N_0 \sum_{l=0}^{n-1} C_n^l M_{n-l} N_l; \quad (15)$$

$$N_0 = A_0; \quad M_n = -\sum_{m=0}^{n-1} C_n^m M_m L_{n-m} M_0, \quad M_0 = A_0^{-1};$$

$$L_n = \sum_{k=0}^n C_n^k B_0 G^{(k)}(t_0 + 0) P_{n-k}, \quad B_1 = (t_0 - z_0) P_1;$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(t_0 - z_0)^n}{n!} \left[P_n - \frac{(-1)^n (n-1)!}{(t_0 - z_0)^n} \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m B_m (-1)^m \cdot m - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k P_k \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{(t_0 - z_0)^{n-k}} \sum_{m=1}^k C_{n-k}^m B_m (-1)^m \cdot m \right], \quad n \geq 2; \end{aligned} \quad (16)$$

$P_0 = E$; P_v ($v \geq 1$) — решение уравнения $\omega_v = \Omega_v + \omega_0 P_v - P_v \omega_0$, в котором P_v выбирается из условия, чтобы матрица ω_v была диагональной;*

* Согласно лемме 1, матрица P_v определяется с точностью до диагональных элементов, которые для определенности в дальнейшем будем полагать равными нулю.

$$\lambda_v = A_0^{-1} \sum_{s=0}^{v-1} C_v^s [G^{(v-s)}(t_0 - 0) B^{(s)}(t_0) - G^{(v-s)}(t_0 + 0) B^{(s)}(t_0) \omega_0] + \\ + \sum_{k=1}^{v-1} C_v^k [A^{-1}(t_0)]^{(v-k)} \sum_{s=0}^k C_k^s [G^{(k-s)}(t_0 - 0) B^{(s)}(t_0) - \\ - G^{(k-s)}(t_0 + 0) B^{(s)}(t_0) \omega_0],$$

и C_k^s здесь и ниже — биномиальные коэффициенты:

$$X^+(z) = \text{diag} \left\{ (z - t_0)^{\alpha_1(z)}, (z - t_1)^{\alpha_2(z)} \right\}, \\ X^-(z) = \text{diag} \left\{ \left(\frac{z - t_0}{z - z_0} \right)^{\beta_1(z)}, \left(\frac{z - t_0}{z - z_0} \right)^{\beta_2(z)} \right\}, \quad (17)$$

где

$$\alpha_m(z) = \sum_{v=0}^r B_{mv} \left[\left(\frac{z - t_0}{z - z_0} \right)^v - \frac{1}{u_1(z)} \sum_{k=0}^v \frac{R_k^{(v)}}{(z - z_0)^k} \right]; \\ \beta_m(z) = \sum_{v=0}^r B_{mv} \left[\left(\frac{z - t_0}{z - z_0} \right)^v - \frac{1}{u(z)} \sum_{k=0}^v \frac{R_k^{(v)}}{(z - z_0)^k} \right]; \\ B_{m0} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_m = \frac{\theta_m}{2\pi} - \kappa_m - i \frac{\ln \rho_m}{2\pi}, \quad m = \overline{1, 2}, \quad (18)$$

где $\lambda_m = \rho_m \exp(i\theta_m)$, а целые числа κ_m выбираются так, чтобы $-1 < \text{Re } B_{m0} \leq 0$;

$$B_{m1} = \frac{t_0 - z_0}{2\pi i} [\ln \sigma_m(t_0)]^{(1)};$$

$$B_{mv} = \frac{(t_0 - z_0)^v}{v! 2\pi i} [\ln \sigma_m(t_0)]^{(v)} - \frac{1}{v} \sum_{s=1}^{v-1} (-1)^{v-s} \cdot s \cdot C_v^s \cdot B_{ms}, \quad v = \overline{2, r};$$

$$R_0^{(v)} = 0; \quad R_k^{(v)} = \frac{v!}{k! (v-k)!} (z_0 - t_0)^k \left[\ln(z_0 - t_0) + \sum_{s=1}^{v-k} \frac{1}{v-s+1} \right], \quad k = \overline{1, v};$$

$$\sigma_m(t) = \lambda_m + \sum_{k=1}^r \frac{\omega_{mm}^{(k)}}{k!} (t - t_0)^k, \quad m = \overline{1, 2};$$

$\omega_{mm}^{(k)}$ — соответствующие элементы матрицы ω_k ; $\Phi_0^\pm(z)$ — кусочно-аналитический вектор, являющийся решением задачи

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t) \Phi_0^-(t), \quad t \in L, \quad \Phi_0^-(\infty) = 0, \quad (19)$$

где $G_0(t) = [X^+(t)]^{-1} A^{-1}(t) G(t) B(t) X^-(t) \in H_\beta^{(r)}$, $t \in \widetilde{t_{j-1} t_{j+1}}$, $t_j = t_0$, $\beta = \lambda$, а в остальной части контура L обладает теми же свойствами, что и матрица $G(t)$, т. е. точками разрыва матрицы $G_0(t)$ являются точки $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k$.

Теорема 2. Если $\alpha = 0$, то решение задачи (9) имеет вид

$$\Phi^+(z) = Q(z) \Phi_0^+(z), \quad z \in D^+, \\ \Phi^-(z) = P(z) \Phi_0^-(z), \quad z \in D^-, \quad (20)$$

где

$$0(z) = A(z)U[u_1(z)]X^+(z); P(z) = B(z)U[u(z)]X^-(z), \quad (21)$$

$$U[u] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\lambda_0}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \lambda_0 = \frac{1}{2}c \neq 0;$$

$A(z)$ и $B(z)$ определяются по формулам (13), где $A_0 = G(t_0 + 0) \times \times B_0 U[u_2(t_0 - 0)]$, а B_0 — решение матричного уравнения (14), в котором $\omega_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$; A_n и B_n определяются по формулам (15) и (16) соответственно, где $P_v (v \geq 1)$ — решение уравнения

$$U^{-1}[-1]P_v U[-1] - P_v + \Omega_v = \omega_v = \lambda_v E, \quad (22)$$

где $\lambda_v = \frac{1}{2}(\omega_{11}^{(v)} + \omega_{22}^{(v)})$; $\omega_{11}^{(v)}, \omega_{22}^{(v)}$ — диагональные элементы матрицы Ω_v ; $p_{11}^{(v)} = p_{12}^{(v)} = 0$; $p_{21}^{(v)} = \pi i \lambda_0 (\omega_{11}^{(v)} - \omega_{22}^{(v)})$, $p_{22}^{(v)} = 2\pi i \lambda_0 \omega_{12}^{(v)} - - \frac{1}{2}(\omega_{11}^{(v)} - \omega_{22}^{(v)})$; $\Omega_v = \lambda_0^{-1} U[u_2(t_0 + 0)] \{ \sum_{k=0}^{v-1} C_v^k A_0^{-1} [G(t_0 - 0) B^{(k)}(t_0) \times \times U^{(v-k)}[u_2(t_0 - 0)] - \lambda_0 G(t_0 + 0) B^{(k)}(t_0) U^{(v-k)}[u_2(t_0 + 0)] + + \sum_{m=0}^{v-1} \sum_{k=0}^m C_v^m C_m^k A_0^{-1} [G^{(v-m)}(t_0 - 0) B^{(k)}(t_0) U^{(m-k)}[u_2(t_0 - 0)] - - \lambda_0 G^{(v-m)}(t_0 + 0) B^{(k)}(t_0) U^{(m-k)}[u_2(t_0 + 0)] + \sum_{s=1}^{v-1} \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^m C_v^s C_s^m C_m^k \times \times [A^{-1}(t_0)]^{(v-s)} [G^{(s-m)}(t_0 - 0) B^{(k)}(t_0) U^{(m-k)}[u_2(t_0 - 0)] - \lambda_0 G^{(s-m)}(t_0 + + 0) B^{(k)}(t_0) U^{(m-k)}[u_2(t_0 + 0)]] \} U^{-1}[u_2(t_0 + 0)]$; $X^\pm(z)$ определяются

по формулам (17), в которых $\lambda_m = \lambda_0$, $\sigma_m(t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \lambda_k (t - t_0)^k$,

а λ_k определяются по формулам (22); $\Phi_0^\pm(z)$ — решение задачи (19), где $G_0(t) = Q^{-1}(t)G(t)P(t) \in H_\beta^{(r)}$, $t \in t_{j-1}t_{j+1}$, $t_0 = t_j$, $\beta = \lambda$, а в остальной части контура L обладает теми же свойствами, что и матрица $G(t)$.

Теорема 3. Пусть матрица $G(t)$ удовлетворяет условиям (5). Тогда решение задачи (9) имеет вид

$$\Phi^+(z) = \prod_{s=1}^k Q_s(z) \Phi_0^+(z), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \prod_{s=1}^k P_s(z) \Phi_0^-(z), \quad z \in D^-,$$

где $Q_s(z)$ и $P_s(z)$ определяется по формулам (21), а матрицы $A(z)$, $B(z)$, $X^\pm(z)$, $U[u]$ определяются формулами (13), (17), (21) с заменой матрицы $G(t)$ на матрицу $Q_{j-1}^{-1}(t) \dots Q_1^{-1}(t)G(t) \times \times P_1(t) \dots P_{j-1}(t)$ для каждой точки t_j ($j = \overline{1, k}$), причем в слу-

чае $\alpha = 0$ полагаем $U_j[u] = E$; $\Phi_0^\pm(z)$ — решение задачи (19), где $G_0(t) = \theta_k^{-1}(t) \dots \theta_1^{-1}(t) G(t) P_1(t) \dots P_k(t) \in H_\beta^{(r)}$, $t \in L$, $\beta = \lambda$.

Замечание 1. Если $g(t) \neq 0$, $t \in L$, то решение задачи (4) проводится аналогичным способом, при этом приходим к двум скалярным задачам «о скачке» с правой частью со степенно-логарифмическими особенностями (см., напр., [5]). Решение последних проводится по схеме, описанной в работе [7]. Тогда согласно формулам (6) легко получить решение задачи (1).

Замечание 2. Если $\lambda = 1$, то изложенные выше результаты сохраняют смысл, но во всех формулах, по которым определяется β , необходимо λ заменить на $1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Список литературы: 1. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977. 448 с. 2. Литвинчук Г. С. Спитковский И. М. Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана // ДАН СССР. 1980. 225. № 5. С. 1042—1046. 3. Литвинчук Г. С., Спитковский И. М. Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана, факторизация эрмитовых матриц-функций и некоторые проблемы приближения мероморфными функциями // Мат. сб. 1982. 117, вып. 2. С. 196—215. 4. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с. 5. Бузиновский Б. П., Светной В. П. Выделение особенностей решений матричной задачи Римана с разрывными коэффициентами. К., 1985. 34 с. Деп. в УкрНИИТИ 20.07.85, № 475УК—85. 6. Векца Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970. 380 с. 7. Светной А. П., Тихоненко Н. Я. К выделению особенностей решений задачи Римана // Изв. вузов. Математика. 1981. № 6. С. 78—82.

Поступила в редколлегию 01.03.87

УДК 517.5+517.9

Д. З. АРОВ

ГАММА-ПРОИЗВОДЯЩИЕ МАТРИЦЫ,
j-ВНУТРЕННИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ
С НИМИ ЗАДАЧИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. I

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов о γ -производящих матрицах

1. Класс $M(n, m)$ исследуемых в работе матриц-функций (сокращенно — м.-ф.) связан с известной задачей Нехари экстраполяции сжимающей м.-ф. $f(\zeta)$ ($|\zeta| = 1$, $\|f\|_\infty \leq 1$) порядка $n \times m$ по заданным ее коэффициентам Фурье $\gamma_k(f)$:

$$\gamma_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \zeta^k f(\zeta) |d\zeta|$$

при $k \geq 1$ в так называемом вполне неопределенном случае. В силу этой связи м.-ф. класса $M(n, m)$ названы γ -производящими матрицами.

Интерес автора к м.-ф. класса $M(n, m)$ вызван еще и тем, что к ним сводится исследование j -внутренних м.-ф. W , так как последние в существенном однозначно представимы в виде

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} A, \quad A \in M(n, m), \quad (1.1)$$

где b_1 и b_2 — внутренние м.-ф. порядков n и m . Так же, как класс $M(n, m)$ связан с задачей Нехари (задачей $N(n, m)$), класс $U(n, m)$ j -внутренних м.-ф. связан с обобщенной би-касательной задачей Шура—Неванлинны—Пика (задачей $SNP(n, m)$). Эти связи прослежены в настоящей работе, результаты которой в основном анонсированы в статьях [1, 2], и подробно изложены в депонированной рукописи [3].

2. Через $L_{n \times m}^p$ обозначается пространство измеримых по мере Лебега на единичной окружности $|\zeta| = 1$ м.-ф. $f(\zeta)$ порядка $n \times m$ с $\|f\|_\infty = \text{ess sup } \{\|f(\zeta)\| : |\zeta| = 1\}$ при $p = \infty$ и $\|f\|^p = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1}$

$(\text{Sp } f^*(\zeta) f(\zeta))^{\frac{p}{2}} |d\zeta|$ при $1 \leq p < \infty$.

Задача $N(n, m)$. Найти м.-ф. f из $L_{n \times m}^\infty$ такие, что

$$f(\zeta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} + \dots, \quad \|f\|_\infty \leq 1, \quad (1.2)$$

где $\gamma_k = \gamma_k(f)$ — заданные матрицы порядка $n \times m$, $k \geq 1$.

Здесь будут использованы результаты о задаче $N(n, m)$, имеющиеся в работах [4, 5]. В исследовании задачи (1.2) важную роль играет оператор Γ , определяемый блочно-ганкелевой матрицей $\Gamma = [\gamma_{j+k-1}]_1^\infty$,

$\Gamma \xi = \eta$, где $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty \in l_m^2$, $\eta = \{\eta_j\}_1^\infty$, $\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} \xi_k$. Через l_m^2 обозначается гильбертово пространство последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$

с $\|\xi\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2$, где $\xi_k \in C^m$, C^m — обычное евклидово пространство вектор-столбцов из m комплексных чисел).

Через F_Γ обозначается множество решений задачи (1.2). Известно, что $\|\Gamma\| = \min \{\|f\|_\infty : f \in L_{n \times m}^\infty, \gamma_k(f) = \gamma_k, k \geq 1\}$ и, следовательно, $F_\Gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow \|\Gamma\| \leq 1$. Поэтому, если существует $f \in F_\Gamma$ с $\|f\|_\infty < 1$, и только в этом случае имеем $\|\Gamma\| < 1$. Нас будет интересовать более общий, вполне неопределенный случай. Он выделяется следующим образом. Рассматривается $K_\Gamma = \{\gamma_0 : \gamma_0 = \gamma_0(f), f \in F_\Gamma\}$. Известно [4], что K_Γ — матричный шар, т. е. $K_\Gamma = \{\gamma_0 : \gamma_0 = \gamma_0^c + R_\lambda V R_\pi, V^* V \leq I\}$, где γ_0^c — матрица порядка $n \times m$ (центр шара); $R_\lambda \geq 0$ и $R_\pi \geq 0$ — матрицы порядков n и m (левый и правый полурадиусы шара, определяемые с точностью до положительного числа $r(R_\lambda \rightarrow r R_\lambda, R_\pi \rightarrow r^{-1} R_\pi)$).

Задача (1.2) называется вполне неопределенной, если $R_\lambda > 0$ и $R_\pi > 0$ у шара K_Γ . Известно [4], что для задачи (1.2) условия

а) $R_\lambda > 0$ и б) $R_\pi > 0$ эквивалентны, и они равносильны условиям а) $C^n \subset (I - \Gamma\Gamma^*)^{1/2} l_n^2$, в) $C^m \subset (I - \Gamma^*\Gamma)^{1/2} l_m^2$ (C^m рассматривается как подпространство таких $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$ из l_m^2 , у которых $\xi_k = 0$ при $k > 1$).

Обозначим через $R_\lambda(\Gamma)$ и $R_\pi(\Gamma)$ полурадиусы $R_\lambda(>0)$ и $R_\pi(>0)$ шара K_Γ , нормированные условием $\det R_\pi(\Gamma) = \det R_\pi(\Gamma)$. В [4] получены формулы для операторов, определяемых в естественных базисах в C^n и C^m матрицами $R_\lambda^{-2}(\Gamma)$ и $R_\pi^{-2}(\Gamma)$:

$$R_\lambda^{-2}(\Gamma) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} P_{C^n}(I - \rho\Gamma\Gamma^*)^{-1}|C^n, \quad R_\pi^{-2}(\Gamma) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} P_{C^m}(I - \rho\Gamma^*\Gamma)_{C^m}^{-1}$$

(P_N — ортопроектор на N , $A|N$ — сужение оператора A на N). В дальнейшем будет представлять интерес величина

$$d(\Gamma) = \det R_\pi^{-2}(\Gamma) (= \det R_\pi^{-2}(\Gamma)).$$

3. Через $H_{n \times m}^p$ обозначается пространство голоморфных в круге

$$D = \{z : |z| < 1\} \text{ м.-ф. } h(z) = \sum_0^\infty h_k z^k \text{ порядка } n \times m \text{ с } \|h\|_\infty = \sup_{|z| < 1} \{\|h(z)\| : |z| < 1\} \text{ при } p = \infty \text{ и } \|h\|^p = \sup_{|z| < 1} \int_{|z|=1} [\text{sp}(h^* \times \times (r\xi) h(r\xi))^{p/2} |d\xi|] \text{ при } 1 \leq p < \infty \text{ (} H_{n \times m}^2 \text{ — гильбертово пространство}$$

с $\|h\|^2 = \sum_0^\infty \text{sp}(h_k^* h_k)$). Известно, что для $h(z)$ из $H_{n \times m}^p$ существуют граничные значения $h(\zeta) = \lim h(r\xi)$ почти всюду на $\partial D = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, причем $h(\zeta) \in L_{n \times m}^p$, $\gamma_k(h) = 0$ при $k \geq 1$, $\gamma_{-k}(h) = h_k$ при $k \geq 0$; $\text{ess sup}_{|\zeta| < 1} \|h(\zeta)\| = \sup_{|z| < 1} \|h(z)\| (= \|h\|_\infty)$ при $p = \infty$, $(\|h\|^2 = \sup_{|z| < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \text{sp}(h^*(r\xi) h(r\xi)) |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \text{sp}(h^*(\zeta) h(\zeta)) |d\zeta|$ при $p = 2$). Будем отождествлять м.-ф. $h(z)$ из $H_{n \times m}^p$ с соответствующими м.-ф. $h(\zeta)$ из $L_{n \times m}^p$.

Через $B_{n \times m}$ обозначается множество м.-ф. h из $H_{n \times n}^\infty$ с $\|h\|_\infty \leq 1$, $B_n \stackrel{\text{def}}{=} B_{n \times n}$. М.-ф. h из $H_{n \times m}^\infty$ с $\det h(z) \neq 0$ является внешней, если $\ln |\det h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \ln |\det h(\zeta)| \cdot |d\zeta|$; м.-ф. b из $H_{n \times m}^\infty$ называется внутренней, если $b^*(\zeta) b(\zeta) = I_m$ почти всюду на ∂D . Известно, что для произвольной м.-ф. h из $H_{n \times m}^\infty$ с $\det h(z) \neq 0$ справедлива внешне-внутренняя факторизация: $h = b \cdot \varphi$, где $\varphi (\in H_{n \times n}^\infty)$ — внешняя, а $b (\in B_n)$ — внутренняя м.-ф.

Задача SNP (n, m). Найти м.-ф. s такие, что

$$b_1^{-1}(s - s_0) b_2^{-1} \in H_{n \times m}^\infty, \quad s \in B_{n \times m}, \quad (1.3)$$

где s_0, b_1, b_2 — заданные м.-ф., $s_0 \in B_{n \times m}, b_1 \in B_n, b_2 \in B_m, b_1$ и b_2 — внутренние м.-ф.

Заменой $f = b_1^{-1} s b_2^{-1}$ задача (1.3) сводится к задаче (1.2) с $\gamma_k = \gamma_k(b_1^{-1} s_0 b_2^{-1})$, $k \geq 1$. Задача (1.3) является вполне неопределенной, если соответствующая задача (1.2) является такой. Этот случай можно выделить также следующим образом.

Через $F_{s_0 b_1 b_2}$ обозначим множество решений задачи (1.3). Рассмотрим $z_0 (\in D)$ такое, что $\det [b_1(z_0) b_2(z_0)] \neq 0$. Пусть $K(z_0) = \{s(z_0) : s \in F_{s_0 b_1 b_2}\}$, $z_0 \in D$. Это матричный шар. Задача (1.3) называется вполне неопределенной, если левый и правый полурадиусы $R_\lambda(z_0)$ и $R_\pi(z_0)$ этого шара невырождены. Для вполне неопределенной задачи при $z_0 = 0$ имеем $d(\Gamma) = \det(R_\lambda(0)R_\pi(0))/|\det(b_1(0)b_2(0))|$.

К задаче $SNP(n, m)$ сводится целый ряд задач экстраполяции м.-ф. класса $B_{n \times m}$: при $b_1 = I_n$ и $b_2 = z^l I_m$ имеем матричную задачу Шура нахождения м.-ф. $s(\in B_{n \times m})$ по заданным первым коэффициентам ее разложения в ряд Маклорена, т. е. по заданным значениям $s(0)$, $s'(0)$, ..., $s^{(l-1)}(0)$; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = b I_m$, где b — скалярное произведение Бляшке с простыми нулями z_k , имеем матричную задачу Неванлинны—Пика нахождения м.-ф. $s(\in B_{n \times m})$ по заданным ее значениям $s(z_k)$; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = b$, где b — произведение Бляшке-Потапова, имеем задачу нахождения м.-ф. $s(\in B_{n \times m})$ по ее «касательным» данным, точная постановка и исследование которой выполнены в работах И. П. Федчиной [6]; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = b I_m$, где $b(z) = \exp\{-\alpha(1-z)/(1+z)\}$, ($\alpha > 0$), имеем задачу, к которой сводится матричная задача Крейна продолжения винтовой м.-ф. порядка n ($m = n$) с конечного отрезка $[-\alpha, \alpha]$. Когда b_1 и b_2 — произведения Бляшке-Потапова, имеем би-касательную задачу нахождения м.-ф. $s(\in B_{n \times m})$ по касательным данным для $s(z)$ и $s^*(z)$. Поэтому задача $SNP(n, m)$ названа *обобщенной би-касательной задачей Шура—Неванлинны—Пика*.

Задача $SNP(n, m)$ рассматривалась в работах [7, 8]. Она эквивалентна лифтинг-проблеме в случае, когда сжатия T_1 и T_2 , сплетающие сжатие X , таковы, что $T_1, T_2 \in C_0$ и $\text{rang}(I - T_1^* T_1) = n$, $\text{rang}(I - T_2^* T_2) = m$. Общая постановка лифтинг-проблемы и определенные результаты о ней имеются в известной монографии Б. С. Секефальви-Надя и Ч. Фойаша «Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве»; в дальнейшем ей был посвящен цикл работ Ч. Фойаша, З. Чаушеску, Г. Арсена и др. [9].

4. Приведем ниже в виде теоремы А известное описание множества F_Γ во вполне неопределенном случае, полученное в [10] при $n = m = 1$, в [4] — при $\|\Gamma\| < 1$ и, наконец, в [5] — без каких-либо дополнительных ограничений. Предварительно введем ряд понятий и обозначений.

Определение. γ -производящей матрицей называется матрица-функция $A(\xi)$ ($|\xi| = 1$) порядка $n + m$, разбитая на блоки $p_\pm(\xi)$ и $q_\pm(\xi)$:

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} p_-(\xi) & q_-(\xi) \\ q_+(\xi) & p_+(\xi) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

с диагональными блоками p_- и p_+ порядков n и m , если $A(\xi)$ обладает свойствами:

1) $A(\xi)$ принимает j -унитарные значения почти всюду на ∂D , т. е.

$$A^*(\xi) j A(\xi) = j, \quad A(\xi) j A^*(\xi) = j; \quad j = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}; \quad (1.5)$$

2) $p_+^{-1}(z)$ и $[p_-(z)]^{-1}$ — внешние матрицы-функции из B_m и B_n ;

3) $\chi \stackrel{\text{def}}{=} -p_+^{-1} q_+ \in B_{m \times n}$. (1.6)

Если к тому же

4) $p_+(0) > 0, \quad p_-^*(0) > 0$,

то назовем $A(\xi)$ нормированной γ -производящей матрицей.

Обозначения. Множество всех γ -производящих матриц (с фиксированными n и m) обозначим через $M(n, m)$, а нормированных — через $M^0(n, m)$.

Для м.-ф. $A(\varepsilon)$, рассматриваемой в (1.4), положим

$$F_A(E) = [p_-(\xi) E(\xi) + q_-(\xi)] \cdot [q_+(\xi) E(\xi) + p_+(\xi)]^{-1}, \quad (1.7)$$

$E \in B_{n \times m}$

$$F_A(B_{n \times m}) = \{f : f = F_A(E), E \in B_{n \times m}\}.$$

Теорема А. Для произвольной вполне неопределенной задачи 2) ЭА: $F_\Gamma = F_A(B_{n \times m})$, $A \in M(n, m)$.

5. Приведем теперь ряд новых результатов о γ -производящих матрицах и их связях с задачей $N(n, m)$.

Назовем γ -производящую матрицу $A (\in M(n, m))$ сингулярной,

если $F_A(0) (= q_- p_+^{-1}) \in B_{n \times m}$. Множество таких A обозначим через $M_s(n, m)$. Будет показано, что $F_A(B_{n \times m}) \subset B_{n \times m}$ для $A \in M_s(n, m)$.

Назовем γ -производящую матрицу $A (\in M(n, m))$ регулярной, если для нее не существует непостоянной м.-ф. A_s из $M_s(n, m)$ такой, что $A \cdot A_s^{-1} \in M(n, m)$. Множество таких A обозначим через $M_r(n, m)$.

Множества нормированных A из $M_r(n, m)$ и $M_s(n, m)$ обозначим соответственно через $M_r^0(n, m)$ и $M_s^0(n, m)$.

Теорема 1. Пусть $A \in M(n, m)$, $f_0 = F_A(0) (= q_- p_+^{-1} \in L_{n \times m}^\infty, \|f_0\|_\infty \leq 1)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$ — коэффициенты Фурье м.-ф. f_0 при ξ^{-k} ($k \geq 1$). Тогда

а) $F_A(B_{n \times m}) \subset F_\Gamma$;

б) задача (1.2) является вполне неопределенной;

в) $F_A(B_{n \times m}) = F_\Gamma \Leftrightarrow A \in M_r(n, m)$.

Теорема 2. а) Если $A_1, A_2 \in M_s(n, m)$, то $A_1 \cdot A_2 \in M_s(n, m)$;

б) если $A_1 \in M(n, m)$, $A_2 \in M_s(n, m)$, то $A_1 \cdot A_2 \in M(n, m)$;

в) $\forall A (\in M(n, m)) \exists! A_r, A_s: A = A_r \cdot A_s, \quad A_r \in M_r^0(n, m), \quad A_s \in M_s^0(n, m)$.

Теорема 3. Пусть $A_1, A_2 \in M(n, m)$. Тогда

а) $F_{A_1}(B_{n \times m}) \subset F_{A_2}(B_{n \times m}) \Leftrightarrow A_2^{-1} A_1 \in M_s(n, m)$;

б) $F_{A_1}(B_{n \times m}) = F_{A_2}(B_{n \times m}) \Leftrightarrow A_2^{-1} A_1 = \text{const}$;

в) если $F_{A_1}(B_{n \times m}) = F_{A_2}(B_{n \times m})$ и $A_1, A_2 \in M^0(n, m)$, то $A_1 = A_2$.

Считая, что $A_1 \simeq A_2$, если $A_1^{-1}A_2 = \text{const}$, и $A_1 < A_2$, если $A_2^{-1}A_1 \in M_s(n, m)$, получаем, что $M(n, m)$ (точнее, классы эквивалентности, на которые разбивается $M(n, m)$ соотношением « $\simeq$ ») — частично упорядоченное множество, а $M_r(n, m)$ — множество его максимальных элементов. По теореме 3,

$$A_1 < A_2 \Leftrightarrow F_{A_1}(B_{n \times m}) \subset F_{A_2}(B_{n \times m}),$$

$$A_1 \simeq A_2 \Leftrightarrow F_{A_1}(B_{n \times m}) = F_{A_2}(B_{n \times m}),$$

а по теореме 2 (пункт в) для любого A из $M(n, m)$ существует максимальный элемент $A_r \in M_r(n, m)$ такой, что $A \subset A_r$.

Для $A \in M(n, m)$ рассмотрим $f_E = F_A(E)$ ($E \in B_{n \times m}$). Согласно теореме 1

$$h_E \stackrel{\text{def}}{=} f_E - f_0 \in H_{n \times m}^\infty.$$

Рассмотрим

$$K(A; z_0) = \{h_E(z_0) : E \in B_{n \times m}\}, \quad (z_0 \in D). \quad (1.8)$$

Теорема 4. а) $\forall A \in M(n, m) \forall z_0 \in D : K(A, z_0)$ — матричный шар с невырожденными левым и правым полурадиусами $R_\Lambda(A; z_0)$ и $R_\Pi(A; z_0)$, для которых при нормировке $\det R_\Lambda = \det R_\Pi$ имеем

$$R_\Lambda^{-2}(A; z_0) = [(p_-^*)(z_0)]^* \cdot (p_-^*)(z_0) - [(q_-^*)(z_0)]^* \cdot (q_-^*)(z_0), \quad (1.9)$$

$$R_\Pi^{-2}(A; z_0) = p_+(z_0)p_+^*(z_0) - q_+(z_0)q_+^*(z_0); \quad (1.10)$$

б) если $A_1 < A_2$, то $R_\Lambda^{-2}(A_2, z_0) \leq R_\Lambda^{-2}(A_1, z_0)$ и $R_\Pi^{-2}(A_2, z_0) \leq R_\Pi^{-2}(A_1, z_0)$;

в) если $A_1 < A_2$ и $\det R_\Lambda(A_2, z_0) = \det R_\Lambda(A_1, z_0) \det R_\Pi(A_2, z_0) = \det R_\Pi(A_1, z_0)$, то $A_1 \simeq A_2$.

Обозначим

$$d(A) = \det R_\Lambda^{-2}(A; 0) (= \det R_\Pi^{-2}(A; 0)).$$

Теорема 5. Пусть $A \in M(n, m)$, $f_0 = F_A(0)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, ($k \geq 1$). Тогда

а) $R_\Lambda^{-2}(\Gamma) \leq R_\Lambda^{-2}(A; 0)$, $R_\Pi^{-2}(\Gamma) \leq R_\Pi^{-2}(A; 0)$;

б) $A \in M_r(n, m) \Leftrightarrow d(\Gamma) = d(A)$.

В работе получен и другой критерий того, что $A \in M_r(n, m)$. Для его формулировки рассмотрим пространства

$$H_{p \times q}^2 = L_{p \times q}^2 \ominus \zeta H_{p \times q}^2 \quad (= \{h : h \in L_{p \times q}^2, \gamma_{-k}(h) = 0, k \geq 1\}),$$

$$L_p^2 = L_{p \times 1}^2, \quad H_p^2 = H_{p \times 1}^2, \quad \bar{H}_p^2 = \bar{H}_{p \times 1}^2.$$

Для унитарнозначной м.-ф. ($f \in L_{n \times n}^\infty$) запись $\text{ind } f = 0$ будет означать, что f представима в виде

$$f = \Phi_-^{-1} \Phi_+, \quad \Phi_+ \in H_{n \times n}^2, \quad \Phi_- \in \bar{H}_{n \times n}^2, \quad (1.11)$$

причем это представление в существенном однозначно, т. е. если $f = \tilde{\Phi}_-^{-1} \tilde{\Phi}_+$ — другое такое же представление, то $\tilde{\Phi}_\pm = x \cdot \Phi_\pm$, где $x = \text{const}$, $\det x \neq 0$.

Теорема 6. Пусть $A \in M(n, m)$, $f_{E_0} = F_A(E_0)$, где E_0 — постоянная матрица порядка $n \times m$, $E_0^* E_0 = I_m$ или $E_0 E_0^* = I_n$ соответственно при $n \geq m$ и $n < m$. Для того чтобы $A \in M_r(n, m)$, необходимо и достаточно, чтобы при любой рассматриваемой E_0 имели

а) в случае $m = n$ краевая задача $f_{E_0}^* h_+ = h_-$, $h_+ \in H_n^2$, $h_- \in \bar{\zeta} \bar{H}_n^2$ (1.12) имела лишь нулевое решение ($h_+ = h_- = 0$), что для f_{E_0} эквивалентно условию $\text{ind } f_{E_0} = 0$ (достаточно, чтобы это условие выполнялось при $E_0 = \pm I_n$);

б) в случае $m < n$ задача (1.12) имела решения лишь с $h_- = 0$;

в) в случае $m > n$ задача

$$f_{E_0} h_- = h_+, \quad h_+ \in H_n^2, \quad h_- \in \bar{\zeta} H_m^2 \quad (1.13)$$

имела решение лишь при $h_+ = 0$.

