

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет (навчально-науковий інститут) «Фізико-технічний факультет»

Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера

До захисту допущено

Кафедрою фізики ядра та високих енергій імені О. І. Ахієзера протокол № 10 від 15.05.2026 р.

завідувач кафедри _____ Юрій Слюсаренко _____
(підпис) (ім'я, прізвище)

«15» травня 2026 р.

Кваліфікаційна робота
здобувача другого (магістерського) рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

Методи покращення якості електронних згустків при збудженні кільватерного
поля послідовністю згустків

(назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) 105 Прикладна фізика та наноматеріали
(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності - за наявності)

Освітня програма Експериментальна ядерна фізика та фізика плазми
(назва освітньої програми)

Виконавець _____ Ілья Демиденко _____
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий керівник _____ Олександр Щусь _____
(підпис) (ім'я, прізвище)

АНОТАЦІЯ

Демиденко Ілья. – Методи покращення якості електронних згустків при збудженні кільватерного поля послідовністю згустків. – рукопис. Дипломна робота магістра з прикладної фізики (напрямок підготовки «Експериментальна ядерна фізика та фізика плазми») – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2026.

48 с., 15 рис., 4 табл., 28 джерел

Дана дипломна робота присвячена дослідженню двох важливих задач, які виникають при збудженні кільватерного поля у плазмі послідовністю електронних згустків. Перша задача полягає у пригніченні прогресуючого дефокусування та подальшого руйнування електронних згустків при резонансному збудженні кільватерного поля, коли частота слідування згустків дорівнює плазмовій частоті. Це явище було досліджено аналітично та експериментально у 2000-х роках, проте тільки в даній роботі буде представлений механізм подолання даного ефекту. Окрім цього, розв'язок цього питання встановив умови стійкості електронних згустків. Друга задача присвячена дослідженню формування однорідного повздовжнього електричного поля профільованою послідовністю профільованих згустків. Аналітично та методами чисельного моделювання було показано, що умови формування плато та стійкості згустку є тотожними, що дозволяє казати про плавний перехід від першої задачі до другої, що й пов'язує їх в одну роботу.

Ключові слова: прискорювачі частинок, кільватерне прискорення, плазмові прискорювачі, фокусування електронних згустків, послідовність електронних згустків

ABSTRACT

Demydenko Ilia. – Methods of the enhancement of the quality of electron bunches during the excitation of the wakefield by the train of bunches. Master's thesis in applied physics (specialty – «Experimental nuclear physics and plasma physics») – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2026.

48 p., 15 fig., 4 tabl., 29 ref.

This thesis is dedicated to the investigation of two important problems that appear during the excitation of the wakefield by train of electron bunches. The first problem is about the suppression of progressing defocusing and further destruction of electron bunches during the resonance excitation of the wakefield, when repetition frequency of the bunches equals to plasma frequency. This phenomenon was studied analytically and experimentally in 2000-s, however only in this manuscript the mechanism of suppression of this effect is studied. Moreover, this problem established conditions of stability of electron bunches. The second problem is dedicated to the formation of unitary longitudinal field by a profiled train of profiled bunches. Analytically and by numerical modelling it was shown that conditions of plateau formation and stability of the bunch are the same. It binds considered problems, allowing to combine them into one paper.

Key words: particle accelerators, wakefield acceleration, plasma accelerators, electron bunches focusing, train of electron bunches

ЗМІСТ

Анотація	2
Abstract.....	3
Вступ.....	5
Розділ 1. Збудження кільватерних полів послідовністю електронних згустків	6
1.1. Актуальність проблеми	6
1.2. Резонансне збудження та його особливості	11
1.3. Формування однорідного повздовжнього електричного поля (утворення плато).....	14
Висновки до розділу 1	18
Розділ 2. Подавлення поперечної нестійкості електронних згустків при резонансному збудженні кільватерного поля	19
2.1. Механізм виникнення дефокусування.....	19
2.2. Метод усунення нестійкості згустків.....	22
Висновки до розділу 2	26
Розділ 3. Утворення плато на повздовжньому електричному полі профільованою послідовністю електронних згустків.....	27
3.1. Аналітичне дослідження	27
3.2. Порівняння із результатами чисельного моделювання	37
3.3. Вплив рухливості йонів на формування плато	41
Висновки до розділу 3	43
Висновки	44
Список використаних джерел	45

