

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
ННІ "Фізико-технічний факультет"
Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

БАКАЛАВРА

на тему

укр. Багаточастинкові ефекти тунелювання через асиметричні
потенціальні бар'єри в моделі Фермі-Габбарда
англ. Many-body effects in tunneling through asymmetric potential
barriers in the Fermi-Hubbard lattice model

Виконала: студентка 4-го курсу, групи
ТЯ-41

спеціальності 105 прикладна фізика та
наноматеріали

освітня програма: Прикладна фізика

Літвінова С.С. _____
(особистий підпис)

Керівник д.ф.-м.н., проф.

Сотніков А.Г. _____
(особистий підпис)

Рецензент к.ф.-м.н., с.н.с.

Пелетминський О.С. _____
(особистий підпис)

АНОТАЦІЯ

У цій роботі досліджено явище квантового тунелювання в багаточастинкових системах із урахуванням міжчастинкової взаємодії та асиметричних потенціальних бар'єрів. Основну увагу зосереджено на впливі параметрів взаємодії, асиметрії та розміру системи на ефективність тунелювання. Проведено огляд процесу тунелювання у квантовій механіці, ефектів взаємодії та моделі Габбарда. Реалізовано числове моделювання одновимірної ґраткової системи за допомогою програмного пакета QuSpin, що дало змогу детально проаналізувати динаміку системи і, зокрема, процес тунелювання. Особливу увагу приділено таким ефектам, як порушення симетрії через ефекти взаємодії, вплив просторового розподілу частинок, заповненості та розмірів системи на спостережувані величини. Отримані результати є важливими для глибшого розуміння динаміки багаточастинкових квантових систем та можуть бути застосовані у квантових симуляціях і моделюванні надпровідних або ультрахолодних атомних систем.

ABSTRACT

We study the phenomenon of quantum tunnelling in many-body systems with account of of inter-particle interaction and asymmetric potential barriers. The main focus is on the influence of interaction parameters, asymmetry and system size on the tunnelling efficiency. A review of the tunnelling process in quantum mechanics, interaction effects, and the Hubbard model is given. We perform numerical modelling of a one-dimensional lattice system using the QuSpin software package, which allows us to analyze the tunnelling process. Particular attention is paid to such effects as symmetry breaking due to interaction effects, the influence of the spatial distribution of particles, occupancy and system size on the physical observables. The results are valuable for a deeper understanding of the dynamics of many-particle quantum systems and can be used in quantum simulations and modelling of superconducting or ultracold atomic systems.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 Огляд літератури	6
РОЗДІЛ 2 Тунелювання у квантовій механіці	8
2.1 Тунелювання у різних напрямках	8
2.2 Коефіцієнт проходження	10
РОЗДІЛ 3 Ефекти взаємодії	12
3.1 Взаємодія та модифіковане тунелювання	13
3.2 Ефективна модель у сильно взаємодійному режимі	13
3.3 Асиметричний бар'єр та порушення симетрії	13
РОЗДІЛ 4 Модель Габбарда	15
РОЗДІЛ 5 Вимірювані величини	18
5.1 Опис фізичної моделі	18
5.2 Параметри та реалізація	19
5.3 Технічні особливості обчислень	20
РОЗДІЛ 6 Резонансне тунелювання	22
6.1 Залежність від часу при фіксованих U та $\hbar$	22
6.2 Вплив параметра взаємодії U	23
6.3 Резонансне тунелювання при варіації $\hbar$	23
РОЗДІЛ 7 Залежність резонансної умови від розміру системи	25
РОЗДІЛ 8 Тунелювання в системах багатьох частинок	27
8.1 Чутливість до початкових конфігурацій	27
8.2 Залежність від заповнення ґратки	28
ВИСНОВКИ	31
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	33

ВСТУП

Явище квантового тунелювання є однією з фундаментальних ознак квантової природи матерії, що зумовлює проходження частинок крізь потенціальні бар'єри, які є нездоланими з класичної точки зору. У багаточастинкових системах тунелювання набуває нових, ускладнених форм, що вимагає розробки ефективних моделей та числових методів для його опису [1].

Особливий інтерес становлять ефекти тунелювання у сильно взаємодійних системах ферміонів, де взаємодія між частинками суттєво впливає на динаміку та здатність до проходження бар'єрів. У таких системах спостерігається порушення дзеркальної симетрії, що призводить до нерівномірного розподілу густини частинок та нетривіальних ефектів у спостережуваних величинах, зокрема у коефіцієнтах проходження та відбиття.

Для моделювання таких процесів широко застосовується одно- або багатомодовий варіант моделі Фермі-Габбарда, яка дозволяє враховувати як локальні взаємодії між частинками, так і просторову структуру потенціалів [2]. Сучасні обчислювальні платформи, зокрема бібліотека QuSpin [3], відкривають нові можливості для числового моделювання динаміки квантових систем у сильно взаємодійному режимі.

Метою цієї роботи є дослідження багаточастинкових ефектів тунелювання в одновимірній системі ферміонів з локальною взаємодією, яка описується моделлю Фермі-Габбарда, за наявності асиметричних потенціальних бар'єрів. Основну увагу приділено впливу параметрів взаємодії та зовнішнього потенціалу на ефективне тунелювання, виникненню резонансних умов проходження, та зміні квантової поведінки при масштабуванні системи.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

Модель Фермі-Габбарда є однією з основ теоретичного опису багаточастинкових квантових систем на ґратках із сильною кореляцією між ферміонними частинками. Вона широко застосовується для вивчення таких фізичних явищ, як перехід метал–ізолятор, антиферромагнетизм та надпровідність у системах з періодичною ґраткою. Оригінальна модель включає опис тунелювання між сусідніми вузлами та локальну взаємодію між частинками з протилежними проєкціями спіну на одному вузлі [4].

Сучасні дослідження демонструють, що для відтворення експериментально спостережуваної динаміки необхідно враховувати додаткові багаточастинкові ефекти, що реалізуються через так звані процеси *density-induced tunneling* (DT) та *pair tunneling* (PT). Перший із них моделює залежність амплітуди тунелювання від локальної густини частинок, тоді як другий описує когерентне тунелювання пар ферміонів. Особливо важливою є роль цих ефектів у випадку сильної взаємодії та асиметричної форми потенціального бар'єра, коли ефективне тунелювання здійснюється саме за рахунок парного механізму [5, 6].

Асиметрія потенціалу має суттєвий вплив на перебіг квантового тунелювання. Як показано в дослідженнях [6, 7], вона змінює співвідношення ймовірностей проходження бар'єра частинками з різними спінами та породжує нові нелінійні ефекти, зокрема станово-залежне затримання та резонансне накопичення густини під бар'єром. Згідно з працею [6], у двочастинкових системах з бар'єром, що має різну висоту зліва і справа, навіть при симетричній взаємодії виникає спонтанне порушення дзеркальної симетрії в динаміці.

Експериментальні спостереження з використанням ультрахолодних атомів у оптичних ґратках підтверджують необхідність включення багаточастинкових ефектів у теоретичні моделі. Зокрема, у дослідженнях [8] показано, що при наявності сильної взаємодії двох ферміонів у подвійній потенціальній ямі спостерігається енергетичне розщеплення, яке неможливо пояснити у межах лише стандартного тунелювання. Подібні ефекти підтверджуються числовими симуляціями динаміки Фермі-Габбардових кла-

стерів із використанням підходів точної діагоналізації та тензорних мереж [6].

Для побудови узагальненого опису таких систем використовуються аналітичні та числові підходи. Ці методи дають змогу враховувати як локальні, так і просторові кореляції між частинками та дають змогу описати фазову поведінку та квантові переходи в багаточастинкових системах з асиметрією потенціалу [9]. Врахування багаточастинкових ефектів у моделі Фермі-Габбарда з асиметричними потенціальними бар'єрами є ключовим для правильного опису динаміки тунелювання та формування квазічастинок у сильно корельованих системах.

РОЗДІЛ 2

Тунелювання у квантовій механіці

У класичній фізиці, якщо частинка не має достатньо енергії, щоб подолати потенціальний бар'єр, вона не зможе пройти крізь нього. Це інтуїтивно зрозуміло будь-якому спостерігачу. Однак усе відбувається трохи інакше, якщо мова йде про квантовий опис [10, 11]. Тут частинка описується хвильовою функцією, і ця хвиля може «проскочити» крізь бар'єр, навіть якщо енергія частинки менша за висоту цього бар'єра. Цей процес називають тунелюванням.