Список литературы: 1. Аров Д. З. Об одной интерполяционной задаче и индефинитном произведении Бляшке—Потапова // Тез. докл.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Минск, 1982. С. 14—15. 2. Arov D. Z. Three problems about j -inner matrix—functions // Lect. Notes in Math. 1043. Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems // Springer. 1984. P. 164—168. 3. Аров Д. З. Регулярные j -внутренние матрицы-функции и соответствующие задачи продолжения. К., 1987. С. 77. Деп. в УКРНИИТИ 15.01.87, № 406—Уж87. 4. Адамян В. М. и др. Бесконечные ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн // Изв. АН АрмССР, сер. мат. 1971. VI, № 2—3. С. 87—112. 5. Адамян В. М. Невырожденные полуунитарные сцепления унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1973. 7, вып. 4. С. 1—16. 6. Федчина И. П. Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика // ДАН АрмССР. 1975. XI, № 4. С. 214—218. 7. Аров Д. З., Крейн М. Г. О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопределенных проблемах продолжения // Acta Sci. Math. 1983. 45, № 1—4. P. 33—50. 8. Helton I. W. Non-euclidean functiona analysis and electronics // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1982. 7, № 1. P. 1—64. 9. Arsene Cr. et al. On intertwining dilations, VIII / Gr. Arsene, Z. Ceausescu, C. Foias // Journ. of Operator Theory. 1980. 4. P. 55—91. 10. Адамян В. М. и др. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И. Шура // В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн // Функцион. анализ и его прил. 1968. 2, вып. 4. С. 1—17.

Поступила в редколлегию 06.01.86

УДК 513.7

Л. Б. БИРБАИР

ЗАМЕЧАНИЯ О СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВА РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. В данной статье обобщаются результаты заметки [1]. Изложение ведется в случае пространства S^n . Однако все результаты, за исключением п. 5, справедливы и в вещественном случае.

2. Отображение $F: C^n \rightarrow C^n$ называется алгебраическим однородным степени k , если существует такое k -линейное симметрическое отображение $\tilde{F}: C^n \times C^n \times \dots \times C^n = (C^n)^k \rightarrow C^n$, что $F = \partial \circ \tilde{F}$. (Здесь $\partial: C^n \rightarrow (C^n)^k$ — диагональное отображение: $\partial(x) = (x, x, x, \dots, x) \in (C^n)^k$).

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в C^n , а $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — координаты вектора x в этом базисе. Тогда

$$F(x) = \sum \frac{k!}{r_1! r_2! \dots r_n!} F_{r_1 \dots r_n} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \quad (1)$$

где

$$\sum_{i=1}^n r_i = k; F_{r_1 r_2 \dots r_n} = \tilde{F}(\underbrace{e_1, e_1, \dots, e_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{r_n}).$$

Обозначим через $\tilde{P}^k(C^n)$ пространство всех однородных степени k отображений из C^n в C^n . Оно, очевидно, изоморфно $C^{n!}$, где l — это число целочисленных точек положительного ортанта, лежащих на гиперплоскости $\sum r_i = k$. Однородное степени k отображение назовем регулярным, если $F^{-1}(0) = \{0\}$. Подмножество регулярных отображений обозначим $P^k(C^n)$.

Теорема 1. $P^k(C^n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{P}^k(C^n)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi: C^n \times C^{n!} \rightarrow C^n$, определенное следующим образом:

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \text{ где } \sum_{i=1}^n r_i = k;$$

$$x \{x_i\} \in C^n, \lambda = \{\lambda_i\} \in C^{n!}.$$

Если $x \neq 0$, то $\text{rank } D\Phi = n$, так как $\text{rank } \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = n$ ($x \neq 0$).

Таким образом, $0 \in C^n$ является регулярным значением отображения $\Phi: (C^n \setminus 0) \times C^{n!} \rightarrow C^n$. Поэтому является подмногообразием в $(C^n \setminus 0) \times C^{n!}$ коразмерности n . По теореме Абрахама (см. [2]), для открытого и всюду плотного множества $\Lambda \in C^n$ подмногообразие $(C^n \setminus 0) \times \lambda_0$, $\lambda_0 \in \Lambda$ трансверсально $\Phi^{-1}(0)$. Обозначим через $V_{\lambda_0}^n$ множество $V_{\lambda_0} = (C^n \setminus 0) \times \lambda_0 \cap \Phi^{-1}(0) = \Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$. Если $\lambda_0 \in \Lambda$, то имеются две возможности:

1. V_{λ_0} — подмногообразие размерности 0.
2. $V_{\lambda_0} = \emptyset$.

Случай 1 не может иметь места, так как Φ_{λ_0} — однородное отображение, а поэтому, если $x_0 \in \Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$, то и вся прямая μx_0 также принадлежит $\Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$. Значит, $V_{\lambda_0} = \emptyset$.

Поскольку Φ_λ пробегает все множество $\tilde{P}^k(C^n)$, теорема 1 доказана.

Два отображения $F_1, F_2: C^n \rightarrow C^n$ называются линейно эквивалентными, если существуют такие линейные отображения: $A, B \in Gl(n, C)$, что $F_1 = A \circ F_2 \circ B^{-1}$. Счевидно, что данное отношение

эквивалентности сохраняет условие регулярности. Таким образом, на $P^k(C^n)$ задано действие группы $Gl(n, C) \times Gl(n, C): \alpha\{(A, B), F\} = A \circ F \circ B^{-1}$.

Действие α продолжается, конечно, и на $\bar{P}^k(C^n)$. Наша дальнейшая задача — более детальное его изучение.

3. Обозначим через $L^n(C^n)$ пространство всех k -линейных форм на C^n . Оно, очевидно, изоморфно C^l . (Напомним, что l — число целочисленных точек положительного ортанта, лежащих на гиперплоскости $\sum r_i = k$).

Пусть $\bar{P}^k(C^n) \subset \bar{P}^k(C^n)$ — подмножество, определяемое следующим образом: для любого элемента $F \in \bar{P}^k(C^n)$ его компоненты $\{F^1, F^2, \dots, F^n\}$ линейно независимы, как векторы из $L^k(C^n)$. Разумеется, $\bar{P}^k(C^n) \supset P^k(C^n)$ и $\bar{P}^k(C^n)$ открыто и всюду плотно в $\bar{P}^k(C^n)$.

Рассмотрим многообразие $Gr(l, n, C)$ — грасманово многообразие n -мерных подпространств C^l . Пусть $\rho: P^k(C^n) \rightarrow Gr(l, n, C)$ — отображение, определяемое следующим образом:

$$\rho(F = \{F^1, F^2, \dots, F^n\}) = \text{Lin}\{F^1, F^2, \dots, F^n\} \subset L^k(C^n).$$

Известно (см., напр., [3]), что отображение ρ является локально-тривиальным расслоением. Нижеследующая теорема согласует эту структуру с действием α .

Теорема 2. *Существует каноническое действие β , что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} Gl(n, C) \times Gl(n, C) \times \bar{P}^k(C^n) & \xrightarrow{\alpha} & \bar{P}^k(C^n) \\ q \times \rho \downarrow & & \rho \downarrow \\ Gl(n, C) \times Gr(l, n, C) & \xrightarrow{\beta} & Gr(l, n, C) \end{array}$$

коммутативна. (Здесь $q: (Gl(n, C))^2 \rightarrow Gl(n, C)$ — стандартная проекция $q(A, B) = B$).

Доказательство. Пусть $\{B, h\}$ — пара из $Gl(n, C) \times Gr(l, n, C)$, выберем $(B, A) \in q^{-1}B$ и $F_0 \in \rho^{-1}(h)$. Определим теперь:

$$\beta(B, h) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha\{(B, A), F_0\}).$$

Это определение не зависит от выбора A и F_0 . В самом деле, линейный невырожденный оператор $\tilde{B}: L^k(C^n) \rightarrow L^k(C^n)$, соответствующий преобразованию B , переводит подпространство $\text{Lin}\{F_0^1, F_0^2, \dots, F_0^n\}$ на $\text{Lin}\{\tilde{B}F_0^1, \dots, \tilde{B}F_0^n\}$. Оно же, в свою очередь, инвариантно относительно оператора $A: L^k(C^n) \rightarrow L^k(C^n)$, соответствующего преобразованию A . С другой стороны, любое отображение $F \in \rho^{-1}(h)$ представимо в виде $F = A \circ F_0$, $A \in Gl(n, C)$. Таким образом, $\beta(B, h)$, как точка грасманова многообразия, не зависит от выбора B, F_0 . Что и требовалось доказать.

Замечание. Образ пространства $P^k(C^n)$ при отображении ρ также инвариантен относительно действия β .

Далее подробно изучим строение расслоения ρ на $P^k(C^n)$. Рассмотрим подмножество $H \subset P^k(C^n)$, такое что $\forall (F \in H) \{\det\{F(e_i)\} \neq 0\}$.

Теорема 3. $\forall (F \in P^k(\mathbb{C}^n)) \exists (B \in Gl(n, \mathbb{C}))$, что $\alpha \{(I, B), F\} \in H$.
 Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая

Лемма. Пусть $F \in P^k(\mathbb{C}^n)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1. $F \in P^k(\mathbb{C}^n)$.
 2. F — собственное отображение (т. е. прообраз каждого компактного подмножества компактен).
- Доказательство леммы следует из соответствующих утверждений монографии [4].

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим декартово произведение $F^{(n)}: (\mathbb{C}^n)^n \rightarrow (\mathbb{C}^n)^n$; $F^{(n)} = \{F, F, \dots, F\}$. Из собственности F (лемма) вытекает собственность $F^{(n)}$. Отсюда, по теореме Осгуда, $F^{(n)}$ — сюръективно. Обозначим через E подмножество $(\mathbb{C}^n)^n$, такое, что $\forall (e \in E) [\det \{e_i\} \neq 0]$. E — открыто по Зарисскому в $(\mathbb{C}^n)^n$. Поэтому $(F^{(n)})^{-1}(E) \cap E \neq \emptyset$. Выберем $e \in (F^{(n)})^{-1}(E) \cap E$. В качестве B можно выбрать матрицу перехода от исходного базиса к базису $e = \{e_1 e_2, \dots, e_n\}$. Теорема 3 доказана.

Отображение ρ на множестве H устроено следующим образом. Пусть $F \in H$. В формуле (1) выделяются все вектор-мономы $F_{0,0,\dots,k,\dots,0} x_i^k$, соответствующие чистым k -м степеням переменных. Коэффициенты $F_{0,0,\dots,k,\dots,0}$ образуют квадратную $n \times n$ матрицу. Отображение ρ приводит ее к единичной. Тем самым, в i -й строчке формулы остается только моном x_i^k и смешанные мономы.

Более точно. Разложим $L^k(\mathbb{C}^n)$ в прямую сумму $L = L_1 \oplus L_2$, где $L_1 = \text{Lin} \{x_i^k\}$, а $L_2 = \text{Lin} \{x^p, |p| = k, p_j \neq k\}$. Обозначим через Q_i^1 проекцию F^i на L_1 , а Q_i^2 — проекцию F^i на L_2 . Рассмотрим далее грассманово многообразие $Gr(l, n, \mathbb{C})$, как многообразие n -мерных подпространств в $L^k(\mathbb{C}^n)$. Множество графиков линейных отображений из L_1 в L_2 образует область определения стандартной карты U в $Gr(l, n, \mathbb{C})$. Пусть $u = \{u_p^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $|p| = k$, $p_j \neq k$ — локальные координаты в карте U . (Мы считаем, что выбраны базисы $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в L_1 и $\{f_1, f_2, \dots, f_{l-n}\}$ в L_2).

Пусть $\psi: U \rightarrow P^k(\mathbb{C}^n)$ вложение:

$$\psi(u) = \sum_i (x_i^k e_i + \sum_p u_p^i x^p e_i). \quad (2)$$

Теорема 4. Отображение $\hat{\psi}$ является сечением расслоения $\rho|_H$.

Доказательство. Пусть $F \in H$ — регулярное однородное степени k отображение, тогда

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 \\ Q_2^1 & Q_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ Q_n^1 & Q_n^2 \end{pmatrix}.$$

Плоскость, натянутая на $\{F^1, F^2, \dots, F^n\}$, является графиком некоторого отображения $u: L_1 \rightarrow L_2$. При фиксированных базисах

$\{f\}$ и $\{g\}$, соответствующие им локальные координаты плоскости $\text{Lin}\{F^1, F^2, \dots, F^n\}$, получаются домножением F на матрицу $\{Q^1\}^{-1}$. Для отображения, заданного формулой (2) (при фиксированных значениях u), $\{Q^1\}$ — единичная матрица. Поэтому локальные координаты соответствующей плоскости есть в точности u'_α . Что и требовалось доказать.

5. Изложенная выше совокупность утверждений имеет ряд приложений к задаче о классификации однородных отображений. В заметке [1] такая задача была решена для квадратичных отображений в $\mathbb{C}^3$. Приводимый ниже результат был ранее в несколько иной форме получен в препринте [5]. С учетом изложенной в ил. 1—4 техники его доказательство, а также вычисления коразмерностей орбит значительно упрощаются.

Теорема 5. (*Линейная классификация регулярных кубических отображений в $\mathbb{C}^2$.*) Пусть $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — регулярное однородное степени 3 отображение. Тогда оно линейно эквивалентно одному из следующих, приведенных ниже типов:

$$B_1 \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}; \quad B_2 \begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1x_2^2 \\ x_2^3 + 3ax_1x_2^2 \end{pmatrix}; \quad B_3 \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 5, установим следующий факт.

Утверждение. Пусть $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию теоремы 5. Тогда существует базис $\{e_1, e_2\}$ такой, что $\tilde{F}(e_1, e_1e_2) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим трилинейное отображение: $\tilde{F}: (\mathbb{C}^2)^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$. По лемме оно существенно на диагонали $\{x, x, x\} \in (\mathbb{C}^2)^3$. Поэтому и на сдвинутой диагонали $\{x, x, x + \delta\}$; $\delta \in \mathbb{C}^2$ — отображение $F\delta = \tilde{F}(x, x, x + \delta)$ также будет собственным. Кратность роста векторного поля F в точке 0 равна 9. По теореме Паламодова [6] при деформации $F_\delta = \tilde{F}(x, x, x + \delta)$ из нее должно ответиться некоторое количество особых точек с суммарной кратностью 9. У векторного поля F_δ имеются две не интересные нам особые точки $x = 0$ и $x = -\delta$. Кратность F_δ в точке $x = 0$ равна 4. Точка $x = -\delta$ — простая. Поэтому $\exists (e \in \mathbb{C}^2)$, что $F_\delta(e) = 0$; $e \neq 0$, $e + \delta = 0$. Выберем $e_1 = e$, $e_2 = e + \delta$. Таким образом, $F_\delta(e) = \tilde{F}(e_1, e_1, e_2) = 0$. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 5. Если при фиксированном базисе $\{e_1, e_2\}$ $F \in H$, то оно может быть приведено к виду (2). Если коэффициент при вектор-мономе $x_1x_2^2$ равен 0, то F принадлежит орбите типа B_1 , в противном случае F элементарными преобразованиями приводится к виду B_2 .

Как и в работе [1], вычисления коразмерностей орбит удобно производить в грассмановых координатах. Пусть μ_i — коразмерность орбиты типа B_i . Тогда $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$.

Список литературы: 1. Бирбраир Л. Б., Сапронов Ю. И. Линейная классификация квадратичных отображений в пространстве C^3 // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1978. Вып. 9. С. 10—23. 2. Хириш М. Дифференциальная топология. М., 1979. 297 с. 3. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространств. М., 1970. 442 с. 4. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М., 1965. 160 с. 5. Dimca A., Gibson C. G. On contract simple germs of the plane L , 1980. 54 p. 6. Паламодов В. П. О кратности голоморфного отображения // Функцион. анализ и прил. 1967. 1, вып. 3. С. 45—47.

Поступила в редакцию 12.05.86

УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ, С. Н. ЗИНЕНКО

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ КРАТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ НЕПОЛНОГО РАНГА И ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧЕЙ ШУРА

В работе [1] показано, что вырожденной задаче Шура соответствует семейство элементарных кратных множителей неполного ранга, при помощи каждого из которых она решается. Напомним, что каждый такой множитель строится по матрице данных задачи C_n и некоторому подпространству типа K . Рассмотрим теперь обратную задачу. А именно, пусть задан элементарный кратный множитель неполного ранга. Спрашивается, имеется ли такая вырожденная задача Шура, решение которой приводит к данному множителю. Для двучленных множителей ответ на этот вопрос дан в работе [2] и выглядит следующим образом.

Теорема 1. Для того чтобы двучленный множитель

$$\tilde{b}(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} P \\ C^* \end{bmatrix} (P - CC^*)^{[-1]} [P, C] \tilde{j}, \quad \tilde{j} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

порождался некоторой задачей Шура, необходимо и достаточно выполнение условия $q \geq p - \text{rang } P$.

В данной работе поставленный вопрос выясняется для случая произвольного элементарного кратного множителя.

Пусть $\tilde{B}(\zeta) = \tilde{d}_0 \zeta^{n+1} + \tilde{d}_1 \zeta^n + \dots + \tilde{d}_{n+1}$, $\tilde{B}(1) = I$, $\tilde{j}$ — элементарный кратный множитель. Как показано в [3], $\tilde{B}(\zeta)$ допускает представление

$$\tilde{B}(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta) \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} \Lambda_{p,n}^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,n}^*(1) \end{bmatrix} \tilde{j},$$

где

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} P \\ C^* \end{bmatrix} (P - CC^*)^{[-1]} [P, C];$$

$$\Lambda_{p,n}(\zeta) = [I_p, \zeta I_p, \dots, \zeta^n I_p].$$

При этом выполнены соотношения

$$P^* = P, P^2 = P; \quad (1)$$

$$V_{p,n}^* P = P V_{p,n}^* P; \quad (2)$$

$$C V_{q,n} = P V_{p,n} C; \quad (3)$$

$$P - C C^* \geq 0, \operatorname{rang}(P - C C^*) = \operatorname{rang} P; \quad (4)$$

$$V_{p,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I_p & 0 & & \\ & I_p & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы доказать, что множитель $\tilde{B}(\xi)$ связан с решением некоторой задачи Шура, надо установить существование матрицы $C_n: E_-^{(n)} \rightarrow E_+^{(n)}$, удовлетворяющей условиям

$$P C_n = C; \quad (5)$$

$$C_n V_{q,n} = V_{p,n} C_n; \quad (6)$$

$$I - C_n C_n^* \geq 0, \operatorname{rang}(I - C_n C_n^*) = \operatorname{rang} P. \quad (7)$$

В этом случае C_n допускает представление

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & & \\ c_1 c_0 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ c_n & & c_1 c_0 & \end{bmatrix},$$

подпространство Δ_P является для C_n подпространством типа K и множитель $\tilde{B}(\xi)$ порождается матрицей C_n и подпространством Δ_P .

Теорема 2. Пусть $\tilde{B}(\xi)$ — элементарный кратный множитель. Если

$$q \geq (n+1)p - \operatorname{rang} P, \quad (8)$$

то существует матрица C_n , удовлетворяющая условиям (5)–(7), т. е. множитель $\tilde{B}(\xi)$ порождается некоторой задачей Шура

Доказательство. Пусть $E_+^{(n)} = \Delta_P \oplus \Delta_P^\perp$. В силу (2) подпространства Δ_P и $\Delta_P^\perp$ инвариантны соответственно относительно $V_{p,n}^*$ и $V_{p,n}$. Введем в рассмотрение подпространства

$$\tilde{L}_k = \{f \in \Delta_P, V_{p,n}^{*k+1} f = 0\};$$

$$\tilde{G}_k = \{g \in \Delta_P^\perp, V_{p,n}^{k+1} g = 0\}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть

$$L_k = \tilde{L}_k \ominus \tilde{L}_{k-1}, \quad L_0 = \tilde{L}_0,$$

$$G_k = \tilde{G}_k \ominus \tilde{G}_{k-1}, \quad G_0 = \tilde{G}_0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда $\Delta_P = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_n$; $\Delta_P^\perp = G_n \oplus G_{n-1} \oplus \dots \oplus G_0$. Отметим, что $V_{p,n}^* L_k \subset L_{k-1}$, $V_{p,n} G_k \subset G_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

На $C_n: E_-^{(n)} \rightarrow E_+^{(n)}$ будем смотреть, как на расширение $C: E_-^{(n)} \rightarrow \Delta_P$. Расширять C до C_n будем пошагово. Сначала расширим C до оператора

$$R_0 = C \oplus Q_0, \quad Q_0: E_-^{(n)} \rightarrow G_n. \quad (9)$$

При этом потребуем, чтобы R_0 удовлетворял условиям

$$R_0 V_{q,n} = P_0 V_{p,n} R_0; \quad (10)$$

$$P_0 - R_0 R_0^* \geq 0, \quad \text{rang}(P_0 - R_0 R_0^*) = \text{rang } P, \quad (11)$$

где* $P_0 = P_{\Delta_P \oplus G_n}$, которые являются аналогами условий (3), (4). Отметим, что непосредственно из определения ортопроектора P_0 следуют соотношения $P_0^* = P_0$, $P_0^2 = P_0$; $V_{p,n}^* P_0 = P_0 V_{p,n}^* P_0$, являющиеся аналогами условий (1), (2).

Займемся условием (10). Перепишем его в развернутом виде: $(C + Q_0) V_{q,n} = (P + P_{G_n}) V_{p,n} (C + Q_0)$. Так как $\Delta_{Q_0} \subset G_n$ и $V_{p,n} G_n \subset G_{n-1}$, то $(P + P_{G_n}) V_{p,n} Q_0 = 0$. Учитывая (3), получаем, что (10) можно переписать следующим образом:

$$Q_0 V_{q,n} = P_{G_n} V_{p,n} C. \quad (10)$$

Перейдем к условию (11). При разложении $E_+^{(n)} = (\Delta_P^\perp \ominus G_n) \oplus \oplus G_n \oplus \Delta_P$ имеем

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0 \\ c \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$P_0 - R_0 R_0^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & x \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & x^* & I \end{bmatrix},$$

где $x = -Q_0 c^* (I - cc^*)^{-1}$; $r_1 = I - Q_0 Q_0^* + xc^* Q_0^*$; $r_2 = I - cc^* > 0$. Поэтому (11) равносильно условию $r_1 = 0$. После простых преобразований перепишем его в виде $Q_0 (I - c^* c)^{-1} Q_0^* = I$, а это эквива-

лентно тому, что $Q_0 = V_0 (I - C^* C)^{\frac{1}{2}}$ (12), где V_0 — некоторое отображение из $E_-^{(n)}$ в G_n , удовлетворяющее условию $V_0 V_0^* = I_{G_n}$ (13).

Согласование (10) и (12) приводит к дополнительному условию на V_0 :

$$V_0 (I - C^* C)^{\frac{1}{2}} V = P_{G_n} V_{p,n} C. \quad (14)$$

* P_L обозначает ортопроектор на подпространство L .

Покажем, что оператор V_0 определяется уравнением (14) на подпространстве $H_0 = \Delta_{(I-C^*C)}^{\frac{1}{2}} V_{q,n}$ как некоторое сжатие T_0 . Для этого докажем, что для любого $f \in E_-^{(n)}$ выполняется

$$\|(I - C^*C)^{\frac{1}{2}} V_{q,n} f\| \geq \|P_{G_n} V_{p,n} C f\|. \quad (15)$$

Это условие равносильно неравенству

$$V_{q,n}^* V_{q,n} - V_{q,n}^* C^* C V_{q,n} \geq C^* V_{p,n}^* P_{G_n} V_{p,n} C. \quad (16)$$

Из (3) следует $V_{q,n}^* C^* C V_{q,n} = C^* V_{p,n}^* P V_{p,n} C$. Далее, $V_{q,n}^* V_{q,n} = P_{E_-^{(n-1)}}$. Поэтому (16) можно переписать в виде

$$P_{E_-^{(n-1)}} \geq C^* V_{p,n}^* (P + P_{G_n}) V_{p,n} C. \quad (17)$$

Справа в этом неравенстве стоит сжатие. Поэтому достаточно доказать, что его образ лежит в $E_-^{(n-1)}$, т. е. в $\text{Ker } V_{q,n}^*$. Но для оператора $C^* V_{p,n}^* P V_{p,n} C$ это очевидно. Поэтому остается проверить, что $V_{q,n}^* C^* V_{p,n}^* P_{G_n} V_{p,n} C = 0$. Для этого достаточно убедиться в том, что $P_{G_n} V_{p,n} C V_{q,n}^* = 0$. Из (2) и (3) следует $C V_{p,n}^* = P V_{p,n}^* C$. Значит,

$$\begin{aligned} P_{G_n} V_{p,n} C V_{q,n}^* &= P_{G_n} V_{p,n} P V_{p,n}^* C = \\ &= P_{G_n} V_{p,n} (P + P_{\Delta_P^\perp}) V_{p,n} C = P_{G_n} V_{p,n}^{n+1} C = 0. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались тем, что $P_{G_n} V_{p,n} P_{\Delta_P^\perp} = 0$ и $P + P_{\Delta_P^\perp} = I$.

Итак, неравенство (15) доказано. Из этого неравенства следует, что соотношение

$$T_0 (I - C^*C)^{\frac{1}{2}} V_{q,n} = P_{G_n} V_{p,n} C \quad (18)$$

определяет на подпространстве H_0 сжатие T_0 . Сравнивая (14) и (18), получаем $V_0|_{H_0} = T_0$ (19). Теперь необходимо показать, что сжатие T_0 можно продолжить до оператора V_0 , удовлетворяющего условиям (13) и (19).

Пусть $E_-^{(n)} = H_0 \oplus H_0^\perp$ (20) и в соответствии с этим разложением $V_0 = [T_0, D_0]$ (21), т. е. $D_0: H_0^\perp \rightarrow G_n$. Тогда условие (19) следует из (21), а условие (13) приобретает вид $T_0 T_0^* + D_0 D_0^* = I_{G_n}$, откуда находим $D_0 = (I_{G_n} - T_0 T_0^*)^{\frac{1}{2}} U_0$, где U_0 отображает $H_0^\perp$ в G_n , при этом $U_0 U_0^*$ является ортопроектором в G_n на $\Delta_{I - T_0 T_0^*}$.

Итак, расширение $R_0 = C \oplus Q_0$ определяется оператором $Q_0 = V_0 (I_{E_-^{(n)}} - C^*C)^{\frac{1}{2}}$, при этом V_0 имеет вид $V_0 = [T_0, (I_{G_n} -$

$-T_0 T_0^* \frac{1}{2} U_0]$, где T_0 — сжатие, определяемое равенством (18), а $U_0: H_0^\perp \rightarrow G_n$ обладает тем свойством, что $U_0 U_0^*$ является ортопроектором на $\Delta_{I-T_0 T_0^*}$.

Очевидно, указанное расширение существует, если $\dim H_0^\perp \geq \dim G_n$ (22). Из вида H_0 следует, что $\dim H_0^\perp = \dim E_- = q$. Согласно условию теоремы $q \geq (n+1)p - \text{rang } P = \dim E_+^{(n)} - \dim \Delta_P = \dim \Delta_P^\perp \geq \dim G_n$. Таким образом, условие (22) заведомо выполнено и соответствующее расширение R_0 построено.

Следующий шаг состоит в построении расширения $R_1 = R_0 \oplus Q_1$, $Q_1: E_-^{(n)} \rightarrow G_{n-1}$, удовлетворяющего условиям $R_1 V_{q,n} = P_1 V_{p,n} R_1$, $P_1 = P_0 \oplus P_{G_{n-1}}$, $P_1 - R_1 R_1^* \geq 0$, $\text{rang}(P_1 - R_1 R_1^*) = \text{rang } P$. Это расширение описывается аналогично, а из условия (8) следует возможность подобного расширения.

Повторяя этот процесс на $(n+1)$ шаге, получим оператор $R_n = R_{n-1} \oplus Q_n$, $Q_n: E_-^{(n)} \rightarrow G_0$, удовлетворяющий условиям $R_n V_{q,n} = V_{p,n} R_n$, $P_n = I_{E_+^{(n)}}$, $I_{E_+^{(n)}} - R_n R_n^* \geq 0$, $\text{rang}(I_{E_+^{(n)}} - R_n R_n^*) = \text{rang } P$, и для завершения доказательства теоремы остается положить $C_n = R_n$.

Следствие. Если операторы P и C удовлетворяют условиям (1) — (3), при этом $P - CC \geq 0$, то существует оператор C_n , удовлетворяющий условиям (5), (6) и являющийся сжатием $I - CC^* \geq 0$.

Доказательство. Положим на первом шаге произведенных выше рассуждений $D_0 = 0$, т. е. $V_0 = [T_0, 0]$. Поступая аналогичным образом на каждом из последующих шагов, получим необходимый результат.

Замечание 1. Доказанная теорема является точной, а именно, приведем пример, когда $q = (n+1)p - \text{rang } P - 1$ (23) и указанного расширения матрицы C до соответствующей матрицы C_n не существует.

Пусть $q = \dim E_- = 1$, $p = \dim E_+ = 2$, $n = 1$, т. е. в данном случае $E_+^{(n)} = E_+^{(1)} = E_+ \oplus E_+$. Подпространство Δ_P зададим соответствующим ортопроектором

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Таким образом, условие (23) выполняется. Матрица C в силу условий (1) — (4) имеет вид

$$C = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & \alpha \end{array} \right],$$

где числа α и β выберем настолько малыми по абсолютной величине, чтобы S было строгим сжатием.

Предположим теперь, что существует матрица C_1 (сейчас $n=1$), удовлетворяющая условиям (5) — (7). Условие (6) означает, что C_1 имеет вид

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{00} & 0 \\ c_{10} & 0 \\ c_{20} & c_{00} \\ c_{30} & c_{10} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $q=1$, $p=2$, находим, что условие (7) выполняется в том и только в том случае, если $C_1^* C_1 = I$. Отсюда следует $c_{20} = c_{30} = 0$, $|c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 = 1$. Условие (5) означает, что $\alpha = c_{10}$, $\beta = c_{30}$. В случае, если $\beta \neq 0$, это приводит к противоречию, так как $c_{30} = 0$.

Замечание 2. Можно показать, что ранг r элементарного кратного множителя, порождаемого некоторой задачей Шура, удовлетворяет условию $q \geq p - r$ (24). Построенный в рассмотренном выше примере по матрицам P и S элементарный кратный множитель условию (24) удовлетворяет, однако не может порождаться ни одной из задач Шура. Таким образом, условие (24), будучи необходимым, достаточным не является.

Следует отметить, что при $n=0$ условие (8) переходит в условие (24) и в этом случае условие (24) является и достаточным. Достаточность этого условия при $n=0$ следует и из теоремы 1.

При $n \geq 1$ условие (24) является достаточным для элементарных кратных множителей специального вида, играющих важную роль при изучении задачи Шура.

Замечание 3. Аналогичные результаты можно получить и для j -элементарных кратных множителей с полюсом в точке 0.

Наконец, отметим, что рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, навеяны связью с теоремой о дилатации коммутантов ([4], с. 79—81).

Список литературы: 1. Дубовой В. К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. IV // Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1984. Вып. 42. С. 46—57. 2. Галстян Л. А., Дубовой В. К. О пошаговом процессе в вырожденной проблеме Шура. Ереван, 1985. 42 с. Деп. в АрмНИИТИ 22.03.85, № 27Ар—85. 3. Дубовой В. К. Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга. Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. К., 1983. С. 54—68. 4. Секельфальви-Надь Б., Фэши Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 325 с.

Поступила в редколлегию 14.04.86

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА
КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. I

Работа примыкает к работам [1—6]. Через J обозначена квадратная матрица, удовлетворяющая условиям $J = J^*$, $J^2 = I$.

§ 1. Некоторые инварианты канонических
дифференциальных систем

1°. Пусть $W(t, \lambda)$ — квадратная матрица того же размера, что и J , определенная при $0 \leq t < \infty$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. При фиксированном λ : $\operatorname{Im} \lambda > 0$ функция $W(t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t при $t \in [0, \infty]$;

2. При фиксированном $t \in [0, \infty]$ функции $W(t, \lambda)$, $\frac{dW}{dt}(t, \lambda)$ регулярны в области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\det W(t, \lambda) \neq 0$;

3. $\Gamma(t, \lambda) \geq 0$, ($0 \leq t < \infty$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$), где

$$\Gamma(t, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} J - W(t, \lambda) J W^*(t, \lambda);$$

4. $\Gamma(t_1, \lambda) \leq \Gamma(t_2, \lambda)$ ($t_1 < t_2$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$) (монотонность).

Без ограничения общности можно считать, что выполнено условие нормировки $W(0, \lambda) = I$. Такой нормировки всегда можно достичь, переходя к рассмотрению матрицы-функции $\tilde{W}(t, \lambda) = W(0, \lambda)^{-1} \times W(t, \lambda)$.

Докажем, что при этих условиях матрица-функция $W(t, \lambda)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dW}{dt}(t, \lambda) = iW(t, \lambda)H(t, \lambda)J, \quad W(0, \lambda) = I, \quad (1.1)$$

где $H(t, \lambda)$ регулярна в области $\operatorname{Im} \lambda > 0$, имеет там неотрицательную мнимую часть: $\operatorname{Im} H(t, \lambda) \geq 0$ и при любом λ из этой области функция $H(t, \lambda)$ локально суммируема по t на $(0, \infty)$ (1.2).