ВСТУП

У роботі досліджені дві задачі, які виникають при збудженні кільватерного поля у плазмі послідовністю електронних згустків. Перш за все, було досліджено механізм виникнення прогресуючої поперечної нестійкості при резонансному збудженні кільватерного поля. Було показано, що даний ефект можна подолати зсувом електронних згустків у фокусуюче поле, яке забезпечує стійке фокусування. По-друге, було досліджено задачу формування плато на повздовжньому електричному полі, що збуджується профільованою послідовністю електронних згустків з трикутним профілем густини. Були отримані аналітичні умови формування плато, які узгоджуються з числовими моделюваннями.

У роботі використовувалось числове моделювання з використанням РІС коду LCODE. У лінійному режимі плазма розглядається у гідродинамічному наближенні. Розглядались згустки, що мають розподіл за Гаусом у поперечному перерізі в радіальному напрямку. Повздовжній розподіл та радіус вказаний для кожного конкретного випадку. Моделювання проводилось у циліндрично симетричній (r, z) геометрії. Усі величини є функціями безрозмірного часу $\tau = t\omega_p$ та координати $\xi = V_b t - z$, де V_b – швидкість згустку. Необхідність такого визначення ξ полягає в тому, що з плином часу вікно числового моделювання буде рухатися разом зі згустками. Це дозволяє значно скоротити час моделювання та потрібний комп'ютерний ресурс. Час нормований на ω_p^{-1} – плазмову частоту електронів, відстань – на $\frac{c}{\omega_p}$, струм згустків – на $I_{cr} = \frac{\pi m c^3}{4e}$, а поля на $\frac{m c \omega_p}{e}$, де m, e – маса та заряд електрона, а c – швидкість світла. Лоренц-фактор згустків дорівнює 5, що дозволяє за малий час моделювання побачити усі необхідні ефекти. Початкова температура плазми близька до 0 еВ.

РОЗДІЛ 1. ЗБУДЖЕННЯ КІЛЬВАТЕРНИХ ПОЛІВ ПОСЛІДОВНІСТЮ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ

1.1. Актуальність проблеми

У сучасній фізиці прискорювачі заряджених частинок відіграють велику роль як у фундаментальних, так і у прикладних дослідженнях. Вони використовуються в медицині, матеріалознавстві, фотоніці та в дослідженнях фізики високих енергій [1-2]. На даний момент існує багато різних типів прискорювачів, наприклад, лінійні резонансні, синхротрони (у тому числі й колайдери), циклотрони, проте всі вони містять в собі однаковий принцип прискорення – радіочастотні камери, в яких електрони прискорюються радіочастотним електромагнітним полем.

Існуючі прискорювачі мають ряд суттєвих недоліків. Серед них можна виділити основні – великі розміри та обмеження на прискорюючі поля. Обговоримо ці недоліки детальніше.