Усередині бар'єра хвильова функція не дорівнює нулю, вона експоненційно спадає. Якщо бар'єр є скінченним, то хвильова функція частинки може вийти з його протилежного боку. Це створює певну ймовірність того, що частинка опиниться за бар'єром, де за класичними законами її не мало би бути. Тунелювання лежить в основі багатьох фундаментальних природних процесів, таких як ядерний синтез у зірках, холодна емісія електронів, альфа-розпад тощо [12–14].

2.1 Тунелювання у різних напрямках

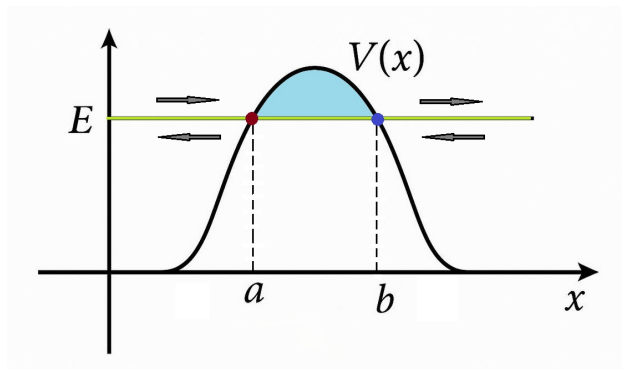


Рис. 2.1: Ілюстрація потенціального бар'єра

Розглянемо частинку маси m , що рухається вздовж осі x в потенціальному полі $V(x)$ довільної форми. Хвильова функція задовольняє рівнянню Шредінгера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.1)$$

де $\hbar$ — зведена стала Планка, $\psi(x)$ — хвильова функція частинки у координатному представленні, E — енергія частинки.

Припустимо, що потенціал $V(x)$ має скінченну ширину і прямує до сталих значень на нескінченностях:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = V_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = V_2. \quad (2.2)$$

Для частинки, що набігає зліва ($x \rightarrow -\infty$), хвильова функція має вигляд:

$$\psi_L(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.3)$$

де $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)}$, A і B — деякі числові константи, які впливають з умов нормування.

На правій межі потенціалу ($x \rightarrow +\infty$) хвильова функція:

$$\psi_R(x) = Ce^{ik_2x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.4)$$

де $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)}$, C — числова константа для цієї межі.

Коефіцієнт проходження визначається як відношення потоків частинок:

$$T = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1}. \quad (2.5)$$

Аналогічно, для частинки, що набігає справа ($x \rightarrow +\infty$) і прямує вліво, хвильова функція буде:

$$\psi_R(x) = Fe^{-ik_2x} + Ge^{ik_2x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.6)$$

$$\psi_L(x) = He^{-ik_1x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.7)$$

де F, G, H — числові константи, аналогічні до попереднього розгляду.

Коефіцієнт проходження справа наліво:

$$T' = \frac{|H|^2 k_1}{|F|^2 k_2}. \quad (2.8)$$

Для потенціалів, що зберігають симетрію відбиття в часовому просторі, виконується $T = T'$, отже, коефіцієнт проходження не залежить від напрямку тунелювання.

2.2 Коефіцієнт проходження

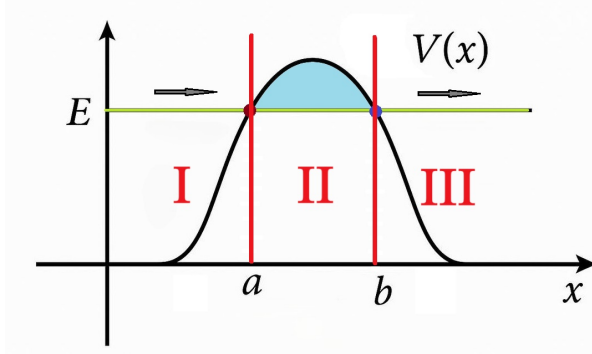


Рис. 2.2: Ілюстрація інтервалів

Припустимо, що потенціал $V(x)$ змінюється повільно, і застосуємо WKB-наближення (метод Вентцеля—Крамерса—Бріллюена).

На першому інтервалі ($x < a$, де a — точка входу частинки під бар'єр) хвильова функція має вигляд:

$$\psi_I(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p(x) dx + \frac{i\pi}{4} \right), \quad (2.9)$$

де $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ — класичний імпульс частинки.

Густина струму ймовірності у цій області:

$$j_I = \frac{|C|^2}{m}. \quad (2.10)$$

У зоні потенціального бар'єра ($a < x < b$), де $V(x) > E$, хвильова функція приймає вигляд:

$$\psi_{II}(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p(x)| dx \right). \quad (2.11)$$

Після проходження бар'єра ($x > b$, b — точка виходу частинки з під бар'єра), обхід точки $x = b$ за верхнім півколом дає хвильову функцію:

$$\psi_{III}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x p(x) dx + \frac{i\pi}{4} \right). \quad (2.12)$$

Густина струму ймовірності після бар'єра:

$$j_{III} = \frac{|C|^2}{m} \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx \right). \quad (2.13)$$

Коефіцієнт проходження визначається як відношення густини струму

ймовірності після бар'єра до густини струму ймовірності до бар'єра:

$$T = \frac{|j_{III}|}{|j_I|} = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \right). \quad (2.14)$$

Цей вираз дає оцінку ймовірності проходження частинки крізь потенціальний бар'єр у квазікласичному наближенні. Як бачимо, коефіцієнт проходження бар'єра однією частинкою залежить лише від площі під бар'єром, яку проходить частинка. Що не зберігається у випадку тунелювання кількох взаємодійних частинок одночасно.

РОЗДІЛ 3

Ефекти взаємодії

У квантових системах багатьох частинок, таких як електрони в кристалі або атоми у штучній оптичній ґратці, тунелювання однієї частинки відбувається не ізольовано від інших. Тут ефекти взаємодії відіграють вирішальну роль [1, 15]. Вони можуть проявлятися різними способами, наприклад, через:

- зміну ефективного потенціалу під час кулонівської взаємодії, коли одна частинка вже знаходиться в певному місці ґратки, ймовірність тунелювання іншої частинки туди зменшується [16, 17];
- колективне тунелювання при сильній взаємодії, коли частинки тунелюють парами, щоб зберегти енергію або спін, або блокувати тунелювання одна одної (ефект Паулі або кулонівське блокування) [15, 18];
- виникнення корельованих станів, коли частинки з однаковим спіном уникають одна одну і це призводить до зміни просторового розподілу й імовірностей тунелювання [19, 20].

У низьковимірних системах навіть можлива фракціоналізація: заряд і спін можуть поширюватися незалежно [19].

Щоб описати вищезгадані ефекти математично, введемо модель, де частинки можуть перескакувати з вузла на вузол, а також взаємодіють при перебуванні на одному вузлі. Це приводить нас до моделі Габбарда.

Модель Фермі-Габбарда у своїй стандартній формі включає локальну взаємодію між частинками та тунелювання між сусідніми вузлами. Гамільтоніан для ґратки в просторі довільної вимірності виглядає як:

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \left(\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \hat{c}_{j\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma} \right) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} + \sum_{i,\sigma} V_i \hat{n}_{i\sigma}, \quad (3.1)$$

де t — амплітуда тунелювання, U — сила локальної взаємодії, $\hat{c}_{i\sigma}^\dagger$ та $\hat{c}_{i\sigma}$ — оператори створення та знищення ферміонів на вузлі i зі спіном $\sigma = \uparrow, \downarrow$, $\hat{n}_{i\sigma} = \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma}$ — оператор числа частинок, а V_i — зовнішній потенціал, $\langle i, j \rangle$ — процес підсумовування тільки за найближчими сусідами.