Действительно, из монотонности $\Gamma(t, \lambda)$ следует, что

$$0 \leq \frac{d\Gamma}{dt}(t, \lambda) = -\frac{dW}{dt}(t, \lambda) J W^* - W J \frac{dW^*}{dt} = -W \left[W^{-1} \frac{dW}{dt} J + J \frac{dW^*}{dt} W^{*-1} \right] W^*.$$

Положим теперь $H(t, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -iW^{-1}(t, \lambda) \frac{dW}{dt}(t, \lambda) J$. Очевидно, верно и обратное предложение. Если $H(t, \lambda)$ удовлетворяет (1.2), то

решение задачи Коши (1.1) удовлетворяет условиям (1; 2; 3; 4), ибо

$$\Gamma(b, \lambda) = 2 \int_0^b W(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) W^*(t, \lambda) dt.$$

В частности, всякая абсолютно непрерывная по t J -унитарная матрица $A(t)$, $A(0) = I$ есть решение задачи Коши: $\frac{dA}{dt} = iA(t)C(t)J$, где $C^*(t) = C(t)$, и $C \in L^1_{\text{loc}}$.

2°. Всякая N -функция $H(t, \lambda)$, т. е. функция, удовлетворяющая условиям (1.2), допускает представление $H(t, \lambda) = C(t) + \tilde{H}(t, \lambda)$, где $C(t) = C^*(t)$ — локально суммируема, и $\operatorname{Kern} \tilde{H}(t, \lambda) = \operatorname{Kern} \operatorname{Im} \tilde{H}(t, \lambda) = \operatorname{Kern} \operatorname{Im} H(t, \lambda)$. От матрицы $C(t)$ можно избавиться путем замены $\tilde{W} = WA$, где $A(t)JA^*(t) = J$. Итак, без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{Kern} \operatorname{Im} H(t, \lambda) = \operatorname{Kern} H(t, \lambda)$ (1.3) Условию (1.3), например, удовлетворяют матрицы:

$$1) H(t, \lambda) = \lambda H_0(t) + \sum_k \frac{H_k(t)}{\alpha_k - \lambda}; H_k(t) \geq 0, \bar{\alpha}_k = \alpha_k; \quad (1.4)$$

$$2) H(t, \lambda) = \frac{H(t)}{\alpha(t) - \lambda}; H(t) \geq 0, \bar{\alpha}(t) = \alpha(t);$$

$$3) H(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) H(t); H(t) \geq 0, \frac{\varphi(t, \lambda) - \overline{\varphi(t, \lambda)}}{2i} \geq 0.$$

Легко видеть, что при выполнении условия (1.3)

$$d = \operatorname{def} \Gamma(b, \lambda) = \operatorname{def} \int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt.$$

При $d = 0$ это означает, что неравенство $\Gamma(b, \lambda) > 0$ равносильно неравенству $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt > 0$. Если выполняется соотношение (1.3)

и $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt > 0$, то при замене $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda) \cdot A(t)$, где

$A(t)JA^*(t) = J$, будет $\frac{d\tilde{W}}{dt} = i\tilde{W}[A(t)^{-1}H(t)A(t)^{* -1} + C(t)]J$, где

$C(t) = C^*(t)$, и $\frac{dA}{dt} = iA(t)C(t)$. При этом $\int_0^b A(t)^{-1} \cdot \operatorname{Im} H(t, \lambda) A(t) \times$
 $\times dt > 0$.

Итак, неравенства $\Gamma(b, \lambda) > 0$ и

$$\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt, \int_0^b A(t)^{-1} \operatorname{Im} H(t, \lambda) A^*(t)^{-1} dt > 0$$

равносильны.

Впредь будем считать, что $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt > 0$.

3°. Заметим, что если $H(t, \lambda)$ продолжаема в нижнюю полуплоскость аналитически по принципу симметрии, т. е. $H(t, \bar{\lambda}) = H^*(t, \lambda)$, то и $W(t, \lambda)$ продолжаема по принципу симметрии в нижнюю $\overset{\text{def}}{\text{полуплоскость}}$, причем $W(t, \bar{\lambda}) = W_1^*(t, \lambda)$, где $W_1 \times \times(t, \lambda) \overset{\text{def}}{=} JW^{-1}(t, \lambda)J$. В этом случае

$$\frac{dW_1}{dt} = -iJH(t, \lambda)W_1(t, \lambda), \quad W_1(0, \lambda) = I.$$

Если же граница $\text{Im } \lambda = 0$ «на замке», то мы будем говорить о *принудительном продолжении по принципу симметрии*, понимая под этим $H(t, \bar{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} H^*(t, \lambda)$, $W(t, \bar{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} W_1^*(t, \lambda)$. Всегда $W(t, \lambda)JW_1(t, \lambda) = J$. Так как $\frac{dW_1}{dt} = -iJH(t, \lambda)W_1(t, \lambda)$,

$$\Gamma_1(b, \lambda) = 2 \int_0^b W_1^*(t, \lambda) \text{Im } H(t, \lambda) W_1(t, \lambda) dt, \text{ где}$$

$$\Gamma_1(b, \lambda) \overset{\text{def}}{=} W_1^*(b, \lambda)JW_1(b, \lambda) - J.$$

Как установлено в [1], имеет место тождество

$$\Gamma^{-1}(b, \lambda) - \Gamma_1^{-1}(b, \lambda) = J.$$

Так как $\Gamma(b, \lambda)$ и $\Gamma_1(b, \lambda)$ возрастают, то существуют пределы

$$R^2(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma^{-1}(b, \lambda), \quad R_1^2(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma_1^{-1}(b, \lambda),$$

и

$$R^2(\lambda) - R_1^2(\lambda) = J. \quad (1.5)$$

Из соотношения (1.5) следует, что если p, q — числа положительных и отрицательных квадратов матрицы J , то $m \overset{\text{def}}{=} \text{rank } R^2(\lambda) \geq p$, $m_1 \overset{\text{def}}{=} \text{rank } R_1^2(\lambda) \geq q$. Теорема об инвариантности рангов $R^2(\lambda)$ и $R_1^2(\lambda)$ утверждает, что m и m_1 не зависят от λ [1]. Из теоремы 2.1 [1] следует, что квадратичные формы $\Gamma(b, \lambda)$ и $\Gamma_1(b, \lambda)$ сходятся на векторах из области значений матриц $R^2(\lambda)$ и $R_1^2(\lambda)$, т. е. число решений $y = Cw$ и $x = w_1 c_1$ однородного уравнения, удовлетворяю-

щих условиям $\int_0^\infty y(t, \lambda) \text{Im } H(t, \lambda) y^*(t, \lambda) dt < \infty$ и

$$\int_0^\infty x^*(t, \lambda) \text{Im } H(t, \lambda) x(t, \lambda) dt < \infty,$$

равно m и m_1 соответственно. Мы введем пространства $L_2^0[0, b]$

в $L_2^0[0, \infty)$, полагая $\rho(t, \lambda) = \frac{H(t, \lambda) - H^*(t, \lambda)}{\lambda - \bar{\lambda}}$, и скалярное произведение

$$(x_1, x_2)_\rho = \int_0^b x_2^*(t) \rho(t, \lambda) x_1(t) dt, (y_1, y_2)_\rho = \int_0^b y_1(t) \rho(t, \lambda) y_2^*(t) dt.$$

Квадрат нормы $\|y\|_\rho^2$ либо не равен нулю ни при одном λ , либо равен нулю при всех λ из $\text{Im } \lambda > 0$. Если $H(t, \lambda) = \lambda H(t) + \bar{C}(t)$, где $C(t) = C^*(t)$, $H(t) \geq 0$, то $\rho(t, \lambda) = H(t)$. При $J = \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{bmatrix}$ мы будем иметь гамильтонову систему. Если при λ из некоторого интервала вещественной оси функция $H(t, \lambda)$ эрмитова и вещественна, то функция $W(t, \lambda)$ будет J -унитарной на этом интервале и симплектической, т. е. $W(t, \lambda) J W'(t, \lambda) = J$. По теореме единственности для аналитической функции условие симплектичности будет выполнено при всех λ из $\text{Im } \lambda \neq 0$. В этом случае числа m и m_1 равны.

§ 2. Параметризация диссипативных граничных условий

Пусть $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — аналитические функции в области $\text{Im } \lambda > 0$ и образуют пару (A, B) , удовлетворяющую условиям

1. $AA^* + BB^* > 0$ (неособенность пары);
2. $AJA^* - BJB^* \leq 0$ (J -нерастягиваемость пары) (2.1)

Если пара (A, B) регулярна на отрезке вещественной оси и принимает J -унитарные значения ($AJA^* - BJB^* = 0$), то она продолжается в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии, т. е.

$A(\bar{\lambda}) = A_1^*(\lambda)$, $B(\bar{\lambda}) = B_1^*(\lambda)$, где

3. $A(\lambda)JA_1(\lambda) - B(\lambda)JB_1(\lambda) = 0$ (J -ортогональность). В общем случае мы будем говорить о принудительном продолжении по симметрии, понимая под этим J -ортогональность. Пары (A, B) и (QA, QB) , где Q — неособенная, назовем эквивалентными. Из неособенности пары (A, B) следует, что существует единственная, с точностью до эквивалентности, J -ортогональная пара (A_1^*, B_1^*) . Пара (A_1^*, B_1^*) удовлетворяет условиям

4. $A_1^*A_1 + B_1^*B_1 > 0$, (неособенность);
5. $A_1^*JA_1 - B_1^*JB_1 \geq 0$ (J -растягиваемость). (2.2)

При этом $\text{rang}(BJB^* - AJA^*) = \text{rang}(A_1^*JA_1 - B_1^*JB_1)$ и не зависит от λ , кроме, быть может, множества изолированности. Такие пары подробно изучены в [1], в частности, там установлена параметризация пар с помощью аналитических сжатий.

Граничные условия, определяемые парой $(A(\lambda), B(\lambda))$, назовем *диссипативными*. Пусть $A(\lambda)x(0) + B(\lambda)x(b) = 0$. Эта запись равносильна тому, что $A_1 = Jx(0)$, $B_1 = -Jx(b)$ — J -ортогональна паре $(A(\lambda), B(\lambda))$, поэтому $x^*(0)Jx(0) - x^*(b)Jx(b) \geq 0$ (2.3). Аналогично если $y(0)A_1 + y(b)B_1 = 0$, где (A_1^*, B_1^*) J -ортогональна (A, B) , то $y(0)Jy^*(0) - y(b)Jy^*(b) \leq 0$ (2.4). Параметризация пар имеет следующий вид. Пусть W — постоянная обратимая матрица, удов-

лестворящая условию $J - WJW^* > 0$, и пусть $W_1 = JW^{-1}J$, $R = (J - WJW^*)^{-1/2}$, $R_1 = (W_1^*JW_1 - J)^{-1/2}$. Тогда $R^2 - R_1^2 = J$. Матрицы $A(v) = [R_1^2 + R_1vR]J$, $B(v) = -[R^2 + R_1vR]WJ$ (2.5), где $v(\lambda)$ — аналитическое сжатие, образуют неособую J -нерастягивающую пару: $AJA^* - BJB^* = R_1(vv^* - I)R_1 \leq 0$. Матрицы

$$A_1(v) = J[R^2 + R_1vR], \quad B_1(v) = -JW_1[R_1^2 + R_1vR] \quad (2.6)$$

образуют пару, J -ортогональную паре (A, B) . Самое важное, что любая J -нерастягивающая пара $(\tilde{A}, \tilde{B})$ эквивалентна паре (A, B) , т. е. для любой пары $(\tilde{A}, \tilde{B})$ существует сжатие $\tilde{v}(\lambda)$ такое, что $\tilde{A} = QA(\tilde{v})$, $\tilde{B} = QB(\tilde{v})$, где $Q = [\tilde{A} + \tilde{B}W_1]$. Итак, формулы (2.5) и (2.6) осуществляют биективное отображение множества всех J -нерастягивающих пар на множество аналитических сжатий. В частности, формулы (2.5), (2.6) осуществляют биективное отображение множества всех J -унитарных пар на множество унитарных матриц. Из этих формул видно, что множество всех J -нерастягивающих пар компактно.

§ 3. Параметризация диссипативных функций Грина на конечном промежутке

Рассмотрим краевые задачи в интервале $[0, b]$;

$$-i \frac{dy}{dt} J = yH(t, \lambda) + \varphi(t) \rho(t, \lambda), \quad y(0)A_1(\lambda) + y(b)B_1(\lambda) = 0; \quad (3.1)$$

$$ij \frac{dx}{dt} = H(t, \lambda)x(t) + \rho(t, \lambda)\psi(t), \quad Ax(0) + Bx(b) = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{где } \rho(t, \lambda) = \frac{H(t, \lambda) - H^*(t, \bar{\lambda})}{\lambda - \bar{\lambda}}, \quad \varphi(t), \psi^*(t) \in L^2_\rho[0, b]$$

Каждая из этих краевых задач есть принудительное продолжение другой по принципу симметрии из области $\text{Im } \lambda > 0$ в область $\text{Im } \lambda < 0$. Рассмотрим функции (см. [4])

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} W_1(s, \lambda)Z_1(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leq t < s \leq b; \\ W_1(s, \lambda)Z(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leq s < t \leq b; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$K_2(t, s, \lambda) = \begin{cases} W_1(t, \lambda)Z_1(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leq s < t \leq b; \\ W_1(t, \lambda)Z(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leq t < s \leq b, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $Z = \frac{1}{2}(iJ + \Omega)$, $Z_1 = \frac{1}{2}(-iJ + \Omega) = Z - iJ$, условия на функцию $\Omega(\lambda)$ будут получены далее. Функция $K(s, t, \lambda)$ имеет при $s = t$ скачок $K(s, s, \lambda) - K(s, s + 0, \lambda) = iJ$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функции

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= \int_0^b K_1(t, s, \lambda) \rho(s, \lambda) \psi(s) ds, \\ y(t, \lambda) &= \int_0^b \varphi(s) \rho(s, \lambda) K(s, t, \lambda) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

являются решениями уравнения (3.1). Очевидно, что если $K(s, t, \lambda)$ удовлетворяет по t граничным условиям, то и $y(t, \lambda)$ будет удовлетворять граничным условиям. Имеем $K(s, 0, \lambda) = W_1(s, \lambda) Z_1(\lambda)$; $K(s, b, \lambda) = W_1(s, \lambda) Z(\lambda) W(b, \lambda)$. Итак,

$$\begin{aligned} K(s, 0, \lambda) A_1(\lambda) + K(s, b, \lambda) B_1(\lambda) &= \\ &= W_1(s, \lambda) Z_1(\lambda) A_1(\lambda) + W_1(s, \lambda) Z(\lambda) W(b, \lambda) B_1(\lambda) = \\ &= W_1(s, \lambda) \{Z_1(\lambda) A_1(\lambda) + Z(\lambda) W(b, \lambda) B_1(\lambda)\} = 0, \text{ т. е.} \\ (-iJ + \Omega(\lambda)) A_1(\lambda) + (iJ + \Omega(\lambda)) W(b, \lambda) B_1(\lambda) &= 0, \text{ откуда} \end{aligned}$$

$\Omega(b, \lambda) = iJ(A_1(\lambda) - W(b, \lambda) B_1(\lambda))(A_1(\lambda) + W(b, \lambda) B_1(\lambda))^{-1}$. Так как $J - WJW^* > 0$, то функция $\Omega(b, \lambda)$ регулярна в области $\text{Im } \lambda > 0$, и $\text{Im } \Omega(b, \lambda) \geq 0$. Аналогично, подставляя функцию $K_1(t, s, \lambda)$ в граничные условия по t , получим, что

$$\Omega(b, \lambda) = -i(A(\lambda) + B(\lambda) W_1(b, \lambda))^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda) W_1(b, \lambda)).$$

Так как $A(\lambda)JA_1(\lambda) - B(\lambda)JB_1(\lambda) = 0$, то

$$\begin{aligned} \Omega(b, \lambda) &= iJ(A_1(\lambda) - W(b, \lambda) B_1(\lambda))(A_1(\lambda) + W(b, \lambda) B_1(\lambda))^{-1} = \\ &= -i(A(\lambda) + B(\lambda) W_1(b, \lambda))^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda) W_1(b, \lambda)). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Класс функций, определяемый преобразованием (3.6), подробно изучен в [1] и обозначен $N_W(b)$. Из (3.6) следует, что пара $(Z_1(\lambda)J, -Z(\lambda)W(b, \lambda)J)$ эквивалентна паре $(A(\lambda), B(\lambda))$, т. е. является J -нерастягивающей. В [1] установлена внутренняя характеристика множества $N_W(b)$. Именно, для того, чтобы $\Omega(\lambda) \in N_W(b)$, необходимо и достаточно, чтобы пара $(Z_1(\lambda)J, -Z(\lambda)W(b, \lambda)J)$ была J -нерастягивающей. Заметим, что при выполнении этого условия образ этой пары в преобразовании (3.6) и есть функция $\Omega(\lambda)$. J -форма пары имеет вид

$$Z(\lambda)(J - W(\lambda)JW^*(\lambda))Z^*(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} \leq 0. \quad (3.7)$$

Матрицы $\tilde{A}_1(\lambda) = JZ$, $\tilde{B}_1 = -JW_1Z_1$ образуют пару, J -ортогональную паре $(Z_1J, -ZWJ)$. J -форма J -ортогональной пары имеет вид

$$Z_1^*(\lambda)(W_1^*(\lambda)JW_1(\lambda) - J)Z_1(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} \leq 0. \quad (3.8)$$

Итак, условия (3.7) и (3.8) являются необходимыми и достаточными условиями принадлежности функции $\Omega(\lambda)$ множеству $N_W(b)$. Для класса $N_W(b)$ справедлива лемма Шварца—Пика:

для принадлежности $\Omega(\lambda) \in N_W(b)$ необходимо и достаточно, чтобы ядро

$$\begin{aligned} a(b, \lambda, \mu) &= \frac{-2i}{\lambda - \mu} \left[\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\mu)}{2i} - \right. \\ &\quad \left. - Z(\lambda)(J - W(b, \lambda)JW^*(b, \mu))Z^*(\mu) \right] \end{aligned}$$

было эрмитово неотрицательным. Образ J -унитарной пары в преобразовании (3.6) назовем канонической функцией. Каноническая функция из класса $N_W(b)$ определяется одним своим значением

в произвольной точке, ибо аналитическая J -унитарная пара $A(\lambda), B(\lambda)$ эквивалентна постоянной паре $(A(\lambda_0), B(\lambda_0))$. Для канонической функции в (3.7) и (3.8) имеет место равенство в любой точке; если для $\Omega(\lambda)$ в (3.7) или (3.8) равенство имеет место хоть в какой-то точке, то тогда равенство имеет место и в любой точке, и функция $\Omega(\lambda)$ — каноническая. Из вышеизложенного следует, что граничные условия могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} y(0) J Z(\lambda) &= y(b) J W_1(b, \lambda) Z_1(\lambda), \\ Z_1(\lambda) J x(0) &= Z(\lambda) W(b, \lambda) J x(b). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Итак, подведем итоги: аналитические сжатия находятся в биективном соответствии с парами $(A(\lambda), B(\lambda))$ (2.5). Пары с помощью преобразования (3.6) биективно отображаются на функции класса $N_W(b)$. Функции класса $N_W(b)$ отображаются биективно на множество диссипативных функций Грина (3.3), характеризующихся тем, что пара $(K(s, 0, \lambda), K(s, b, \lambda))$ — J -нерастягивающая, т. е.

$$K(s, 0, \lambda) J K^*(s, 0, \lambda) - K(s, b, \lambda) J K^*(s, b, \lambda) \leq 0,$$

или

$$K_1^*(0, s, \lambda) J K_1(0, s, \lambda) - K_1^*(b, s, \lambda) J K_1(b, s, \lambda) \geq 0. \quad (3.10)$$

Отметим, что по принципу принудительной симметрии $K(s, t, \bar{\lambda}) = K_1^*(t, s, \lambda)$ (3.11). Установим характеристическое свойство оператора R_λ :

$$R_\lambda \psi \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b K_1(t, s, \lambda) \rho(s, \lambda) \psi(s) ds.$$

Так как функция $x(t, \lambda) = (R_\lambda \psi)(t)$ является решением краевой задачи (3.1), и

$$\begin{aligned} -[x(0)^* J x(0) - x(b)^* J x(b)] &= \int_0^b \frac{d}{dt} (x^*(t, \lambda) J x(t, \lambda)) dt = \\ &= \int_0^b x^*(t, \lambda) J \frac{dx}{dt}(t, \lambda) dt + \int_0^b \left(J \frac{dx}{dt}(t, \lambda) \right)^* x(t, \lambda) dt, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{i} (R_\lambda \psi, R_\lambda \psi) &= \frac{(R_\lambda \psi, \psi)_\rho^b - (\psi, R_\lambda \psi)_\rho^b}{i} = \\ &= -[x^*(0, \lambda) J x(0, \lambda) - x^*(b, \lambda) J x(b, \lambda)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как $x(t, \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям, то выражение в квадратной скобке неотрицательно, поэтому

$$(R_\lambda \psi, R_\lambda \psi)_\rho^b \leq \frac{(R_\lambda \psi, \psi)_\rho^b - (\psi, R_\lambda \psi)_\rho^b}{\lambda - \bar{\lambda}}. \quad (3.13)$$

Для канонической функции Грина в неравенстве (3.13) будет иметь

место равенство; если для функции Грина в неравенстве (3.13) равенство имеет место хотя бы в одной точке λ_0 , $\text{Im } \lambda_0 > 0$, то равенство будет иметь место и в любой точке λ , и функция Грина будет канонической.

§ 4. Предельная функция Грина

Покажем, что существуют нормировка $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda) U(t)$, $U(t) J U^*(t) = J$ (4.1) и последовательность $b_n \rightarrow \infty$, $b_n < b_{n+1}$, такие что для любой фиксированной пары (A, B) соответствующая функция Грина имеет предел при $b_n \rightarrow \infty$. Установим свойства предельной функции Грина. Класс функций, определяемых преобразованием (3.6), обозначим $N_W(b)$. С ростом b $N_W(b_1) \supseteq N_W(b_1)$, $(b_1 < b_2)$. Пусть

$$N_W(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{b>0} N_W(b). \quad (4.2)$$

В [1], теорема 3.3, установлена внутренняя характеристика множества $N_W(\infty)$. Для того чтобы $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, достаточно выполнения в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ одного из неравенств

$$\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} - \lim_{b \rightarrow \infty} Z(\lambda) (J - W(b, \lambda) J W^*(b, \lambda)) Z(\lambda) \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} - \lim_{b \rightarrow \infty} Z_1^*(\lambda) (W_1^*(b, \lambda) J W_1(b, \lambda) - J) Z_1(\lambda) \geq 0, \quad (4.4)$$

и необходимо, чтобы матричное ядро

$$a(\infty, \lambda, \mu) = \frac{2i}{\lambda - \mu} \left[\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\mu)}{2i} - \lim_{b \rightarrow \infty} Z(\lambda) (J - W(b, \lambda) J W^*(b, \mu)) Z^*(\mu) \right] \quad (4.5)$$

было эрмитово неотрицательным. Формулу (4.5) можно рассматривать как лемму Шварца—Пика для $\Omega \in N_W(\infty)$. Нам понадобится еще теорема 3.5 из [1]: каждая функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ принимает в каждой точке λ , $\text{Im } \lambda > 0$, значение вида $\Omega(\lambda) = i [R^2(\lambda) + R_1^2(\lambda) + 2R_1(\lambda) v_\lambda R(\lambda)]$ (4.6) с некоторой матрицей v_λ , $v_\lambda v_\lambda^* \leq I$. Матрица $\Omega(\lambda)$, являющаяся пределом канонических функций, принимает значение (4.6) с унитарной матрицей v_λ , $v_\lambda v_\lambda^* = I$.

Пронормируем семейство $W(t, \lambda)$ в точке $\lambda = i$ следующим образом. Положим

$$W_0(t) = [R^2(t, i) + R_1(t, i) R(t, i)^{-1} \cdot [R_1^2(t, i) + R_1(t, i) R(t, i)]]. \quad (4.7)$$

Здесь $R(t, i) = \Gamma^{-1/2}(t)$, $R_1(t, i) = \Gamma_1^{-1/2}(t)$. Непосредственной проверкой (учитывая, что $R^2 - R_1^2 = J$) можно убедиться в том, что $J - W(t, i) J W^*(t, i) = J - W_0(t) J W_0^*(t)$. Следовательно, $W^{-1}(t, i) \times \times W_0(t) = U(t) - J$ -унитарная матрица. Теперь положим

$$\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda) U(t), \quad \tilde{W}_1(t, \lambda) = U^*(t) W_1(t, \lambda),$$

т. е. $\tilde{W}(t, i) = W_0(t)$. Рассмотрим образ пары $(I, -I)$ в преобразовании (3.6): $\Omega(b, \lambda, I, -I) = iJ(I + \tilde{W}(b, \lambda))(I - \tilde{W}(b, \lambda))^{-1}$ (4.9)

Теорема (1.1) из [2] утверждает:

1. Если семейство $\tilde{W}(t, \lambda)$ нормировано в точке $\lambda = i$ к матрице (4.7) либо к J -модулю, и если из компактного семейства канонических функций (4.9) выделить сходящуюся последовательность $\Omega(b_n, \lambda, I, -I)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(b_n, \lambda, I, -I) = \Omega(\lambda, I)$, то матрицы

$\Omega(\lambda, i)$, $Z(\lambda, I) = \frac{iJ + \Omega(\lambda, I)}{2}$, $Z_1(\lambda) = \frac{-iJ + \Omega(\lambda, I)}{2}$ обладают следующими свойствами:

1) $\text{Im } \Omega(\lambda, I) > 0$, 2) $\text{def } Z(\lambda) = \text{def } R^2(\lambda)$, 3) $\text{def } Z_1(\lambda) = \text{def } R_1^2(\lambda)$.

2. Образ $\Omega(b_n, \lambda, A, B)$ любой неособенной J -нерастягивающей пары $(A(\lambda), B(\lambda))$ и J -ортогональной ей пары $(A_1^*(\lambda), B_1^*(\lambda))$ имеет при $b_n \rightarrow \infty$ предел, который определяется формулами

$$Z(\lambda, A_1, B_1) = \frac{iJ + \Omega(\lambda, A, B)}{2} = iJA_1(\lambda)[Z(\lambda, I)A_1(\lambda) + Z_1(\lambda, I)B_1(\lambda)]^{-1} \cdot Z(\lambda, I), \quad (4.10)$$

$$Z_1(\lambda, A, B) = -iZ_1(\lambda, I) \cdot [A(\lambda)Z_1(\lambda, I) + B(\lambda)Z(\lambda, I)]^{-1} A(\lambda)J. \quad (4.11)$$

3. Матрицами (4.10) и (4.11) исчерпывается множество функций $N_W(\infty)$.

Следствие из теоремы 1.1 [2]. На аналитическом подпространстве векторов размерности d_1 , удовлетворяющих условию $f(\lambda)Z_1(\lambda, I) = 0$, все функции $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ совпадают. На аналитическом подпространстве векторов размерности d , удовлетворяющих условию $Z(\lambda, I)g(\lambda) = 0$, все функции $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ совпадают. Итак, теорема 1.1 из [2] утверждает, что каждая функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ является пределом при $b_n \rightarrow \infty$ последовательности $\Omega(b_n, \lambda, A, B)$, где A, B — некоторая фиксированная пара, предел определяется этой парой формулами (4.10) и (4.11). Таким образом, формулы (4.10) и (4.11) осуществляют однозначное отображение множества всех пар на множестве $N_W(\infty)$. Однако в силу следствия это отображение не биективно, если хотя бы одна из матриц $R(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ необратима.

Например, если $R(\lambda) > 0$, то $Z(\lambda, I)$ обратима. В этом случае в силу критерия сходимости монотонного семейства [1], нормированная матрица $\tilde{W}(b, \lambda)$ имеет предел при $b \rightarrow \infty$,

$$\tilde{W}(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{W}(b, \lambda) = Z^{-1}(\lambda, I)Z_1(\lambda, I)$$

и, следовательно, $\text{rang } \tilde{W}(\lambda) = \text{rang } Z_1(\lambda, I) = \text{rang } R_1(\lambda)$. В этом случае (4.9) может быть преобразовано в (3.6), но биективность иметь места не будет вследствие необратимости $R_1(\lambda)$.

Нормировка $\tilde{W}(t, \lambda)$ является по существу заменой переменной $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda)U(t)$. Однако мы можем избежать замены пере-

менной, относя множитель $U(t)$ к матрице, задающей граничные условия. Преобразование (3.6) имеет вид (для нормированной матрицы $\tilde{W}$):

$$\begin{aligned}\Omega^{(b_n)}(\lambda, A, B) &= \Omega^{(b_n)}(\lambda, A_1, B_1) = iJ(A_1(\lambda) - \\ &- W(b_n, \lambda)U(b_n)B_1(\lambda)(A_1(\lambda) + W(b_n, \lambda)U(b_n)B_1(\lambda))^{-1} = \\ &= -i(A(\lambda) + B(\lambda)U^*(b_n)W_1(b_n, \lambda))^{-1} \cdot (A(\lambda) - \\ &- B(\lambda)U^*(b_n)W_1(b_n, \lambda))J.\end{aligned}$$

Теорема 1.1 утверждает, что при $b_n \rightarrow \infty$ существует предел, определяемый формулами (4.10), (4.11), и такими пределами исчерпывается множество $N_W(\infty)$. Если теперь писать граничные условия в виде $y(0)A_1(\lambda) + y(b_n)U(b_n)B_1(\lambda) = 0$ и $A(\lambda)x(0) + B(\lambda)U^*(b_n)x(b_n) = 0$, то функции Грина $K^{b_n}(s, t, \lambda, A, B)$ и $K_1^{b_n}(t, s, \lambda, A, B)$ при любой паре (A, B) имеют предел, определяемый матрицами $Z(\lambda, A_1, B_1)$ и $Z_1(\lambda, A, B)$, (4.10) и (4.11).

Из следствия теоремы 1.1 [2] вытекает:

1. На аналитическом подпространстве векторов размерности l_1 , удовлетворяющих условию $f(\lambda)Z_1(\lambda, I) = 0$, все предельные функции Грина совпадают.

2. На аналитическом подпространстве векторов размерности d , удовлетворяющих условию $Z(\lambda, I)g(\lambda) = 0$, все предельные функции Грина совпадают.

Пусть функция $\Omega(\lambda)$ регулярна при $\text{Im } \lambda > 0$, $Z = \frac{iJ + \Omega}{2}$, $Z_1 = \frac{-iJ + \Omega}{2}$. Положим

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} W_1(s, \lambda)Z_1(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leq t < s < \infty; \\ W_1(s, \lambda)Z(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leq s \leq t < \infty; \end{cases} \quad (4.12)$$

$$K_1(t, s, \lambda) = \begin{cases} W_1(t, \lambda)Z_1(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leq s \leq t < \infty; \\ W_1(t, \lambda)Z(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leq t < s < \infty. \end{cases} \quad (4.13)$$

Определение. Функции (4.11), (4.12) назовем диссипативными функциями Грина в интервале $[0, \infty)$, если

$$K(s, 0, \lambda)JK^*(s, 0, \lambda) - \lim_{b \rightarrow \infty} K(s, b, \lambda)JK^*(s, b, \lambda) \leq 0, \quad (4.14)$$

$$K_1^*(0, s, \lambda)JK_1(0, s, \lambda) - \lim_{b \rightarrow \infty} K_1^*(b, s, \lambda)JK_1(b, s, \lambda) \geq 0. \quad (4.15)$$

Теорема 4.1. Всякая предельная функция Грина диссипативна на интервале $[0, \infty)$. Всякая диссипативная на интервале $[0, \infty)$ функция Грина есть предельная функция Грина.

Доказательство. Имеем $K(s, 0, \lambda) = W_1(s, \lambda)Z_1(\lambda)$, $K(s, b, \lambda) = W_1(s, \lambda)Z(\lambda)W(b, \lambda)$. Следовательно, пара $(K(s, 0, \lambda), K(s, b, \lambda))$ эквивалентна паре $(Z_1(\lambda), Z(\lambda)W(b, \lambda))$, поэтому в силу (3.7)

$$\begin{aligned}K(s, 0, \lambda)JK^*(s, 0, \lambda) - K(s, b, \lambda)JK^*(s, b, \lambda) &= W_1(s, \lambda) \times \\ \times \left[Z(\lambda)(J - W(b, \lambda)JW^*(b, \lambda))Z^*(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} \right] \cdot W_1^*(s, \lambda).\end{aligned}$$

Откуда следует, что (4.14) равносильно (4.3); аналогично, (4.15) равносильно (4.4). В силу теоремы 3.3 из [1], (4.3) и (4.4) являются необходимыми и достаточными условиями того, что $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$. Итак, если $K(s, t, \lambda)$ и $K_1(t, s, \lambda)$ — предельные функции Грина, то $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, следовательно, выполняются неравенства (4.3) и (4.4), а следовательно, и (4.14), (4.15), т. е. $K(s, t, \lambda)$ и $K_1(t, s, \lambda)$ — диссипативные функции Грина в $[0, \infty)$. Наоборот, если выполняются неравенства (4.14) и (4.15), то выполняются неравенства (4.3) и (4.4). Следовательно, $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, и поэтому $K(s, t, \lambda)$, $K_1(t, s, \lambda)$ — диссипативные функции Грина в $[0, \infty)$. Теорема доказана. Формулы (4.12), (4.13) и (4.10), (4.11) устанавливают параметризацию диссипативных функций Грина в интервале $[0, \infty)$, т. е. доказана также

Теорема 4.2. *Каждой J -нерастягивающей паре $(A(\lambda), B(\lambda))$ и J -ортogonalной ей паре $(A_1(\lambda), B_1(\lambda))$ отвечает по формулам (4.10) и (4.11) функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, а функции $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ отвечает по формуле (4.12) и (4.13) диссипативная функция Грина в интервале $[0, \infty)$. Этим исчерпывается все множество диссипативных функций Грина в интервале $[0, \infty)$.*

Список литературы: 1. Орлов С. А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР, сер. мат. 1976. 40. № 3. С. 593—644. 2. Орлов С. А. Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1984. Вып. 41. С. 96—107. 3. Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1953. 92, № 3. С. 483—486. 4. Орлов С. А. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи // ДАН СССР. 1956. 111. № 3. С. 538—541. 5. Орлов С. А. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов 2-го порядка // ДАН СССР. 1956. 111, № 6. С. 1175—1177. 6. Орлов С. А. О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических J -сжимающих семейств матриц-функций // ДАН АрмССР. 1974. 59. № 4. С. 193—198.