Високоенергетичні пучки заряджених частинок з великою яскравістю можна отримати тільки в циклічних прискорювачах. Для повороту пучка частинок використовуються сильні магнітні поля. Проте, як відомо рух, у магнітному полі призводить до появи синхротронного випромінювання. На відміну від лінійних прискорювачів, де радіаційні втрати не залежать від поточної енергії частинки, втрати внаслідок синхротронного випромінювання є пропорційними до T^4 , де T – кінетична енергія частинки. Це призводить до того, що за певної енергії частинка випромінює стільки енергії, скільки набуває в прискорювальній ділянці синхротрона, а тому прискорення зупиняється. Для деяких типів прискорювачів, це цілком прийнятна ситуація (наприклад, для накопичувальних кілець, які використовуються як інжектори для ондуляторів та віглерів), проте якщо ми хочемо досягти більших енергій, необхідно зменшувати радіаційні втрати. Можливим способом зменшення втрат на синхротронне випромінювання є збільшення радіуса кривини траєкторії пучка, оскільки інтенсивність синхротронного випромінювання обернено пропорційна до R^2 , де R – радіус кривини. Це означає, що досягнення великих енергій вимагає збільшення

геометричних розмірів прискорювача, що значно збільшує необхідні ресурси для його побудови. Найвідомішим прикладом, що підкреслює необхідність великих габаритів для прискорювачів, є Великий адронний колайдер (LHC – Large hadron collider), що розташований у CERN, Женева, Швейцарія. Його основне прискорювальне кільце має довжину 27 км, а вартість побудови становила більше десятка мільярдів доларів. На даний момент існує також проєкт побудови більш потужного колайдера (FCC – Future circular collider) в тому ж центрі, довжина кільця якого має становити вже 90 км (див. рис. 1.1).

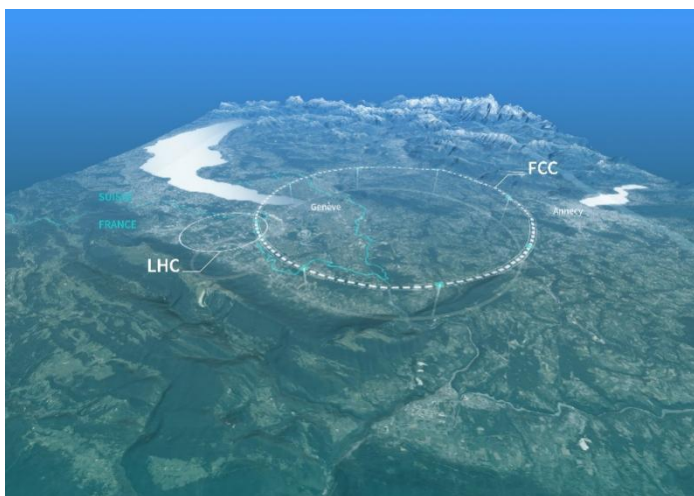


Рисунок 1.1-Порівняння LHC та FCC [3].

Звичайно, що більша частина прискорювачів, які застосовуються в різних фундаментальних та прикладних дослідженнях є значно компактнішими (як, наприклад, PETRA III у DESY, Гамбург, Німеччина). Проте навіть для цих прискорювачів та їх наступників питання розміру та ціни є актуальним.

На перший погляд здається, що проблему радіаційних втрат можна вирішити іншим способом, а саме збільшенням інтенсивності електромагнітного поля у радіочастотній камері прискорювача. І тут ми підходимо до другої великої проблеми існуючих прискорювачів – обмеження величини прискорювальних полів. Існує декілька причин, що накладають ці обмеження, проте основними є можливий пробій внаслідок автоелектронної емісії та сильне нагрівання через індуковані струми Фуко в оболонці камери. Ці причини, за сучасними оцінками, обмежують значення електричного поля до 100 МВ/м [4]. Саме тому ми не можемо

збільшувати скільки завгодно поле, а отже, ми повертаємося до першої проблеми прискорювачів – їх габарити.

Навіть якщо ми обговорюємо лінійні прискорювачі електронів, вони мають подібні проблеми – довжини порядку декількох сотень метрів, а інколи навіть кілометрів (наприклад, інжектор електронів European XFEL має довжину 2.1 км), які дозволяють досягнути необхідних для сучасних досліджень енергій, і також те ж саме обмеження на прискорювальні електричні поля.