3.1 Взаємодія та модифіковане тунелювання

У сильно взаємодійному режимі ($|U| \gg t$) стандартний опис (3.1) втрачає точність, оскільки необхідно враховувати додаткові багаточастинкові ефекти. Один з них — density-induced tunneling (густинно-зумовлене тунелювання), що враховує зміну амплітуди тунелювання залежно від локальної густини частинок [5]:

$$\hat{H}_{\text{DIT}} = -T \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (\hat{n}_{i\bar{\sigma}} + \hat{n}_{j\bar{\sigma}}) \left(\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \hat{c}_{j\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma} \right), \quad (3.2)$$

де T — амплітуда густинно-зумовленого тунелювання, $\bar{\sigma}$ — спин, протилежний до σ . Такий член описує збільшення (чи зменшення) тунелювання, коли сусідній вузол зайнятий.

Інший важливий ефект — pair tunneling (парне тунелювання), яке моделює когерентне перенесення пар ферміонів:

$$\hat{H}_{\text{PT}} = -P \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow}^\dagger \hat{c}_{j\downarrow} \hat{c}_{j\uparrow} + \hat{c}_{j\uparrow}^\dagger \hat{c}_{j\downarrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow} \hat{c}_{i\uparrow} \right), \quad (3.3)$$

де P — амплітуда парного тунелювання [5]. Ці додаткові члени (3.2)–(3.3) істотно змінюють ефективну динаміку у присутності асиметричного бар'єра, особливо коли частинки розміщені по обидва боки від нього [6].

3.2 Ефективна модель у сильно взаємодійному режимі

У межі $|U| \rightarrow \infty$ можна вивести з моделі (3.1) ефективний гамільтоніан для двочастинкової системи у вигляді [21]:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = J_{\text{eff}} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j - \frac{\hat{n}_i \hat{n}_j}{4} \right), \quad (3.4)$$

де $J_{\text{eff}} \propto \frac{4t^2}{U}$ — ефективний обмінний терм, а $\hat{\mathbf{S}}_i$ — векторний оператор спіну-1/2 на вузлі i . Цей опис відповідає ізотропній моделі Гейзенберга і є корисним для опису низькоенергетичної спінової динаміки [9].

3.3 Асиметричний бар'єр та порушення симетрії

Розглядаючи ефективну модель у сильно взаємодійному режимі, корисно враховувати особливості структури потенціалу, який може порушувати

дзеркальну симетрію системи. Зокрема, коли досліджуємо одновимірну систему та потенціальний бар'єр має асиметричну форму, тобто $V_i \neq V_{L-i}$, порушується дзеркальна симетрія, що істотно впливає на спінову динаміку та розподіл частинок у ґратці.

Як показано в роботі [6], така асиметрія призводить до спонтанного порушення симетрії навіть у двочастинкових системах, проявляючись у нерівномірному розподілі густини. У межі сильної взаємодії $U \rightarrow \infty$, де ефективна модель (3.4) описується обмінними процесами, значення ефективного обмінного параметра J_{ij}^{eff} стає залежним від різниці потенціалів на сусідніх вузлах:

$$J_{ij}^{\text{eff}} = \frac{4t^2}{U + \Delta V_{ij}}, \quad \Delta V_{ij} = V_i - V_j. \quad (3.5)$$

Ця просторова залежність призводить до ефектів спінової сегрегації та осциляцій центру мас системи, що описані у працях [6, 22]. Порушення симетрії не тільки змінює локальний розподіл густини, а й впливає на динаміку тунелювання та спінові процеси.

РОЗДІЛ 4

Модель Габбарда

Розглянемо модель Габбарда докладніше. Це одна з фундаментальних моделей у теорії багаточастинкових квантових систем, фізиці твердого тіла, статистичній фізиці та фізиці ультрахолодних атомів. Ця модель надає опис системи ферміонів або бозонів на ґратці з урахуванням конкуренції між кінетичною енергією та взаємодією на вузлі. Відповідно до моделі Габбарда можна стверджувати, що кожен електрон відчуває конкуруючі сили: одна штовхає його до сусідніх атомів, а інша відштовхує його від них [23]. Таким чином, відповідний гамільтоніан має два доданки: кінетичний доданок, що дає змогу тунелювати частинці між вузлами ґратки, і потенціальний доданок, що відповідає (кулонівській) взаємодії на вузлі.

Кінетична енергія відповідає процесам тунелювання частинок між сусідніми вузлами ґратки. Це сприяє делокалізації частинок, забезпечуючи поширення квантової хвилі по всій системі. Такий ефект описується кінетичним доданком гамільтоніана Габбарда з коефіцієнтом t , який визначає амплітуду тунелювання.

Взаємодія на вузлі має протилежний характер. Частинки, перебуваючи на одному й тому самому вузлі, зазнають взаємного відштовхування (у випадку ферміонів — кулонівського), яке математично описується доданком $Un_{i\uparrow}n_{i\downarrow}$ для моделі Габбарда. Цей доданок сприяє локалізації частинок з метою уникнення енергетично невігідних конфігурацій з подвійною заповненістю.

Таким чином, модель Габбарда описує баланс між двома суперечливими тенденціями: делокалізацією, що зменшує енергію системи за рахунок тунелювання, та локалізацією, яка виникає внаслідок сильної взаємодії між частинками на одному вузлі [2, 23, 24]. Ця конкуренція породжує багату фазову діаграму. У випадку переважання кінетичної енергії ($t \gg U$) система перебуває у делокалізованому (металевому або надплинному) стані. Навпаки, коли взаємодія домінує ($U \gg t$), частинки стають локалізованими, що призводить до виникнення діелектричної фази Мотта.

У бозонному варіанті (моделі Бозе–Габбарда) описується аналогічна конкуренція між надплинною фазою та діелектричним станом Мотта, що

було вперше теоретично описано в контексті холодних атомів в оптичних ґратках [16]. Це дозволило спостерігати перехід між цими фазами експериментально, підтвердивши ключову роль конкуренції між тунелюванням і взаємодією в багатотільних квантових системах.

Повний гамільтоніан моделі Габбарда має вигляд, як зазначено в рівнянні (3.1). У ферміонному варіанті моделі враховується спін частинок, що дозволяє досліджувати спін-спінові кореляції, магнітний порядок та антиферромагнетизм. При половинному заповненні та великому U модель ефективно редукується до моделі Гейзенберга з обмінною сталою $J = \frac{4t^2}{U}$, як зазначено в розділі 3.2 [18]. За половинного заповнення важливими є наступні граничні випадки:

- Якщо $U = 0$, то модель описує модель вільних ферміонів (фермі-рідина).
- Якщо $U \gg t$ ($U > 0$), то сильна взаємодія домінує, частинки унікають подвійного заселення і виникає локалізація, що призводить до формування діелектричного стану Мотта.
- Якщо $U < 0$, то притягання може призводити до утворення зв'язаних пар, що відкриває можливість виникнення надплинності чи надпровідності.

Важливо, що фазова діаграма моделі Габбарда залежить не лише від співвідношення U/t , а й від заповнення ґратки. При відхиленні від половинного заповнення виникають квазічастинкові збудження, можливі нестабільності до формування хвиль зарядової (CDW) або спінової густини (SDW), а також появи надпровідного порядку, особливо у двовимірному випадку, який актуальний для моделювання купратних надпровідників [25].

Через сильну взаємодію між частинками модель не розв'язується аналітично в загальному випадку. В одному вимірі вона має точне розв'язання методом Бете [26], але вищі вимірності вимагають використання числових методів. Серед них — точна діагоналізація, Quantum Monte Carlo, DMFT (Dynamical Mean-Field Theory) [9]. Ці методи дозволяють вивчати фазові переходи, спінові кореляції, спектральні функції, квантову динаміку тощо.

Модель Габбарда також була реалізована експериментально з ультрахолодними атомами у штучних оптичних ґратках, що дало змогу відтворити діелектричний стан Мотта, спостерігати колективну поведінку атомів та моделювати сильно корельовані електронні системи в лабораторних умовах [27]. Той факт, що модель Габбарда не була розв’язана аналітично в довільних вимірностях, призвів до інтенсивних досліджень числових методів для цих сильно корельованих електронних систем [25, 28]. У подальших розділах буде описано ефекти, що були нами отримані числовим методом точної діагоналізації на одновимірній ґратці.

РОЗДІЛ 5

Вимірювані величини

5.1 Опис фізичної моделі

У моделюванні ми зосередимось на одновимірній квантовій системі з L вузлів, що заповнена N ферміонами в двох різних квантових станах: $N_{\uparrow}$ зі спіном вгору та $N_{\downarrow}$ зі спіном вниз. Таким чином, природно розвинути опис в рамках моделі Габбарда для ферміонів зі спіном $1/2$, у якій враховано як тунелювання частинок між сусідніми вузлами, так і локальну взаємодію на одному вузлі.