Поступила в редколлегию 21.01.87

УДК 517.55

А. М. РУССАКОВСКИЙ

О ПРОДОЛЖЕНИИ С ОЦЕНКАМИ

С АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ. I

Задаче продолжения функции, голоморфной на аналитическом множестве в C^n , до целой с теми или иными оценками роста посвящено много исследований, начиная с работ Л. Хермандера (см. [1]), В. П. Паламодова, Л. Эренпрайса. Достаточно подробная библиография имеется в [2]. Здесь мы отметим работы, к которым наша наиболее близка по характеру получаемых оценок.

К. Беренштейн и Б. Тейлор (см. [3, 4]) получили ряд результатов, гарантирующих возможность продолжения с оценками функций с аналитических множеств весьма общего вида. В ряде работ Л. И. Ронкина (см., напр., [5]) получены теоремы о продолжении с нулевого множества полинома, а также псевдополинома с более точными оценками, чем полученные в [3, 4]. В [2] эти результаты обобщаются на случай алгебраических множеств произвольной коразмерности.

В данной заметке рассматриваются задачи продолжения с аналитических множеств коразмерности 1. При этом автор ставил перед собой задачу получения как можно более точных оценок продолжения.

Пусть $f(z)$ — целая функция, $z \in \mathbb{C}^n$, $\Lambda = \{z: f(z) = 0\}$ и пусть $\varphi(z)$ — функция, голоморфная на Λ , причем $\ln |\varphi(z)| \leq u(z)$, $z \in \Lambda$, где $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ (плюрисубгармонична).

В настоящей заметке строится такая целая функция $\Phi(z)$, что $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Lambda$, и

$$\ln |\Phi(z)| \leq u^{[1]}(z) + w(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (*)$$

где $w \in PSH(\mathbb{C}^n)$, а через $u^{[r]}(z)$ здесь и далее обозначается $\sup \{u(\xi): |z - \xi| \leq r\}$.

При этом функция $w(z)$ в оценке (*) определяется только множеством Λ (точнее, функцией f). Это дает возможность указывать условия на Λ , обеспечивающие существование продолжения функции, голоморфной на Λ , до целой в том или ином классе функций, рост которых сравнивается с ростом функций $u(z)$ и $w(z)$. Разумеется, наиболее интересны случаи, когда либо $w(z) = O(u^{[1/2]}(0))$, либо $w(z) = o(u^{[1/2]}(0))$.

Введем соответствующие понятия. Назовем, следуя Л. И. Ронкину [5], типом и радиальным индикатором функции $f(z)$, голоморфной на аналитическом множестве Λ , соответственно, величины $\sigma_\Lambda(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho} \sup \{\ln |f(z)|: |z| \leq t, z \in \Lambda\}$ и $L_{r, \Lambda}(z; f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \times \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho} \sup \{\ln |f(tz')|: |z' - z| < \varepsilon, z' \in \Lambda\}$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Класс функций, голоморфных на Λ , и таких, что $\sigma_\Lambda(f) < \infty$ ($\sigma_\Lambda(f) \leq \sigma$; $L_{r, \Lambda}(z; f) \leq h(z)$ ($z \in \mathbb{C}^n$), обозначим $[\rho, \infty)_\Lambda$ ($[\rho, \sigma]_\Lambda$; $[\rho, h(z)]_\Lambda$ соответственно).

Класс целых функций, имеющих при порядке ρ конечный тип (тип, не превосходящий σ ; радиальный индикатор, не превосходящий $h(z)$), обозначим $[\rho, \infty)$ ($[\rho, \sigma]$; $[\rho, h(z)]$ соответственно).

Если $F \in [\rho, \infty)$ ($[\rho, \sigma]$; $[\rho, h(z)]$), то $F|_\Lambda \in [\rho, \infty)_\Lambda$ ($[\rho, \sigma]_\Lambda$; $[\rho, h(z)]_\Lambda$ соответственно).

Назовем аналитическое множество Λ интерполяционным в классе $[\rho, \infty)$ ($[\rho, \sigma]$; $[\rho, h(z)]$), если любая функция из $[\rho, \infty)_\Lambda$ ($[\rho, \sigma]_\Lambda$; $[\rho, h(z)]_\Lambda$) продолжается до функции класса $[\rho, \infty)$ ($[\rho, \sigma]$; $[\rho, h(z)]$ соответственно).

Ниже будут установлены достаточные условия интерполяционности аналитического множества Λ в упоминаемых выше классах.

Все они являются следствиями основного результата, который мы теперь сформулируем точно.

Теорема 1. Пусть функции $u(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $v(z) = v_1^{[1]}(z) + v_2^{[1]}(z)$ таковы, что u , v_1 , v , $u + v_2 \in PSH(C^n)$, $v \geq 0$ и $|\bar{\partial}v| \leq \exp v$ (1).

Пусть, далее, $f(z)$ — целая функция, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \notin \Lambda$, $\ln |f(z)| \leq v_1(z)$, $z \in C^n$ (2), $\ln |\langle \nabla f(z), z|z|^{-1} \rangle| \geq -v_2(z)$, $z \in \Lambda$, (3) (∇ означает градиент относительно $z_1, \dots, z_n$).

Тогда $\forall \varphi \in A(\Lambda)$ такой, что

$$\ln |\varphi(z)| \leq u(z), \quad z \in \Lambda, \quad (4)$$

$\exists \Phi \in A(C^n)$ такая, что $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Lambda$, $\ln |\Phi(z)| \leq u^{[1]}(z) + 7v^{[1]}(z) + (n+2) \ln(1 + |z|^2) + C$, $z \in C^n$.

Следующие ниже теоремы 2—4 получаются непосредственно из теоремы 1 при соответствующем выборе функций v_1 и v_2 . (Всюду далее $\rho > 0$).

Теорема 2. Пусть $f(z) \in A(C^n)$, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \notin \Lambda$, и пусть выполнены условие (2) с $v_1 = A_1|z|^\rho + A_2$, $A_1 \geq 0$ и условие (3) с $v_2 = B_1|z|^\rho + B_2$.

Тогда множество Λ является интерполяционным в классе $[\rho, \infty)$.

Теорема 3. Пусть $f(z) \in A(C^n)$, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \notin \Lambda$, и пусть выполнены условие (2) с $v_1 = A|z|^\rho + \omega_1(z)$ и условие (3) с $v_2 = -A|z|^\rho + \omega_2(z)$, где $A \geq 0$, а $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ — плюрисубгармонические функции минимального типа при порядке ρ .

Тогда множество Λ является интерполяционным в классе $[\rho, \sigma]$ при $\sigma \geq A$.

Теорема 4. Пусть $f(z)$ — целая функция, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \notin \Lambda$, и пусть выполнены условие (2) с $v_1 = g(z) + \omega_1(z)$ и условие (3) с $v_2 = -g(z) + \omega_2(z)$, где $g(z)$ — плюрисубгармоническая функция порядка ρ , а $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ — те же, что в теореме 3.

Тогда множество Λ является интерполяционным в классе $[\rho, h(z)]$, где $h(z)$ — непрерывная позитивно однородная порядка ρ плюрисубгармоническая функция, такая, что $h - g \in PSH(C^n)$.

Отметим, что теорема 2 является следствием одного более сильного результата К. Беренштейна и Б. Тейлора [3]. В их теореме фигурирует оценка снизу $|\nabla f(z)|$ при $z \in \Lambda$, которая вытекает из условия (3) с $v_2 = B_1|z|^\rho + B_2$. Теоремы 3 и 4 из результатов [3] получить нельзя, так как в них содержатся существенно более тонкие оценки продолжения.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство проводится по следующей схеме: вначале строится C^∞ -продолжение исходной функции на все C^n , которое затем «подправляется» до целой функции.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\text{dist}(0, \Lambda) \geq 2$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}^n$, $|z| \geq 1$. Положим $\tilde{f}(\lambda, z) = f(\lambda z)$, $\Lambda_z = \{\lambda : \lambda z \in \Lambda\} = \{\lambda : \tilde{f}(\lambda, z) = 0\} = \{\lambda_k(z)\}$.

Очевидно, $|\lambda_k(z)| \geq 2|z|^{-1}$.

Отметим, что $|\partial \tilde{f} / \partial \lambda(\lambda, z)| = |\langle \nabla f(\lambda z), z \rangle| = \left| \left\langle \nabla f(\lambda z), \frac{\lambda z}{|\lambda z|} \right\rangle \right| \times |z|$. В силу условия (3) при $\lambda \in \Lambda_z$ имеем $\ln |\partial \tilde{f} / \partial \lambda(\lambda, z)| \geq -v_2(\lambda z) + \ln |z|$ (5).

Обозначим через $d_k(z)$ величину $\text{dist}(\lambda_k(z), \Lambda_z \setminus \lambda_k(z))$. Пусть $d_k(z) \leq |z|^{-1}$. В силу леммы 3 из [6] (см. также лемму 3 из [7]) справедлива оценка $\ln d_k(z) \geq -v_2(\lambda_k(z)z) - \max \{v_1(\lambda z) : |\lambda - \lambda_k(z)| \leq |z|^{-1}\} - \ln |z| \geq -v(\lambda_k(z)z) - \ln |z|$.

Положим $r_k(z) = |z|^{-1} \exp\{-v(\lambda_k(z)z)\}$. Очевидно, $r_k(z) \leq d_k(z)$ (6).

Положим $\psi_k(\lambda, z) = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(\lambda_k(z), z) \right]^{-1} \lambda^{-1} r_k^{-1}(z) \tilde{f}(\lambda_k(z) + r_k(z)\lambda, z)$, $|\lambda| \leq 1$.

Очевидно, $\psi_k(0, z) = 1$, $\psi_k(\lambda, z) \neq 0$ при $|\lambda| < 1$ и $\ln |\psi_k(\lambda, z)| \leq 2v(\lambda_k(z)z)$ в силу (2), (5).

В силу неравенства Каратеодори при $|\lambda| \leq \frac{1}{2} : \ln |\psi_k(\lambda, z)| \geq -4v(\lambda_k(z)z)$, откуда $\ln |\tilde{f}(\lambda_k(z) + r_k(z)\lambda, z)| \geq -v_2(\lambda_k(z)z) + \ln |\lambda| - 5v(\lambda_k(z)z)$ (7).

Обозначим через $\Omega(z)$ множество $\{\lambda : |1 - \lambda^{-1}| < \frac{1}{2|z|} e^{-v(z)}\}$, через $\tilde{\Omega}(z)$ множество $\{\xi : \exists \lambda \in \Omega(z) : \lambda \xi = z\}$. Пусть λ_1 и λ_2 принадлежат Λ_z , причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда в силу (6) имеем $|\lambda_1 - \lambda_2| \geq \max \{|z|^{-1} \exp(-v(\lambda_1 z)), |z|^{-1} \exp(-v(\lambda_2 z))\}$. Поэтому $\{\lambda : |\lambda - \lambda_1| < 2^{-1}|z|^{-1} \exp(-v(\lambda_1 z))\} \cap \{\lambda : |\lambda - \lambda_2| < 2^{-1}|z|^{-1} \exp(-v(\lambda_2 z))\} = \emptyset$, откуда $\tilde{\Omega}(\lambda_1 z) \cap \tilde{\Omega}(\lambda_2 z) = \emptyset$ (8).

Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ — функция со следующими свойствами:

$$\chi(t) = 1 \text{ при } t \leq \frac{1}{4}, \chi(t) = 0 \text{ при } t \geq \frac{1}{2}, \chi(t) \in [0, 1],$$

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \text{ и пусть } c = \sup \{|\chi'(t)| : t \in \mathbf{R}^+\}.$$

Пусть $z_0 = \lambda z$.

Тогда

$$\chi(|z - z_0| e^{v(z_0)}) \neq 0 \Leftrightarrow |z - z_0| e^{v(z_0)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda \in \Omega(z_0). \quad (9)$$

Положим

$$g(z) = \begin{cases} \chi(|z - z_0| e^{v(z_0)}) \varphi(z_0), & \text{если } \exists z_0 \in \Lambda : z_0 = \lambda z, \lambda \in \Omega(z_0); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу (8) функция $g(z)$ определена корректно при $z \in \mathbf{C}^n$, $|z| \geq 1$. Заметим, что так как $|z_0| \geq 2$, $\forall z_0 \in \Lambda$, то $2^{-1}|z_0|^{-1} \exp(-v \times (z_0)) \leq 4^{-1}$. Поэтому если $z_0 = \lambda z$, $\lambda \in \Omega(z_0)$, то $|z| \geq \frac{3}{2}$. Значит, в силу (9) при $1 \leq |z| \leq 3/2$ имеем $g(z) = 0$. Доопределим $g(z)$ нулем при $|z| < 1$. Теперь, очевидно, $g \in C^\infty(\mathbf{C}^n)$.

Оценим теперь $|\bar{\partial} g(z)|$. Пусть $z_0 \in \lambda(z)z$, $\lambda(z) \in \Omega(z_0) = \{\lambda : |1 - \lambda^{-1}| < \frac{1}{2|z|} e^{-v(z_0)}\} = \{\lambda : |1 - \lambda| e^{v(\lambda z)} < \frac{1}{2|z|}\}$. Тогда $g(z) = \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z)z))) \varphi(\lambda(z)z)$.

Рассмотрим уравнение $\bar{f}(\lambda, \zeta) = 0$. В силу (5) — (7) оно разрешимо относительно λ на множестве $\{(\lambda, \zeta) : |\lambda - \lambda(z)| \exp(v(\lambda(z)z)) < 2^{-1}|z|^{-1}, \zeta \in U_z\}$, где U_z — некоторая окрестность z . При этом функция $\lambda(\zeta)$ является аналитической в U_z и, стало быть, $\partial_{\bar{\zeta}} \lambda(\zeta) = 0$ в U_z ; кроме того, поскольку $0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta), \zeta) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta) \times \frac{\partial \lambda(\zeta)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta), \zeta)$, то при $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0) : \left| \frac{\partial \lambda(\zeta)}{\partial \zeta_i} \right| = \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta), \zeta) \right| \times \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta) \right|^{-1} = |\lambda(\zeta)| \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta), \zeta) \right| \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta) \right|^{-1} \leq 2 \exp \times \times \{v(\lambda(\zeta)\zeta) - \ln|\zeta|\}$.

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (5) и тем, что $\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta_i}(\zeta) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-\zeta_i|=1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}, w, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_n) dw}{(w-\zeta_i)^2} \right| \leq$

$\leq \exp v_1^{(1)}(\zeta)$ в силу (2), а $|\lambda(\zeta)| \leq 1 + 2^{-1}|\zeta|^{-1} e^{-v(\lambda(\zeta)\zeta)} < 2$, если $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0)$. Таким образом, $|\partial_{\bar{\zeta}} \lambda(\zeta)| \leq 2ne^{v(\lambda(\zeta)\zeta) - \ln|\zeta|}$, $\zeta \in U_z$, $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0)$ (10).

Итак, пусть $z_0 = \lambda(z)z$, $\lambda(z) \in \Omega(z_0)$. Если $|\lambda(z) - 1| < 4^{-1} \times \times |z|^{-1} \exp(-v(\lambda(z)z))$, то $g(z) = \varphi(\lambda(z)z) \in A(U_z)$, и, значит, $\bar{\partial} g(z) = 0$.

Пусть теперь $|\lambda(z) - 1||z| \exp(v(\lambda(z)z)) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $\bar{\partial} g \times \times (z) = \bar{\partial} \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z)z))) \times \varphi(\lambda(z)z)$. Остается оценить $|\bar{\partial} \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z)z)))| : |\bar{\partial} \chi| \leq c \left(\frac{|1 - \lambda(z)|}{2|1 - \lambda(z)|} |\partial \lambda \times \times (z)||z| \exp(v(\lambda(z)z)) + \frac{|1 - \lambda(z)|}{2} e^{v(\lambda(z)z)} + |1 - \lambda(z)||z| \exp(v \times \times (\lambda(z)z)) |\bar{\partial} v(\lambda(z)z)| \times (|\partial \lambda(z)||z| + |\lambda(z)|) \right) \leq c(ne^{2v(\lambda(z)z)} + + \frac{1}{4|z|} + ne^{2v(\lambda(z)z)} + 2ne^{v(\lambda(z)z) - \ln|z|}) \leq c_1 \exp(2v(\lambda(z)z))$. (11)

(Здесь мы воспользовались условием (1) и оценкой (10)).

Из (11) и (4) следует, что

$$|\bar{\partial} g(z)| \leq C_1 e^{\mu(\lambda(z)z) + 2v(\lambda(z)z)} \quad (12)$$

при $|\lambda(z) - 1||z| \exp(v(\lambda(z)z)) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Положим $\Phi(z) = g(z) - \beta(z)f(z)$, где $\bar{\partial} \beta = \alpha = f^{-1} \cdot \bar{\partial} g$ (13).

Чтобы оценить сверху $|\alpha|$, заметим, что $\alpha(z) \neq 0 \Rightarrow (\lambda(z) - 1)|z| \exp(v(\lambda(z)z)) = \lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, откуда $1 = \lambda(z) + \lambda|z|^{-1} \times \exp(-v(\lambda(z)z))$, и, значит, $f(z) = \tilde{f}(1, z) = \tilde{f}(\lambda(z) + \lambda|z|^{-1} \times \exp(-v(\lambda(z)z)))$. Используя оценку (7), получаем, что $\ln|f(z)| \geq -v_2(\lambda(z)z) - 5v(\lambda(z)z) - \ln 4$.

Таким образом, $|\alpha(z)| \leq C_2 \exp(u(\lambda(z)z) + v_2(\lambda(z)z) + 7v(\lambda(z)z))$, и, поскольку $|\lambda(z)z - z| = |z||\lambda(z) - 1| \leq \frac{1}{2} e^{-v(\lambda(z)z)} \leq \frac{1}{2}$, то $|\alpha(z)| \leq C_2 \exp((u + v_2)^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + 7v^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z))$, $z \in C^n$.

Положим $\psi(z) = (u + v_2)^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + 7v^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + (n+1) \ln(1 + |z|^2)$. Легко видеть, что $\psi \in PSH(C^n)$ и $\int_{C^n} |\alpha|^2 e^{-2\psi} dV_n < \infty$. По известной теореме Хермандера [1] существует такое решение β уравнения (13), что $\int_{C^n} |\beta|^2 e^{-2\psi - 2\ln(1 + |z|^2)} dV_n < \infty$. Несложно показать теперь,

что при таком выборе β

$$\int_{C^n} |\Phi|^2 e^{-2\psi - 2v_1 - 2\ln(1 + |z|^2)} dV_n < \infty,$$

откуда стандартным способом [1] получается оценка, фигурирующая в заключении теоремы.

Очевидно, что при $z \in \Lambda$ $\Phi(z) = \varphi(z) + \beta(z)f(z) = \varphi(z)$. Теорема доказана.

Заметим, что результат, аналогичный теореме 1, можно получить, рассматривая другое семейство комплексных прямых. Например, вместо семейства прямых, проходящих через начало координат, можно взять семейство прямых, параллельных плоскости переменного z_1 (ср. [4], где доказано, что оба эти семейства являются «почти параллельными» в смысле определения из [4]).

Приведем без доказательства соответствующий результат.

Теорема 5. Пусть функции u, v_1, v_2, v — те же, что в теореме 1. Пусть, далее, $f(z)$ — целая функция, $\Lambda = \{z: f(z) = 0\}$, Λ не содержит ни одной прямой $\{z_2, \dots, z_n = \text{const}\}$,

$$\ln|f(z)| \leq v_1(z), \quad z \in C^n,$$

$$\ln \left| \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) \right| \geq -v_2(z), \quad z \in \Lambda.$$

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Формулировку аналогов теорем 2—4 мы опускаем.

Отметим, что простейший пример множества Λ , которое может удовлетворять условиям теоремы 1 (или 5), — это параллельное семейство гиперплоскостей (т. е. нулевое множество функции, зависящей только от одной переменной). В этом случае можно доказать необходимость условий интерполяционности, приведенных в теоремах

2—4, поскольку множество параллельных гиперплоскостей интерполяционно тогда и только тогда, когда на каждой комплексной прямой, проходящей через начало координат, разрешима задача свободной интерполяции в соответствующем классе функций, и можно воспользоваться известными одномерными результатами (см., например, [6]).

В заключение рассмотрим несколько более сложный пример. Пусть $\Lambda = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : e^z + e^w = 1\}$. Известный результат Демайи (он приводится, например, в [3]) состоит в том, что аналитическая на Λ функция со степенным ростом может быть продолжена в $\mathbb{C}^2$ до полинома. Из наших результатов теорему Демайи получить нельзя. Можно утверждать (уточняя по ходу доказательства некоторые оценки) лишь следующее:

1) любая функция, аналитическая на Λ и имеющая порядок 1, может быть продолжена до целой с «подскоком» индикатора на $\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Re} w|)$ (соответственно с «подскоком» типа на 1);

2) любая функция, аналитическая на Λ и имеющая порядок больше 1, может быть, продолжена до целой с сохранением индикатора (типа). (В обоих случаях от индикатора требуется непрерывность).

Список литературы: 1. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968. 280 с. 2. Ронкин Л. И., Руссаковский А. М. О продолжении с оценками функции, голоморфной на алгебраическом множестве // *Ann. Pol. Math.* 1985. 46. С. 403—431. 3. Berenstein C. A., Taylor B. A. On the geometry of interpolating varieties // *Sem. P. Lelong—H. Skoda.* 1980—1981. P. 1—25. 4. Berenstein C. A., Taylor B. A. Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis // *I. Anal. Math.* 1980. 38. P. 188—254. 5. Ронкин Л. И. О продолжении с оценками функции, голоморфной на нулевом множестве псевдополинома // *Сиб. мат. журн.* 1983. 24, № 4. С. 150—163. 6. Руссаковский А. М. Интерполяция в классах голоморфных функций одной и многих переменных с индикатором, не превосходящим данного: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Х., 1984. 122 с. Машинопись. 7. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // *Adv. Math.* 1979. 33, № 2. P. 109—143.

Поступила в редколлегию 25.04.87

УДК 517.53/57

Г. М. ЛЕВИН

К ТЕОРИИ ИТЕРАЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Введение. 1.1. Значительные успехи, достигнутые в последнее время в теории одномерных динамических систем, связаны во многом с изучением конкретных семейств отображений. В первую очередь, это относится к квадратичному семейству:

$$f_c : z \rightarrow z^2 - c. \quad (1.1)$$

Для комплексных значений параметра c обнаружено континуальное разнообразие в поведении итераций отображения $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Границей, отделяющей устойчивые отображения друг от друга, является граница так называемого множества Мандельброта M [1]. Оно состоит из тех $c \in \mathbb{C}$, для которых итерации $f_c^n(0) = 0$ (1) при $n \rightarrow \infty$. Итерации точки $z = 0$ играют особую роль, потому что это единственная критическая точка функции f_c . Одно из свойств M состоит в том, что каждая точка границы M является предельной для сверхустойчивых значений c (значение параметра c называется сверхустойчивым, если f_c имеет сверхустойчивый цикл, т. е. цикл, в котором содержится критическая точка). В [2] показано, что сверхустойчивые значения c асимптотически распределены по некоторой мере с носителем на ∂M . В настоящей работе дано обобщение этого утверждения на семейство

$$z \rightarrow z^p - c \quad (p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2). \quad (1.2)$$

Приводятся свойства этой меры, а также рассматриваются некоторые ряды, связанные с множеством M и его обобщением на семейство (1.2). Наконец, описан линейный алгоритм для вычисления моментов меры (для $p = 2$).

1.2. Напомним основные определения. Последовательное применение отображения $f: U \rightarrow U$ порождает итерации $f^n: U \rightarrow U$; $f^1 \equiv f$, $f^{n+1} = f(f^n)$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = f^n(x_0)$ — орбита точки x_0 ; если $x_n = x_0$, то x_0 — периодическая точка периода n ; наименьший из периодов x_0 есть некоторое $m \geq 1$, причем $m | n$; точки $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ образуют цикл; если f дифференцируемо, то мультипликатор этого цикла есть $\lambda = (f^m)'(x_0) = \prod_{j=0}^{m-1} f'(x_j)$; цикл называется устойчивым, нейтральным или неустойчивым, смотря по тому, лежит ли λ соответственно внутри, на границе или вне единичного круга; цикл с участием критической точки называется сверхустойчивым (для него $\lambda = 0$).

2. Мера на бифуркационном множестве. 2.1. Зафиксируем $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, и рассмотрим семейство

$$f_c: z \rightarrow z^p - c. \quad (2.1)$$

Обозначим через M_p (или просто M) множество тех $c \in \mathbb{C}$, для которых $f_c^n(0) = 0$ (1) ($n \rightarrow \infty$). Граница M_p состоит из тех c , при которых семейство (2.1) перестает быть устойчивым [3], [1].

Пусть $q_n(c) = f_c^n(0)$ — итерации точки ноль; q_n — полином степени $p^n - 1$. Множество всех его корней обозначим через P_n : $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ — сверхустойчивые значения c . $P \subset M$ и множество предельных для P точек есть ∂M [3]. Нетрудно показать, что M ограничено, замкнуто, совершенно, и каждая компонента его внутренности односвязна. Теорема Дуади — Хаббарда [1] утверждает, что при $p = 2$ M_2

связно. С очевидными изменениями это доказательство проходит и при $p > 2$.

2.2. Рассмотрим несколько более общую ситуацию. Пусть $f_c(z) = z^p + a_1(c)z^{p-1} + \dots + a_p(c)$ — полином степени $p \geq 2$, коэффициенты которого $a_i(c)$ суть голоморфные функции в области $D \subset \mathbb{C}$.

Пусть $a \in D$, q_0 — критическая точка $f_a(z)$. Перейдя к локальной координате $\xi: U \rightarrow V$, где V — окрестность точки a , $\tau = 0 \in U$, можно считать, что q_0 продолжается до голоморфной в U функции q . Обозначим $q_m = f_c^m(q)$.

Лемма. Если для некоторого $m \geq 1$ $q_m \neq q$ и $\tau = 0$ — ноль кратности l функции $q_m - q$, то 0 — ноль той же кратности функций $q_{nm} - q$ ($n = 2, 3, \dots$).

Доказательство. Применим индукцию по n . По условию, $q_m - q = \tau^l \cdot Q_1(\tau)$, $Q_1(0) \neq 0$. Предположим, что $q_{nm} - q = \tau^l \times Q_n(\tau)$, $Q_n(0) \neq 0$. Так как $f'(q) = 0$, то $q_{(n+1)m} - q = f^m(q +$

$$+ \tau^l Q_n) - q = (f^m(q) - q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f^m}{dz^k}(q) \cdot (\tau^l Q_n)^k = \tau^l Q_1 + + O(\tau^{2l}) = \tau^l Q_{n+1}(\tau), \quad Q_{n+1}(0) \neq 0.$$

2.3. Вернемся к семейству (2.1) и введем функции

$$\sigma_n(c) = \frac{q'_n(c)}{p^{n-1} q_n(c)}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$\sigma_n(c)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus M$, так как $q_n(c) \neq 0$, $c \in \mathbb{C} \setminus M$.

Лемма. Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(c) = \sigma(c)$, $c \in \mathbb{C} \setminus M$. Функция $\sigma(c)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus M$, $\sigma(c) \sim \frac{1}{c}$ ($c \rightarrow \infty$).

Доказательство. Воспользуемся теоремой Бетхера [1]: если $f(z) = z^p + \dots + a_p$ — полином, то $(f^n(z))^{p^{-n}} = z + \dots$ равномерно сходится в окрестности $z = \infty$ при $n \rightarrow \infty$ к голоморфной в ∞ функции. Отсюда следует сходимость последовательности $(q_n)^{p^{-n}}$ в каждой точке $\mathbb{C} \setminus M$. Эта последовательность отделена от 0 и ∞ в окрестности каждой точки $c \in \mathbb{C} \setminus M$. Взяв логарифмическую производную, получим искомую сходимость.

2.4. Напомним, что P_n — это множество корней $q_n(c)$ (с учетом кратности).

Лемма. Пусть функция $F(c)$ голоморфна в некоторой окрестности компакта M . Тогда существует

$$\Phi(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(c) \sigma(c) dc,$$

где Γ — гладкий контур, охватывающий M .

Доказательство. По теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(c) \sigma(c) dc = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F \frac{q'_n}{p^{n-1} q_n} dc = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c).$$

2.5. Теорема. Пусть $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда существует

$$\Phi(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c).$$

Доказательство. Если $F = \operatorname{Re}(u)$, где u — полином, то утверждение следует из п. 2.4. Если же F — произвольная непрерывная функция, то по теореме Уолша — Лебега [4], на границе M функция F есть равномерный предел гармонических полиномов. Воспользовавшись п. 2.2 и доказанным, получим искомое.

2.6. Пусть μ_n — вероятностная мера, равномерно распределенная в корнях полинома $q_n(c)$. Мы доказали, что μ_n слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к мере μ с носителем на ∂M ; μ определяется линейным функционалом $\Phi \in \mathcal{C}(S)^*$.

3. Ядро меры. Нелинейность отображений f_c приводит к быстрой сходимости функций σ_n в ∞ , что, в частности, позволяет описать ядро меры μ (функционала Φ).

3.1. Лемма. $\sigma(c) = \sigma_n(c) + O(c^{-p^n})$, $c \rightarrow \infty$.

Доказательство. Соотношение $q_{n+1} = q_n^p - c$ влечет:

$$\frac{\ln q_{n+1}}{p^n} = \frac{\ln q_n}{p^{n-1}} + O(c^{-(p^n-1)}),$$

откуда дифференцированием получим требуемое.

3.2. Лемма. Пусть $F(c)$ — полином степени l и $l < p^n - p^{n-1}$ — — 2. Тогда

$$\int F q_n d\mu = 0.$$

Доказательство. В силу п. 2.4,

$$\begin{aligned} \int F q_n d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F q_n \sigma dc = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(c) q_n(c) \left(\frac{q_n'(c)}{p^{n-1} q_n(c)} + O(c^{-p^n}) \right) dc = \\ &= \frac{1}{p^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(c) q_n'(c) dc + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} O(c^{l+p^{n-1}-p^n}) dc = 0. \end{aligned}$$

3.3. Следствие. Пусть $l \geq 0$, $m \geq 1$, $1 \leq r \leq p-1$, $0 \leq j \leq (p-r)p^{m-1} - 2$, $\varepsilon_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $k = 1, 2, \dots, l$, $\varepsilon_l \geq 1$. Тогда

$$\int c^j q_m^r q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot q_{m+l}^{\varepsilon_l} d\mu = 0.$$

Доказательство. Пользуемся п. 3.2 и тем, что $\deg(c^j q_m^r \times \times q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot q_{m+l}^{\varepsilon_l}) \leq p^{m+l} - p^{m+l-1} - 2$.

3.4. Лемма. При $l > 0$, $1 \leq r \leq p-1$, $j \leq 0$ и $j+l \leq (p-r)p^{m-1} - 2$

$$\int c^j q_m^{l+p+r} d\mu = 0.$$

Доказательство. Индукцией по l докажем формулу $q_m^{lp} = c^l + \dots$ (3.1), где точками отмечена линейная комбинация членов вида $c^l q_{m+1}^{e_1} \cdot \dots \cdot q_{m+k}^{e_k}$ (3.2) ($e_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $0 \leq j \leq l-1$). В самом деле, при $l=0$ (3.1) очевидна. Далее,

$$q_m^{(l+1)p} = (q_{m+1} + c) q_m^{lp} = q_{m+1} q_m^{lp} + c q_m^{lp},$$

и $q_{m+1} c^l q_{m+1}^{e_1} \cdot \dots \cdot q_{m+k}^{e_k}$ есть линейная комбинация членов вида (3.2) с $j \leq l$.

(3.1) доказано. Осталось умножить обе части на q_m^r и воспользоваться п. 3.3.

4. Функции, связанные с бифуркационным множеством. Напомним, что данному фиксированному натуральному $p \geq 2$ сопоставлено бифуркационное множество M семейства (2.1). При $p=2$ это множество Мандельброта.