Можливою альтернативою великих лінійних прискорювачів електронів, які інколи можна буде використовувати навіть замість синхротронів (як у майбутньому проєкті асиметричного електрон-позитронного колайдера HALHF), є кільватерні плазмові прискорювачі. Принцип їх дії полягає у збудженні кільватерного поля у плазмі всередині так званої бульбашки, яка утворена або інжектованим електронним згустком, або інтенсивним лазерним імпульсом [5] (далі ми зосередимося виключно на прискорювачах з інжекцією електронних згустків з лінійного прискорювача у плазму). За сучасними оцінками поле може досягати значень 100 ГВ/м [6-8]. Дане поле дозволяє зробити прискорювачі значно компактнішими, що дозволить зменшити їх ціну та зробити їх доступнішими для більшої кількості лабораторій в світі.

Попри очевидні переваги кільватерних прискорювачів, вони мають певні особливості роботи, які досі досліджуються як теоретично, так і експериментально. Першою такою особливістю є дуже малий час еволюції бульбашки і, відповідно, і самого поля, що вимагає швидкого поглинання енергії цього поля. Дана проблема вирішується використанням другого електронного згустка, правильний підбір розташування якого дозволяє поглинути енергію кільватерного поля, яке було збуджене першим електронним згустком (див. рис. 1.2).

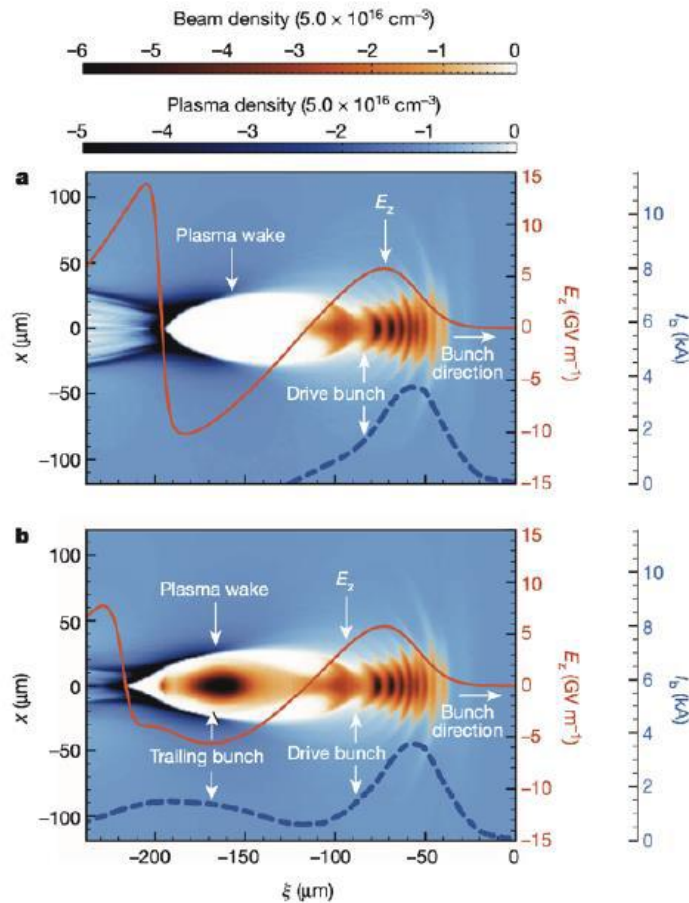


Рисунок 1.2- Збудження кільватерного поля у випадку одного електронного згустку (а) та за наявності заднього згустку (б) [9].

Для подальшого розуміння викладеного матеріалу одразу на початку узгодимо термінологію. Драйвером ми будемо називати електронний згусток, що збуджує кільватерне поле (тобто віддає йому свою енергію), а вітнесом – згусток, що відбирає енергію в поля, в наслідок чого й відбувається прискорення.

