

ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОТОКОВ
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

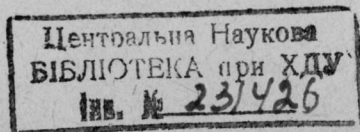
В. Л. Герман, А. А. Лазебный

В работе рассматривается возможность применения оптического метода изучения напряжений к потокам вязкой жидкости. При движении вязкой жидкости возникают напряжения, пропорциональные компонентам тензора скоростей деформации \dot{V} . При $\dot{V} \neq \dot{O}$ (т. е. исключая случай неподвижной или движущейся как целое жидкости) поток вязкой жидкости под действием напряжений становится оптически неоднородным и анизотропным, поэтому принципиально возможно исследование потока вязкой жидкости оптическим методом аналогично тому, как это осуществляется в фотоупругости и фотопластичности [1].

Так как при прохождении электромагнитной волны через поток гидродинамическая картина не искажается (при обычных экспериментальных измерениях гидродинамических характеристик в поток жидкости вносятся возмущения, которые нарушают гидродинамическую картину), то регистрация такой анизотропии является чувствительным методом наблюдения и может быть использована, например, для изучения гидродинамической устойчивости. Соответствующие экспериментальные измерения были произведены Вейландом [2] и показали, что зависимость оптических характеристик потока от гидродинамических параметров является характерной для того или иного режима движения жидкости. Так, для ламинарного режима движения оптические характеристики являются гладкими функциями гидродинамических параметров, тогда как для режима, который наступил после потери устойчивости, на соответствующих экспериментальных кривых появляются изломы, которые свидетельствуют о сравнительно быстром изменении оптических величин в окрестностях соответствующих значений гидродинамических параметров.

В данной работе изучается характер поляризации электромагнитных волн (видимый спектр), распространяющихся в потоке жидкости при ламинарном режиме движения и при режиме, который наступил после потери устойчивости, т. е. исследуются решения уравнений Максвелла при заданной зависимости $\varepsilon(V)$.

Рассмотрение оптических характеристик как функций гидродинамических параметров позволяет детально проследить за изменением гидродинамической картины и сравнить полученные результаты с экспериментом.



1) **Общий вид зависимости \check{E} от \check{V} . Условия совместности для \check{E}**

Оптическая анизотропия в потоке жидкости характеризуется зависимостью тензора диэлектрической проницаемости \check{E} от тензора вязких напряжений \check{P} , или, так как \check{P} линейно выражается через тензор скоростей деформации \check{V} , то \check{E} можно рассматривать как функцию \check{V} . Предположим, что \check{E} — аналитическая функция \check{V} , не зависящая явно от пространственных координат и времени. Допустим также, что в потоке жидкости нет исключительных направлений (сама жидкость оптически изотропна). Разложим \check{E} в ряд по \check{V} :

$$\check{E}(\check{V}) = (\varepsilon_1 + a_0)I + a_1\check{V} + a_2\check{V}^2 + \dots + a_n\check{V}^n + \dots \quad (1.1)$$

Коэффициенты a_k в разложении (1.1) являются скалярами в силу предположения об отсутствии исключительных направлений в потоке. Используя теорему Гамильтона-Кэли и теорему Гильберта об инвариантах тензоров конечных рангов, получим окончательное выражение для \check{E} как функции \check{V} .

$$E(\check{V}) = [\varepsilon_1 + \alpha(I_1, I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_1, I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_1, I_2, I_3)\check{V}^2, \quad (1.2)$$

где $\alpha(I_1, I_2, I_3)$, $\beta(I_1, I_2, I_3)$, $\gamma(I_1, I_2, I_3)$ — аналитические функции главных инвариантов тензора \check{V} , а $\varepsilon_1 I$ (I — единичный тензор) характеризует диэлектрические свойства неподвижной жидкости, т. е.

$$\lim_{\check{V} \rightarrow \check{0}} \check{E}(\check{V}) = \varepsilon_1 \cdot I,$$

где $\check{0}$ — нулевой тензор.

Для ламинарных потоков вязкой жидкости, которые характеризуются небольшими градиентами скоростей, из (1, 2) имеем, ограничившись членами первого порядка по V_{lm} :

$$\check{E}(\check{V}) = \varepsilon_1 \cdot I + \lambda_1 \check{V}, \quad (1.3)$$

где λ_1 — так называемая динамооптическая постоянная, которая определяется экспериментально [3].

Отметим, что член $\varepsilon_1 I$ в (1, 2) и (1, 3) значительно превышает по величине остальные члены правых частей выражений (1, 2), (1, 3), так как изменение диэлектрической проницаемости под влиянием вязких напряжений обычно мало.