З урахуванням незначних перепозначень порівняно з моделлю (3.1), гамільтоніан нашої системи має вигляд:

$$\hat{H} = -J \sum_{i,\sigma} \left(\hat{c}_{i,\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{i+1,\sigma} + \hat{c}_{i+1,\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{i,\sigma} \right) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} + \sum_{i,\sigma} h_i \hat{n}_{i\sigma}, \quad (5.1)$$

де ми вважатимемо, що амплітуда тунелювання між сусідніми вузлами (перехід тільки між i та $i+1$) $J = 1$, h_i — локальний потенціал на вузлі i , що відповідає висоті бар'єра на цьому вузлі.

Для моделювання впливу бар'єрів у середині ґратки до гамільтоніану додається додатковий потенціал:

$$h_i = \begin{cases} h, & i = b_1 \\ \frac{h}{2}, & i = b_2 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = b_1 \\ h, & i = b_2 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (5.2)$$

Тут b_1 та b_2 — регульовані нами вручну координати розміщення бар'єра на ґратці. Бар'єр сформовано на двох сусідніх вузлах ($b_2 = b_1 + 1$).

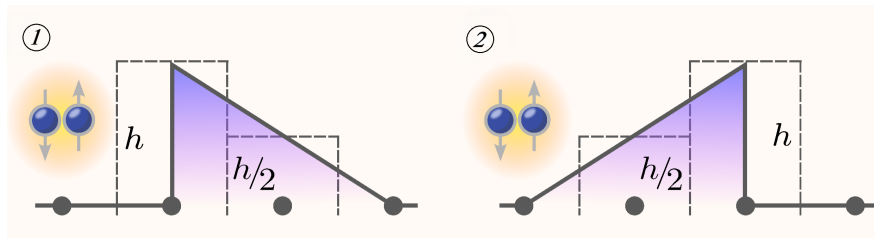


Рис. 5.1:
Ілюстрація форми двох бар'єрів, що використовуються в подальшому аналізі.

5.2 Параметри та реалізація

У моделюванні багаточастинкової квантової системи використовується програмний пакет QuSpin [3] — відкрита Python-бібліотека, призначена для побудови та еволюції квантових гамільтоніанів у системах багатьох тіл. Вона дає змогу ефективно працювати з задачами квантової динаміки, зокрема з моделями типу Фермі-Габбарда, Бозе-Габбарда, або з різноманітними спіновими моделями на ґратках.

На початку симуляції задаються ключові параметри системи:

- довжина одновимірної ґратки L ,
- повна кількість ферміонів у двох спінових станах $(N_{\uparrow}, N_{\downarrow})$,
- значення параметра тунелювання J ,
- величина взаємодії на одному вузлі U ,
- просторовий розподіл потенціалу h_i .

На основі цих параметрів створюється відповідний базис з фіксованими числами частинок для системи довжини L . У програмному пакеті QuSpin для цього використовується клас `spinful_fermion_basis_1d`.

Далі ми можемо побудувати гамільтоніан системи з таких складових:

- оператор тунелювання частинок вліво та вправо:

$$\hat{H}_J = -J \sum_{i,\sigma} \left(\hat{c}_{i+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{i,\sigma} + \hat{c}_{i+1,\sigma} \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \right), \quad (5.3)$$

- оператор взаємодії частинок між собою на одному вузлі:

$$\hat{H}_U = U \sum_i \hat{n}_{i,\uparrow} \hat{n}_{i,\downarrow}, \quad (5.4)$$

- оператор дії додаткового зовнішнього потенціалу:

$$\hat{H}_h = \sum_{i,\sigma} h_i \hat{n}_{i,\sigma}. \quad (5.5)$$

Ці оператори описуються у вигляді списків рядків та коефіцієнтів, які подаються до класу `hamiltonian` з модуля `quspin.operators`. Початковий стан вибирається вручну з базису за допомогою відповідного індексу (наприклад, через `basis.index()`) або безпосередньо з `basis.states`.

Квантова еволюція системи моделюється за допомогою методу `evolve()` об'єкта `hamiltonian`, який реалізує точне розв'язання рівняння Шредінгера:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle. \quad (5.6)$$

Метод забезпечує розрахунок хвильової функції $|\psi(t)\rangle$ у кожен момент часу t , що задається вектором часових точок.

У процесі еволюції обчислюється динаміка фізичних величин, зокрема середнє число частинок з проєкцією спіну $\downarrow$ в області простору за певним потенціальним бар'єром:

$$N_{\downarrow}^{\text{after}}(t) = \sum_{i \in \text{region}} \langle \psi(t) | \hat{n}_{i,\downarrow} | \psi(t) \rangle. \quad (5.7)$$

Ці значення обчислюються в циклі по часових точках і зберігаються для подальшого аналізу.

Для візуалізації результатів використовується бібліотека Matplotlib [29], яка дозволяє будувати графіки $N_{\downarrow}^{\text{after}}(t)$ для різних параметрів U , h , а також здійснювати порівняння поведінки системи при зміні потенціальних бар'єрів.

5.3 Технічні особливості обчислень

У моделюванні використовується точний метод часової еволюції, що ґрунтується на розкладі повного гамільтоніана. Квантовий стан системи в кожен момент часу t визначається як

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle. \quad (5.8)$$

Цей вираз алгоритмічно реалізується у пакеті QuSpin за допомогою точного діагоналізатора, який обчислює спектр та експоненту матриці.

Розмір блоку матриці гільбертового простору, для якого проводять точну діагоналізацію, залежить від кількості вузлів L та числа частинок $N_{\uparrow}$

і $N_{\downarrow}$ у спінових станах $\uparrow$ і $\downarrow$, відповідно. Розмір такого блоку зростає пропорційно добутку двох біноміальних коефіцієнтів за формулою:

$$d = \binom{L}{N_{\uparrow}} \cdot \binom{L}{N_{\downarrow}}, \quad (5.9)$$

що обмежує розмір моделі при використанні точних методів. Нами обрано такі значення параметрів, щоб забезпечити баланс між фізичною змістовністю та обчислювальною досяжністю моделі для розрахунків на звичайному класичному комп'ютері.

Після еволюції на кожному кроці обчислюється очікуване значення операторів числа частинок у певному просторі (наприклад, за бар'єром) для спінової компоненти $\downarrow$. Середнє значення по часовому інтервалі визначається як:

$$\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t_i \in [0, T]} \langle \psi(t_i) | \hat{N}_{\downarrow}^{\text{after}} | \psi(t_i) \rangle, \quad (5.10)$$

де $\hat{N}_{\downarrow}^{\text{after}}$ — оператор числа частинок у відповідній області.

Отриману величину $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$ можна інтерпретувати як ефективну міру проникності потенціального бар'єра для частинок зі спіном $\downarrow$. Вона є узагальненою характеристикою транспортної здатності системи при даному співвідношенні параметрів. Порівняння таких величин для різних потенціалів дозволяє кількісно оцінити вплив асиметрії, взаємодії та початкових умов на ефективність тунелювання.

РОЗДІЛ 6

Резонансне тунелювання

У цьому розділі почнемо розглядати динаміку тунелювання ферміонів у конкретному спіновому стані через потенціальні бар'єри двох різних конфігурацій відповідно до формули (5.2). Моделювання виконано для системи зі сталим числом частинок на одновимірній ґратці з відкритими граничними умовами. Параметри моделі можна визначити двома величинами: висотою бар'єра h та амплітудою міжчастинкової взаємодії U на вузлі ґратки (таким чином, для простоти можна вважати амплітуду тунелювання J одиницею виміру енергетичних величин та покладати $J = 1$). Нас буде цікавити залежність середнього числа частинок зі спіном вниз після бар'єра, позначеного як $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$, від параметрів U і h .

6.1 Залежність від часу при фіксованих U та h

На рис. 6.1 показано еволюцію з часом числа частинок зі спіном вниз за бар'єром $N_{\downarrow}^{\text{after}}$ при $L = 6$, $U = 9J$ та $h = 18J$ для двох варіантів бар'єра.