Другим серйозним викликом для кільватерних прискорювачів є великий емітанс отриманих на виході пучків. Оскільки поле руйнується дуже швидко, то для максимальної передачі енергії необхідно, щоб вітнес покривав якомога більший діапазон фаз. Проте через сильну неоднорідність кільватерного поля, частина згустка прискорюється, а частина гальмується, що призводить до значного розкиду електронів по енергії. Існує декілька способів, як подолати дану проблему, але всі вони базуються на одному принципі – використання спеціально підібраних профілів повздовжнього розподілу електронів у згустків. Так, наприклад,

однорідний згусток з гаусоподібними головою та хвостом здатен збуджувати пасивну плазмову лінзу, яка сповільнює голову (де рухаються швидші частинки) та прискорює хвіст (де рухаються повільніші частинки), що дозволяє зменшити його енергетичний розкид [10].

Іншим варіантом, який найкраще підходить для згустків із вже мінімальним енергетичним розкидом, є підбір такого профілю повздовжнього розподілу електронів згустка, що прискорююче та навіть гальмуюче поля є однорідними, тобто утворюють так зване плато.

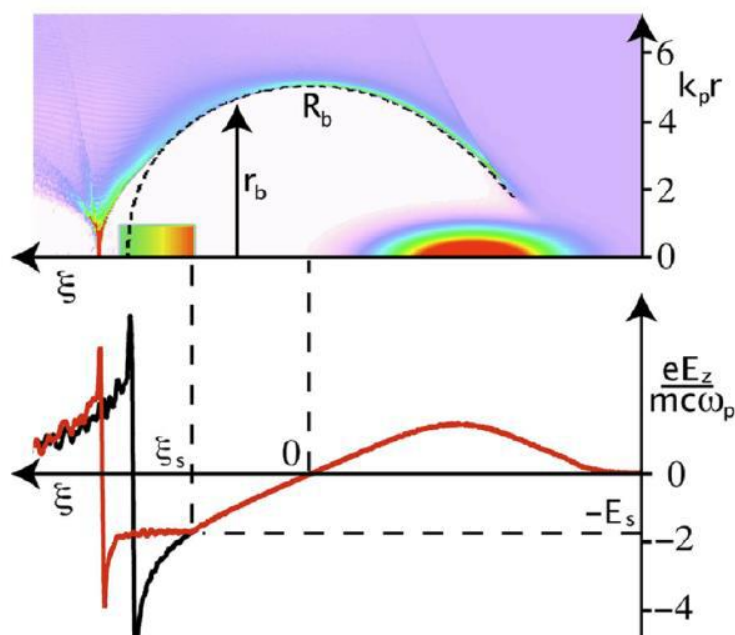


Рисунок 1.3- Утворення плато на кільватерному полі шляхом підбору відповідного профілю згустку [11].

Останні дослідження показують перспективність нелінійного режиму роботи кільватерного прискорювача, проте він є доступним лише для великих лабораторій, які можуть дозволити або надпотужні лазерні імпульси або інжекцію електронних пучків з великим зарядом. Щоб зробити прискорення більш доступним, можна використовувати послідовність згустків з малими струмами, підбір розташування яких дозволяє забезпечити збудження кільватерного поля з необхідною амплітудою та забезпечити формування плато на повздовжньому електричному полі. Саме цьому режиму роботи і присвячена дана дипломна робота. Далі ми

розглянемо дві важливих задачі, які виникають при збудженні кільватерного поля послідовністю електронних згустків.

1.2. Резонансне збудження та його особливості

Почнемо з найпростішого, а саме розглянемо те, як можна максимально ефективно збільшувати амплітуду кільватерного поля. У лінійному наближенні (яке є застосовним у випадку малих зарядів згустків, що ми й розглядаємо), кільватерна хвиля точкового згустка має чисто гармонічний вигляд (у повздовжньому напрямку, який нас і цікавить) [12-14]. Тобто:

$$\begin{cases} E_z(\xi) \propto \cos k\xi, \\ F_r(\xi) \propto \sin k\xi, \end{cases} \quad (1.1)$$

де k – плазмове хвильове число, а $\xi = V_b t - z$, що ми визначали у вступі.