Вернемся к соотношению (1, 2), причем в качестве определяющих инвариантов возьмем базисные инварианты I_1, I_2, I_3 . Тогда

$$\check{E} = [\varepsilon_1 + \alpha(I_1, I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_1, I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_1, I_2, I_3)\check{V}^2. \quad (1.6)$$

Рассмотрим случай несжимаемой жидкости, тогда $I_1 = \text{div } \check{V} = 0$ и (1,6) имеет вид

$$\check{E} = [\varepsilon_1 + \alpha(I_2, I_3)] \cdot I + \beta(I_2, I_3)\check{V} + \gamma(I_2, I_3)\check{V}^2. \quad (1.7)$$

Введем следующие новые базисные инварианты:

$$E_1 = \varepsilon_{ik} \cdot \delta_{ik}, \quad E_2 = \varepsilon_{ik} \cdot V_{ik}, \quad E_3 = \varepsilon_I V_{lm} V_{mi}; \quad (1.8)$$

\mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 являются смешанными инвариантами тензоров \check{E} и \check{V} . Выразим α , β , γ через I_2 , I_3 , \mathcal{E}_i . Для этого свернем (1.7) последовательно с I , \check{V} , \check{V}^2 . Тогда получим

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = 3(\varepsilon_1 + \alpha) + I_2 \gamma \\ \mathcal{E}_2 = I_2 \beta + I_3 \gamma \\ \mathcal{E}_3 = I_2(\varepsilon_1 + \alpha) + I_3 \beta + \frac{1}{2} I_2^2 \gamma. \end{cases} \quad (1.8)$$

Отсюда находим α , β , γ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_1 + \alpha \\ \alpha_i &= \Phi_{ik} \mathcal{E}_k \quad \alpha_2 = \beta \\ & \quad \alpha_3 = \gamma, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где тензор $\check{\Phi}$ определяется следующим образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{I_2^3 - 2I_3^3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{2I_2 I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-2I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} \\ \frac{2I_2 I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-6I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} \\ \frac{-2I_2^2}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{-6I_3}{I_2^3 - 6I_3^2} & \frac{6I_2}{I_2^3 - 6I_3^2} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.7), получаем

$$\check{E}(V) = \Phi_{1i} \mathcal{E}_i \cdot I + \Phi_{2i} \mathcal{E}_i \cdot \check{V} + \Phi_{3i} \mathcal{E}_i \check{V}^2. \quad (1.11)$$

Следовательно, связь между $\check{\varepsilon}$ и \check{V} в общем случае становится полностью определенной, если заданы функции

$$\mathcal{E}_1 = f_1(I_2, I_3), \quad \mathcal{E}_2 = f_2(I_2, I_3), \quad \mathcal{E}_3 = f_3(I_2, I_3). \quad (1.12)$$

Эти функциональные зависимости естественно назвать инвариантными уравнениями состояния [4].

При рассмотрении соответствующей электродинамической задачи должны быть известны ε_{ik} как функции V_{lm} . Функции ε_{ik} определяются из эксперимента, причем часто они определяются из независимых измерений. Таким образом, при полном исследовании ε_{ik} задаются в виде шести независимых функций. Эти функции однако не могут быть заданы произвольно, что видно из соотношения (1,2).

Так как $V_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_m} + \frac{\partial V_m}{\partial x_l} \right)$, т. е. величины V_{lm} выражаются через три независимые компоненты скорости жидкости, то шесть компонент V_{lm} а, значит, и ε_{ik} не могут быть независимыми функциями координат. Возникает вопрос об условиях совместности для ε_{ik} или для V_{lm} аналогичных условиям совместности для компонент тензора деформации в механике упругой среды. Условия совместности для \check{V} можно получить из соответствующих условий совместности для тензора деформации $\check{U} = \frac{1}{2} (\check{G}_1 - I)$, которые связаны с условиями для фундаментального тензора $\check{G}_1 = (g_{ik})$, определяющего метрику в евкли-

довом пространстве. и имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} R_{ikl}^m &= 0, \\ (R_{iklm} &= 0), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где R_{ikl}^m — тензор Римана-Кристоффеля.

В терминах \check{U} равенство (1,13) приводит к условиям совместности для U_{jk} . Из этих условий можно получить уравнения совместности для \check{V}_{ik} (см. [5]):

$$\frac{\partial^2 V_{km}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 V_{li}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 V_{ki}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 V_{lm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (1.14)$$

Получим теперь условия совместности для E_{ik} . Предположим, что в соотношении (1,2) якобиан $\frac{D(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})}{D(V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{22}, V_{23}, V_{33})}$ отличен от нуля. Тогда \check{V} можно, в свою очередь, рассматривать как функцию ε и представить в форме, аналогичной (1,2):

$$\check{V} = g_0(J_1, J_2, J_3) \cdot J + g_1(J_1, J_2, J_3) \check{E} + g_2(J_1, J_2, J_3) \check{E}^2, \quad (1.15)$$

где J_1, J_2, J_3 — главные инварианты \check{E} .