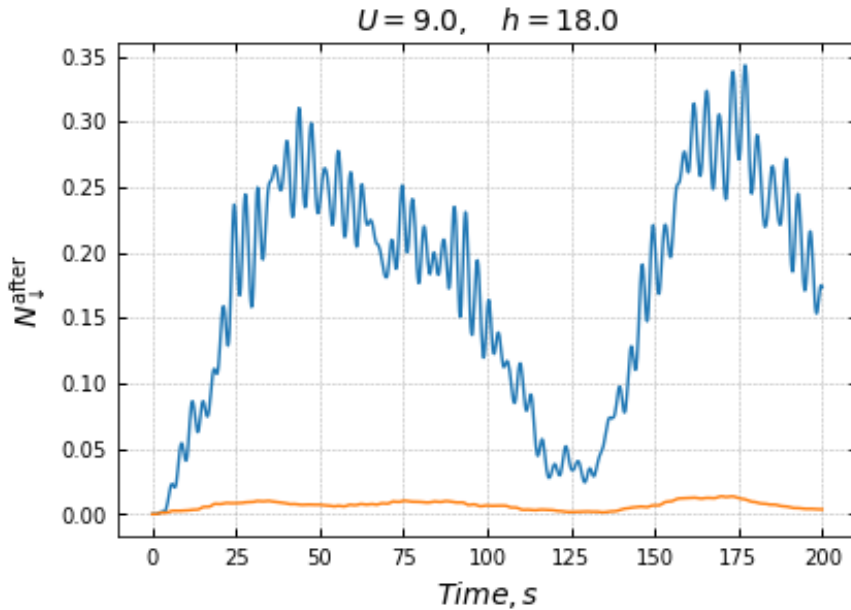


Рис. 6.1: Еволюція кількості частинок зі спіном вниз за бар'єром. Синя крива — конфігурація з бар'єром 1, помаранчева — конфігурація з бар'єром 2.

Конфігурація системи з бар'єром 1, що зустрічає частинку вертикальною стінкою, демонструє чіткі осциляції з вираженими максимумами, що свідчить про значне тунелювання частинок. У свою чергу, конфігурація з протилежною формою бар'єра характеризується низьким рівнем тунелювання, значення $N_{\downarrow}^{\text{after}}$ залишаються близькими до нуля. Зображена еволюція вказує на сильну залежність тунелювання від геометрії або орієнтації

потенціального бар'єра.

6.2 Вплив параметра взаємодії U

Наступним кроком перейдемо до числового аналізу залежностей середньої кількості частинок зі спіном вниз $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$ за бар'єром від мікроскопічних параметрів моделі h і U . На рис. 6.2 наведено таку залежність як функцію параметра U при сталому співвідношенні $h = 2U$ і $L = 6$.

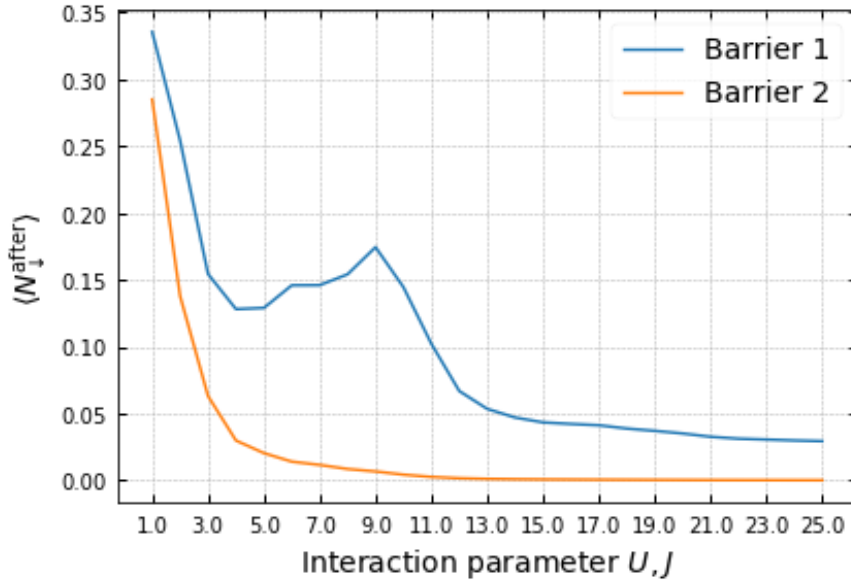


Рис. 6.2: Залежність середньої кількості частинок за бар'єром від параметра міжчастинкової взаємодії U за двох різних орієнтацій бар'єра (криві 1 і 2).

На всьому розглянутому проміжку ми бачимо більшу ефективність тунелювання для конфігурації з першим бар'єром (першої конфігурації). Причому, якщо для другої конфігурації ефективність тунелювання монотонно спадає, що підтверджує ефект пригнічення тунелювання сильною взаємодією, то перша — має пік при значенні величини взаємодії, близькому до $U = 9$. Для великих U тунелювання практично відсутнє для обох конфігурацій бар'єрів.

6.3 Резонансне тунелювання при варіації h

Тепер розглянемо детальніше «близькорезонансну умову», тобто зону в околі $h = 2U$. На рис. 6.3 подано залежність $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$ від висоти бар'єра h при сталій амплітуді взаємодії $U = 9J$ і $L = 6$. Для конфігурації з бар'єром 1 спостерігаються декілька піків, які відповідають виникненню умови резонансного тунелювання, коли енергія взаємодії частинок на вузлі стає достатньо близькою до енергій квазірезонансних станів всередині бар'єра. Конфігурація з бар'єром 2 не демонструє таких ефектів на даному інтервалі значень h (однак має нетривіальні властивості за значень $h \approx U$, див. нижче).

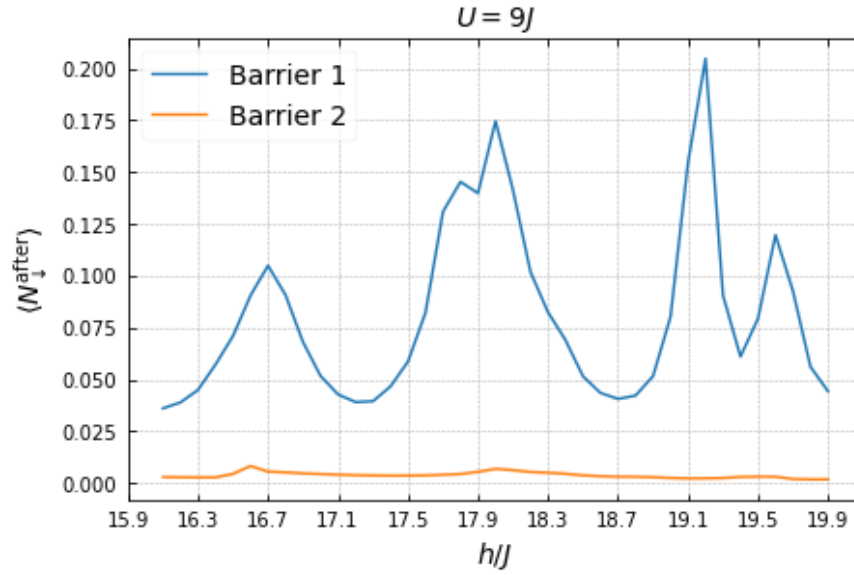


Рис. 6.3: Залежність середньої кількості частинок за бар'єром від висоти бар'єра h для двох просторових конфігурацій.

Отримані у цьому розділі результати демонструють наявність чутливості тунелювання до геометрії бар'єра, зменшення тунелювання зі зростанням величини взаємодії U та наявність піку у ефективності тунелювання для однієї з конфігурацій, існування резонансних умов для ефективного проходження частинок при певних значеннях h , що буде розглянуто у наступному розділі.

РОЗДІЛ 7

Залежність резонансної умови від розміру системи

На рис. 7.1 показано залежність середнього значення кількості частинок зі спіном вниз після потенціального бар'єра $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$ від параметра h/J для двох різних розмірів системи: з $L = 4$ та $L = 10$ вузлами. Для обох випадків фіксоване значення $U = 9J$.