4.1. Рассмотрим следующие функции, определенные и голоморфные в ∞ : $\varphi_n = (q_n)^{p^{-n}}$, φ_n однозначно выделяется условием

$$\frac{\varphi_n(c)}{c} \rightarrow 1 \quad (c \rightarrow \infty); \text{ по теореме Бетхера, определена } \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n.$$

Пусть $\psi = \varphi^{-1}$ — обратное отображение. Заметим, что

$$\sigma_n = \frac{\varphi'_n}{\varphi_n}, \quad \sigma = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Определим последовательность чисел $(C_l)_{l \geq 0}$ рядом Лорана, сходящимся в ∞ :

$$\psi(\omega) = \omega + C_0 + \frac{C_1}{\omega} + \dots + \frac{C_l}{\omega^l} + \dots.$$

4.2. **Замечание.** (1) числа C_l зависят, конечно, и от фиксированного p ; (2) так как M связано, то φ_n и φ однозначно продолжаются в $\mathbb{C} \setminus M$, причем φ однолистно отображает $\mathbb{C} \setminus M$ на $D = \{\omega : |\omega| > 1\}$, а $\psi: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus M$ — обратное отображение.

4.3. Мы покажем, что среди чисел C_l много нулей. Для доказательства нужна

Лемма. Пусть $1 \leq r \leq p-1$, $m \geq 1$, $0 \leq l \leq (p-r)p^{m-1} - 2$. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi(c))^{(l+p+r)p^{m-1}} &= q_m^{lp+r} + \sum_{j=1}^l R_j(c) q_m^{(l-j)p+r} + \\ &+ O(c^{-((p-r)p^{m-1}-l-1)}), \quad c \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $R_j(c)$ — полином степени не выше j .

Доказательство. Умножим равенство

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q'_n}{p^{n-1} q_n} + O(c^{-p^n})$$

на k и проинтегрируем, получим

$$\varphi^k = q_n^{kp^{n-1}} + O(c^{-p^n+1+k}).$$

Пусть теперь $k = (lp + r)p^{m-1}$, $0 \leq l \leq (p-r)p^{m-1} - 2$, $n - m = \alpha$, причем α таково, что $p^\alpha \leq lp + r < p^{\alpha+1}$. Тогда

$$\varphi^{(lp+r)p^{m-1}} = q_{m+\alpha}^{(lp+r)p^{-\alpha}} + O(c^{-(p^m+\alpha-(lp+r)p^{m-1}-1)}).$$

По индукции заключаем, что α -я итерация (2.1)

$$f_c^{(\alpha)}(z) = z^{p^\alpha} + p_1^{(\alpha)}(c) z^{p^\alpha-p} + \dots + p_i^{(\alpha)}(c) z^{p^\alpha-ip} + \dots,$$

где $p_i^{(\alpha)}$ — многочлен степени i . Поэтому

$$\begin{aligned} (q_{m+\alpha})^{(lp+r)p^{-\alpha}} &= (f_c^{(\alpha)}(q_m))^{(lp+r)p^{-\alpha}} = \\ &= (q_m^{p^\alpha} + \dots + p_i^{(\alpha)} z^{p^\alpha-ip} + \dots)^{(lp+r)p^{-\alpha}} = \\ &= q_m^{lp+r} \left(1 + \dots + \frac{p_i^{(\alpha)}}{q_m^{ip}} + \dots \right)^{(lp+r)p^{-\alpha}} = \\ &= q_m^{lp+r} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_j(c)}{q_m^{jp}} \right) = q_m^{lp+r} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j q_m^{(l-i)p+r}, \end{aligned}$$

где $R_j(c)$ — полином степени не выше j (он не зависит от α , так как α однозначно определяется по l, r, p). Осталось заметить, что при $j = l+1$

$$q_m^{-p} R_{l+1} = O(c^{-(p^{m-1}(p-r)-l-1)}).$$

4.4. Теорема. $C_{(lp+r)p^{m-1}} = 0$,

$$r \in \{1, 2, \dots, p-1\}, 0 \leq l \leq (p-r)p^{m-1} - 3.$$

Доказательство. Для достаточно большого p имеем

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=\rho} \omega^{k-1} \psi(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(|\omega|=\rho)} c \varphi^k(c) \sigma(c) dc.$$

Теперь пользуемся пп. 4.3 и 3.4.

4.5. Замечание. Доказанная теорема означает, что для каждого $p \geq 2$ нули в соответствующей последовательности $(C_l)_{l \geq 0}$ разбиваются на $p-1$ подпоследовательность, номера в которых почти — периодичны с почти — периодом p^n , $n \in \mathbb{N}$.

4.6. При $p = 2$, в частности, получается последовательность чисел $(C_l)_{l \geq 0}$, в которой $C_{(2l+1)2^{m-1}} = 0$, $m \geq 3$, $l = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 3$.

5. Арифметические свойства коэффициентов. Остановимся на случае квадратичного семейства и зафиксируем $p = 2$.

Напомним, что $\varphi(c)$ однолистно отображает внешность множества Мандельброта на внешность единичного круга, $\sigma = \frac{\varphi'}{\varphi}$, $\psi = \varphi^{-1}$.

Вместе с последовательностью $(C_l)_{l \geq 0}$ рассмотрим еще две последовательности, которые определяются разложениями φ и σ в ∞ :

$$\varphi(c) = c + B_0 + \frac{B_1}{c} + \dots + \frac{B_l}{c^l} + \dots,$$

$$\sigma(c) = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{A_1}{c} + \frac{A_2}{c^2} + \dots + \frac{A_l}{c^l} + \dots \right).$$

Числа A_l — это моменты меры μ :

$$\int c^l d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} c^l \sigma(c) dc = A_l.$$

Пусть $P_n = (b_{k,n})_{k=1}^{2^{n-1}}$ — множество всех корней $q_n(c)$. Так как

$$\frac{q'_n(c)}{2^{n-1} q_n(c)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{c^{l+1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (b_{k,n})^l, \quad c \rightarrow \infty,$$

то из леммы п. 3.1 при $p = 2$ получим

$$A_l = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (b_{k,n})^l, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq l \leq 2^n - 2.$$

5.1. Мы вычислим точный двоичный порядок чисел A_l , B_l и C_{2l+1} . Двоичным порядком $\text{ord}_2 m$ ненулевого целого m называется наибольшее целое l , такое, что 2^l делит m ; двоичный порядок дроби $\text{ord}_2 \frac{m}{n} = \text{ord}_2 m - \text{ord}_2 n$; $\text{ord}_2 0 = +\infty$.

5.2. Положим для удобства $c = -t$, и пусть

$$q_n(c) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a(i, n) t^i.$$

Коэффициенты $a(i, n)$ суть натуральные числа (например, $a(1, n) = a(2^{n-1}, n) = 1$). Поэтому и коэффициенты разложения q'_n/q_n в ∞ есть целые числа; учитывая 3.1, получим, что A_l , а также B_l и C_l разлагаются в конечные двоичные дроби (при $p = 2$).

5.3. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр в двоичном разложении натурального числа n . Хорошо известна формула $S(n) = n - \text{ord}_2(n!)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $S(n) + S(m) - S(n+m) = \text{ord}_2 C_{n+m}^n \geq 0$,

где $C_{n+m}^n = \frac{(m+n)!}{n! m!}$ — число сочетаний из $m+n$ по n .

Далее нам понадобится несколько утверждений, доказательства которых мы не приводим ввиду элементарности.

5.4. Лемма. Пусть $l \geq 3$. Сумма

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} C_l^k$$

нечетна, если l не есть степень двух, и четна в противном случае.

5.5. Лемма. При $1 \leq l \leq 2^{n-1} - 2$, $n \geq 2$, сумма

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{l+2^{n-1}-1}{2}\right]} C_{l+2^{n-1}}^k$$

нечетна.

5.6. Лемма. При $2^{n-1} \leq l \leq 2^n - 2$, $n \geq 2$, сумма

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} C_{2^{n-1}+l-k}^l$$

нечетна

5.7. Теорема. $\text{ord}_2 a(l, n) = S(l) - 1$, $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$.

Доказательство. Заметим сначала, что если $D = \sum_{k=1}^l D_k$ — сумма l ненулевых целых чисел, $\text{ord}_2 D_k = p_k \geq p_0$ для всех k и $\text{ord}_2 D_k = p_0$ для нечетного числа номеров k , то $D \neq 0$ и $\text{ord}_2 D = p_0$.

Утверждение теоремы будем доказывать индукцией по n . Так как $a(1, 1) = a(1, 2) = a(2, 2) = 1$, то при $n = 1, 2$ теорема верна. Предположим, что $\text{ord}_2 a(l, n) = S(l) - 1$, $1 \leq l \leq 2^{n-1}$, и докажем, что $\text{ord}_2 a(l, n+1) = S(l) - 1$, $1 \leq l \leq 2^n$. Разберем случай, когда l четно. В случае нечетного l доказательство аналогично.

1) $1 \leq l \leq 2^{n-1}$.

Так как $q_{n+1} = q_n^2 + t$, то при $l \leq 3$

$$a(l, n+1) = 2 \sum_{k=1}^{\frac{l}{2}-1} a(k, n) a(l-k, n) + \left(a\left(\frac{l}{2}, n\right) \right)^2. \quad (5.1)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{ord}_2 2a(k, n) a(l-k, n) &= 1 + \text{ord}_2 a(k, n) + \\ &+ \text{ord}_2 a(l-k, n) = 1 + S(k) - 1 + S(l-k) - 1 = \\ &= S(k) + S(l-k) - 1 \geq S(l) - 1 \end{aligned}$$

в силу 5.3, причем равенство имеет место, когда C_l^k нечетно;

$$\begin{aligned} \text{ord}_2 \left(a\left(\frac{l}{2}, n\right) \right)^2 &= 2 \left(S\left(\frac{l}{2}\right) - 1 \right) = 2 \cdot S\left(\frac{l}{2}\right) - 2 = \\ &= 2 \cdot S(l) - 2 \geq S(l) - 1; \end{aligned}$$

равенство имеет место, если l — степень двух.

Итак, число слагаемых в сумме (5.1) с наименьшим порядком $p_0 = S(l) - 1$ равно числу нечетных слагаемых в сумме

$$\sum_{k=1}^{\frac{l}{2}-1} C_l^k,$$

если l — не степень 2, и на единицу больше, если l — степень 2. В обоих случаях в силу 5.4 это число нечетно, что и доказывает утверждение при $1 \leq l \leq 2^{n-1}$.

2) $2^{n-1} + 1 \leq l \leq 2^n$.

При $l = 2^n$ $\text{ord}_2 a(2^n, n+1) = \text{ord}_2 1 = S(2^n) - 1$.

При $l = 2^{n-1} + r$, $1 \leq r \leq 2^{n-1} - 1$, рассуждаем аналогично 1) и пользуемся 5.5.

5.8. Теперь мы можем вычислить двоичный порядок моментов A_l . Напомним формулы Ньютона [5]: если δ_l — сумма l -х степеней корней полинома

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \text{ то при } l \leq n$$

$$\delta_l + \delta_{l-1} a_1 + \delta_{l-2} a_2 + \dots + \delta_1 a_{l-1} + (-1)^l l a_l = 0,$$

а при $l > n$ $\delta_l + \delta_{l-1} a_1 + \delta_{l-2} a_2 + \dots + \delta_{l-n} a_n = 0$.

5.9. Теорема.

$$\text{ord}_2(A_l) = -S(l), \quad l = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Обозначим

$$R(l, n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-b_{k,n})^l, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$(b_{k,n})_{k=1}^{2^{n-1}}$ — корни уравнения $q_n = 0$.

Тогда

$$R(l, n) = (-1)^l \cdot 2^{n-1} A_l, \quad 1 \leq l \leq 2^n - 2. \quad (5.2)$$

Поэтому утверждение теоремы равносильно тому, что

$$\text{ord}_2 R(l, n) = n - 1 - S(l), \quad 1 \leq l \leq 2^n - 2 \quad (5.3).$$

Предположим, что (5.3) доказано для некоторого $n \geq 2$ и всех $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1} - 2$, и докажем его для $l = 2^{n-1} - 1, 2^{n-1}, \dots, 2^n - 2$. Тогда в силу (5.2) равенство (5.3) будет доказано для $n + 1$ и $l = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 2$. Отсюда по индукции будет вытекать справедливость теоремы для всех l .

Так как

$$\frac{q'_2}{2q_2} = \frac{2c-1}{2(c^2-c)} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c^2} + \dots \right),$$

то $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, т. е. при $n = 2, 3$ и $l = 1, 2$ (5.3) выполняется. Пусть $\text{ord}_2 R(l, n) = n - 1 - S(l)$ для некоторого $n \geq 3$ и всех $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1} - 2$. Покажем, что $\text{ord}_2 R(l, n) = n - 1 - S(l)$ для $l = 2^{n-1} - 1, \dots, 2^n - 2$.

Так как $\deg q_n = 2^{n-1}$ и $q_n(0) = 0$, то по формулам Ньютона

$$R(2^{n-1}-1, n) = -(R(2^{n-1}-2, n) a(2^{n-1}-1, n) + \dots + R(i-1, n) a(i, n) + \dots + R(1, n) a(2, n) + (2^{n-1}-1) a(1, n)), \quad (5.4)$$

$$R(l, n) = -(R(l-1, n) a(2^{n-1}-1, n) + \dots + R(l-i, n) a(2^{n-1}-i, n) + \dots + R(l-2^{n-1}+1, n) a(1, n)), \quad (5.5)$$

$l = 2^{n-1}, \dots, 2^n - 2$.

По доказанному, $\text{ord}_2 a(i, n) = S(i) - 1$; по предположению индукции, $\text{ord}_2 R(l, n) = n - 1 - S(l)$, $1 \leq l \leq 2^{n-1} - 2$.

Пусть $l = 2^{n-1} - 1$. Докажем, что в правой части (5.4) все слагаемые, кроме последнего, равного $2^{n-1} - 1$, четны:

$$\text{ord}_2 R(i-1, n) a(i, n) = (n - 1 - S(i-1)) + (S(i) - 1) \geq 1, \text{ так как } S(i-1) \leq n - 2, i \leq 2^{n-1} - 1.$$

Итак, при $l = 2^{n-1} - 1$ утверждение доказано.

Пусть теперь оно доказано для всех номеров, меньших l , где $2^{n-1} \leq l \leq 2^n - 2$, и докажем его для l . В (5.5) порядок каждого слагаемого

$$\text{ord}_2(R(l-i, n)a(2^{n-1}-i, n)) = (n-1-S(l-i)) + (S(2^{n-1}-i) - 1) \geq n-1-S(l),$$

так как $S(2^{n-1}-i) + S(l) \geq S(l-i) + 1$, причем равенство равносильно тому, что число $C_{2^{n-1}+l-i}^l$ нечетно. Осталось воспользоваться 5.6. Теорема доказана.

5.10. *Замечание.* Воспользовавшись доказанной теоремой и выражением дискриминанта полинома через его степенные суммы [5], нетрудно показать, что дискриминант

$$D_n = \prod_{1 \leq i < k \leq 2^{n-1}} (b_{i,n} - b_{k,n})^2$$

полинома q_n при $n \geq 2$ есть число нечетное.

5.11. Приведем еще одно утверждение, касающееся чисел A_l . Для этого заметим, что, по доказанному, $\text{ord}_2 2^l A_l = l - S(l) = \text{ord}_2(l!) \geq 0$, т. е. $N_l = 2^l A_l$ — целое число ($l \in \mathbb{N}$).

Теорема. Для любых натуральных k, r и простого числа $m > 2$

$$N_{km^r} = N_{km^{r-1}} \pmod{m^r}.$$

Замечание. Так как $N_1 = 1$, то, в частности, $N_m \equiv 1 \pmod{m}$ для всех простых $m > 2$.

Утверждение теоремы вытекает из сравнения (частный случай теоремы Эйлера): $2^{km^r - km^{r-1}} \equiv 1 \pmod{m^r}$

и следующего утверждения [6]: если δ_l — сумма l -х степеней корней уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ с целыми коэффициентами, $a_n \neq 0$, то для любых натуральных k, r и любого простого m

$$\delta_{km^r} \equiv \delta_{km^{r-1}} \pmod{m^r}.$$

5.12. По модулю доказанной теоремы 5.9. нетрудно вычислить двоичный порядок и коэффициентов B_l разложения функции φ , одностолбисто отображающей внешность множества M на внешность единичного круга.

Теорема.

$$\text{ord}_2 B_l = -(l+1 + \text{ord}_2(l+1)!) = S(l+1) - 2l - 2, \quad l=0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Так как $B_0 = \frac{1}{2}$, то при $l=0$ формула верна. Предположим, что она верна для всех номеров, меньших l , и докажем ее для l . Тождество $\sigma = \frac{\varphi'}{\varphi}$ перепишем в виде:

$$1 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l B_l}{c^{l+1}} = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{c^l} \left(c + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{c^l} \right),$$

откуда

$$B_l = -\frac{1}{l+1} (A_{l+1} + B_0 A_l + \dots + B_{l-1} A_1).$$

Имеем при $i = 0, 1, \dots, l-2$:

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(B_l A_{l-i}) &= -(i+1 + \text{ord}_2(i+1)!) - S(l-i) = -(i+1) - \\ &\text{ord}_2(i+1)! - (l-i) + \text{ord}_2(l-i)! = -(l+1) + \text{ord}_2(l-i)! - \\ &\text{ord}_2(i+1)! > -(l+1) - \text{ord}_2(l!) = \text{ord}_2(A_1 B_{l-1}). \end{aligned}$$

Аналогично $\text{ord}_2 A_{l+1} = -(l+1) + \text{ord}_2(l+1)! > \text{ord}_2(A_1 B_{l-1})$.
Поэтому $\text{ord}_2 B_l = -\text{ord}_2(l+1) + \text{ord}_2(A_1 B_{l-1}) = -(l+1 + \text{ord}_2(l+1)!)$.

Теорема доказана.

Следствие. $B_l \neq 0$, $l = 0, 1, 2, \dots$.

5.13. Аналогично доказывается

Теорема.

$$\text{ord}_2 C_{2l+1} = \text{ord}_2 B_{2l+1} = S(l+1) - 4l - 4,$$

$l = 0, 1, \dots$.

В частности, $C_{2l+1} \neq 0$. По-видимому, все нулевые члены последовательности (C_l) даются формулой из п. 4.6.

6. **Линейный метод вычисления моментов.** 6.1. Мы продолжаем рассматривать случай $P = 2$. Напомним, что A_l есть l -й момент меры μ .

Последовательность $(A_l)_{l \geq 0}$ можно находить, вычисляя сначала коэффициенты $a(k, n)$ полинома q_n , и затем пользуясь формулой п. 3.1. Соответствующие рекуррентные формулы нелинейны.

Здесь мы опишем линейный алгоритм вычисления A_l , который нетрудно реализовать на ЭВМ.

6.2. Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{i=0}^l \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ —

двоичное разложение n ; n -м элементарным полиномом $d_n(c)$ назовем произведение

$$d_n(c) = \prod_{\varepsilon_i=1} f_c^{\varepsilon_i}(c) = \prod_{k=0}^l (f_c^k(c))^{\varepsilon_k}. \quad (6.1)$$

Кроме того, положим $d_0(c) \equiv 1$,

6.3. Так как $\deg f_c^k(c) = \deg q_{k+1}(c) = 2^k$, то $\deg d_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому любой полином $F(c)$ есть конечная линейная комбинация системы $(d_n(c))_{n \geq 0}$. В частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор $(\alpha(i, m))_{i=0}^m$ такой, что

$$c^m = \sum_{i=0}^m \alpha(i, m) d_i(c); \quad (6.2)$$

так как $d_i(0) = 0$ ($i \geq 1$), то $\alpha(0, m) = 0$.

Итак,

$$A_m = \int c^m d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha(i, m) \int d_i(c) d\mu. \quad (6.3)$$

6.4. Лемма. Пусть $k \in \mathbb{N}$.

(а) Если $n \neq 2^k - 1$, то

$$\int d_n(c) d\mu = 0.$$

(б) Если $n = 2^k - 1$, то

$$\int d_n(c) d\mu = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Доказательство. (а) вытекает из п. 3.2. (при $p = 2$).

(б) Пусть $n = 2^k - 1$. Тогда $d_n(c) = q_1(c) \cdot \dots \cdot q_k(c)$.

В силу п.п. 2.3. 3.1,

$$\begin{aligned} \int q_1 \cdot \dots \cdot q_k d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} q_1 \cdot \dots \cdot q_k \left(\frac{q_k}{2^{k-1} q_k} + \frac{D_k}{c^{2^k}} + \dots \right) dc = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (c^{2^k-1} + \dots) \left(\frac{D_k}{c^{2^k}} + \dots \right) dc = D_k. \end{aligned}$$

Найдем D_k :

$$\begin{aligned} \frac{\ln q_{k+1}}{2^k} &= \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \ln \left(1 - \frac{c}{q_k^2} \right) = \\ &= \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \left(-\frac{c}{q_k^2} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{q_k^4} + \dots \right) = \\ &= \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \left(-\frac{1}{c^{2^k-1}} + \dots \right), \\ \frac{q_{k+1}}{2^k q_{k+1}} &= \frac{q_k}{2^{k-1} q_k} + \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \frac{1}{c^{2^k}} + O\left(\frac{1}{c^{2^{k+1}}}\right), \end{aligned}$$

т. е. $D_k = \frac{2^k - 1}{2^k}.$

6.5. Итак, в (6.3) осталось найти рекуррентные соотношения для $\alpha(t, m)$.

6.6. Для удобства записи вместо $d_n(c)$ будем иногда писать $d(n)$, опуская c .

Лемма. При $n \geq 0$

$$c \cdot d(n) = \sum_{r=0}^{\text{ord}_2(n+1)} d(n+2-2^r).$$

Доказательство проводится индукцией по числу $k = \text{ord}_2(n+1)$, которое есть число единиц до первого нуля в двоичном разложении числа n .

6.7. Каждой последовательности $\bar{a} = (a(n))_{n \geq 0}$, $a(n) \in \mathbb{C}$ сопоставим формальный ряд

$$\sum a(n) d_n(c).$$

Лемма. Пусть сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(2^k - 1).$$

Тогда

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a(n) d_n(c) = \sum_{m=1}^{\infty} b(m) d_m(c),$$

где

$$b(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a(2^k - 1),$$

$$b(m) = \sum_{k=0}^{\text{ord}_2(m-1)} a(m + 2^k - 2), \quad m \geq 2.$$

Доказательство. Пользуемся п. 6.7:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b(m) d_m(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \sum_{k=0}^{\text{ord}_2(n+1)} d(n + 2 - 2^k).$$

Пусть $n + 2 - 2^k = m$, где $0 \leq k \leq \text{ord}_2(n + 1)$. Тогда $n = m + 2^k - 2$, $n + 1 = (m - 1) + 2^k$, и поэтому $k \leq \text{ord}_2(m - 1)$. Следовательно,

$$b(m) = \sum_{k=0}^{\text{ord}_2(m-1)} a(m + 2^k - 2).$$

Осталось заметить, что при $m = 1$ $\text{ord}_2(m - 1) = +\infty$.

6.8. Следствие. Положим $\alpha(1, 1) = 1$, $\alpha(l, 1) = 0$, $l \geq 2$.

$$\alpha(l, m + 1) = \sum_{k=0}^{\text{ord}_2(l-1)} \alpha(l + 2^k - 2, m); \quad m, l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$A_m = \sum_{2^k \leq m+1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \alpha(2^k - 1, m).$$

6.9. Отсюда сразу следует, что $0 < A_m < A_{m+1}$.

Вычисления на машине позволяют предположить, что в рассматриваемом случае ($p = 2$) асимптотически

$$A_m \sim \text{const} \cdot 2^m \cdot m^{-\gamma}; \quad B_m \sim \text{const} \cdot 2^m \cdot m^{-1-\gamma}, \quad \gamma \approx 0,48.$$

Список литературы: 1. Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи мат. наук. 1986. 41, вып. 4. С. 35 — 95. 2. Левин Г. М. О бифуркационном множестве параметров семейства квадратичных отображений // Приближ. методы исследования дифференц. уравнений и их прил. К., 1982. С. 103 — 109. 3. Левин Г. М. О нерегулярных значениях параметра семейства полиномиальных отображений // Успехи мат. наук. 1982. 37, вып. 3. С. 189 — 190. 4. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., 1973. 334 с. 5. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М., 1965. 300 с. 6. Bisht C. S. Some congruence properties of generalized Lucas integer sequences // Fibonacci Quart. 1984. 22, № 4. Р. 290 — 295.

Поступила в редколлегию 30.10.86

**НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДРЕЙСИНА
О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА
С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ. I**

1. Введение. Для функции f , мероморфной в плоскости $\mathbb{C}$, используем стандартные обозначения теории Р. Неванлинны: $T(r, f)$, $N(r, a)$, $m(r, a)$, $\bar{N}(r, f)$, $N_1(r)$, $\delta(a)$. Кроме того, положим $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. В этой работе изучаются мероморфные функции конечного нижнего порядка с максимальной суммой дефектов:

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a) = 2. \quad (1.1)$$

Для функции f конечного порядка II-я основная теорема Р. Неванлинны может быть сформулирована в таком виде: для любого конечного набора $a_1, \dots, a_q$ справедливо

$$\sum_{j=1}^q m(r, a_j) + N_1(r) \leq 2T(r, f) + o(T(r, f)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$N_1(r) = o(T(r, f)), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Чтобы выяснить, какие следствия может влечь (1.1), предположим сначала, что выполняется более сильное условие, чем (1.2), а именно, $N_1(r) \equiv 0$, т. е. функция f не имеет кратных точек. Рассмотрим шварцову производную:

$$F = f'''/f' - (3/2)(f''/f')^2. \quad (1.3)$$

Простой подсчет показывает, что шварцова производная имеет полюсы только в кратных точках функции f , поэтому F — целая функция. Учитывая, что f — конечного порядка, с помощью леммы о логарифмической производной получаем $m(r, F) = O(\log r)$, $r \rightarrow \infty$, следовательно, F — многочлен. Теперь (1.3) можно рассматривать как алгебраическое дифференциальное уравнение относительно f . Общее решение этого уравнения представляет собой отношение двух линейно независимых решений линейного уравнения $y'' + \frac{1}{2} Fy = 0$.

Используя это обстоятельство, Р. Неванлинна в 1932 г. детально исследовал мероморфные функции конечного порядка без кратных точек. Эти функции обладают следующими свойствами:

- а) $T(r, f) \sim cr^{n/2}$, где $c > 0$, $n \geq 2$ — натуральное число;
- б) плоскость разбивается на n равных угловых областей:

$D_j = \{z : \varphi_{j-1} < \arg z < \varphi_j\}$, $1 \leq j \leq n$, $\varphi_n = \varphi_0$ так, что для некоторых чисел $b_j \in \mathbb{C}$ выполняется

$$\log \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - b_j|} = \pi c r^{n/2} \sin \frac{n}{2} (\varphi - \varphi_{j-1}) + o(r^{n/2}),$$

когда $r \rightarrow \infty$, равномерно относительно φ в любом угле, лежащем строго внутри D_j . Если $b_j = \infty$, левую часть следует заменить на $\log |f(re^{i\varphi})|$.

Таким образом, если число $a \in \mathbb{C}$ встречается среди чисел b_j , $p(a)$ раз, то $\delta(a) = 2p(a)/n$. Все дефектные значения являются асимптотическими.

Другой способ получения приведенного результата, принадлежащий Л. Альфорсу, состоит в исследовании римановой поверхности, на которую функция f отображает плоскость. Можно показать, что эта риманова поверхность имеет конечное число логарифмических точек ветвления и не имеет алгебраических точек ветвления. Такие римановы поверхности допускают полное описание, и утверждения а) и б) получаются с помощью явного построения отображения римановой поверхности на плоскость, близкого к конформному.

Изложенные рассуждения естественно приводят к гипотезе, которую впервые высказал Ф. Неванлинна в 1929 г. Пусть f — мероморфная функция конечного порядка ρ , обладающая свойством (1.1). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) 2ρ — натуральное число ≥ 2 .
- 2) Если $\delta(a) > 0$, то $\delta(a) = p(a)/\rho$, где $p(a)$ — натуральное число.
- 3) Все дефектные значения являются асимптотическими.

Из 2) следует, что количество дефектных значений не превышает 2ρ .

Для целых функций эту гипотезу доказал А. Пфлюгер в 1946 г. В этом случае 1) можно усилить: ρ — натуральное число. Первым существенным продвижением в гипотезе Ф. Неванлинны для мероморфных функций был результат А. Вейцмана 1969 г. при условиях гипотезы количество дефектных значений не превосходит $2\rho_1$, где ρ_1 — нижний порядок, $\rho_1 \leq \rho$. После ряда промежуточных результатов полное доказательство утверждений 1), 2), 3) было недавно получено Д. Дрейсином*. Оно является одним из самых длинных и сложных доказательств в теории функций. Доказательство Д. Дрейсина использует ряд разнородных вспомогательных средств, таких как Альфорсова теория накрывающих поверхностей и квази-конформные отображения.

В настоящей работе приводится новое доказательство, основанное на двух основных теоремах теории Р. Неванлинны и классической теории потенциала. Автор надеется, что это доказательство сделает замечательный результат Д. Дрейсина более доступным и что предлагаемый метод найдет дальнейшие применения. Попутно будет доказана сформулированная выше теорема А. Вейцмана.

* Drasin D. Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning function which have deficiency sum two // Acta math. 1987. 158, № 1—2. P. 1—94.

Теорема 1. Пусть f — мероморфная функция конечного нижнего порядка со свойством (1.1). Тогда справедливо 1), 2), 3). Если, кроме того, $\delta(\infty) = 0$, то выполняется

$$\log \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|} = \pi r^\rho l_1(r) |\cos \rho(\theta - l_2(r))| + o(r^\rho l_1(r)), \quad (1.4)$$

равномерно относительно θ при $r \rightarrow \infty$, $re^{i\theta} \notin C_0$. Здесь C_0 — объединение кружков $D(z_k, r_k)$ таких, что

$$\sum_{\{k: |z_k| < R\}} r_k = o(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

а l_j — непрерывные функции со свойствами $l_1(ct) \sim l_1(t)$, $l_2(ct) = l_2(t) + o(1)$, $t \rightarrow \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$.

Кроме того,

$$T(r, f) \sim r^\rho l_1(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Обратно, всякая мероморфная функция со свойствами (1.4), (1.5) (2ρ — натуральное число) удовлетворяет соотношению (1.1).

Приведенное выше рассуждение о мероморфных функциях конечного порядка со свойством $N_1(r) \equiv 0$ позволяет предположить, что теорема 1 остается справедливой, если в ее условии заменить (1.1) на (1.2). Такое усиление теоремы 1 остается недоказанным.

2. Определение функций u , u_j . Обозначим через L_{loc}^1 пространство функций, суммируемых на каждом круге в $\mathbb{C}$. Субгармонические функции содержатся в L_{loc}^1 . Пусть v_1, v_2 — субгармонические функции. Элемент $v = v_1 - v_2 \in L_{loc}^1$ называется δ -субгармонической функцией. «Функция» v может не быть определена в тех точках, где $v_1 = v_2 = -\infty$. Скажем, что δ -субгармоническая функция v определена в точке z , если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r v(z + te^{i\theta}) t dt,$$

и будем обозначать этот предел через $v(z)$. Определение корректно, так как для субгармонической функции v указанный предел совпадает с $v(z)$. Очевидно, что если δ -субгармоническая функция $v \geq 0$ п. в., то $v(z) \geq 0$ во всех точках z , где v определена. В этом случае пишем просто $v \geq 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. План доказательства следующий. В пп. 2—6 теорема будет сведена к некоторому утверждению из теории потенциала, которое мы называем Основной леммой (см. п. 6). Приняв основную лемму, докажем теорему 1 в п. 7. Доказательство Основной леммы, независимое от всего остального, содержится во II-й части статьи (пп. 8—11).

Не уменьшая общности, можно считать, что все полюсы функции f простые и выполняется $\bar{N}(r, f) = N(r, f) \sim T(r, f)$, $r \rightarrow \infty$ (2.1). Отсюда $m(r, f) = o(T(r, f))$, $r \rightarrow \infty$ (2.2). Всего этого можно добиться, сделав над функцией f дробно-линейное преобразование. Конечность нижнего порядка и условие (1.1) при этом сохраняется.