Подставляя (1,15) в (1,14), получаем нелинейные уравнения совместности для компонент ε_{ik} :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_i} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{km} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{km} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ka} \varepsilon_{am}] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{li} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{li} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{la} \varepsilon_{ai}] - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{ki} + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ki} + \\ & + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{ka} \varepsilon_{ai}) - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} [g_0(J_1, J_2, J_3) \delta_{lm} + \\ & + g_1(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{lm} + g_2(J_1, J_2, J_3) \varepsilon_{la} \varepsilon_{am}] = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При малых градиентах скорости можно использовать соотношение (1,3), тогда условия совместности имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (1.17)$$

2) Решение электродинамической задачи для ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости между коаксиальными цилиндрами

Для ламинарных потоков жидкости можно ограничиться соотношением (1,3) и тогда система уравнений Максвелла запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{E} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{D} = \overset{\vee}{E} \cdot \vec{E}$$

$$\overset{\vee}{E} = \epsilon_1 \cdot I + \lambda_1 \cdot \overset{\vee}{V}$$

где $\overset{\vee}{E} \cdot \vec{E}$ означает диадное произведение: $(\overset{\vee}{E} \cdot \vec{E})_i = \epsilon_{ik} E_k$.

Система уравнений (2, 1) является исходной для дальнейшего рассмотрения задачи. Отметим, что компоненты тензора ϵ в общем случае являются функциями пространственных координат и времени, поэтому нельзя получить решение системы (2, 1) в общем виде при соответствующих начальных и граничных условиях, тем более, что нахождение $\overset{\vee}{V}$ связано с рассмотрением нелинейных уравнений гидродинамики, которые в общем случае не решены. Однако, физическая постановка задачи позволяет в некоторых случаях провести электродинамическое исследование до конца, используя упрощения, которые связаны с физической природой рассматриваемой задачи.

Экспериментальное исследование потоков жидкости производится при помощи очень узких пучков поляризованного света, а $\overset{\vee}{V}$ и, следовательно, $\overset{\vee}{E}$ являются медленно меняющимися функциями на расстояниях порядка длины волны. Это дает возможность предположить, что в окрестности данной точки плоского поля скоростей деформации имеется однородное распределение скоростей деформации, что позволяет рассматривать зависимость $\overset{\vee}{E}$ от соответствующих координат как параметрическую и свести электродинамическую задачу к задаче о распространении плоских волн в потоке жидкости, который можно рассматривать как среду, неограниченную в плоскости, перпендикулярной направлению распространения электромагнитной волны. Здесь учтено, что, время, от которого явно зависят компоненты $\overset{\vee}{E}$ через $\overset{\vee}{V}$, при распространении электромагнитной волны в потоке жидкости можно считать фиксированным, так как характерное время изменения гидродинамических величин значительно больше характерного времени изменения электромагнитного поля при прохождении через поток. Поэтому оптическую картину можно рассматривать как статическую, т. е. не учитывать изменений $\overset{\vee}{V}$, происходящих за время прохождения электромагнитной волны через поток жидкости.

Рассмотрим теперь установившееся плоскопараллельное круговое движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2 . Пусть вращается только внутренний цилиндр, угловую скорость его вращения обозначим через Ω . Тогда единственной отличной от нуля физической * составляющей тензора $\overset{\vee}{V}$ будет $V_{r\theta}$:

$$V_{r\theta} = -\Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Если зазор между цилиндрами мал, т. е. $d = R_2 - R_1 \ll \frac{R_1 + R_2}{2}$, то приближенно компоненту $V_{r\theta}$ можно положить равной

$$V_{r\theta} = -\Omega \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \text{const.} \quad (2.2)$$

* Физические составляющие вектора или тензора в ортогональной криволинейной системе координат — это соответствующие составляющие по осям декартовой системы координат, совпадающим с касательными к координатным кривым в рассматриваемой точке.

Тогда выражение (1,3) для \vec{E} будет следующим:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{\lambda \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} & 0 \\ -\frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на поток жидкости. Пусть направление распространения совпадает с осью цилиндров z . В этом случае E и H можно считать функциями только z , t и система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0, \\ E_z = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Отвлекаясь от рассматриваемой задачи, найдем скорость распространения электромагнитного возмущения, которое описывается уравнениями (2, 4). Для этого введем поверхность $\Phi(\vec{r}, t) = 0$, которая отделяет в момент времени t область, в которой поле отлично от нуля, от области, в которой поля нет (поверхность может разделять области с разными режимами). Такая поверхность называется фронтом электромагнитной волны. Существенное свойство этой поверхности состоит в том, что решение уравнений (2, 4) не может быть непрерывно продолжено за поверхность разрыва.