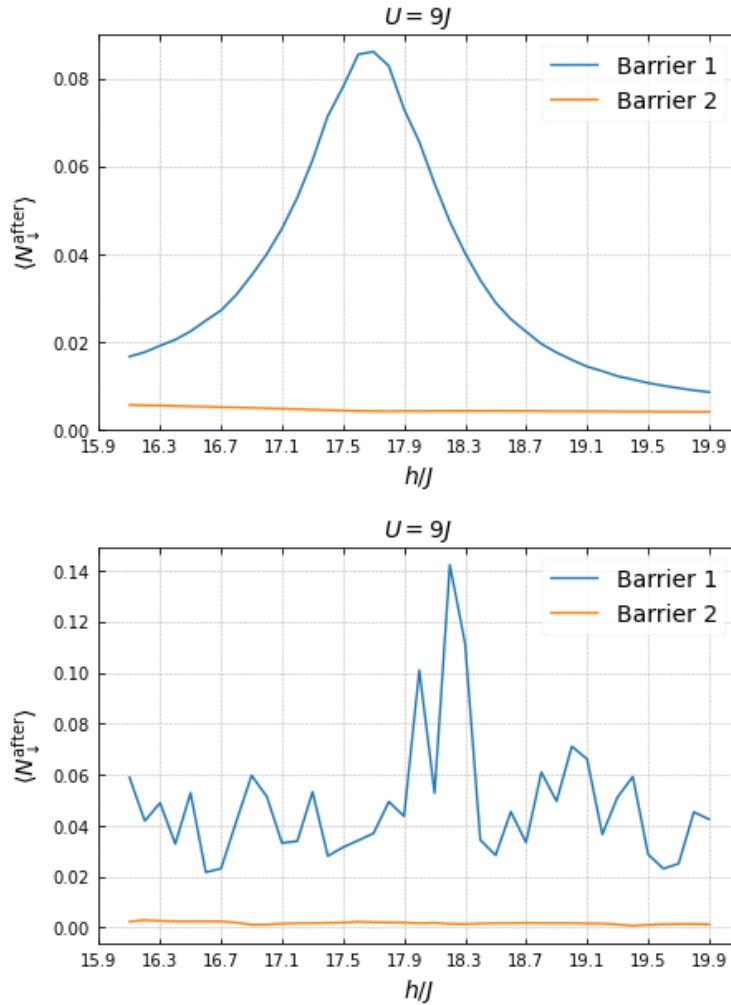


Рис. 7.1: Залежність середньої кількості частинок зі спіном вниз після бар'єра від h/J для двох конфігурацій бар'єрів при $U = 9J$: зверху — $L = 4$, знизу — $L = 10$

З графіків можна побачити, що зі збільшенням розміру системи кількість резонансних піків зростає, а положення основного піку злегка зміщується. Резонансні піки відповідають підвищеній ймовірності виявлення частинок за бар'єром через утворення квазізв'язаних резонансних станів у відповідній зоні.

Зі збільшенням розміру системи (від $L = 4$ до $L = 10$), енергетичний спектр згущується, зменшуючи відстань між сусідніми рівнями. Як наслідок, система підтримує більше умов для резонансного тунелювання, що проявляється у збільшенні кількості піків. Крім того, зміна розміру впливає на фазові умови інтерференції хвиль, що змінює ефективне положення піку максимуму тунельного проходження. Це призводить до незначного зсуву основного піку.

На рис. 7.2 представлено поведінку середньої кількості частинок зі спі-

ном вниз після бар'єра $\langle N_{\downarrow}^{\text{after}} \rangle$ у широкому діапазоні параметра h/J при фіксованому значенні $U = 9J$.

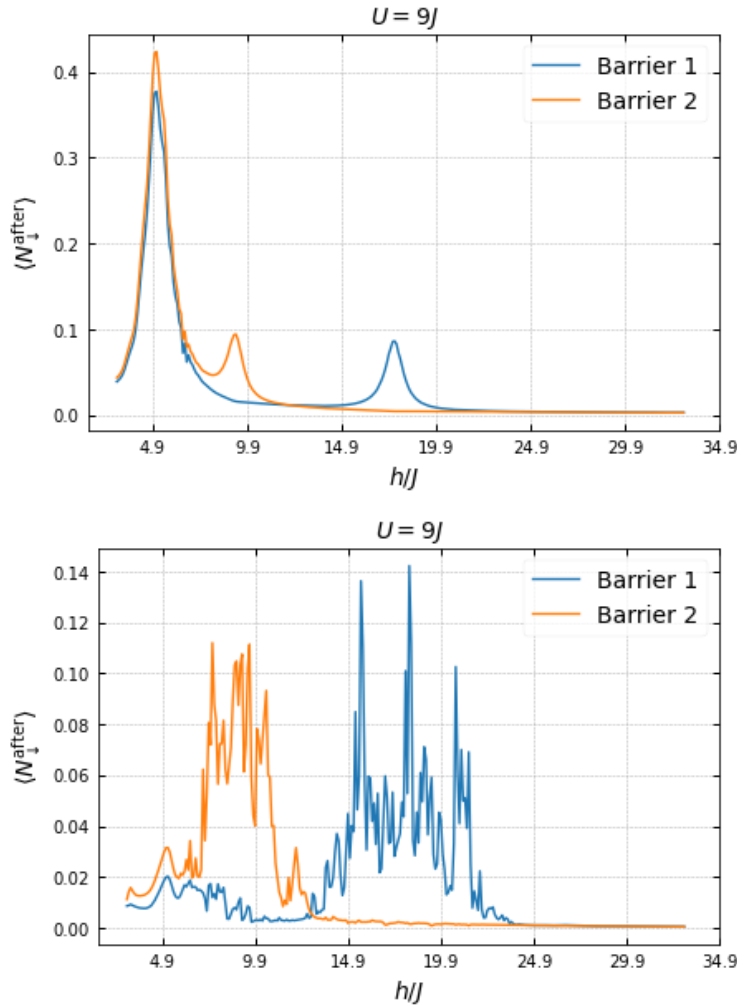


Рис. 7.2: Залежність середньої кількості частинок зі спіном вниз після бар'єра від h/J для двох конфігурацій бар'єрів при $U = 9J$: зверху — $L = 4$, знизу — $L = 10$.

У широкому діапазоні значень h/J спостерігаються численні резонансні піки, що утворюють два помітні фронти. У першій половині діапазону ($h/J \lesssim 12.5$), конфігурація два (помаранчева крива) пропускає більше частинок. Однак далі відбувається перемикавання домінування, і в області $h/J \gtrsim 12.5$ вже конфігурація один (синя крива) демонструє вищу пропускну здатність.

Це перемикавання пов'язане з різною структурою потенціалу у двох конфігураціях, що по-різному взаємодіють з хвильовими функціями частинок при зміні параметра h/J . У певних діапазонах h , потенціальний профіль конфігурації з другим бар'єром краще узгоджується з просторовими властивостями резонансних мод, що веде до більш ефективного тунелювання. Зі збільшенням h , хвильові числа зменшуються, а фази інтерференції змінюються і починають краще узгоджуватися з профілем першого бар'єра — звідси й зростання пропускання саме ним.

Ці переходи аналогічні фазовим перетворенням у просторовій фільтрації: змінюється умова сприятливого накладання хвиль у бар'єрній області. Різні піки відображають зони підвищеного тунелювання, аналогічно до структури міні-зон у твердотільних матеріалах.

РОЗДІЛ 8

Тунелювання в системах багатьох частинок

Розглянемо тепер механізм колективного тунелювання. На рис. 8.1 представлено числове моделювання еволюції системи на $L = 6$ вузлах при фіксованих параметрах $U = 9J$ та $h = 18J$. Початковий стан системи містить дві локальні пари, розміщені перед потенціальним бар'єром.