Нас не цікавлять зараз поперечні залежності, а тому ми будемо зосереджуватися виключно на повздовжніх залежностях повздовжнього електричного поля $E_z(\xi)$ та радіальної сили $F_r(\xi)$.

У випадку згустків скінчених розмірів поля у (1.1) виконують роль функцій Гріна, а тому для довільного розподілу електронів $n_b(\xi)$ можемо записати наступне:

$$\begin{cases} E_z(\xi) \propto \int n_b(\xi') \cos k(\xi - \xi') d\xi', \\ F_r(\xi) \propto \int n_b(\xi') \sin k(\xi - \xi') d\xi'. \end{cases} \quad (1.2)$$

Саме вирази у (1.2) і будуть основним інструментом для аналітичних міркувань в даній роботі.

Із загальної фізики відомо, що амплітуда коливань значно зростає, коли частота зовнішнього впливу збігається із власною частотою осцилятора. Дані міркування можна легко перенести в область кільватерного прискорення, де в якості коливальної системи виступає власне кільватерне поле, а в якості зовнішньої сили – драйвери, що віддають енергію поля. Умова резонансу виконується тоді,

коли відстань між електронними згустками (між їх головами) становить $2\pi/k$. Розглянемо резонансну послідовність з N однорідних електронних згустків з густиною n_b та довжиною l . Повздовжнє електричне поле після них можна записати наступним чином:

$$E_z(\xi) \propto \sum_{i=1}^N \int_{2\pi(i-1)/k}^{l+2\pi(i-1)/k} n_b \cos k(\xi - \xi') d\xi'. \quad (1.3)$$

Інтеграли в (1.3) можуть бути легко обчислені, а тому запишемо одразу результат:

$$E_z(\xi) \propto -\frac{n_b}{k} \sum_{i=1}^N [\sin k(\xi - l) - \sin k\xi]. \quad (1.4)$$

Оскільки поле після одного згустка дорівнює $E_z^{(0)}(\xi) \propto -\frac{n_b}{k} [\sin k(\xi - l) - \sin k\xi]$, то отримуємо наступне:

$$E_z(\xi) = N E_z^{(0)}(\xi). \quad (1.5)$$

Ми отримали, що поле послідовності згустків є просто сумою полів окремих згустків, а отже маємо максимально когерентне додавання полів. Звідси і зрозуміло, чому замість одного великого згустка можна використовувати декілька малих, якщо вони утворюють резонансну послідовність.

Здається, що задача закрыта, і ми змогли отримати максимально можливе повздовжнє електричне поле, яке далі можна використати для прискорення вітнеса. Проте як експериментальні, так і теоретичні дослідження показали, що даний метод призводить до сильного дефокусування згустків з їх подальшою прогресуючою деструкцією [15-17]. Даний ефект можна чітко побачити у наступних результатах числового моделювання, представлених у статті автора [18]. На двох наступних

рисунках представлені кільватерні поля та радіус згустків довжиною $\lambda/2$ резонансної послідовності з 8 згустків у різні моменти часу моделювання (нормалізований струм кожного із згустків становить -0.263×10^{-3}):