Рассмотрим сильный разрыв, т. е. разрыв самой функции

$$\vec{E} = \overset{I}{\vec{E}} \cdot U(\Phi) + \overset{II}{\vec{E}} U(-\Phi), \quad (2.5)$$

где $U(\xi)$ — единичная функция, а $\overset{I}{\vec{E}}$, $\overset{II}{\vec{E}}$ характеризуют поля справа и слева от поверхности разрыва, причем одно из $\overset{I}{\vec{E}}$, $\overset{II}{\vec{E}}$ может равняться нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 E_i^I}{\partial z^2} U(\Phi) + \frac{\partial^2 E_i^{II}}{\partial z^2} U(-\Phi) + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial z} \right\rangle \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \langle E_i \rangle}{\partial z} \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_i \rangle \delta'(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \langle E_i \rangle \delta(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_i^I}{\partial t^2} U(\Phi) + \frac{\partial^2 E_i^{II}}{\partial t^2} U(-\Phi) + \left\langle \frac{\partial E_i}{\partial t} \right\rangle \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \langle E_i \rangle}{\partial t} \delta(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_i \rangle \delta'(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \langle E_i \rangle \delta(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают скачок.

Подставляя найденные производные в уравнение (2,4), имеем:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right] U(\Phi) + \left[\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right] U(-\Phi) + \left[\langle \frac{\partial E_r}{\partial z} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\langle \frac{\partial E_0}{\partial t} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right] \delta(\Phi) + \\ & + \left[\langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \delta'(\Phi) = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} \right] U(\Phi) + \\ & + \left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} \right] U(-\Phi) + \\ & + \left[\langle \frac{\partial E_0}{\partial z} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\langle \frac{\partial E_0}{\partial t} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_0 \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_0 \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right] \delta(\Phi) + \\ & + \left[\langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \langle E_0 \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \Lambda \langle E_r \rangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \delta'(\Phi) = 0, \end{aligned}$$

где $\Lambda = \frac{\lambda_1 \Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Предполагая, что (2, 7) выполняется тождественно, получим, приравняв нулю коэффициенты при $U(\Phi)$, $U(-\Phi)$, $\delta(\Phi)$, $\delta'(\Phi)$, следующие соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \Lambda \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial E_r}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \langle E_\theta \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0, \\ \left\langle \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \langle E_\theta \rangle}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \langle E_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\left\langle \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \langle E_\theta \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_\theta \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \langle E_r \rangle}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle E_r \rangle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (***)$$

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \cdot \langle E_r \rangle + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \cdot \langle E_\theta \rangle = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \cdot \langle E_\theta \rangle + \frac{1}{c^2} \Lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \cdot \langle E_r \rangle = 0. \end{cases} \quad (***)$$

*) свидетельствует о том, что \vec{E}^I и \vec{E}^{II} удовлетворяют уравнению (2,1) слева и справа от поверхности разрыва; (***) дает уравнение для скачка $\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}^I - \vec{E}^{II}$; а из (***) так как $\langle E_r \rangle^2 + \langle E_\theta \rangle^2 \neq 0$, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 V^2 & \frac{1}{c^2} \Lambda V^2 \\ \frac{1}{c^2} \Lambda V^2 & 1 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1 V^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

где $V^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 / \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2$ — скорость распространения фронта волны вдоль оси z . Из уравнения (2,9) находим:

$$V_1^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 - \Lambda}; \quad V_2^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 + \Lambda}. \quad (2.10)$$

Наличие двух разных скоростей распространения является характерным для анизотропной среды

Отметим, что при $\Lambda \rightarrow 0$ ($\Omega \rightarrow 0$) $\lim V_1^2 = \lim V_2^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1}$, что и следовало ожидать, так как при $\Lambda = 0$ поток становится оптически изотропным.

Вернемся к уравнениям (2, 4). Рассмотрим распространение в потоке плоской монохроматической волны. Тогда система уравнений Максвелла (2, 4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_r}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_r - \Lambda E_\theta] = 0, \\ \frac{d^2 E_\theta}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E_\theta - \Lambda E_r] = 0, \\ E_z = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Введем

$$E^\pm = E_\theta \pm E_r.$$

Тогда уравнения для E^+ и E^- разделяются [6]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E^+}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 - \Lambda] E^+ &= 0, \\ \frac{d^2 E^-}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 + \Lambda] E^- &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение уравнений (2,12) имеет вид

$$\begin{aligned} E^+ &= C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z}, \\ E^- &= C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z}. \end{aligned}$$

По известным E^+ и E^- находим поле в потоке жидкости

$$\begin{aligned} E_\theta(z, t) &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + \right. \\ &\quad \left. + C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right]; \\ E_r(z, t) &= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} - \right. \\ &\quad \left. - C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} - C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right]; \end{aligned} \quad (2.13)$$

В рассматриваемом случае компоненты поля E_θ и E_r представляют собой суперпозицию двух нормальных волн

$$\begin{cases} F_1 = e^{i\omega t} \left[C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} \right], \\ F_2 = 0; \\ F_1 = 0 \\ F_2 = e^{i\omega t} \left[C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \Lambda} z} \right], \end{cases} \quad (2.14)$$

каждая из которых характеризуется определенной фазовой скоростью и поляризацией — в данном случае обе нормальные волны линейно поляризованы [6].