Напомним, что последовательность $r_m \rightarrow \infty$ называется последовательностью пиков Пойа порядка λ возрастающей функции $T(r)$, если для некоторой последовательности $\varepsilon_m \rightarrow 0$ справедливо

$$T(r) \leq (1 + \varepsilon_m) \left(\frac{r}{r_m} \right)^\lambda T(r_m), \quad \varepsilon_m r_m \leq r \leq \frac{r_m}{\varepsilon_m}. \quad (2.3)$$

Положим

$$\rho^* = \sup \left\{ \rho : \limsup_{x, A \rightarrow \infty} \frac{T(Ax)}{A^\rho T(x)} = \infty \right\};$$

$$\rho_1 = \inf \left\{ \rho : \liminf_{x, A \rightarrow \infty} \frac{T(Ax)}{A^\rho T(x)} = 0 \right\}.$$

Известно*, что пики Пойа порядка λ существуют тогда и только тогда, когда $\rho_1^* \leq \lambda \leq \rho^*$. Кроме того, $[\rho_1, \rho] \subset [\rho_1^*, \rho^*]$, где ρ_1, ρ — соответственно порядок и нижний порядок функции $T(r)$. Зафиксируем число $\lambda \in [\rho_1^*, \rho^*]$, $\lambda < \infty$, и последовательность пиков Пойа r_m для функции $T(r) = T(r, f)$. В процессе доказательства мы будем несколько раз выбирать подпоследовательность из последовательности r_m , сохраняя за ней прежнее обозначение. Согласно II-й основной теореме Р. Неванлинны для любого конечного набора $\{a_1, \dots, a_q\} \subset \bar{C}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^q m(r, a_j) + N_1(r) \leq 2T(r) + o(T(2r)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

(пишем остаточный член в такой форме, так как конечность порядка функции f а priori не предполагается, а нам нужно соотношение без исключительного множества). Из (1.1), (2.4), (2.3) следует, что для любого $t > 0$ выполняется

$$N_1(tr_m) = o(T(r_m)), \quad n_1(tr_m) = o(T(r_m)), \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Пусть a_j , $j = 1, 2, \dots$ — все дефектные значения функции f (мы не предполагаем, что их множество конечно). Рассмотрим δ -субгармонические функции

$$U_m(z) = (\log |f'(zr_m)|^{-1})/T(r_m),$$

$$U_{m,j}(z) = (\log |f(zr_m) - a_j|^{-1})/T(r_m). \quad (2.6)$$

Воспользуемся следующим результатом Дж. Андерсона—А. Бернштейна** и В. С. Азарина***: из условия (2.3) вытекает, что семейства $\{U_m\}$ и $\{U_{m,j}\}$ относительно компактны в таком смысле. Можно выбрать подпоследовательность пиков Пойа так, чтобы выполнялось $U_m \rightarrow u$, $U_{m,j} \rightarrow u_j$, $m \rightarrow \infty$ (2.7). Здесь u и u_j — некоторые δ -субгармонические функции. Сходимость в (2.7) имеет место в L^1_{loc} , а также в L^1 на каждой окружности. Риссовские заряды функций U_m и $U_{m,j}$ слабо сходятся к риссовским зарядам функций

* Drasin D., Shea D. Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. 34. P. 403—411.

** Anderson L., Baernstein A. The size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. 1978. 36. P. 518—539.

*** Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. 108, № 2. С. 147—167.

u и u_j соответственно. Назовем 1-мерой некоторого множества $E \subset C$ точную нижнюю грань сумм радиусов кружков, покрывающих E . Для любого круга и любого $\varepsilon > 0$ подпоследовательность пиков Пойа может быть выбрана так, чтобы сходимость в (2.7) была равномерной в этом круге вне некоторого множества, 1-мера которого меньше ε . По поводу этих результатов см. также [1, 2].

Из $\delta(a_j, f) > 0$ следует, что $u_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots$.

Функции u и u_j играют в доказательстве основную роль. В пп. 3—6 условия теоремы будут переформулированы в терминах u и u_j , и мы придем к основной лемме из п. 6, которая является «субгармоническим аналогом» теоремы 1. Из Основной леммы будет следовать, что

$$\sum_j u_j = u = \pi r^\lambda |\cos \lambda(\theta - \theta_0)|,$$

где $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, причем 2λ — натуральное число. Переформулировав это утверждение в терминах функции f , мы получим (1.4), а затем и все остальные утверждения теоремы 1 (п. 7).

Из (2.1), (2.5) следует, что

$$m\left(tr_m, \frac{1}{f^r}\right) \sim T\left(tr_m, \frac{1}{f^r}\right) \sim 2T(tr_m, f), \quad m \rightarrow \infty$$

для любого $t > 0$. Учитывая (2.3) и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) d\theta \leq 2r^\lambda, \quad 0 < r < \infty, \quad (2.8)$$

причем при $r = 1$ в (2.8) имеет место равенство.

3. Простейшие свойства функций u и u_j . Воспользуемся леммой о логарифмической производной в такой форме:

$$m(r, f'/f) = o(T(2r)), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Из (2.2), (3.1) следует, что $m(r, f') = o(T(2r))$, $r \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (2.3) и переходя к пределу в L^1 на окружностях, получаем $u \geq 0$, $u_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$ (3.2). Далее, из (2.5) следует, что u — субгармоническая функция, в частности, u определена всюду в $\mathbb{C}$. Из леммы о логарифмической производной, примененной к функциям $f - a_j$, следует, что $u \geq u_j$, $j = 1, 2, \dots$ (3.3) в области определения функции u_j .

Зафиксируем j и рассмотрим всевозможные замкнутые жордановы ломаные Γ , на которых функция u_j определена и $\inf\{u_j(z) : z \in \Gamma\} > 0$. Обозначим через D_j объединение внутренних областей всех таких ломаных. Очевидно, что множество D_j открыто и все его связанные компоненты односвязны.

Покажем, что если $u_j(z_0) > 0$, то $z_0 \in D_j$. Пусть $u_j = v_1 - v_2$, v_i — субгармонические функции, $u_j(z_0) = d > 0$. В силу полунепрерывности сверху $v_2(z) < v_2(z_0) + d/3$ в некоторой окрестности V точки z_0 . Из хорошо известного свойства потенциалов [3, гл. VII,

§ 5. следствие] вытекает, что найдется квадратный контур $\Gamma \subset V$, окружающий точку z_0 такой, что $v_1(z) > v_1(z_0) - d/3$, $z \in \Gamma$. Поэтому $u_i(z) \geq u_i(z_0) - 2d/3 > d/3 > 0$, $z \in \Gamma$, и $z_0 \in D_i$.

4. Доказательство того, что множества D_i попарно не пересекаются. Пусть, например, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Тогда найдутся простые замкнутые ломаные Γ_1 , Γ_2 , внутренние области которых пересекаются, причем $u_1(z) > d$, $z \in \Gamma_1$; $u_2(z) > d$, $z \in \Gamma_2$; $d > 0$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, и сходимость в (2.7) — равномерная на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ вне множества малой линейной меры, имеем $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Тогда одна из ломаных (скажем, Γ_1) содержит точку z_0 , лежащую в области, ограниченной ломаной Γ_2 . Из (3.3) следует, что $u(z_0) > d$. Из принципа максимума, примененного к субгармонической функции u , и полунепрерывности этой функции сверху следует, что существует континуум E такой, что $u(z) \geq d$, $z \in E$; $z_0 \in E$, $E \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$. Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма 1. Пусть v — субгармоническая функция, $v(0) = d > 0$. Тогда найдется такое натуральное число N , что для любого $n \geq N$ множество значений r из интервала $(2^{-n-1}, 2^{-n})$ таких, что $v(re^{i\theta}) > \frac{d}{2}$, $|\theta| \leq \pi$, имеет длину $\geq 2^{-n-2}$.

Доказательство. Пусть $K = \{z: v(z) < d/2\}$. Множество K разрежено в нуле по определению разреженности [3, 4]. Следовательно, круговая проекция множества K на положительный луч разрежена в нуле [4, предложение IX.2] и лемма вытекает из критерия разреженности Н. Винера [4, теорема IX.10].

Пусть $R > 0$ настолько велико, что $E \subset D(0, R/2)$. Для любого $z \in E$ выберем число $N(z)$ так, чтобы выполнялось утверждение леммы 1 с точкой z вместо точки 0 и функцией u в качестве v . Кроме того, считаем, что

$$2^{-N(z)} < \min \{ \text{diam } \Gamma_1, \text{diam } \Gamma_2 \}. \quad (4.1)$$

Найдется множество $X(z)$ с 1-мерой не более, чем $2^{-N(z)-2}$ такое, что сходимость в (2.7) с $j = 1, 2$ равномерна на множестве $D(0, R) \setminus X(z)$. Если нужно, выбираем подпоследовательность в (2.7). Пользуясь леммой 1, найдем такую окружность $C(z)$ с центром в точке z , что $u(\zeta) > d/2$, $\zeta \in C(z)$, и сходимость в (2.7) с $j = 1, 2$ равномерна на $C(z)$. Радиус этой окружности $C(z)$ выберем не превосходящим $2^{-N(z)}$. Пусть $D(z)$, $z \in E$ — круги, ограниченные окружностями $C(z)$. Можно выбрать конечное покрытие множества E этими кругами так, чтобы никакой круг покрытия не содержался полностью в другом круге покрытия. Из дуг окружностей выбранных кругов можно составить спрямляемую кривую Γ , обладающую такими свойствами: $u(z) > d/2$, $z \in \Gamma$ (4.2), концы кривой Γ , z_1 и z_2 принадлежат Γ_1 и Γ_2 , соответственно (этого можно добиться в силу (4.1)); пределы в (2.7) при $j = 1, 2$ равномерные на Γ .

Пусть $r_m \Gamma = \{z: z/r_m \in \Gamma\}$. Из (4.2) и равномерной сходимости в (2.7) следует, что $|f'(z)| \leq \exp(-cT(r_m))$, $z \in r_m \Gamma$ с некоторой постоянной $c > 0$. Учитывая, что длина кривой $r_m \Gamma$ есть $O(r)$, $m \rightarrow$

$\rightarrow \infty$, интегрируем по кривой $r_m \Gamma$ и получаем, что $|f(r_m z_1) - f(r_m z_2)| = O(r_m \exp(-cT(r_m))) = o(1)$, $m \rightarrow \infty$.

Это противоречит тому, что $f(r_m z_j) \rightarrow a_j$, $m \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$.

Мы доказали, что $D_i \cap D_j = \emptyset$ $i \neq j$.

5. Доказательство теоремы А. Вейцмана. Покажем, что $u(z) = 0$ при $z \in \partial D_j$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть, например, $u(z_0) = d > 0$, $z_0 \in \partial D_1$. Пользуясь леммой 1, найдем достаточно малую окружность $C(z_0)$ такую, что $u(z) > d/2$, $z \in C(z_0)$, и сходимости в (2. 7) равномерна на $C(z_0)$. Из определения D_1 следует, что найдется точка $z_1 \in C(z_0)$ такая, что $u_1(z_1) > 0$. Рассуждая, как выше в п. 4, получим, что $u_1(z) > 0$ при $z \in C(z_0)$ — противоречие.

Заметим теперь, что u — субгармоническая функция конечного порядка ($\leq \lambda$). Это вытекает из (2. 8). Каждая связная компонента D_{jk} множества D_j содержит хотя бы одну связную компоненту множества $\{z: u(z) \geq \varepsilon_{jk} > 0\}$. Отсюда следует, что множество таких компонент D_{jk} конечно ($\leq \max\{1, 2\lambda\}$) [5, теорема 4. 16].

Заметим, что до сих пор мы использовали только (1. 2), но не более сильное условие (1. 1). Таким образом, доказано некоторое обобщение теоремы А. Вейцмана: функции конечного нижнего порядка со свойством (1. 2) имеют конечное множество дефектных значений. Обозначим количество дефектных значений через q .

6. Субгармонический аналог теоремы 1. Назовем носителем δ -субгармонической функции множество, где она определена и отлична от 0. Из результатов пп. 3, 4 следует, что носители функций u_j попарно не пересекаются. Поэтому

$$\sum_{j=1}^q u_j = \max_{1 \leq j \leq q} u_j \text{ п. в. и из (3. 3) получается}$$

$$u(z) \geq \sum_{j=1}^q u_j(z) \quad (6. 1)$$

там, где определена правая часть. Воспользуемся теперь условием (1. 1). Учитывая (2. 1) и (3. 1), имеем для каждого $r > 0$

$$\sum_{j=1}^q m(rr_m, a_j) \sim 2T(rr_m, f) \sim T(rr_m, f') \sim m\left(rr_m, \frac{1}{f'}\right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (2. 7) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^q u_j(re^{i\theta}) \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad r > 0.$$

Вместе с (6. 1) это дает

$$\sum_{j=1}^q u_j(z) = u(z), \quad z \in C. \quad (6. 2)$$

Покажем, что функции u_j — субгармонические. В самом деле, u_j субгармонична в D_j , так как из (6. 2) и того, что $u_k = 0$ в D_j при $k \neq j$ следует, что $u_j = u$ в D_j . Далее, $u_j = 0$ на ∂D_j , потому что $0 \leq u_j \leq u$ всюду и $u = 0$ на ∂D_j . Кроме того, $u_j = 0$ вне D_j . Поэтому u_j — субгармонические функции.

Обозначим через μ (через μ_j) меру, ассоциированную по Риссу с функцией u (функцией u_j). Из (6. 2) следует соотношение

$$\mu = \sum_{j=1}^q \mu_j. \quad (6. 3)$$

Обозначим через ν меру, считающую полюсы функции f . (Это означает, что $\nu(E)$ — количество полюсов на борелевском множестве E). Через ν_j обозначим меру, считающую a_j - точки. Для любой меры τ обозначаем через $(\tau)_t$ меру, определенную так: $(\tau)_t(E) = \tau(tE)$, $t > 0$, E — любое борелевское множество. Из (2. 7) вытекает слабая сходимость соответствующих риссовских зарядов:

$$(\nu)_{r_m}/T(r_m) \rightarrow \frac{1}{2} \mu,$$

$$((\nu)_{r_m} - (\nu_j)_{r_m})/T(r_m) \rightarrow \mu_j,$$

откуда следует, что $\frac{1}{2} \mu \geq \mu_j$, $1 \leq j \leq q$ (6.4). Из (6.3), (6.4) получается

$$\sum_{j=1}^q \mu_j \geq 2\mu_k, \quad 1 \leq k \leq q. \quad (6.5)$$

Основная лемма. Пусть D_j — попарно непересекающиеся открытые множества, состоящие из конечного числа односвязных областей, $u_j \not\equiv 0$ — неотрицательные субгармонические функции, носители которых содержатся в D_j соответственно.

Пусть риссовские меры μ_j этих функций удовлетворяют условию (6.5) и, кроме того, выполняется

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \int_0^{2\pi} u_j(re^{i\theta}) d\theta \begin{cases} \leq 2r^{\lambda+\varepsilon}, & r_0 \leq r < \infty, \\ = 2, & r = 1, \\ \leq 2r^{\lambda-\varepsilon}, & 0 \leq r \leq r_0^{-1}, \end{cases} \quad (6.7)$$

где $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{4}$, $r_0 > 1$ — некоторые числа. Тогда существует целое число $n \geq 2$, $|n/2 - \lambda| < 1/2$ такое, что

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{j=1}^q u_j(re^{i\theta}) = \pi r^{n/2} \left| \cos \frac{n}{2} (\theta - \theta_0) \right| \quad (6.8)$$

для некоторого θ_0 , $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Доказательство Основной леммы содержится во второй части работы.

7. Окончание доказательства теоремы 1. Проверим выполнение условий Основной леммы. То, что множества D_j попарно не пересекаются, доказано в п. 4; то, что они состоят из конечного числа областей, доказано в п. 5; соотношение (6.5) доказано в п. 6. Наконец, из (2.8), (6.2) следует (6.7) с $\varepsilon = 0$.

Применяя Основную лемму, получим (6.8). Мы доказали следующее

Утверждение 1. Пусть мероморфная функция удовлетворяет условию (1.1) и для некоторой последовательности $r_m \rightarrow \infty$ выполняется (2.3). Определим U_m, U_{mj} формулами (2.6). Тогда для некоторой подпоследовательности номеров m справедливо $U_m \rightarrow u, U_{mj} \rightarrow u_j$, где u и u_j имеют вид (6.8).

Из сопоставления (6.8) и (2.8) следует, что $\lambda = n/2$. Таким образом, все возможные порядки λ пиков Пойа полуцелые. С другой стороны, как указано в п. 2, возможные порядки пиков Пойа заполняют отрезок $[\rho_1^*, \rho^*]$, содержащий отрезок $[\rho_1, \rho]$. Следовательно, $\rho_1^* = \rho^* = \rho_1 = \rho = \frac{n}{2}$, в частности, мы доказали, что функция f имеет конечный порядок и установили справедливость утверждения 1) из п. 1. Поскольку $\rho_1^* = \rho^*$, из формул для ρ_1^* и ρ^* , приведенных в п. 2, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $r_0 > 1, x_0 > 1$ такие, что

$$T(tx) \leq t^{\rho+\varepsilon} T(x), \quad t > r_0, x > x_0; \quad (7.1)$$

$$T(tx) \leq t^{\rho-\varepsilon} T(x), \quad t < r_0^{-1}, tx > x_0. \quad (7.2)$$

Этих соотношений достаточно, чтобы заменить (2.3) в Утверждении 1, т. е. справедливо

Утверждение 2. Пусть мероморфная функция f удовлетворяет условиям (1.1), (7.1), (7.2) с $\rho = \frac{n}{2}$, n — натуральное число, $n \geq 2$. Для произвольной последовательности $r_m \rightarrow \infty$ определим U_m, U_{mj} формулами (2.6). Тогда для некоторой подпоследовательности номеров m справедливо $U_m \rightarrow u, U_{mj} \rightarrow u_j$, где u и u_j — функции вида (6.8).

В самом деле, условия (7.1), (7.2) с $x = r_m$ обеспечивают применимость теоремы Дж. Андерсона — А. Бернштейна и В. С. Азарина о компактности последовательностей U_m, U_{mj} . Выбирая подпоследовательность, получаем (2.7). Вместо (2.8) предельным переходом из (7.1), (7.2) с $x = r_m$ получим соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(re^{i\theta}) d\theta \leq \begin{cases} 2r^{\rho+\varepsilon}, & r \geq r_0, \\ 2r^{\rho-\varepsilon}, & r \leq r_0^{-1} \end{cases} \quad (7.3)$$

с равенством при $r = 1$. Далее Утверждение 2 доказывается так же, как Утверждение 1, но со следующими изменениями. При оценке достаточных членов в (2.4), (3.1) вместо (2.3) используем (7.1). При доказательстве того, что множества D_j состоят из конечного числа областей в п. 5, вместо (2.8) пользуемся (7.3). Наконец, при проверке условия (6.7) вместо (2.8) пользуемся (7.3).

Из Утверждения 2 и из (2.5) вытекает, что $T(cr)/T(r) \rightarrow c^\rho, r \rightarrow \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Полагая $T(r) = r^\rho l_1(r)$, получим $l_1(cr) \sim l_1(r), r \rightarrow \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$, т. е. справедливо (1.5).

Докажем (1.4). Обозначим через X множество, состоящее из субгармонических функций вида

$$u(re^{i\theta}; \theta_0) = \pi r^\rho |\cos \rho(\theta - \theta_0)|, \quad \theta_0 \in [-\pi, \pi].$$

Очевидно, что множество X компактно в L^1_{loc} . Заметим, что L^1_{loc} — метрическое пространство. Рассмотрим семейство функций

$$v_t(z) = \left(\log \frac{1}{|f'(zt)|} \right) / (t^\rho l_1(t)).$$

Покажем, что $\text{dist}(v_t, X) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ (7.4). Пусть (7.4) не выполняется. Тогда существует последовательность $t_m \rightarrow \infty$ такая, что $\text{dist}(v_{t_m}, X) \geq \varepsilon > 0$, $m \rightarrow \infty$. Взяв эту последовательность в качестве r_m , применим Утверждение 2. Получим, что для некоторой подпоследовательности $v_{t_m} \rightarrow u$, где $u \in X$ — противоречие. Соотношение (7.4) доказано.

Пусть $u' \in X$ — ближайший элемент к v_t . Покажем, что $\text{dist}(u', u^{ct}) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ (7.5) равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Пусть это не так. Тогда $\text{dist}(u'^m, u^{c_m t_m}) \geq \varepsilon > 0$ (7.6) для некоторых последовательностей $c_m \in [1, 2]$, $t_m \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} u^{c_m t_m}(z) &= v_{c_m t_m}(z) + o(1) = c_m^{-\rho} v_{t_m}(c_m z) + o(1) = \\ &= c_m^{-\rho} u'^m(c_m z) + o(1) = u'^m(z) + o(1), \end{aligned}$$

так как $c^{-\rho} u(cz) = u(z)$ для любых $u \in X$ и $c > 0$. Получено противоречие с (7.6), которое доказывает (7.5).

Если $u_t = u(\cdot; \theta_0(t))$, то из (7.5) следует, что $\theta_0(t) - \theta_0(ct) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Из (7.4) получаем, что $v_t(z) = u(z; \theta_0(t)) + o(1)$ в L^1_{loc} при $t \rightarrow \infty$. Наконец, с помощью теоремы В. С. Азарина о сходимости по 1-мере получаем (1.4).

Остальные утверждения теоремы 1 легко выводятся из (1.4), (1.5). В самом деле, из асимптотической формулы (1.4), интегрируя по кривым, мало отличающимся от лучей и обходящим исключительное множество C_0 , получаем, что для некоторых $b_j \in C$ выполняется

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - b_j|} &= \pi r^\rho l_1(r) |\cos \rho(\theta - l_2(r))| + o(r^\rho l_1(r)), \\ \frac{\pi}{2\rho} (2j - 3) &\leq \theta - l_2(r) \leq \frac{\pi}{2\rho} (2j - 1), \end{aligned}$$

когда $re^{i\theta} \notin C_0$, $r \rightarrow \infty$ равномерно относительно θ . Отсюда и из (1.5) немедленно вытекают свойства 2), 3) из формулировки теоремы 1.

Список литературы: 1. Азарин В. С. Теория роста субгармонических функций. Х., 1978. 72 с. 2. О минимуме модуля целой функции на последовательности пиков Поля / А. Э. Еременко, М. Л. Содин, Д. Ф. Шна // Теория функций, функции. анализ и их прил. 1986. Вып. 45. С. 26—40. 3. Брело М. Основы классической теории потенциала. 1934. 212 с. 4. Брело М. О топологиях и границах в теории потенциала. М., 1974. 224 с. 5. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М., 1980. 304 с.

Поступила в редколлегию 11.09.87

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ И АППРОКСИМАТИВНАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ

В [1] Конн и Вудс изучали несингулярные локально-компактные группы преобразований пространства с мерой, обладающие свойством аппроксимативной транзитивности (АТ). Это свойство, весьма полезное в эргодической теории, представляет большой интерес в теории алгебр фон Неймана, где с каждым фактором ассоциируется так называемый поток весов, т. е. каноническое эргодическое действие группы R . Оказывается, что если поток весов обладает АТ-свойством, то соответствующий фактор распадается в бесконечное прямое произведение конечных факторов типа I.

В [1] на основе работы дель Хунко [2] было установлено, что всякое эргодическое действие R с чисто дискретным спектром всегда аппроксимативно транзитивно (АТ). В настоящей статье подобный результат доказан для произвольной абелевой локально-компактной сепарабельной группы. На самом деле будет доказано, что такое действие всегда имеет странный ранг один (см. определение 2 ниже). Кроме того, мы докажем, что всякое транзитивное действие локально-компактной абелевой сепарабельной группы является АТ (имеет странный ранг один).

§ 0. Предварительные сведения

Пусть (Ω, B, μ) — пространство Лебега с непрерывной мерой (определение и необходимые сведения см. в [3]). Под $\text{Aut}(\Omega)$ будет пониматься группа всех автоморфизмов (биективных, взаимно измеримых и сохраняющих меру преобразований) данного пространства. С каждым автоморфизмом $T \in \text{Aut}(\Omega)$ ассоциирован унитарный оператор, действующий в пространстве $L^2(\Omega)$ по правилу: $(U_T f)(\omega) = f(T\omega)$, $\omega \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$. Действие α группы G на пространстве (Ω, B, μ) — это гомоморфизм $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$; если группа G наделена топологией, действие считают непрерывным в том смысле, что отображение $g \rightarrow U_{\alpha(g)}$ непрерывно в сильной операторной топологии. Будем говорить, что действие α имеет дискретный спектр, если в пространстве $L^2(\Omega)$ существует ортонормированный базис, состоящий из функций, собственных одновременно для всех операторов $U_{\alpha(g)}$, $g \in G$.

Пусть $T \in \text{Aut}(\Omega)$. Стеком для T (или T -стеком) называется семейство $\sigma = \{E_k\}_{k=0}^n$, состоящее из измеримых непересекающихся подмножеств Ω , причем $TE_k = E_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

E_0 называют базой стека, E_k — уровнями, n — длиной или высотой. Если $A \in B$, то через $m(\sigma, A)$ обозначают такое объединение

нескольких элементов стека σ , симметрическая разность которого с A имеет наименьшую меру. Автоморфизм T , для которого существует такая последовательность T -стеков $\{\sigma^{(j)}\}_j$, что для всякого $A \in \mathcal{B}$ верно: $\mu(A \Delta m(\sigma^{(j)}, A)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, называют стековым или ранга один. В этом случае пишут также $\sigma^{(j)} \rightarrow \varepsilon$. В [2] доказано, что всякий эргодический автоморфизм с дискретным спектром имеет ранг один.

Ослабляя условия, накладываемые для ранга один, заменим в определении стека требование « $E_0, TE_0, \dots, T^n E_0$ не пересекаются между собой» требованием « $E_0, T^{l_k} E_0, \dots, T^{l_n} E_0$ не пересекаются между собой», где l_k — произвольная возрастающая последовательность индексов». Это приведет нас к понятию «автоморфизм T имеет странный ранг один». Определение это естественным образом распространяется с отдельных автоморфизмов (или, что то же самое, действий группы Z) на действия произвольных групп. В дальнейшем будет использована нижеследующая эквивалентная переформулировка этого определения.

Определение 1. Действие α группы G на пространстве Лебега $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ имеет странный ранг один, если для любых двух множеств $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $E_0 \in \mathcal{B}$ (база стека) и такие $g_{ik} \in G$, $i = 1, \dots, n_k$, $k = 1, 2$, что множества $\alpha(g_{ik})E_0$ либо не пересекаются, либо совпадают, и

$$\mu(A_k \Delta \bigcup_{i=1}^{n_k} \alpha(g_{ik})E_0) < \varepsilon \text{ при } k = 1, 2.$$

Следующее понятие ввели А. Конн и Э. Вудс [1].

Определение 2. Действие α группы G на пространстве Лебега $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ назовем, следуя [1], аппроксимативно транзитивным (АТ), если для любого набора неотрицательных суммируемых функций $f_1, \dots, f_n \in L_+^1(\Omega)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся функция $f \in L_+^1(\Omega)$, элементы группы $g_1, \dots, g_m$ и коэффициенты $\lambda_{jk} \geq 0$ такие, что $\|f_j - \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} U_{\alpha(g_k)} f\| < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$.

Отметим некоторые переформулировки этого последнего определения. Не обязательно ограничивать индекс k конечным множеством: можно брать $k \in Z$ и рассматривать λ_{jk} как функцию $\lambda_j \in l_+^1(Z)$. Затем можно требовать $\|f\|_1 = 1$ и $\|\lambda_j\|_1 = \|f_j\|_1$. Вместо этого, беря $\|f\|_1$ столь малой, сколь требуется, можно добиться того, чтобы все λ_{jk} были целыми. Затем для непрерывного действия локально-компактной группы G с мерой Хаара ν , λ_{jk} можно заменить на функции $\lambda_j \in l_+^1(G)$ такие, что $\|f_j - \int_G \lambda_j(g) U_{\alpha(g)} f \times \nu(dg)\|_1 < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$ (подробности см. в [1]).

В [1] доказано, что АТ влечет эргодичность и что странный ранг один влечет АТ (последнее — лишь для одного автоморфизма, но для действий общих групп доказательство без труда можно

провести аналогично). Из этого и результата [2] следует, что эргодические автоморфизмы с дискретным спектром (а затем и потоки) являются АТ.

Ниже приведены два результата, доказанных Макки в [4].

Лемма 0. Если эргодическое действие α компактной группы G имеет дискретный спектр, то из Ω можно удалить такое α -инвариантное и имеющее меру ноль множество, что все оставшиеся точки будут принадлежать одной траектории.

Теорема 0. Пусть локально-компактная сепарабельная группа G эргодически действует на пространстве Лебега, и действие это имеет дискретный спектр. Тогда существует непрерывный гомоморфизм φ из G на плотную подгруппу D некоторой компактной группы K и замкнутая нормальная подгруппа $H \subset K$ такие, что исходное действие mod 0 эквивалентно такому действию группы G на K/H : $\alpha(g)(\text{cls } k) = \text{cls}(k\varphi(g))$.

Всюду, где не оговорено противное, элементы множеств: G, K и т. п. будут обозначаться соответствующими строчными буквами: $g, k, \dots$. Естественный гомоморфизм факторизации группы по ее нормальной подгруппе обозначается cls .

§ 1. Действия компактной группы сдвигами на пространстве своих смежных классов

Лемма 1. Действие тора T^m , $m \in \mathbb{N}$, сдвигами на себе имеет странный ранг один (и, следовательно, является АТ).

Доказательство. Для окружности T^1 это утверждение очевидно, поскольку можно считать с точностью до любого $\varepsilon > 0$, что множества A_1 и A_2 из определения 2 имеют вид объединения конечного числа интервалов из $T^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с рациональными концами. Но такие A_1 и A_2 можно совершенно точно накрыть одновременно объединением непересекающихся рациональных сдвижек подходящего интервала E_0 с рациональными концами. Так как в общем случае множества $A_1, A_2 \subset T^m$, упомянутые в определении 1, можно с любой точностью приблизить объединениями непересекающихся множеств вида $B \times C$, $B \subset T^{m-1}$, $C \subset T^1$, то утверждение очевидно и в общем случае.

Теорема 1. Пусть G — компактная сепарабельная абелева группа и G_0 — ее замкнутая подгруппа. Действие α группы G на пространстве G/G_0 (в качестве меры взята мера Хаара ν), определенное как $\alpha(g_1)(\text{cls } g_2) = \text{cls}(g_1 g_2)$, имеет странный ранг один и, следовательно, является АТ.

Доказательство. Вначале будет рассмотрен частный случай, когда G_0 — единичная подгруппа, и G действует сама на себе.

Известная из [5] теорема утверждает, что в любой локально-компактной сепарабельной группе G можно найти такую открытую подгруппу H , что какова бы ни была окрестность единицы $U \subset G$, в ней всегда найдется нормальная компактная подгруппа $K \subset U \cap H$, такая, что H/K есть группа Ли. В данном случае, во-первых, H/K есть тор, а, во-вторых, так как $\{gH : g \in G\}$ — открытое покрытие

компактной группы G , то H есть подгруппа конечного индекса. Мысленно рассмотрим разбиение пространства Лебега (G, ν) на эргодические относительно ограничения действия α на H компоненты; на фактор-пространстве по нему конечная группа G/H должна действовать эргодически, откуда следует, что это фактор-пространство состоит из конечного числа атомов, несущих равную меру. Из этого наблюдения с очевидностью выводим, что теорему достаточно доказать для действий группы H .

Из теоремы 1 § 61 в [6] вытекает такое утверждение. Пусть G — локально-компактная сепарабельная абелева группа с мерой Хаара ν , а U — открытое подмножество G . Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность единицы $V \subset G$, что $|\nu(U \cdot V) - \nu(U)| < \varepsilon$. Воспользуемся им.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и $A_1, A_2 \subset H$; возьмем такую окрестность единицы $U_\varepsilon \subset H$, что $|\nu(A_i U_\varepsilon) - \nu(A_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Пусть K_ε — компактная подгруппа, упоминавшаяся в ссылке на [5]; очевидно, что $A_i \subset A_i K_\varepsilon \subset A_i U_\varepsilon$ и что множество $A_i K_\varepsilon$ является инвариантным относительно K_ε . Так как $H/K_\varepsilon \cong T^m$, то $\text{cls}_{K_\varepsilon} A_i K_\varepsilon \subset T^m$. Согласно

лемме 1, можно взять подходящее множество E_0 в T^m в качестве базы стека и сдвигами этого множества одновременно аппроксимировать оба $\text{cls}_{K_\varepsilon} A_i K_\varepsilon$, $i = 1, 2$ с точностью до ε . Теперь $\text{cls}_{K_\varepsilon}^{-1} E_0$ будет своими сдвигами аппроксимировать оба множества $A_i K_\varepsilon$ с точностью до $\varepsilon \nu(K_\varepsilon)$, которая столь мала, сколь требуется. Так как $A_i K_\varepsilon$ разве лишь на ε отличается от A_i (в смысле меры симметрической разности), то этим доказательство теоремы для действий компактных групп на себе сдвигами полностью завершено.

В общем случае для действия G на G/G_0 заметим, что эквивалентные по модулю G_0 элементы G действуют одинаково. Поэтому можно мысленно заменить этот случай действием G/G_0 на G/G_0 , для которого теорема уже доказана. Уже известно, что два данных множества $A_1, A_2 \subset G/G_0$ удастся аппроксимировать с произвольной точностью объединением непересекающихся $(\text{cls } g)$ -сдвижек некоторого множества $E_0 \subset G/G_0$, где $\text{cls } g \in G/G_0$. Остается у смежных классов $\text{cls } g$ выбрать по представителю.

Следствие 1. Так как транзитивное действие всегда эквивалентно действию сдвигами на пространстве смежных классов по подходящей подгруппе, заключаем, что всякое транзитивное действие абелевой сепарабельной компактной группы на пространстве Лебега имеет странный ранг один и, следовательно, является АТ.

Следствие 2. Отсюда и из леммы 0 немедленно вытекает, что эргодическое действие компактной сепарабельной абелевой группы, имеющее дискретный спектр, обладает странным рангом один и, следовательно, является АТ.

В дальнейшем нам понадобится несколько более общий случай, чем рассмотренный в этой теореме.