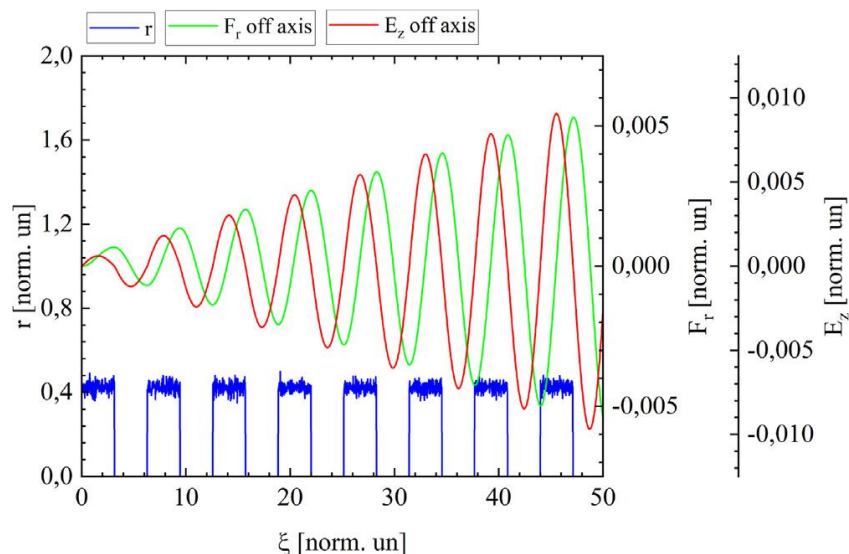


Рисунок 1.4-Кільватерне поле збуджене резонансною послідовністю електронних згустків та їх радіуси. Безрозмірний час $\tau = 3$.

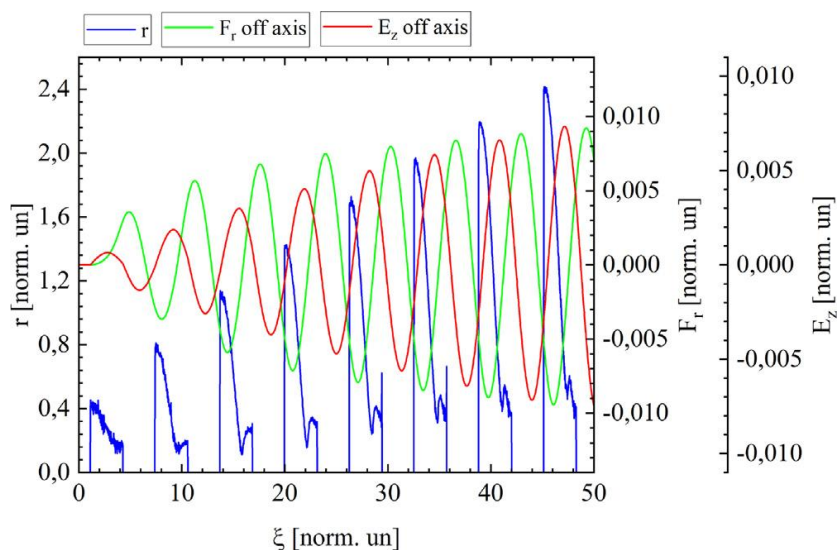


Рисунок 1.5-Кільватерне поле збуджене резонансною послідовністю електронних згустків та їх радіуси. Безрозмірний час $\tau = 60$.

З рис. 1.4 та рис. 1.5 ми бачимо, що всі згустки після другого дефокусуються, і кожен наступний дефокусується сильніше і сильніше. Більш детальне дослідження динаміки дефокусування показує, що даний ефект починається з

дефокусування голови згустків, та поступово прогресує, призводячи до повного дефокусування.

Даний ефект небезпечний тим, що частина електронів починає виходити за межі характерної відстані, на якій поле взаємодіє з електронами згустків, що призводить до зменшення ефективності збудження кільватерного поля. Окрім цього, він призводить до сильної деформації згустків, що унеможлиблює їх використання там, де вимагаються передбачувані та стійкі повздовжні профілі.

У розділі 2 буде обговорено в деталях механізм виникнення описаного вище руйнування та те, як його подолати, проте зараз перейдемо до огляду наступної задачі.