Для нахождения произвольных постоянных C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- необходимо воспользоваться граничными условиями, требующими непрерывности тангенциальных компонент \vec{E} и \vec{H} на границе раздела сред. Отметим, что хотя для гидродинамической части задачи использовано выражение для скорости в случае бесконечных цилиндров, соответствующая электродинамическая задача решается для случая конечных цилиндров. Возможность такого рассмотрения связана с тем, что выражение для скорости, полученное для неограниченных цилиндров, является хорошим приближением и для конечных, но достаточно протяженных цилиндров, т. е. при условии $\frac{R}{l} \ll 1$, где l — длина цилиндра.

Электрическое поле над потоком можно представить в виде

$$\begin{cases} E_\theta = \left[e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z} + R_1^* e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z} \right] e^{i\omega t}, \\ E_r = R_2^* e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_z = 0, \end{cases}$$

где первые члены представляют собой компоненты падающей линейно поляризованной по оси Θ волны, а вторые — компоненты отраженной волны; R_1^* и R_2^* — коэффициенты отражения. Поле прошедшей поток электромагнитной волны будет:

$$\begin{cases} E_r = D_1 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_\theta = D_2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0}z + i\omega t}, \\ E_z = 0, \end{cases}$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты прохождения.

Условия для полей на границах раздела $z=0$ и $z=l$ приводят к линейной системе алгебраических уравнений, решая которую, находим постоянные C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- :

$$\begin{aligned} C_1^+ &= \frac{2V_{\varepsilon_0}}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda} - \frac{2V_{\varepsilon_0}(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda) \left[(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l} \right]}; \\ C_2^+ &= \frac{2V_{\varepsilon_0}(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{-i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_0} - \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1} - \Lambda)^2 e^{i\frac{\omega}{c}V_{\varepsilon_1} - \Lambda l}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$C_1^- = \frac{2V_{\varepsilon_0}^-}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda} - \frac{2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) \left[(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} + \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda l} \right]}$$

$$C_2^- = \frac{2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda) e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda l}}{(V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda l} - (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^- + \Lambda)^2 e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda l}}$$

Поляризация поля в потоке жидкости равна

$$\xi(z) = \frac{E_r}{E_0} =$$

$$\frac{C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} - \Lambda z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} - \Lambda z} - C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda z} - C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda z}}{C_1^+ e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} - \Lambda z} + C_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} - \Lambda z} + C_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda z} + C_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} + \Lambda z}}; \quad (2.16)$$

где C_1^+ , C_2^+ , C_1^- , C_2^- имеют вид (2.15). Как видно из (2.16), поле \vec{E} эллиптически поляризовано в плоскости (r, θ) . Отметим, что поля отраженной и прошедшей волн также эллиптически поляризованы. Зная поляризацию, можно найти направление осей эллипса поляризации. Заметим, при $\Lambda \rightarrow 0$, $\xi(z) \rightarrow 0$, что соответствует поляризации изотропной среды, т. е. при распространении электромагнитной волны в неподвижном потоке ее поляризационные свойства не меняются [7, 9].

Так как окончательные точные формулы для оптических характеристик потока имеют громоздкий вид, ограничимся соответствующими выражениями при малых Λ , т. е. при малых градиентах скорости. В этом случае компоненты поля равны:

$$E_0(z, t) = \left[\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + (\beta e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \delta e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z}) \Lambda \right] e^{i\omega t}$$

$$E_r(z, t) = \left[i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2V_{\varepsilon_1}^-} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda \right] e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-} \left(2V_{\varepsilon_0}^- + \frac{a}{g} \right), \quad \gamma = \frac{a}{g}, \quad \delta = \frac{bc - ad}{cg};$$

$$\beta = \frac{1}{V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-} \left(\frac{V_{\varepsilon_0}^-}{V_{\varepsilon_1}^- (V_{\varepsilon_0}^- + V_{\varepsilon_1}^-)} + \delta + \frac{\gamma}{2V_{\varepsilon_1}^-} \right), \quad (2.17)$$

$$a = 2V_{\varepsilon_0}^- (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^-), \quad b = 2V_{\varepsilon_0}^- \left[\frac{1}{2V_{\varepsilon_1}^-} + i \frac{\omega}{c} \frac{l}{2V_{\varepsilon_1}^-} (V_{\varepsilon_0}^- - V_{\varepsilon_1}^-) \right],$$

$$g = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0} - (\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1})^2 e^{2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l},$$

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} + i\frac{\omega}{c}\frac{l}{2\sqrt{\varepsilon_1}}(\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_1})^2 + \left[i\frac{\omega}{c}\frac{l}{2\sqrt{\varepsilon_1}}(\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1})^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \right] e^{2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l}.$$

