

Созонов Ю. И.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЕЛИЧИНЫ БИЕНИЯ ПО МЕТОДУ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Применение теоремы Пирсона для выражения

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{[n_i - np_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)]^2}{np_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \quad (1)$$

неприменимо, так как $p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ не есть постоянные величины, а являются случайными, ввиду того, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ заменены на оценки. Предельное распределение величины χ^2 зависит от принятого метода оценки параметров. Фишер показал, что если неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ оцениваются по выборке методом максимального правдоподобия, то предел статистики (1) имеет распределение χ^2 с $(\rho - 1 - k)$ степенями свободы. Отметим, что если неизвестные параметры оцениваются иными методами, то предельное при $n \rightarrow \infty$ распределение величины χ^2 будет, вообще говоря, отличным от χ^2 -распределения. Поэтому оценки параметров распределения при использовании критерия Пирсона необходимо находить по методу максимального правдоподобия, что во многих исследованиях не происходит, а, значит, приводит к неправильным ответам.

Модель величины биения имеет вид: $f(r) = \frac{(2 + \alpha)(1 + \alpha)}{r_b^{2+\alpha}} r(r_b - r)^\alpha$, ($\alpha > -1$),

где r_b – масштабный параметр, α - параметр формы.

Тогда функция правдоподобия L величины биения имеет вид

$$L = \ln \varphi(r) = \ln \left[\prod_{i=1}^n \frac{(2 + \alpha)(1 + \alpha)}{r_b^{2+\alpha}} r_i(r_b - r_i)^\alpha \right],$$

а решение системы:
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{2+\alpha} + \frac{n}{1+\alpha} - n \ln r_b + \sum_{i=1}^n \ln(r_b - r_i) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial r_b} = -\frac{(2+\alpha)n}{r_b} + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_b - r_i} = 0 \end{cases},$$

даёт оценки параметра α $\tilde{\alpha} = \frac{2n}{\beta - n}$ и оценку параметра r_b , в виде

решения уравнения
$$\frac{3\beta^2 - 2n\beta - n^2}{2\beta^2 + 2n\beta} = \ln r_b - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(r_b - r_i), \quad \text{где}$$

$$\beta = r_b \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_b - r_i}.$$