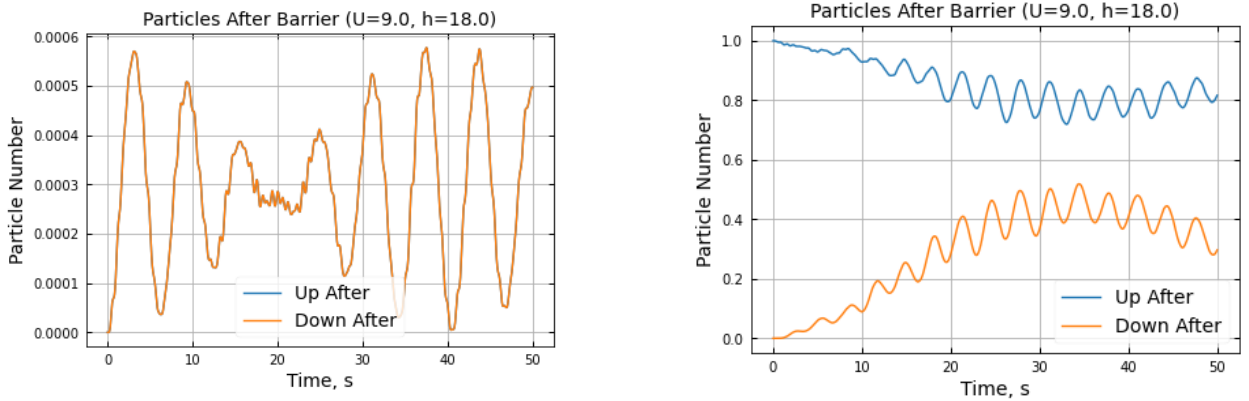


Рис. 8.1: Динаміка проникнення частинок за бар'єр: ліворуч — лише дві локальні пари перед бар'єром; праворуч — дві локальні пари перед бар'єром і частинка зі спіном вгору на останньому вузлі. Спостерігається посилення ефекту тунелювання частинки вниз, яка прямує до частинки вгору.

У першому випадку (тільки локальні пари перед бар'єром) практично не відбувається проникнення частинок через бар'єр. Однак при додаванні однієї частинки зі спіном вгору на останній вузол по інший бік бар'єра, відбувається помітне часткове тунелювання не лише цієї частинки під бар'єр, а й частинки зі спіном вниз від локальних пар до цієї неспареної.

Такий ефект можна інтерпретувати як взаємодійно-індуковане тунелювання (interaction-induced tunneling), коли додаткова частинка модифікує енергетичний ландшафт системи через когерентну взаємодію. У присутності тільки локальних пар система заблокована через сильну взаємодію U , яка пригнічує їх розділення. Додаткова частинка вгору ($\uparrow$) в області за бар'єром створює ефективний канал, у якому спін вниз ($\downarrow$) може тунелювати, зменшуючи енергетичні витрати для розділення пари.

8.1 Чутливість до початкових конфігурацій

Для з'ясування просторової чутливості ефекту взаємодійно-індукованого тунелювання було проведено порівняння двох конфігурацій системи: одна,

де частинка зі спіном вгору знаходиться на останньому вузлі, інша — де вона розташована на передостанньому. У обох випадках дві локальні пари розташовані перед бар'єром.

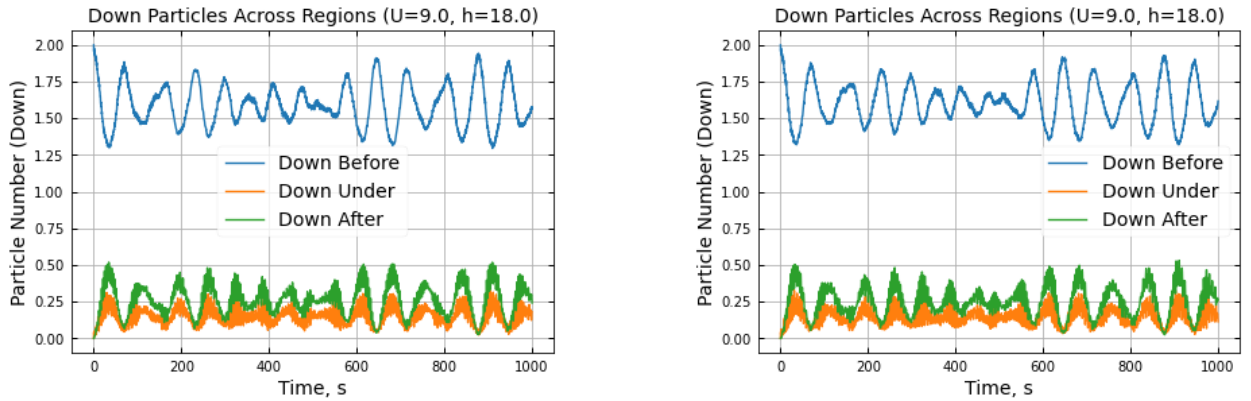


Рис. 8.2: Порівняння впливу розташування частинки зі спіном вгору на величину тунелювання для системи розміру $L = 6$. Ліворуч — частинка вгору на останньому вузлі; праворуч — частинка вгору на передостанньому вузлі. У обох випадках тунелювання частинки вниз практично ідентичне.

Як видно з рис. 8.2, зміщення частинки вгору на один вузол ближче до бар'єра не викликає істотних змін у тунельному ефекті. Це свідчить про локальну нечутливість ефекту до точної позиції цієї частинки.

У моделі Габбарда з дуже сильною взаємодією $U \gg J$ ефективна динаміка визначається не лише локальними станами, а й перекриттями хвильових функцій між сусідніми вузлами. Тому присутність частинки вгору навіть на сусідньому з бар'єром вузлі може забезпечити достатній «вплив» для ініціації тунелювання частинки вниз (що справедливо і оберненого випадку).

8.2 Залежність від заповнення ґратки

Для вивчення впливу кількості частинок перед бар'єром на ефективність тунелювання було розглянуто два випадки: одна локальна пара на першому вузлі та частинка вгору на передостанньому вузлі і дві локальні пари перед бар'єром (на першому та другому вузлах) і частинка вгору на передостанньому вузлі.

Наявність другої пари посилює колективну взаємодію в області перед бар'єром. Це підвищує ймовірність когерентного тунелювання частинки вниз завдяки ефективній «притягальній» дії частинки вгору, що розташована за бар'єром.

Залучення більшої кількості частинок до взаємодії з бар'єром суттєво підсилює тунельну амплітуду. Це є прямим свідченням багаточастинкової природи розглянутого квантового процесу.

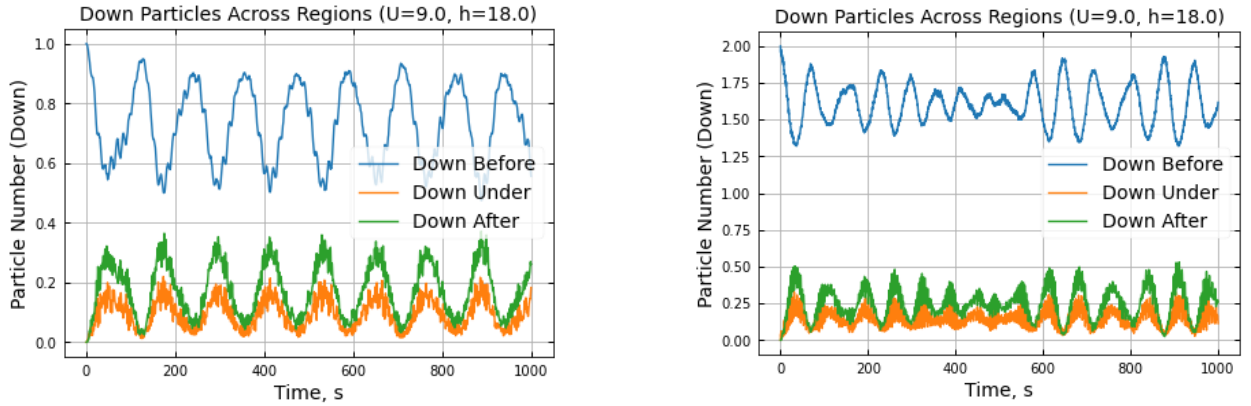


Рис. 8.3: Порівняння величини тунелювання для однієї (ліворуч) та двох (праворуч) локальних пар перед бар'єром для системи розміру $L = 6$. Частинка вгору розміщена на передостанньому вузлі в обох випадках. Спостерігається зростання максимуму $N_{\downarrow}^{\text{after}}$ від 0.35 до 0.5.

Нами також було досліджено вплив попередньої заповненості області після бар'єра на ефективність тунелювання частинок зі спінами вгору та вниз. Для цього порівнювались кілька випадків: за бар'єром розміщено одну частинку та за бар'єром розміщено дві частинки (по одній на кожному вузлі), з різними спіновими орієнтаціями.