Поляризация поля в первом приближении равна

$$\xi(z) = \frac{i\frac{\omega}{c}z \left(\alpha e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} - \gamma e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} \right)}{2\sqrt{\varepsilon_1} \left(\alpha e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} + \gamma e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} \right)} \Lambda. \quad (2.18)$$

Выражение для ориентации осей эллипса поляризации в этом случае следующее:

$$\operatorname{tg} 2\varphi(z) = \frac{2\omega z \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} \right) \cdot \Lambda}{c\sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}z} \right) \right]}. \quad (2.19)$$

Относительный угол поворота осей эллипса поляризации на пути электромагнитной волны от $z = 0$ до $z = l$ равен

$$\psi = \varphi(l) - \varphi(0) = \frac{2\omega l \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \Lambda}{c\sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \right]}.$$

Тогда в первом приближении для угла гашения, который обычно измеряется при экспериментальном изучении потоков, получаем выражение:

$$\chi = \frac{\pi}{4} - \psi = \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega l \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \Lambda}{c\sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \right]}. \quad (2.20)$$

Зависимость χ от угловой скорости вращения внутреннего цилиндра имеет вид

$$\chi = \frac{\pi}{4} - \frac{2\omega l \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \cdot \lambda_1 R_2^2}{c\sqrt{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}l} \right) \right] (R_1^2 - R_2^2)} \Omega, \quad (2.21)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \chi(\Omega) = \frac{\pi}{4}.$$

Как видно из (2.21), зависимость χ от Ω не противоречит экспериментальным данным Вейланда [2] и согласуется с экспериментами Цветкова [3]. Нелинейная зависимость $\chi(\Omega)$ в случае экспериментов Вейланда связана с тем, что в качестве вязкой жидкости использовался коллоидный раствор бентонита, который дает сильное двойное лучепреломление даже при небольших градиентах скорости, поэтому в разложении \vec{E} по степеням Λ необходимо сохранять члены более высоких порядков по Λ .

Отметим, что для идеально гибких макромолекул в потоке между цилиндрами с вращающимся внешним цилиндром Куном [8] на основании молекулярного рассмотрения механизма двойного лучепреломления получена зависимость угла гашения от угловой скорости вращения, аналогичная (2.21). Однако формула (2.21) для $\chi(\Omega)$ получена без каких-либо специальных предположений о свойствах вязкой жидкости, заполняющей зазор между цилиндрами.

3) Вторичные течения для потока жидкости между коаксиальными цилиндрами, изменение \vec{E} и оптической картины при потере устойчивости

Вопрос об устойчивости решений уравнений гидродинамики возникает в связи с тем, что не всякое строгое решение уравнений, удовлетворяющее определенным граничным и начальным условиям, может реально осуществляться в эксперименте. Для того, чтобы в действительности реализовалось движение жидкости, описываемое, например, стационарным решением $\vec{U}(\vec{r})$, необходимо, чтобы малые возмущения, возникающие в каком-либо месте потока или на его границе, затухали с течением времени. Однако, не при любом соотношении между характерными для потока силами инерции и силами вязкости будет происходить такое затухание.

При определенном соотношении между этими силами, которое удобно выражать при помощи безразмерного параметра потока (числа Рейнольдса R или какого-либо другого подходяще выбранного параметра) возникающие возмущения в потоке приводят к беспорядочному, т. е. турбулентному движению жидкости. Так, при малых R ламинарное (упорядоченное) движение жидкости, которое описывается стационарным решением $\vec{U}(\vec{r})$, может действительно наблюдаться экспериментально, однако при возрастании R происходит смена режимов и при R , больших некоторого R^* , которое называется критическим для данного потока, движение жидкости становится турбулентным; такая картина смены режимов наблюдается экспериментально [10, 11].

При исследовании вопроса о возникновении турбулентности следует исходить из того, что поля скорости и давления при любом режиме являются решениями уравнений гидродинамики. Поэтому переход ламинарного режима движения в турбулентный естественно связать с проблемой устойчивости решения, соответствующего ламинарному режиму, отождествляя возникновение турбулентности с потерей устойчивости. Однако, движение, которое наступает после потери устойчивости, не обязательно будет турбулентным. Может так случиться, что при потере устойчивости данное ламинарное движение перейдет в новое стационарное течение, а переход к турбулентному движению наступает лишь при нарушении устойчивости этого вторичного течения [10, 11]. Примером такого вторичного течения является стационарное течение после потери устойчивости в потоке несжимаемой вязкой жидкости в зазоре между concentрическими цилиндрами. Поле скоростей вторичного