Следствие 3. Пусть K — компактная абелева сепарабельная группа и D — ее плотная подгруппа, а H — замкнутая

подгруппа; рассмотрим действие D на K/H сдвигами. Такое действие тоже является АТ и, более того, имеет странный ранг один.

Чтобы убедиться в этом, достаточно, как и выше, свести все к действиям D на K . Пусть теперь $A_1, A_2 \subset K$; как уже доказано, существует множество $E_0 \subset K$ (его можно считать замкнутым) и такие $k_1, \dots, k_p \in K$, что $k_i E_0$ не пересекаются между собой, и объединениями их можно с точностью до $\varepsilon > 0$ аппроксимировать A_1 и A_2 . Пусть V — такая окрестность единицы, что $V k_i E_0$ по-прежнему не пересекаются; возьмем $d_j \in D \cap V k_j$, $j = 1, \dots, p$ и найдем, что, объединяя непересекающиеся множества $d_j E_0$, можно аппроксимировать A_1 и A_2 с точностью до $\varepsilon + p v(V)$, а эта величина может быть сделана столь малой, сколь требуется. Здесь v — мера Хаара группы K .

§ 2. Дискретный спектр

Лемма 2. *Эргодическое действие счетной абелевой группы, имеющее дискретный спектр, обладает рангом один.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 0. Так как возникающая в этой теореме плотная подгруппа D будет счетной, то компактная группа K окажется в данном случае сепарабельной, а поскольку любые два элемента из D коммутируют, то K и абелева. Тогда фактически все сводится к доказательству того, что действие D на K/H сдвигами имеет странный ранг один; но это уже доказано в следствии 3 теоремы 1.

Теорема 2. *Странный ранг имеющего дискретный спектр эргодического действия α на пространстве Лебега (Ω, B, μ) локально-компактной сепарабельной абелевой группы G равен единице. (Следовательно, такое действие аппроксимативно транзитивно).*

Доказательство. Для дискретных и компактных групп это уже доказано выше. В общем случае выделим у группы G счетную плотную подгруппу D . Очевидно, что ограничение действия α на D эргодично и в силу леммы 2 теорема доказана полностью.

§ 3. Транзитивность

Теорема 3. *Всякое транзитивное действие локально-компактной сепарабельной абелевой группы G на пространстве Лебега является АТ и, более того, имеет странный ранг один.*

Доказательство. Известно, что всякое транзитивное действие эквивалентно действию группы сдвигами на пространстве смежных классов по подходящей замкнутой подгруппе; так как эквивалентные по модулю ее элементы действуют одинаково, то все сводится к действиям произвольной группы G сдвигами на себе, как и в § 1. Известная из [5] и уже использованная в § 1 теорема позволяет выделить в G открытую подгруппу H , допускающую аппроксимацию с помощью групп Ли; но группы Ли в данном слу-

чае — это $T^p \times R^q$. Для действий группы G/H на G/H сдвигами странный ранг один очевиден, потому что G/H дискретна и поэтому состоит из счетного числа атомов, несущих равную меру. Ниже будет доказан странный ранг один для действий H на себе сдвигами. Так как, очевидно, всякое измеримое подмножество из G с произвольной точностью приближается объединением непересекающихся подмножеств $A \subset G$ таких, что существует подходящее измеримое $C \subset H$, удовлетворяющее условию: $A \cap gH = gC$, если $\text{cls } g \in B$, и $A \cap gH = \emptyset$, если $\text{cls } g \notin B$, где $B = \text{cls } A$, то из того, что теорема справедлива для H и G/H , воспоследует справедливость ее для всей группы G .

Утверждение теоремы очевидно для случая $G = R$, а следовательно, и для случая $G = R^n$ или $G = T^p \times R^q$ (имеются в виду действия этих групп на себе сдвигами). Поэтому доказательство этой теоремы для действий H на H будет дословно воспроизводить один из абзацев доказательства теоремы 1 — с заменой лишь торов на $T^p \times R^q$. Подробно его приводить нет никакой необходимости.

Список литературы: 1. *Connes A., Woods E. J.* Approximately transitive flows and ITPFI factors // *Ergod. Th. and Dyn. Syst.* 1958. 5, N 2. P. 203—236. 2. *del Junco A.* Transformations with discrete spectrum are stacking transformations // *Can. J. Math.* 1976. 28, N 4. P. 836—839. 3. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. М., 1980. 384 с. 4. *Maskey G. W.* Ergodic transformation groups with a pure point spectrum // *I. I. J. Math.* 1964. 8, N 2. P. 217—228. 5. *Montgomery D., Zippin L.* Topological transformation groups. N. Y., L., 1955. 511 p. 6. *Халмош П. Р.* Теория меры. М., 1953. 292 с.

Поступила в редколлегию 18.09.87

УДК 517.11

Т. С. КУДРИК

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАНДАРТНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

В этой статье исследуются задача Коши, краевая задача и задача на собственные значения для нестандартного разностного оператора конечного порядка на конечном промежутке. (Рассматриваются функции действительного переменного, последовательные значения которого отличаются на бесконечно малую величину.) Мы используем нестандартный анализ в форме Э. Нельсона (см. [1—4]).

1. Пусть $p, h \in R$, $h > 0$, $\omega \in N$, $q := p + \omega h$ ($\approx$ — отношение бесконечной близости, $h \approx 0$ означает, что $|h| < \varepsilon$ для произвольного стандартного действительного числа $\varepsilon > 0$). Множество $\overline{pq} := \{p, p + h, \dots, q - h, q\}$ называем дискретным промежутком с концами p, q . Через $H(\overline{pq})$ обозначаем (внешнее) множество всех

внутренних функций, заданных на $\overline{pq}$, со значениями в $\mathcal{C}$. $H(\overline{pq})$ трактуем как гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$\forall g, f \in H(\overline{pq}) \quad (f|g) := h \sum_{x \in \overline{pq}} f(x) \overline{g(x)}$$

размерности $(q-p)h^{-1} + 1$. Считаем, что p и $q+h$ — стандартны, поэтому ${}^\circ p = p$, ${}^\circ q = q+h$ и дискретному промежутку $\overline{pq}$ отвечает стандартный промежуток $[p, q+h]$ (здесь ${}^\circ p$ — тень числа p ; тень конечного нестандартного числа a — это такое единственное стандартное число ${}^\circ a$ (в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), что $a \approx {}^\circ a$). Для произвольной функции $y \in H(\overline{pq})$ обозначаем $\Delta y(x) := \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$, $\Delta^k y(x) := \Delta(\Delta^{k-1} y(x))$, считая, что $y(p - (n-1)h) = \dots = y(p-h) = 0$. Пусть $ly(x) := \Delta^n y(x) + p_1(x) \Delta^{n-1} y(x) + \dots + p_n(x) y(x)$, $x \in \overline{pq}$, где n — конечное натуральное число; p_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ — внутренние функции, заданные на $\overline{pq}$.

Приведем некоторые определения, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется стандартно ограниченной, если существует такое стандартное число $C > 0$, что $\forall x \in \overline{pq} \quad |f(x)| < C$.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется стандартно непрерывной на $\overline{pq}$, если $\forall x, x' \in \overline{pq} \quad x \approx x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.

По определению, $H[p, q+h]$ — стандартное пространство $L_2(p, q+h)$.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется околостандартной, если существует стандартная функция $f_0 \in H[p, q+h]$ такая, что $\|f - f_0\| \approx 0$, здесь под f подразумевается естественное продолжение функции f из дискретного промежутка $\overline{pq}$ до ступенчатой функции на сплошном промежутке $[p, q+h]$. При этом f_0 обозначается ${}^\circ f$ и называется тенью f .

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется слабо околостандартной, если существует стандартная функция $f_0 \in H[p, q+h]$ такая, что для каждой стандартной функции $g \in H[p, q+h]$ $(f - f_0|g) \approx 0$. Функция f_0 называется слабой тенью f и обозначается ${}^{w\circ}f$.

Пусть даны функция $g \in H(\overline{pq})$, точка $x_0 \in p + (n-1)h$, q и числа $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathcal{C}$. Линейной дискретной задачей Коши называем задачу определения функции $y \in H(\overline{pq})$ такой, что

$$\begin{cases} ly(x) = g(x), & x \in \overline{pq} \\ \Delta^j y(x_0) = y_j, & j \in n = \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что функции p_i стандартно непрерывны и стандартно ограничены на $\overline{pq}$.

Теорема 1. Пусть y — решение задачи (1), где g — функция с конечной нормой, а числа $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ — околостандартные. Тогда функция y околостандартна, а ее тень ${}^\circ y$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на промежутке

$[p, q + h]$ и функция ${}^{\circ}y$ является решением обычной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} {}^{\circ}y(t) + {}^{\circ}p_1(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}^{\circ}y(t) + \dots + {}^{\circ}p_n(t) {}^{\circ}y(t) = {}^w g(t), \\ \frac{d^j}{dt^j} {}^{\circ}y({}^{\circ}x_0) = {}^{\circ}y_j, \quad j \in n. \end{cases}$$

2. Перейдем к краевой задаче для разностного уравнения n -го порядка. Обозначим через $U_i y$ краевую форму вида:

$$\alpha_0^i y_{p_i} + \dots + \alpha_{n-1}^i \Delta^{n-1} y_{p_i} + \beta_0^i y_q + \dots + \beta_{n-1}^i \Delta^{n-1} y_q,$$

где $\alpha_r^i, \beta_r^i \in \mathbb{C}$ ($r \in n, i \in n$), $p_1 := p + (n-1)h$.

Краевой задачей для разностного уравнения (или оператора) n -го порядка называем задачу определения функции $y \in H(\overline{pq})$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} ly(x) = g(x), \quad x \in \overline{p_1 q}, \\ U_i y = 0, \quad i \in n \end{cases} \quad (2)$$

(эта задача — разностный аналог (при бесконечно малом шаге) краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора (см. [7])).

Обозначим через $e_0(x, x_0), e_1(x, x_0), \dots, e_{n-1}(x, x_0)$ фундаментальную систему решений разностного уравнения $ly = 0$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta^j e_i(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i, \end{cases} \quad (i, j \in n).$$

Отметим, что для разрешимости задачи (2) достаточно, чтобы

$$\det [\alpha_i^j + \sum_{k \in n} \beta_k^j \Delta^k e_i(q, p_1)] \neq 0.$$

Легко видеть, что решение y задачи (2) выражается формулой

$$y(x) = h \sum_{x' \in \overline{p_1 q}} G(x, x') g(x'), \quad (3)$$

где G — функция Грина задачи (2), которую можно выразить через фундаментальную систему решений следующим образом:

$$G(x, x') = \begin{cases} a_0(x') e_0(x, x') + \dots + a_{n-1}(x') e_{n-1}(x, x'), & p_1 \leq x \leq x', \\ b_0(x') e_0(x, x') + \dots + b_{n-1}(x') e_{n-1}(x, x'), & x \leq x \leq q. \end{cases}$$

Предположим опять, что функции p_i стандартно непрерывны и стандартно ограничены, а числа α_r^i, β_r^i — околостандартные, функция g имеет конечную норму. Пусть, кроме того,

$$\det \left[{}^{\circ}\alpha_i^j + \sum_{k \in n} {}^{\circ}\beta_k^j \frac{d^k}{dt^k} {}^{\circ}e_i(q + h, p) \right] \neq 0.$$

Теорема 2. Решение y задачи (2) околостандартно, его тень ${}^{\circ}y$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на промежутке $[p, q+h]$ и является решением обычной краевой задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} {}^{\circ}y(t) + {}^{\circ}\rho_1(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}^{\circ}y(t) + \dots + {}^{\circ}\rho_n(t) {}^{\circ}y(t) = {}^{\omega_0}g(t), \\ & {}^{\circ}\alpha_0^i {}^{\circ}y(p) + \dots + {}^{\circ}\alpha_{n-1}^i \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}^{\circ}y(p) + {}^{\circ}\beta_0^i {}^{\circ}y(q+h) + \\ & + \dots + {}^{\circ}\beta_{n-1}^i \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}^{\circ}y(q+h) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Кроме того, околостандартной является функция Грина G задачи (2), а ее тень ${}^{\circ}G$ является функцией Грина задачи (4), т. е.

$$\forall t \in [p, q+h] \quad {}^{\circ}y(t) = \int_p^{q+h} {}^{\circ}G(t, s) {}^{\omega_0}g(s) ds.$$

3. Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для разностного уравнения n -го порядка: определить те $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует функция $y \in H(\overline{pq}) \setminus \{0\}$ такая, что

$$\left\{ \begin{aligned} & ly(x) = \lambda y(x), \quad x \in \overline{pq}; \\ & U_i y = 0, \quad i \in n. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

По формуле (3) имеем

$$y(x) = \lambda h \sum_{x' \in \overline{p_1 q}} G(x, x') y(x').$$

Следовательно, собственные значения задачи (5) совпадают с собственными значениями оператора T :

$$\forall f \in H(\overline{pq}) \quad \forall x \in \overline{p_1 q} \quad Tf(x) = h \sum_{x' \in \overline{p_1 q}} G(x, x') f(x').$$

Определение. Оператор $T: H(\overline{pq}) \rightarrow H(\overline{pq})$ называется B_2 -околостандартным, если околостандартно его ядро G , т. е. если $\|G\| = (h^2 \sum_{(x, y) \in \overline{pq^2}} |G(x, y)|^2)^{1/2} < \infty$.

Утверждение. Оператор T является B_2 -околостандартным. Его тень — это интегральный оператор Фредгольма с ядром ${}^{\circ}G$:

$$\forall g \in H[p, q+h] \quad \forall t \in [p, q+h] \quad Sg(t) = \int_p^{q+h} {}^{\circ}G(t, s) g(s) ds.$$

Используя результаты [5, 6], получаем следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть λ — оцутимое (т. е. не бесконечно малое) собственное значение задачи (5). Алгебраическая кратность m_λ этого собственного значения $\leq n$, а соответствующее ему

корневое подпространство имеет базис из околостандартных функций. Тень ${}^{\circ}\lambda$ является собственным значением задачи

$$\begin{cases} {}^{\circ}ly = {}^{\circ}\lambda y, \\ {}^{\circ}U_i y = 0, \quad i \in n. \end{cases} \quad (6)$$

Алгебраическая кратность собственного значения ${}^{\circ}\lambda$ задачи (6) $\geq m_{\lambda}$, а тень каждой околостандартной корневой функции задачи (5), отвечающей λ , является корневой функцией задачи (6), отвечающей ${}^{\circ}\lambda$.

Теорема 4. Все конечные собственные значения задачи (6) стандартны.

Теорема 5. Пусть задача (6) имеет собственное значение λ_0 . Тогда задача (5) имеет собственное значение $\lambda \approx \lambda_0$. Для кратностей m_0 и m_{λ} и спектральных проекторов P_0 и P_{λ} , отвечающих λ_0 и λ , выполняются соотношения (где Λ — множество всех собственных значений $\lambda \approx \lambda_0$):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda} &= m_0, \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} P_{\lambda} H(\overline{pq}) &= P_0 H[p, q + h], \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} {}^{\circ}P_{\lambda} &= P_0. \end{aligned}$$

Список литературы: 1. Nelson E. Internal Set Theory: a New Approach to Non-standard Analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. 83, N 6. P. 1165—1198. 2. Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis. A Practical Guide // Lect. Notes in Math. 1981. 881, № XIV. P. 1—261. 3. Кутателадзе С. С. Основы нестандартного математического анализа / Метод. указания. Новосибирск, 1986. 120 с. 4. Лянце В. Э. О нестандартном анализе / Мат. сегодня. Науч.-метод. сб. К., 1986. С. 26—44. 5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с. 6. О функциях дискретного переменного, II. Задача Коши и краевая задача / В. Э. Лянце, Т. С. Кудрик. К., 1978. 27 с. Деп. в УкрНИИТИ 08.01.87, № 275 — Ук'87.

Поступила в редколлегию 18.09.87

УДК 517.545:547.56

С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОЙ РАЗВЕТВЛЕННОСТИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОДНОМУ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМУ УСЛОВИЮ

Пусть $F_p = F_p(n; a_1: \lambda_1(a_1), \dots, \lambda_{m_1}(a_1); \dots; a_q: \lambda_1(a_q), \dots, \lambda_{m_q}(a_q)) = F_p(n; a_1: \Lambda_1(a_1); \dots; a_q: \Lambda_q(a_q))$ — класс замкнутых римановых поверхностей (р. п. рода p , где $\Lambda_j = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k(a_j)$ — суммарная

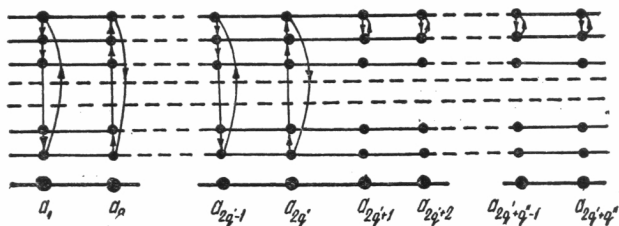
разветвленность р. п. класса F_ρ над базисной точкой a_j . Числа Λ_j должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{j=1}^q \Lambda_j = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k(a_j) = 2(n-1) + 2\rho$$

(формула Римана — Гурвица), $\Lambda_j \leq n - m_j$, $j = \overline{1, q}$.

В [1, с. 468] показано, что для случая $\rho = 0$ выполнения формулы Римана — Гурвица является необходимым, но не достаточным условием существования компактной р. п. заданной разветвленности.

В этой работе мы даем достаточные условия существования классов F_ρ при дополнительных ограничениях, налагаемых на числа Λ_j . Для того чтобы сформулировать наш результат, определим на множестве монотонных разбиений (μ -разбиений) числа N на слагаемые



частичный порядок: μ' -разбиение считаем мельче μ -разбиения, если разбиение μ' может быть получено из разбиения μ разбиением элементов последнего на части.

Теорема. Класс римановых поверхностей $F_\rho = F_\rho(n; a_1 : \Lambda_1; \dots; a_q : \Lambda_q)$ не пуст, если μ -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$: $\mu = (2(n-1) + 2\rho/\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$ мельче его μ_0 -разбиения:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \dots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q''}).$$

Доказательство. На совокупность чисел $\{\Lambda_j\}_1^q$ можно смотреть, как на μ -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$: $\mu = (2(n-1) + 2\rho/\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$.

Зафиксируем μ_0 -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \dots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q''}).$$

Класс р. п., соответствующий μ_0 -разбиению числа $2(n-1) + 2\rho$, не пуст: профиль Π_0 , изображенный на рисунке, представляет р. п. этого класса. Пусть $\Pi_0 = \text{clos} \sum_{j=1}^{2q'+q''} G_j^0$. Очевидно, подстановки атомарных псевдопрофилей этого профиля таковы:

$$S(G_j^0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 1, 3, \dots, 2q' - 1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2, 4, \dots, 2q'; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2q' + 1, \dots, 2q' + q''. \end{cases}$$

Пусть теперь класс р. п. F_p соответствует μ -разбиению числа $2(n-1) + 2p$ и разбиение μ мельче разбиения μ_0 . Тогда

$$2(n-1) + 2p = \sum_{j=1}^q \Lambda_j = \sum_{m=1}^{2q'} \sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j^m + \underbrace{1 + \dots + 1}_{q'},$$

$$\sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j^m = n-1.$$

Согласно теореме Р. Тома [2], класс римановых поверхностей $F_0(n; a_1: \Lambda_1^m; \dots; a_q: \Lambda_q^m; a_{q_m+1}, n-1)$, $m = \overline{1, 2q'}$, не пуст. Пусть

$\Pi_m = \text{clos} \sum_{j=1}^{q_m+1} G_j^m$ — профиль р. п. этого класса. Без ограничения общности можно считать, что подстановка атомарного псевдопрофиля $G_{q_m+1}^m$ профиля Π_m такова:

$$S(G_{q_m+1}^m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, & \text{если } m = 1, \dots, 2q' - 1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } m = 2, \dots, 2q', \end{cases}$$

ибо если это не так, то указанного положения над точкой $a_{q_m+1}^m$ можно добиться применением преобразований обмен и изменения нумерации сильных контуров профиля Π_m .

Заметим, что подстановка псевдопрофиля $\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m$ совпадает с подстановкой атомарного псевдопрофиля G_m^0 :

$$S\left(\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m\right) = S(G_{q_m+1}^m) = S(G_m^0).$$

Поэтому, произведя замену в профиле Π_0 атомарного псевдопрофиля G_m^0 псевдопрофилем $\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m$, $m = \overline{1, 2q'}$, получим профиль р. п. из класса F_0 , фигурирующего в формулировке теоремы.

Следствие. Классы р. п. $F_0(n; a_1: \Lambda_1; \dots; a_q: \Lambda_q)$ не пусты, если $q \geq n$.

Пусть μ — разбиение числа $2(n-1)$ мельче его μ_0 -разбиения:

$$\mu_0 = (2(n-1)/(n-1), (n-1));$$

$$\mu = (2(n-1)/\Lambda_1^1, \dots, \Lambda_{q_1}^1, \Lambda_1^2, \dots, \Lambda_{q_2}^2) \sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j = n-1, \quad m = 1, 2.$$

Доказанная теорема обеспечивает существование классов n -листных замкнутых р. п., разветвленность которых определяется слагаемыми μ -разбиения числа $2(n-1)$. Следствие будет доказано, если мы покажем, что любое разбиение числа $2(n-1)$ на q слагаемых при $q \geq n$ мельче его μ_0 -разбиения.

Итак, пусть μ — произвольное разбиение числа $2(n-1)$ на q слагаемых и $q \geq n$: $\mu = (2(n-1)/\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$. Пусть C — окружность длины $2(n-1)$. Разделим окружность C точками $b_1, b_2, \dots, b_q$ на q частей, длины которых равны $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_q$. Утверждаем, что среди точек множества $\{b_i\}_1^q$ найдется хотя бы одна пара диаметрально противоположных. Если бы это было не так, то, поскольку точка, диаметрально противоположная $\{b_i\}_1^q$, не принадлежала бы множеству $\{b_i\}_1^q$, то длина окружности C оказалась бы не менее $2q$, так как $q \geq n$, то и не менее $2n$, в то время как длина C равна $2n-2$. Этим доказано, что слагаемые μ -разбиения числа $2(n-1)$ можно разбить на две суммы, каждая из которых равна $n-1$, а вместе с этим доказано и следствие.

Замечание. Доказанная теорема и следствие из нее дают один из ответов на вопрос о простых условиях реализуемости накрытий [2, 3] в случае римановой сферы.

Список литературы: 1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 2. Thom R. L'equivalence d'une fonction differentiable et d'un polynome // Topology. 1965. N 3, Supp. 2. P. 297—307. 3. Edmonds A. L. et al. Realizability of branched coverings of surfaces / A. L. Edmonds, R. S. Kulkarni, R. E. Stong // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. 283, N 2. P. 773—790.

Поступила в редколлегию 24.10.87

УДК 517.5

О. М. КАТКОВА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИА

В связи с задачей Лагерра о точном определении числа корней вещественного полинома с помощью правила Декарта в работах Фекете, Полиа и Балинта (см. [1], отд. V, гл. 3, § 2) была доказана следующая теорема.

Теорема А. Пусть P — полином с вещественными коэффициентами. Положим $f_k(z) = e^{kz}$, $k \in \mathbb{R}_+$; $g_k(z) = (1-z)^{k-1}$, $k \in \mathbb{R}_+$; $h_k(z) = (1+z)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. При достаточно большом $k > 0$ число перемен знака в последовательности коэффициентов функций Pf_k , Ph_k совпадает с числом положительных корней полинома P , а число перемен знака в последовательности коэффициентов функции Pg_k — с числом корней полинома P на интервале $[0, 1)$.

В случае, когда положительных корней у полинома P нет, теорема А утверждает лишь, что все коэффициенты функций Pf_k , Pg_k , Ph_k при достаточно большом k неотрицательны. Целью настоящей статьи является доказательство того, что в этом случае имеет место более сильное утверждение. Для формулировки результата нам понадобится введенное Фекете в работе [2] понятие, обобщающее понятие положительной последовательности.

Определение 1. Пусть m — натуральное число. Последовательность $\{b_0, b_1, b_2, \dots\} \in l^1$ называется частотной последовательностью Поля порядка m , если все миноры порядков $v = 1, 2, \dots, m$ матрицы

$$B = \|b_{j-i}\|_{i,j \in \mathbb{Z}}, \text{ где } b_n = 0, n < 0 \quad (1)$$

неотрицательны*.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. Пусть m — натуральное число, $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_t z^t$ — полином, такой что $P(x) > 0, x \in [0, \infty)$. При достаточно большом $k \geq k_0(m)$ последовательности коэффициентов функций $f_k P, h_k P$ являются частотными последовательностями Поля порядка m . Для $g_k P$ это верно в предположении, что $P(x) > 0, x \in [0, 1)$.

Доказательство. Следуя ([1], отд. I, гл. 1, § 2), будем обозначать $x^{n|\omega} = x(x-\omega) \dots (x-(n-1)\omega), x^{0|\omega} = 1$, и так же, как и в ([1], отд. V, гл. 3, § 2), введем «сопровождающие» полиномы:

$$\begin{aligned} P(x, \omega) &= \sum_{i=0}^t a_i x^{i|\omega}; \quad Q(x, \omega) = \sum_{i=0}^t a_i (1+x-l\omega)^{(t-i)|\omega} x^{i|\omega}; \\ R(x, \omega) &= \sum_{i=0}^t a_i (1-x+(t-1)\omega)^{(t-i)|\omega} x^{i|\omega}. \end{aligned} \quad (2)$$

В [1] было показано, что

$$\begin{aligned} (f_k P)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} P\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n; \\ (g_k P)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1-t)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^t}{n!} Q\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n; \\ (h_k P)(x) &= \sum_{n=0}^{k+t-1} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t)} \frac{k^t}{n!} R\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right) x^n. \end{aligned}$$

Для доказательства того, что коэффициенты этих функций при достаточно большом k образуют частотные последовательности Поля порядка m , нам понадобится лемма, близкая к одной лемме Шёнберга [3], позволяющая свести проверку неотрицательности всех миноров матрицы (1) к проверке строгой положительности лишь некоторых.

Лемма 1. Пусть $\{b_k\}_{k=0}^N, N < \infty$, — последовательность положительных чисел, такая что $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$. Рассмотрим матрицу из v строк и $v+N+1$ столбцов

$$B_v = \|b_{j-i}\|_{i=0, \dots, v-1, j=0, 1, \dots, v+N} \quad (b_k = 0 \text{ при } k < 0, k > N).$$

* В работе [2] Фекете называл такие последовательности m -кратно положительными.

Предположим, что для любого $v = 1, 2, \dots, m$ матрица B_v удовлетворяет условию: все ее миноры порядка v , составленные из соседних столбцов, положительны. Тогда последовательность $\{b_k\}$ является частотной последовательностью Поляка порядка m .

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом Фекете [2]: Если все миноры порядка v , составленные из соседних столбцов матрицы B_v , положительны, то и все ее миноры порядка v положительны. Возьмем, как и в [3], вспомогательную матрицу $M(\gamma) = \|\exp(-(j-i)^2/\gamma)\|_{i,j=-\infty}^{\infty}$, $\gamma > 0$, у которой все миноры положительны [3], и положим $B(\gamma) = BM(\gamma)$, где B — матрица (1) с $b_k = 0$ при $k < 0$ и $k > N$. Формула Бине — Коши показывает, что из положительности всех миноров порядка v матрицы B_v следует положительность всех составленных из соседних строк и соседних столбцов миноров порядка v матрицы $B(\gamma)$. Таким образом, положительны все миноры порядка $\leq m$ матрицы $B(\gamma)$, составленные из соседних строк и соседних столбцов. Шенберг [3] показал, что если положительны все миноры порядка $\leq m$ некоторой матрицы, составленные из соседних строк и соседних столбцов, то положительны все ее миноры порядка $\leq m$. Применяя эту теорему к матрице $B(\gamma)$, заключаем, что все ее миноры порядка $\leq m$ положительны. Устремляя $\gamma \rightarrow +0$ и замечая, что при этом $B(\gamma) \rightarrow B$ поэлементно, видим, что все миноры порядка $\leq m$ матрицы B неотрицательны. Лемма доказана.

В силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно убедиться в положительности следующих определителей:

$$\begin{aligned}\Phi_n^v(k) &= \left| \frac{k^{n+j-i-t}}{\Gamma(n+j-i+1)} P\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leq i, j \leq v}, \\ \Psi_n^v(k) &= \left| \frac{\Gamma(k+n+j-i+1-t)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^t}{\Gamma(n+j-i+1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times Q\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leq i, j \leq v},\end{aligned}$$

где $v = 1, 2, \dots, m$; $n = 0, 1, 2, \dots$;

$$\begin{aligned}X_n^v(k) &= \left| \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n-j+i+t)} \cdot \frac{k^t}{\Gamma(n+j-i+1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times R\left(\frac{n}{k} + \frac{j-i}{k}, \frac{1}{k}\right) \right|_{1 \leq i, j \leq v},\end{aligned}$$

где $v = 1, 2, \dots, m$; $n = 0, 1, 2, \dots, k+t-1$.

Заметим, что доказательство положительности всех трех определителей проводится с помощью сходных рассуждений. Поэтому приведем подробные пояснения лишь к выкладкам, относящимся к определителям $\Phi_n^v(k)$.

Вынося из j -столбца $\frac{k^n}{(n+j-1)!}$, получим

$$\Phi_n^v(k) = \left(\prod_{j=1}^v \frac{k^n}{(n+j-1)!} \right) F^v\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$F^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} (x + (j-1)\omega)^{(t-1)\omega} P(x + (j-1)\omega, \omega) \right|_{1 \leq t, j \leq v}.$$

Теорема будет доказана, если установить, что при достаточно большом $k > 0$, $v = 1, 2, \dots, m$, $F^v\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0$, $x \geq 0$ (3). Этим мы и будем дальше заниматься.

Прибавляя к каждому столбцу предыдущие, умноженные на соответствующие константы, получим

$$F^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} C_{j-1}^s (-1)^s (x + (j-1-s)\omega)^{(t-1)\omega} \times \right. \\ \left. \times P(x + (j-1-s)\omega, \omega) \right|_{1 \leq t, j \leq v}. \quad (4)$$

Нам понадобятся некоторые свойства $x^{n|\omega}$. Легко проверить следующее равенство:

$$x^{n|\omega} (x - n\omega)^{l|\omega} = x^{(n+l)|\omega}. \quad (5)$$

Очевидно,

$$x^{n|\omega} = x^n + \omega t(x, \omega) \quad (6)$$

здесь и далее через $t(x, \omega)$ (возможно с индексами) будем обозначать полиномы от x и ω .

Лемма 2. Для любых $p = 0, 1, 2, \dots$; $q = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $r \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\omega^n} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (x + (n-s)\omega)^{p|\omega} (1 \pm x \mp (r+s-n)\omega)^{q|\omega} \right) = \\ = (x^p (1 \pm x)^q)^{(n)}, \quad (7)$$

где предел равномерный на любом компактном множестве значений $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим $[x, \omega]_1 = \frac{\varphi(x + \omega) - \varphi(x)}{\omega}$, $\dots$, $\dots$, $[x, \omega]_{n+1} = \frac{[x + \omega, \omega]_n - [x, \omega]_n}{\omega}$ — разделенные разности некоторой функции φ . Хорошо известны следующие формулы:

$$[x, \omega]_n = \frac{1}{\omega^n} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s \varphi(x + (n-s)\omega) = \\ = \frac{1}{\omega^n} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega \varphi^{(n)}(x + \omega_1 + \dots + \omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n.$$

Положим $\varphi(x, \omega) = x^{p|\omega|} (1 \pm x \mp r\omega)^{q|\omega|}$ и рассмотрим ее n -ю разделенную разность по x :

$$\begin{aligned} [x, \omega]_n &= \frac{1}{\omega^n} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (x + (n-s)\omega)^{p|\omega|} (1 \pm x \mp (r+s-n)\omega)^{q|\omega|} = \\ &= \frac{1}{\omega^n} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega \{ \varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \dots + \omega_n, \omega) - \varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \dots \\ &\quad \dots + \omega_n, 0) \} d\omega_1 \dots d\omega_n + \frac{1}{\omega^n} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega \varphi_x^{(n)}(x + \omega_1 + \dots \\ &\quad \dots + \omega_n, 0) d\omega_1 \dots d\omega_n. \end{aligned}$$

К подынтегральному выражению в первом интеграле применим теорему Лагранжа о конечном приращении, а затем к обоим интегралам теорему о среднем значении. Получим

$$[x, \omega]_n = \omega \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n \partial \omega} \varphi(x + \xi_1 + \dots + \xi_n, \eta) + \varphi_x^{(n)}(x + \xi_1 + \dots + \xi_n, 0),$$

где $0 < \xi_j < \omega$, $0 < \xi_j < \omega$, $j = 1, \dots, n$; $0 < \eta < \omega$. Заметим, что при $\omega \rightarrow 0$ первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к $\varphi_x^{(n)}(x, 0)$.

В силу (6) $\varphi(x, \omega) = x^p (1 \pm x)^q + \omega t_1(x, \omega)$, откуда $\varphi_x^{(n)}(x, \omega) = (x^p (1 \pm x)^q)^{(n)} + \omega t_2(x, \omega)$, следовательно, $\varphi_x^{(n)}(x, 0) = (x^p (1 \pm x)^q)^{(n)}$.