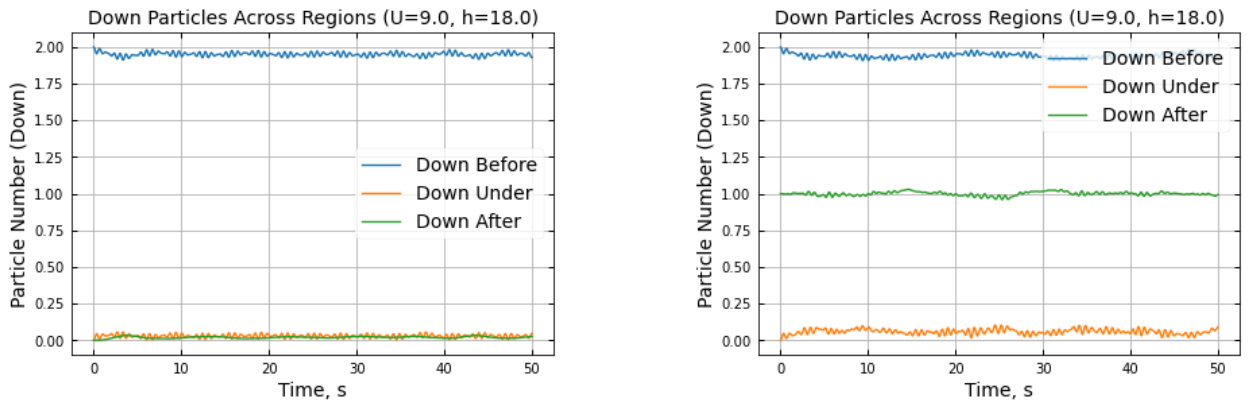


Рис. 8.4: Порівняння ефективності тунелювання при різних спіновій орієнтації частинок за бар'єром для системи розміру $L = 6$. Ліворуч — дві частинки вгору, праворуч — дві частинки з протилежними спінами. Тунелювання майже повністю пригнічене в обох випадках.

Згідно з принципом Паулі, у системі не можуть існувати два однакові ферміони в одному квантовому стані, а внаслідок сильної взаємодії U на-

віть для протилежних спінів одночасне перебування на тому ж вузлі також енергетично невигідне. Таким чином, тунельна амплітуда зменшується аж до повного придушення.

У результаті числового дослідження тунелювання ферміонів через локалізований потенціальний бар'єр в одновимірній ґратці було встановлено ряд характерних особливостей, притаманних колективному тунелюванню. Виявлено, що ефективність тунельного процесу визначається не лише параметрами зовнішнього потенціалу (U, h) , а й розміром системи, конфігурацією початкового стану та розподілом частинок до й після бар'єра, що відкриває можливості для керованого маніпулювання квантовим потоком частинок.

ВИСНОВКИ

У роботі було проведено детальний аналіз тунелювання у багаточастинкових квантових системах в одновимірній системі на ґратці з урахуванням взаємодії частинок між собою та асиметрії потенціальних бар'єрів. Зокрема, серед результатів можна виділити наступні:

- розглянуто фундаментальні аспекти квантового тунелювання, зокрема проходження хвильових пакетів через бар'єри, що є класично непрохідними, та розраховано відповідні коефіцієнти проходження;
- показано роль міжчастинкової взаємодії, яка змінює характер тунелювання, зокрема призводить до зміщення резонансних умов та модифікації ефективних потенціалів у сильновзаємодійному режимі;
- досліджено вплив асиметрії потенціального бар'єра, яка порушує просторову симетрію й може призводити до різного тунелювання в різних просторових напрямках;
- використано модель Габбарда як ефективну математичну основу для опису поведінки ферміонів на ґратці, що дозволило провести числове моделювання еволюції квантового стану системи;
- реалізовано числове моделювання за допомогою кодування фізичної моделі, враховуючи часову динаміку, варіацію параметрів взаємодії та асиметрії, що дозволило виявити умови резонансного тунелювання;
- виявлено залежність резонансних умов від розміру системи, що важливо для масштабованості моделей та узагальнення результатів на більші квантові структури;
- досліджено особливості тунелювання в системах багатьох частинок, зокрема ефекти чутливості від початкових конфігурацій і більшого заповнення ґратки частинками, які суттєво впливають на характер динаміки.

Загалом, результати вказують на те, що навіть у системах з відносно простими типами міжчастинкової взаємодії (модель Габбарда з локальною

взаємодією) можуть виникати складні явища, пов'язані з квантовою колективною поведінкою, асиметрією та резонансними ефектами. Отримані результати можуть мати подальше застосування у розробці квантових пристроїв, моделюванні надпровідності, квантових симуляціях та дослідженні динаміки ультрахолодних атомів у лазерних полях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 80, pp. 885–964, 2008.
2. F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper, and V. E. Korepin, *The One-Dimensional Hubbard Model*. Cambridge University Press, 2005.
3. P. Weinberg and M. Bukov, “Quspin: a python package for dynamics and exact diagonalisation of quantum many body systems. Part I: Spin chains,” *SciPost Physics*, vol. 2, p. 003, 2017.
4. M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems*. Oxford University Press, 2012.
5. O. Dutta, M. Gajda, P. Hauke, M. Lewenstein, D.-S. Lühmann, B. Malomed, T. Sowinski, and J. Zakrzewski, “Non-standard hubbard models in optical lattices: a review,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 78, no. 6, p. 066001, 2015.
6. S. Hunn, K. Zimmermann, M. Hiller, and A. Buchleitner, “Tunneling decay of two interacting bosons in an asymmetric double-well potential: A spectral approach,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, no. 4, p. 043626, 2013.
7. S. K. Haldar and O. E. Alon, “Many-body quantum dynamics of an asymmetric bosonic Josephson junction,” *arXiv preprint*, no. arXiv:1810.04031, 2018.
8. S. Murmann, A. Bergschneider, V. Klinkhamer, G. Zürn, T. Lompe, and S. Jochim, “Two fermions in a double well: Exploring a fundamental building block of the Hubbard model,” *Physical Review Letters*, vol. 114, no. 8, p. 080402, 2015.
9. A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth, and M. J. Rozenberg, “Dynamical mean-field theory of strongly correlated fermion systems and the limit of infinite dimensions,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 68, no. 1, pp. 13–125, 1996.
10. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume 1*. Wiley, 1991.
11. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*. Wiley, 3rd ed., 1998.
12. D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Education, 2nd ed., 2005.

13. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Volume III*. Addison-Wesley, 1965.
14. K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*. Wiley, 1988.
15. A. Altland and B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd ed., 2010.
16. D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, “Cold bosonic atoms in optical lattices,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 15, pp. 3108–3111, 1998.
17. M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms,” *Nature*, vol. 415, pp. 39–44, 2002.
18. A. Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer, 1994.
19. F. Haldane, “Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas,” *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 14, no. 19, pp. 2585–2609, 1981.
20. H. Schulz, “Fermi liquids and non-Fermi liquids,” in *Proceedings of the Les Houches Summer School, Session 61* (D. Bensimon and B. Shapiro, eds.), 1994.
21. J. R. Schrieffer and P. A. Wolff, “Relation between the Anderson and Kondo Hamiltonians,” *Phys. Rev.*, vol. 149, pp. 491–492, Sep 1966.
22. X. Du, L. Luo, B. Clancy, and J. E. Thomas, “Observation of anomalous spin segregation in a trapped Fermi gas,” *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 15, p. 150401, 2008.
23. C. Wood, “Physics duo finds magic in two dimensions,” *Quanta Magazine*, Aug. 2022.
24. M. Imada, A. Fujimori, and Y. Tokura, “Metal-insulator transitions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, no. 4, pp. 1039–1263, 1998.
25. D. J. Scalapino, “Numerical studies of the 2D Hubbard model,” 2006. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0610710>.
26. E. H. Lieb and F. Y. Wu, “Absence of Mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension,” *Physical Review Letters*, vol. 20, no. 25, pp. 1445–1448, 1968.

27. T. Esslinger, “Fermi-Hubbard physics with atoms in an optical lattice,” *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 1, pp. 129–152, 2010.
28. J. P. F. LeBlanc and Others, “Solutions of the two-dimensional Hubbard model: Benchmarks and results from a wide range of numerical algorithms,” *Physical Review X*, vol. 5, no. 4, p. 041041, 2015.
29. J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2D graphics environment,” *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007.