потока имеет вид (в первом приближении) [11]:

$$v_r(r, z) = \Omega^2 \left[\frac{\Omega^2 \varphi_1(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + \varphi_2(r) \right] \cos kz + \dots = u(r) \cdot \cos kz; \quad (3.1)$$

$$v_\theta(r, z) = v_\theta^{\text{ламин}}(r) + \Omega \left[\frac{\Omega^2 f_1(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + f_2(r) \right] \cos kz + \dots = v_\theta^{\text{ламин}} + v(r) \cos kz;$$

$$v_z(r, z) = -\frac{\Omega^2}{k} \left[\frac{\Omega^2 \varphi_1'(r)}{\alpha_1 \Omega^2 + \gamma_1 \Omega + \delta_1} + \varphi_2'(r) \right] \sin kz + \dots = w(r) \cdot \sin kz;$$

где явные выражения для α_1 , γ_1 , δ_1 , $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $f_1(r)$, $f_2(r)$ не выписаны ввиду их громоздкости.

Перейдем к электродинамической части задачи. Зависимость E от \dot{V} в случае вторичного течения (3,1) имеет вид (в приближении 1,3):

$$\ddot{E} = \ddot{E}^{\text{лам}} + \ddot{E}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\Lambda & 0 \\ -\Lambda & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{du}{dr} \Big|_{r_0} \cos kz & \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r_0} \cos kz & \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dw}{dr} - ku \right] \Big|_{r_0} \sin kz \\ \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r_0} \cos kz & \lambda_1 \frac{u}{r} \Big|_{r_0} \cos kz & -\frac{\lambda_1}{2} kv \Big|_{r_0} \sin kz \\ \frac{\lambda_1}{2} \left[\frac{dw}{dr} - ku \right] \Big|_{r_0} \sin kz & -\frac{\lambda_1}{2} kv \Big|_{r_0} \sin kz & \lambda_1 kw \Big|_{r_0} \cos kz \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

(в дальнейшем индекс у r_0 опускается)

где $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ определяются соотношениями (3,1). Из уравнений Максвелла, опуская члены, квадратичные по \ddot{e}'_{ik} , имеем в первом приближении

$$\begin{cases} \frac{d^2 E'_\theta}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E'_\theta - \Lambda E'_r] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \cos kz \cdot E_r^0(z) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1}{r} u(r) \cos kz \cdot E_\theta^0(z) \right] \\ \frac{d^2 E'_r}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_1 E'_r - \Lambda E'_\theta] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\lambda_1 \frac{du}{dr} \cos kz \cdot E_r^0(z) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \cos kz \cdot E_\theta^0(z) \right], \end{cases} \quad (3.3)$$

где E^0 соответствует полю в ламинарном потоке до потери устойчивости, а E' — электродинамическое возмущение, соответствующее вторичному течению

Введем $\mathcal{E}^{\pm} = E'_0 \pm E'_r$, тогда уравнения для \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- разделяются:

$$\frac{d^0 \mathcal{E}^+}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 - \Lambda) \mathcal{E}^+ = -\frac{\omega^2}{c^2} \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) + \frac{du}{dr} \right) \cos kz \cdot E_r^0(z) + \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right) \cos kz \cdot E_0^0(z) \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 E^-}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 + \Lambda) E^- = -\frac{\omega^2}{c^2} \lambda_1 \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) - \frac{du}{dr} \right) \cos kz \cdot E_r^0(z) + \left(\frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right) \cos kz \cdot E_0^0(z) \right].$$

Решения уравнений (3.4) можно представить в форме:

$$\mathcal{E}^+(z) = A_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + A_2^+ e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + f(z),$$

$$\mathcal{E}^-(z) = A_1^- e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + A_2^- e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \Lambda} z} + g(z), \quad (3.5)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ равны

$$f(z) = \frac{\omega^2}{2c^2} \lambda_1 \left[\frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] \cdot \left[\frac{ae^{i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \alpha \frac{e^{-i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} \right];$$

$$g(z) = \frac{\omega^2}{2c^2} \lambda_1 \left[\frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] \cdot \left[\frac{ae^{i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2 \frac{\omega}{c} k \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \alpha \frac{e^{-i \left(k + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i \left(k - \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \right) z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}} \right]; \quad (3.6)$$

$f(z)$ и $g(z)$ выписаны с точностью до членов первого порядка по Λ (λ_1); α и γ находятся по формулам (2, 17').