Лемма доказана.

Подставляя в (4) выражение для $P(x, \omega)$ из (2) и используя затем (5), имеем

$$\begin{aligned} F^v(x, \omega) &= \left| \sum_{l=0}^t a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s C_{j-1}^s (x + (j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega|} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (x + (j-1-s)\omega - (i-1)\omega)^{l|\omega|} \right) \right|_{1 < i, j < \omega} = \\ &= \left| \sum_{l=0}^t a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s C_{j-1}^s (x + (j-1-s)\omega)^{(i+i-1)|\omega|} \right) \right|_{1 < i, j < v}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (7) и (2) равномерно на любом компакте комплексной x -плоскости имеем

$$F^v(x, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow \left| \sum_{l=0}^t a_l (x^{l+i-1})^{(j-1)} \right|_{1 < i, j < v} = |(x^{i-1}P(x))^{(j-1)}|_{1 < i, j < v}.$$

Лемма 3. Пусть $f \in C^{(v-1)}$, $x \in C$, $\Pi_v(f, x) = |(x^{i-1}f(x))^{(j-1)}|_{1 < i, j < v}$, $v \in N$. Тогда

$$\Pi_v(f, x) = C(v)(f(x)^v), \quad (8)$$

где $C(v) = (v-1)!(v-2)! \dots 2! 1!$

Действительно, так как $(xf(x))^{(j)} - x(f(x))^{(j)} = jf^{(j-1)}(x)$, то $(x^i f(x))^{(j)} - x(x^{i-1} f(x))^{(j)} = j(x^{i-1} f(x))^{(j-1)}$. Вычитая из каждой следующей строки определителя $\Pi_v(f, x)$ предыдущую, умноженную на x , получим

$$\Pi_v(f, x) = \begin{vmatrix} f & f' & f'' & \dots & f^{(v-1)} \\ 0 & f & 2f' & \dots & (v-1)f^{(v-2)} \\ 0 & xf & 2(xf)' & \dots & (v-1)(xf)^{(v-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x^{v-2}f & 2(x^{v-2}f)' & \dots & (v-1)(x^{v-2}f)^{(v-2)} \end{vmatrix}.$$

Пользуясь индукцией, получаем утверждение леммы 3.

Применяя лемму 3, видим, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F^v(x, \omega) = C(v)(P(x))^v,$$

где предел равномерный на любом компактном множестве значений $x \in C$. Так как полином P не имеет положительных корней, то в силу леммы Гурвица для любого $v = 1, 2, \dots, m$ существует k_v такое,

что при $k \geq k_v$, $x \geq 0$ имеем $F^v\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0$, что и доказывает (3).

Перейдем теперь к определителям $\Psi_n^v(k)$, $X_n^v(k)$. Из i -х строк $\Psi_n^v(k)$ и $X_n^v(k)$ вынесем соответственно

$$\frac{\Gamma(k+n-t+2-i)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+v-i)!}, \quad \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t+i-1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+v-i)!}.$$

Получим

$$\Psi_n^v(k) = \left(\prod_{j=1}^v \frac{\Gamma(k+n-t+2-i)}{\Gamma(k+1)} \frac{k^{t+i-1}}{(n+v-i)!} \right) G^v\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$G^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{v-1}} (1+x-(t-j+i)\omega)^{(j-1)\omega} (x+(v-i)\omega)^{(v-j)\omega} \times \right. \\ \left. \times Q(x+(j-i)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v},$$

$$X^v(k) = \left(\prod_{j=1}^v \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+t+i-1)} \frac{(k-1)!}{(n+v-i)!} \right) H^v\left(\frac{n}{k}, \frac{1}{k}\right),$$

где

$$H^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{v-i}} (1-x+(t+i-2)\omega)^{(j-1)\omega} (x+(v-i)\omega)^{(v-j)\omega} \times \right. \\ \left. \times R(x+(j-i)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v}.$$

Покажем, что при больших k $v = 1, 2, \dots, m$:

$$G^v\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0, \quad x \geq 0, \quad (9)$$

$$H^v\left(x, \frac{1}{k}\right) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 + (t-1)\frac{1}{k}. \quad (10)$$

Так как $\det \|C_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq v} = \det \|C_{v-j+1, v-i+1}\|_{1 \leq i, j \leq v}$, то

$$G^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} (1+x-(t-j+i)\omega)^{(v-i)|\omega|} (x+(j-1)\omega)^{(i-1)|\omega|} \times \right. \\ \left. \times Q(x+(j-i)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v},$$

$$H^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} (1-x+(t+v-j-1)\omega)^{(v-i)|\omega|} (x+(j-1)\omega)^{(i-1)|\omega|} \times \right. \\ \left. \times R(x+(j-i)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v}.$$

Прибавляя к каждому столбцу предыдущие, умноженные на соответствующие константы, получим

$$G^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} C_{j-1}^s (-1)^s (1+x-(t-j+i+s)\omega)^{(v-i)|\omega|} \times \right. \\ \left. \times (x+(j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega|} Q(x+(j-i-s)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v};$$

$$H^v(x, \omega) = \left| \frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} C_{j-1}^s (-1)^s (1-x+(t+v-j-1+s)\omega)^{(v-i)|\omega|} \times \right. \\ \left. \times (x+(j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega|} R(x+(j-i-s)\omega, \omega) \right|_{1 \leq i, j \leq v}.$$

Подставляя выражения для $Q(x, \omega)$ и $R(x, \omega)$ из (2), а затем используя (5), получим

$$G^v(x, \omega) = \left| \sum_{l=0}^t a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s C_{j-1}^s (1+x-(l-j+i+s)\omega)^{(t-l)|\omega|} \times \right. \right. \\ \left. \times (1+x-(l-j+i+s)\omega)^{(v-i)|\omega|} (x+(j-1-s)\omega)^{(i-1)|\omega|} \right|_{1 \leq i, j \leq v} =$$

$$= \left| \sum_{l=0}^t a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s C_{j-1}^s (x+(j-1-s)\omega)^{(t+i-1)|\omega|} (1+x-(l-j+i+s)\omega)^{(t-l+v-i)|\omega|} \right) \right|_{1 \leq i, j \leq v};$$

$$H^v(x, \omega) = \left| \sum_{l=0}^t a_l \left(\frac{1}{\omega^{j-1}} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s C_{j-1}^s (x+(j-1-s)\omega)^{(t+i-1)|\omega|} \times \right. \right. \\ \left. \times (1-x+(t+v-j-1+s)\omega)^{(t-l+v-i)|\omega|} \right|_{1 \leq i, j \leq v}.$$

В силу (7) и (2) равномерно на любом компакте комплексной x -плоскости

$$G^v(x, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow |(x^{t-1}(1+x)^{v-i}Q(x))^{(j-1)}|_{1 \leq i, j \leq v}, \quad (11)$$

где $Q(x) = a_0(1+x)^t + a_1(1+x)^{t-1}x + \dots + a_{t-1}(1+x)x^{t-1} + a_t x^t$,

$$H^v(x, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow |(x^{t-1}(1-x)^{v-i}R(x))^{(j-1)}|_{1 \leq i, j \leq v}, \quad (12)$$

где $R(x) = a_0(1-x)^t + a_1(1-x)^{t-1}x + \dots + a_{t-1}(1-x)x^{t-1} + a_t x^t$. Так как $(x^{t-1}(1+x)^{v-i}Q(x))^{(j-1)} = (x^i(1+x)^{v-i-1} \times Q(x))^{(j-1)} = (x^{i-1}(1+x)^{v-i-1}Q(x))^{(j-1)}$, то, вычитая из каждой строки определителя, стоящего в правой части (11), следующую и повторяя эти операции, получим

$$\begin{aligned} & |(x^{t-1}(1+x)^{v-i}Q(x))^{(j-1)}|_{1 \leq i, j \leq v} = \\ & = \begin{vmatrix} ((1+x)^{v-2}Q)^{(j-1)} \\ (x(1+x)^{v-3}Q)^{(j-1)} \\ \dots \\ (x^{v-3}(1+x)Q)^{(j-1)} \\ (x^{v-2}Q)^{(j-1)} \\ (x^{v-1}Q)^{(j-1)} \end{vmatrix}_{1 \leq j \leq v} = \begin{vmatrix} ((1+x)^{v-3}Q)^{(j-1)} \\ (x(1+x)^{v-4}Q)^{(j-1)} \\ \dots \\ (x^{v-3}Q)^{(j-1)} \\ (x^{v-2}Q)^{(j-1)} \\ (x^{v-1}Q)^{(j-1)} \end{vmatrix}_{1 \leq j \leq v} = \\ & = \dots = |(x^{t-1}Q(x))^{(j-1)}|_{1 \leq i, j \leq v} = \Pi_v(Q, x). \end{aligned}$$

Аналогично, прибавляя к каждой строке определителя, стоящего в правой части (12), следующую и повторяя эти операции, получим

$$|(x^{t-1}(1-x)^{v-i}R(x))^{(j-1)}|_{1 \leq i, j \leq v} = \Pi_v(R, x).$$

В силу (8) равномерно на любом компакте будем иметь

$$G^v(x, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow C(v)(Q(x))^v, \quad (13)$$

$$H^v(x, \omega)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow C(v)(R(x))^v. \quad (14)$$

Легко видеть, что $Q(x) = (1+x)^t P\left(\frac{x}{1+x}\right)$, а $R(x) = (1-x)^t P \times \times \left(\frac{x}{1-x}\right)$. Применяя лемму Гурвица к (13), получаем утверждение (9). Докажем теперь (10). Так как в этом случае

$$0 \leq x \leq 1 + (t-1)\frac{1}{k}, \text{ то } \frac{x}{1-x} \in \left[0, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\left(1 + \frac{k}{t-1}\right)\right].$$

Поскольку при $k \rightarrow +\infty$ выражение $\left(-\left(1 + \frac{k}{t-1}\right)\right) \rightarrow -\infty$, то можно подобрать такое k_0 , что при $k \geq k_0$ интервал $\left(-\infty, -\left(1 + \frac{k}{t-1}\right)\right]$ не содержит корней полинома P , причем если t — четно, то

$$P\left(\frac{x}{1-x}\right) > 0 \text{ и } (1-x)^t > 0, \quad x \in \left(1, 1 + (t-1)\frac{1}{k}\right],$$

а если — нечетно, то

$$P\left(\frac{x}{1-x}\right) > 0 \text{ и } (1-x)^t > 0, x \in \left(1, 1 + (t-1)\frac{1}{k}\right]. \text{ Применяя теперь}$$

лемму Гурвица к (14), получаем утверждение (10), что и завершает доказательство теоремы.

Список литературы: 1. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, т. 1, 2. М., 1978. 392 с., 432 с. 2. Fekete M., Polya G. Veber ein Problem von Laguerre // Rendiconti Cirs. Math. Palermo. 1912. 34. P. 89—120. 3. Schoenberg I. J. On the zeros of generating functions of multiply positive sequences and functions // Annals. of Math. 1955. 62, N 3. P. 447—471.

Поступила в редколлегию 21.10.87

УДК 517.9:532.2

И. Д. ЧУЕШОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПРЕДЕЛЕ

Динамика упругой пологой оболочки, заземленной по контуру в сверхзвуковом потоке газа, описывается следующей системой уравнений [1]:

$$L_t^p u + \Delta^2 u - [u + f, v + \theta] + \rho \frac{\partial u}{\partial x_1} = p(x), \quad (1)$$

$$\Delta^2 v + [u + 2f, u] = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = v \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = u_1(x). \quad (4)$$

Здесь Ω — ограниченная область в R^2 с кусочногладкой границей,

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad L_t^p u = (1 - \alpha\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1\sqrt{\rho} - \varepsilon_2\Delta)\dot{u}, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

$$[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Предполагается, что $p(x) \in L^2(\Omega)$, $f \in (H^3 \cap H_0^2)(\Omega)$, $\theta \in H^4$, $u_0 \in H_0^2$, $u_1 \in H_0^1(H^m)$ — соболевское пространство порядка m). Параметр $\rho \geq 0$ определяется скоростью, набегающего вдоль оси x_1 потока. Случай $\alpha, \varepsilon_2 > 0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки [2]. Как обычно [2—4], исключим функцию v из системы (1) — (4). При сделанных предположениях задача (1) — (4) однозначно разрешима [2] и можно определить [3, 4] сильно непрерывную нелинейную полугруппу S_t в пространстве $H = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ так, что $S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$, $u(t)$ — решение системы (1) — (4) с начальными

условиями $y_0 = (u_0; u_1)$. Эта полугруппа обладает компактным максимальным аттрактором конечной хаусдорфовой размерности [3]. Если $\rho = 0$, то аттрактор имеет регулярную структуру [4]. Свойство регулярности сохраняется и при достаточно малых $\rho > 0$. Доказать это можно, используя технику, развитую в [5].

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений задачи (1) — (4) при $\rho \rightarrow \infty$, т. е. в гиперзвуковом пределе. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Представим решение $u(t, x)$ задачи (1) — (4) в виде $u(t, x) = w_\rho(\sqrt{\rho}t, x)$. Тогда для любого $T > 0$*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^T (\|w_\rho(t) - w(t)\|_{H^1}^2 + \|\dot{w}_\rho(t) - \dot{w}(t)\|_{H^1}^2) dt = 0, \quad (5)$$

где $w(t)$ — решение задачи

$$(1 - \alpha\Delta)\ddot{w} + \varepsilon_1\dot{w} + \frac{\partial}{\partial x_1} w = 0, \quad (6)$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w|_{t=0} = u_0, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, динамика оболочки при $\rho \rightarrow +\infty$ описывается линейным эволюционным уравнением (6) с граничным и начальными условиями (7). В пространстве $H_0^1(\Omega)$ задача (6), (7) может быть представлена в виде $\ddot{u} + \varepsilon_1 G \dot{u} + Ku = 0, u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = 0$, где G и K — вполне непрерывные операторы в $H_0^1(\Omega)$, $G > 0, K^* = -K$. Поэтому эта задача однозначно разрешима и задает в пространстве $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ равномерно непрерывную линейную эволюционную полугруппу. При этом характер колебаний оболочки в пределе $\rho \rightarrow \infty$ определяется спектром квадратичного пучка:

$$\lambda^2(1 - \alpha\Delta)v + \lambda\varepsilon_1 v + \frac{\partial}{\partial x_1} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Этот спектр симметричен относительно вещественной оси, дискретен, имеет единственную точку сгущения, равную нулю, и лежит в области $\{0\} \cup \{\lambda: \operatorname{Re} \lambda^2 \cdot \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. В том случае, когда $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, собственные числа пучка могут быть найдены из уравнений

$$\frac{1}{\lambda^4} + 4\varepsilon_1\alpha \frac{1}{\lambda} + 4\alpha + 4\alpha^2\pi^2 \left(\left(\frac{m}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_2} \right)^2 \right) = 0,$$

где $m, n = 1, 2, \dots$. Асимптотический анализ при $m, n \rightarrow \infty$ показывает, что имеется бесконечное число собственных чисел как с положительной, так и с отрицательной вещественной частью. Следовательно, в пределе $\rho \rightarrow +\infty$ происходит возбуждение бесконечного числа мод. В то же время при каждом фиксированном $\rho \geq 0$ асимптотическая динамика оболочки в существенном конечна [3].

Доказательство теоремы. Подставим $u(t) = w_\rho(\sqrt{\rho}t)$ в (1) — (4). Тогда энергетическое равенство для полученной системы имеет вид [3, 4]:

$$E_\rho(w_\rho(t), \dot{w}_\rho(t)) - E_\rho(u_0, \frac{u_1}{\sqrt{\rho}}) = - \int_0^t \left(\varepsilon_1 \dot{w}_\rho + \frac{\partial w_\rho}{\partial x_1}, \dot{w}_\rho \right) d\tau + \\ + \int_0^t \left[-\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\rho}} \|\dot{w}_\rho\|^2 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\rho}} \|\nabla \dot{w}_\rho\|^2 + \frac{1}{\rho} (p, \dot{w}_\rho) \right] d\tau, \quad (8)$$

где

$$E_\rho(w_0, w_1) = E_\rho^0(w_0, w_1) - \frac{1}{2\rho} ([w_0 + 2f, w_0], \theta),$$

$$E_\rho^0(w_0, w_1) = \frac{1}{2} \left(\|w_1\|^2 + \alpha \|\nabla w_1\|^2 + \frac{1}{\rho} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2\rho} \|\Delta w_0\|^2 \right).$$

$w_0 \in H_0^2(\Omega)$ определяется из условия $\Delta^2 \tilde{w}_0 + [w_0 + 2f, w_0] = 0$, $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Из (8) с помощью леммы 3.2 [3] получаем при $\rho \geq \rho_0 > 0$, $t \in [0, T]$ оценку

$$E_\rho^0(w_\rho(t), \dot{w}_\rho(t)) \leq \frac{c_1}{\rho} + c_2 \int_0^t (\|\dot{w}_\rho\|^2 + \|\nabla w_\rho\|^2) d\tau.$$

Отсюда благодаря неравенству $\|\nabla w_\rho(\tau)\| \leq \|\nabla u_0\| + \int_0^t \|\nabla \dot{w}_\rho(s)\| ds$,

имеем, что

$$\|\nabla w_\rho(t)\|^2 + \|\nabla \dot{w}_\rho(t)\|^2 \leq C_T, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} (\|\Delta w_\rho(t)\|^2 + \|\Delta \tilde{w}_\rho(t)\|^2) \leq C_T, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Из (9), (10) вытекает, во-первых, $\times$ — слабая компактность семейства $\{w_\rho; \dot{w}_\rho\}$, $\rho \geq \rho_0$ в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, а, во-вторых, $\times$ — слабая сходимости величины $(\sqrt{\rho})^{-1} w_\rho$ к нулю при $\rho \rightarrow +\infty$ в пространстве $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$. Это обстоятельство, а также свойства скобки $[u, v]$ (см. лемму 1.1 [3]) позволяет в системе уравнений для $w_\rho(t, x)$ в смысле обобщенных функций совершить предельный переход $\rho \rightarrow \infty$ и показать, что каждая предельная точка семейства $\{(\dot{w}_\rho; \dot{w}_\rho)\}$ имеет вид $(w(t); \dot{w}(t))$, где $w(t)$ — решение задачи (6), (7). Ввиду однозначной разрешимости этой задачи предельная точка единственна.

Докажем теперь соотношение (5). С помощью теоремы Ю. А. Дубинского о компактности [6] получаем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x_1} w_\rho, \dot{w}_\rho \right) d\tau = \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x_1} w, \dot{w} \right) d\tau.$$

А лемма 1.1 [3] и оценки (9), (10) позволяет доказать, что $|([w_\rho, w_\rho + f], \theta)| \leq C_T$. Поэтому, переходя в (8) к пределу $\rho \rightarrow \infty$ и пользуясь свойствами слабой сходимости, получаем, что

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow +\infty} E_\rho^0(w_\rho, \dot{w}_\rho) \leq \int_0^t \left(-\varepsilon_1 \dot{w} - \frac{\partial}{\partial x_1} w, \dot{w} \right) d\tau.$$

Использование энергетического равенства для системы (6), (7) приводит к неравенству

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^T E_\rho^0(w_\rho, \dot{w}_\rho) dt \leq \int_0^T (\|\dot{w}\|^2 + \alpha \|\nabla \dot{w}\|^2) dt. \quad (11)$$

Поэтому, ввиду слабой сходимости $\dot{w}_\rho \rightarrow \dot{w}$, получаем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^T (\|\dot{w}_\rho\|^2 + \alpha \|\nabla \dot{w}_\rho\|^2) dt = \int_0^T (\|\dot{w}\|^2 + \alpha \|\nabla \dot{w}\|^2) dt. \quad (12)$$

Отсюда вытекает (5).

Ометим также, что из (5), (11), (12) следует соотношение:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_0^T (\|\Delta w_\rho(t)\|^2 + \|\Delta \tilde{w}_\rho(t)\|^2) dt = 0. \quad (13)$$

Это соотношение и теорема 1 позволяют доказать приведенное ниже утверждение об асимптотической линеаризации задачи (1) — (4).

Теорема 2. Для каждого $T > 0$ имеет место соотношение

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|w_\rho(t) - \varphi_\rho(t)\|_{H^1} + \|\dot{w}_\rho(t) - \dot{\varphi}_\rho(t)\|_{H^1}) \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где φ_ρ — решение следующей задачи:

$$(1 - \alpha \Delta) \ddot{\varphi}_\rho + \varepsilon_1 \dot{\varphi}_\rho + \frac{1}{\rho} \Delta^2 \varphi_\rho + \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\rho = \frac{1}{\rho} \rho, \\ \varphi_\rho|_{\partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial n} \varphi_\rho|_{\partial \Omega} = 0, \quad \varphi_\rho|_{t=0} = u_0, \quad \dot{\varphi}_\rho|_{t=0} = \frac{u_1}{\sqrt{\rho}}.$$

Доказательство. Очевидно, что разность $\psi_\rho = w_\rho - \varphi_\rho$ удовлетворяет уравнению

$$(1 - \alpha \Delta) \ddot{\psi}_\rho + \varepsilon_1 \dot{\psi}_\rho + \frac{1}{\rho} \Delta^2 \psi_\rho + \frac{\partial}{\partial x_1} \psi_\rho = F(t, w_\rho, \rho), \quad (15)$$

где $F(t, w_\rho, \rho) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\varepsilon_0 - \varepsilon_2 \Delta) \dot{w}_\rho + \frac{1}{\rho} [w_\rho + f, \tilde{w}_\rho + \theta]$.

Свойства скобки $[u, v]$ позволяют с помощью (9), (10) доказать, что

$$\|[w_\rho + f, \tilde{w}_\rho + \theta]\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_T (1 + \sqrt{\rho} \|\Delta w_\rho\|), \quad t \in [0, T].$$

Отсюда и из (9) вытекает, что

$$\int_0^T \|F(t, w_p, p)\|_{H^{-1}}^2 dt \leq \frac{C}{\rho} T \left(1 + \int_0^T \|\Delta w_p(t)\|^2 dt\right).$$

Использование энергетического равенства для уравнения (15) и свойства (13) дает возможность получить (14).

Список литературы. 1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961. 339 с. 2. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978. 184 с. 3. Чуешов И. Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек//Мат. сб. 1987. 133, № 4. С. 419—428. 4. Чуешов И. Д. Структура максимального аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана//Теория функций, функций. анализ и их прил. 1987. Вып. 47. С. 99—104. 5. Бабин А. В., Вишик М. И. Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения//Успехи мат. наук. 1986. 41, вып. 4. С. 3—54. 6. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях//Мат. сб. 1965. 67, № 4. С. 609—642.

Поступила в редколлегию 01.10.87

УДК 517.9

В. С. ЗАЯЧКОВСКИЙ, А. А. ПАНКОВ

СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

В конечномерном комплексном пространстве E рассмотрим полиномиальный операторный пучок $A(z) = z^n - 1_E + z^{n-1}A_1 + \dots + A_n$. Факторизацией пучка $A(z)$ называется его представление в виде $A(z) = B(z)C(z)$. Пространство P_n пучков степени n с единичным старшим коэффициентом очевидным образом отождествляется с пространством $L(E)^n$ и, тем самым, наделяется естественной метрикой и комплексной структурой.

Введем отображение $m: P_k \times P_l \rightarrow P_n$, $n = k + l$, действующее по формуле $(B(z), C(z)) \mapsto B(z)C(z)$. Очевидно, что слой $m^{-1}(A)$, $A \in P_n$, состоит из всевозможных факторизаций пучка $A(z)$, у которых степень правого делителя равна l .

Представляет интерес исследование устойчивых в том или ином смысле факторизаций. Наиболее сильное понятие устойчивости изучалось в работах [1, 2]: факторизация называется устойчивой, если отображение m биголоморфно в некоторой окрестности точки (B, C) (замена условия биголоморфности условием липшицевой гомеоморфности [3] или даже просто гомеоморфности в силу известных результатов (см. [4], с. 290) не дает ничего нового).

Более слабое понятие устойчивости рассматривалось в [5, 6]. Факторизация $A = BC$ называется слабо устойчивой, если для любого пучка A , близкого к A , имеется (не обязательно единственная) факторизация $\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}$, где пучки $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ близки к B и C соответственно. Это равносильно открытости отображения m в точке (B, C) (определение отображения, открытого в точке, см. в [7]).

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения об операторных пучках и их факторизациях. Каждому операторному пучку каноническим образом можно сопоставить линейный оператор

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1_E & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1_E \\ -A_n & \dots & -A_1 & \end{bmatrix},$$

действующий в пространстве E^n . Этот оператор наследует все спектральные свойства пучка $A(z)$. Каждому левому делителю $C(z)$ (а, следовательно, и факторизации) пучка $A(z)$ ставится в соответствие инвариантное подпространство $\varphi(C)$ оператора F_A , которое задается явно через коэффициенты пучка $C(z)$ [8]. При этом спектральные свойства пучка $C(z)$ такие же, как и у оператора $F_A|_{\varphi(C)}$. Множество всех инвариантных подпространств оператора F обозначим через $\text{Lat } F$; оно является проективным алгебраическим многообразием.

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

- а) факторизация $A(z) = B(z)C(z)$ слабо устойчива;
- б) (B, C) — изолированная точка слоя $m^{-1}(A)$;
- в) подпространство $\varphi(C)$ является изолированной точкой в $\text{Lat } F_A$;

г) каждому общему собственному значению пучков $B(z)$ и $C(z)$ отвечает единственный собственный вектор пучка $A(z)$.

Доказательство. Импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из фундаментального принципа открытости Зарисского [7].

Отображение Лангера задает изоморфизм φ аффинного алгебраического многообразия $m^{-1}(A)$ в $\text{Lat } F_A$. Отсюда вытекает эквивалентность б) и в).

Простые доказательства импликаций а) $\Rightarrow$ г) и в) $\Rightarrow$ г) см. в [5].

Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ в). Пусть $L = \varphi(C)$, а $\tilde{L}$ — инвариантное подпространство F_A , близкое к L . Тогда характеристические многочлены $\chi(F_A|_L)$ и $\chi(F_A|\tilde{L})$ совпадают. Действительно, характеристический многочлен непрерывно зависит от оператора, а $\chi(F_A|_L)$ необходимо делит $\chi(F_A)$. Отсюда и из условия г) следует, что спектральные типы операторов $F_A|_L$ и $F_A|\tilde{L}$ совпадают. Действительно, перестройка спектрального типа может произойти только за счет распада жордановых клеток, что запрещено условием г).

Таким образом, инвариантное подпространство $L = \varphi(C)$ вместе со своей окрестностью в $\text{Lat } F_A$ целиком содержится в множестве $V \subset \text{Lat } F_A$, состоящем из интервальных подпространств фиксированного спектрального типа. Этот спектральный тип однозначно определяется условием г): если $v = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ — частные спектральные кратности собственного значения z_0 пучка $A(z)$, то либо точка z_0 не является собственным значением пучка $C(z)$ (тогда ее частные спектральные кратности $\lambda = (0, 0, \dots, 0)$), либо z_0 — собственное значение пучка $C(z)$, частные спектральные кратности которого равны $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_p)$, если $n_2 > 0$, или же $\lambda = (n_0, 0, \dots, 0)$, если $v = (n_1, 0,$

..., 0), $n_0 \leq n_1$. Множество инвариантных подпространств фиксированного спектрального типа является гладким подмногообразием в $\text{Lat } F$ и для его размерности имеется явная формула [9]. В данном случае вычисления по этой формуле показывают, что $\dim v = 0$.

Применим теорему 1 к задаче продолжения факторизации по параметру. Пусть задан пучок $A_\varepsilon(z)$, коэффициенты которого голоморфно зависят от локального параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}$ и при $\varepsilon = 0$ имеет место факторизация $A_0(z) = B(z)C(z)$. Если эта факторизация устойчива, то существует факторизация $A_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z)C_\varepsilon(z)$, где $B_\varepsilon(z)$, $C_\varepsilon(z)$ голоморфно зависят от ε и $B_0(z) = B(z)$, $C_0(z) = C(z)$. В работе [1] показано, что устойчивость эквивалентна спектральности факторизации.

В общем случае представляют интерес продолжения факторизаций, голоморфные по дробным степеням ε .

Теорема 2. Пусть факторизация $A(z) = B(z)C(z)$ слабо устойчива. Тогда для любого голоморфного семейства $A_\varepsilon(z)$, $A_0(z) = A(z)$, существует факторизация $A_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z)C_\varepsilon(z)$, где B_ε и C_ε разлагаются в сходящиеся ряды вида

$$B_\varepsilon(z) = B(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/r} B_i(z),$$

$$C_\varepsilon(z) = C(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/r} C_i(z).$$

Доказательство. Точка $(B(z), C(z)) \in \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_l$ является в силу предыдущей теоремы изолированной точкой в $m^{-1}(A)$. По теореме Осгуда (см. [4]) локально вблизи точки A существует многозначное, обратное к m , отображение $g: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_l$, которое строится следующим образом. Вблизи пары (B, C) можно ввести координаты $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{np})$, $p = \dim E$, так что $\xi_1 = g_1(A)$ находится из уравнения

$$\xi_1^r + \alpha_1(A) \xi_1^{r-1} + \dots + \alpha_r(A) = 0,$$

а остальные функции $\xi_i = g_i(A)$, $i \in [2, np]$, голоморфно и однозначно выражаются через $g_1(A)$ и A . Теперь делители $B_\varepsilon(z)$ и $C_\varepsilon(z)$ строятся по формуле $(B_\varepsilon, C_\varepsilon) = g(A_\varepsilon)$.

Список литературы: 1. Заячковский В. С., Панков А. А. Об устойчивости факторизаций полиномиальных операторов пучков // Функцион. анализ и его прил. 1983. 17, вып. 2. С. 73—74. 2. Gohberg J. et al. Perturbation theory for divisors of operator polynomials / J. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman // Math. Anal. 1979. 10, № 6. P. 1161—1183. 3. Ran A. C. M., Rodman L. Stability of neutral invariant subspaces in indefinite inner products and stable symmetric factorizations // Integral Equations and Operator Theory. 1983. 6, № 4. P. 536—571. 4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 2. М., 1976. 400 с. 5. Bart H. et al. Stable factorizations of monic matrix polynomials and stable invariant subspaces / H. Bart, J. Gohberg, M. A. Kaashoek // Integral Equations and Operator Theory. 1978. 1, № 4. P. 496—517. 6. Lancaster P. Generalized Hermitian matrices: new frontier for numerical analysts? // Lect. Notes math. 1982. 912. P. 179—189. 7. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979. 256 с. 8. Langer H. Factorization of operator pencils // Acta Sci Math. 1976. 38, f. 1—2. P. 83—96. 9. Shayman M. A. On the variety of invariant subspaces of finite-dimensional linear operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. 274, № 2. P. 721—747.

Поступила в редколлегию 18.09.86

СОДЕРЖАНИЕ

Левин Б. Я. Мажоранты в классах субгармонических функций	3
Чистяков Г. П. К вопросу о необходимых условиях принадлежности законов распределения классу I_0	18
Борок В. М., Евдокимова С. В. Регулярные граничные задачи в полосе	31
Ковалишина И. В. Кратная граничная интерполяционная задача для сжимающих матриц-функций в единичном круге	38
Бузиновский Б. П., Мацкул В. Н., Светлой А. П. К решению обобщенной краевой задачи Римана с разрывными коэффициентами	55
Аров Д. З. Гамма-производящие матрицы, j -внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции 1	61
Бирбраир Л. Б. Замечания о строении пространства регулярных алгебраических однородных отображений	67
Дубовой В. К., Зиненко С. Н. О связи между элементарным кратным множителем неполного ранга и вырожденной задачей Шура	72
Орлов С. А. Описание функций Грина канонических дифференциальных систем. 1	78
Русаковский А. М. О продолжении с оценками с аналитических множеств коразмерности 1	88
Левин Г. М. К теории итераций полиномиальных семейств на комплексной плоскости	94
Еременко А. Э. Новое доказательство теоремы Дрейсина о мероморфных функциях конечного порядка с максимальной суммой дефектов. 1	107
Голодец В. Я., Сохет А. М. Эргодические действия абелевых групп с дискретным спектром и аппроксимативная транзитивность	117
Кудрик Т. С. Краевая задача для нестандартного разностного оператора	122
Бронза С. Д., Таирова В. Г. Существование алгебраических функций заданной разветвленности, удовлетворяющих одному дополнительному условию	126
Каткова О. М. Об одном способе построения частотных последовательностей Поляна	129
Чуешов И. Д. Асимптотика решений задачи об аэроупругих колебаниях оболочки в гиперзвуковом пределе	137
Заячковский В. С., Панков А. А. Слабая устойчивость факторизаций операторных пучков	141

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вы пус к 51

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Е. В. Сергина*

ИБ № 12555

Сдано в набор 20.10.88. Подписано в печать 16.02.89. БЦ 15615. Формат 60 × 90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 9. Усл. кр.-отт. 9,25. Уч.-изд. л. 10. Тираж 700 экз. Изд. № 1710. Зак. 8-936. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Выща школа», 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе, Харьковской городской типографии № 16. 310003 Харьков ул. Университетская, 16. Зак. 442.

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1989. Вып. 51, 1—144.