Воспользовавшись граничными условиями на концах цилиндров, получим систему уравнений относительно возмущенных коэффициентов отражения, преломления и прохождения, решая которую, найдем значения соответствующих постоянных. Опуская громоздкие выкладки, получим следующие выражения для E_0 и E_r :

$$E_0 = E_0^{\text{ламина}} + E'_0 =$$

$$= e^{i\omega t} \left[\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \left(\beta e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} + \delta e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda + \lambda_1 \frac{u(r_0)}{r_0} F(z) \right]; \quad (3.7)$$

$$E_r = E_r^{\text{лампы}} + E_r' = e^{i\omega t} \left[i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2V_{\varepsilon_1}} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} = \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda + \lambda \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r_0} \Phi(z) \right],$$

где

$$F(z) = \left\langle i \frac{c}{\omega} \frac{\eta'(0) - V_{\varepsilon_0} \eta(0)}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}} - \right. \\ \left. - \frac{\left[\left[V_{\varepsilon_0} \eta(0) - i \frac{c}{\omega} \eta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \eta'(l) - i \frac{\omega}{c} \eta(l) \right] \right\} \times}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \left[(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} \right]} \right. \\ \left. \times (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right\} (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1}) \left. \right] e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \\ + \frac{\left[\left[V_{\varepsilon_0} \eta(0) - i \frac{c}{\omega} \eta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \eta'(l) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{c}{\omega} \eta(l) \right] \right\} (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l}} \left. \right] e^{\frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \\ + \frac{1}{2} \eta(z); \quad (3.8) \\ \Phi(z) = \left[\frac{i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) - V_{\varepsilon_0} \zeta(0)}{V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}} - \right. \\ \left. \left\{ \left[\left[V_{\varepsilon_0} \zeta(0) - i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \zeta'(l) - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - i \frac{c}{\omega} \zeta(l) \right] \right\} (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1}) \right\} (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1}) \left. \right] e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \\ + \frac{\left[\left[V_{\varepsilon_0} \zeta(0) - i \frac{c}{\omega} \zeta'(0) \right] e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - \left[V_{\varepsilon_0} \zeta'(l) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{c}{\omega} \zeta(l) \right] \right\} (V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})}{(V_{\varepsilon_0} + V_{\varepsilon_1})^2 e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l} - (V_{\varepsilon_0} - V_{\varepsilon_1})^2 e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} l}} \left. \right] e^{\frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \\ + \frac{1}{2} \zeta(z);$$

$$\eta(z) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\alpha \frac{e^{i(k - \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1})z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{i(k + \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1})z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}} + \right. \\ \left. + \alpha \frac{e^{-i(k + \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1})z}}{k^2 + 2k \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}} + \gamma \frac{e^{-i(k - \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1})z}}{k^2 - 2k \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1}} \right];$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} \eta(z).$$

Поляризация суммарного поля равна

$$\xi(z) = \frac{E_r^0 + E_r'}{E_\theta^0 + E_\theta'} =$$

$$= \frac{i \frac{\omega}{c} z \frac{1}{2 V_{\varepsilon_1}} \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} - \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right) \Lambda + \lambda_1 \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right] \Big|_{r=r_0} \cdot \Phi(z)}{\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z}}; \quad (3.9)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \xi(z) = 0.$$

Как видно из (3.9), электромагнитная волна, распространяющаяся в потоке жидкости после потери устойчивости, эллиптически поляризована.

Выражение для угла ориентации осей эллипса поляризации следующее:

$$\operatorname{tg} 2\varphi(z) = \vartheta_1(z) \Lambda + \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=r_0} \cdot \vartheta_2(z),$$

где

$$\vartheta_1(z) = - \frac{2\omega z \operatorname{Im} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right)}{c V_{\varepsilon_1} \left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right) \right]};$$

$$\vartheta_2(z) = \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda_1 \left(\alpha e^{-i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} + \gamma e^{i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right) \bar{\Phi}(z) \right\}}{|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\gamma} \alpha e^{-2i \frac{\omega}{c} V_{\varepsilon_1} z} \right)},$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2\varphi(z) = 0.$$

Тогда общий вид зависимости угла гашения от Ω следующий:

$$\chi(\Omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{A\Omega^3 + B\Omega^2 + C\Omega}{D\Omega^2 + F\Omega + G},$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \chi(\Omega) = \frac{\pi}{4}. \quad (3.10)$$

Явные выражения для постоянных A, B, C, D, F, G опущены.

Как видно из (3, 10), зависимость χ от Ω носит более сложный характер по сравнению с $\chi(\Omega)$ для исходного ламинарного режима даже при тех грубых приближениях, которые привели к (3, 10). Изломам на экспериментальной кривой соответствуют области быстрого изменения χ как функции от Ω в (3, 10).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Фрохт. Фотоупругость, тт. I и II, 1948.
2. H. Wayland, I. Appl. Phys., v. 26, № 10, 1955.
3. В. Н. Цветков. Вестник ЛГУ, № 1, 1947.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, 1959.
5. И. И. Гольденблат. Некоторые вопросы механики деформируемых сред, 1955.
6. И. Седов. Введение в механику сплошной среды, 1962.
7. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме, 1960.
8. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля, 1960.
9. Helv. chim. acta, Bd. 26, s. 1395, 1943.
10. M. Born, E. Wolf. Principles of optics, 1959.
11. А. С. Монин и А. М. Яглом. ПМТФ, № 5, 1960.
12. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, 1961.