1.3. Формування однорідного повздовжнього електричного поля (утворення плато)

Як вже зазначалося раніше, для збереження енергетичного розкиду згустків та забезпечення ефективного однакового енергетичного обміну електронів згустків з кільватерним полем можна використовувати електронні згустки з певним профілем, який забезпечить формування однорідного повздовжнього електричного поля в усьому об'ємі згустка (формування так званого плато). Дослідження в даному напрямку були представлені у [19-22]. Особливо цікавим є дослідження [22], оскільки в ньому продемонстрована можливість формування плато для одразу декількох драйверів. Даний результат можна побачити на рис. 1.6

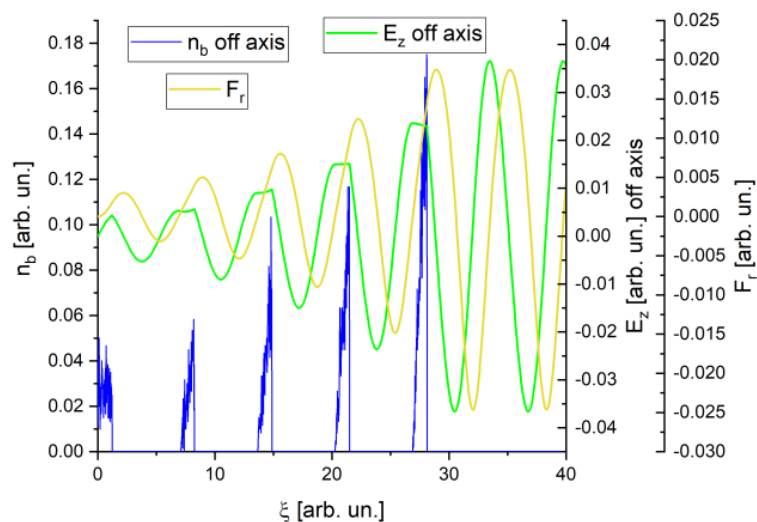


Рисунок 1.6-Збудження кильватерного поля короткими електронними згустками. Синім показаний розподіл густини електронів, зеленим – повздовжнього електричного поля, а жовтим – радіальної сили [22].

Подальший прогрес був зроблений у [23], де було показано, що плато можна досягти не тільки для драйверів, а й для вітнесів. Окрім цього, у даній роботі було проведено дослідження використання так званих пар драйвер-вітнес, та було зроблене припущення про можливість використання таких пар зі збудженням однорідного повздовжнього електричного поля. Приклад такого розташування можна побачити на рис. 1.7.

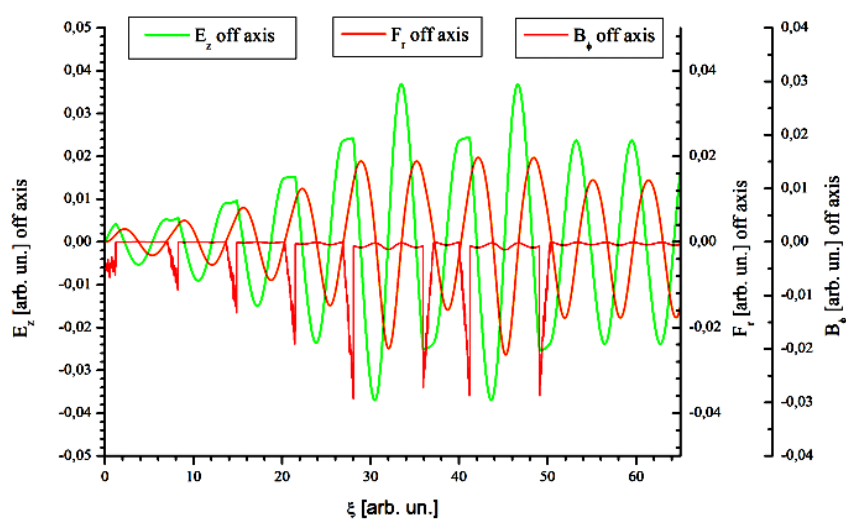


Рисунок 1.7. Збудження кильватерного поля короткою послідовністю драйверів з подальшою послідовністю пар вітнес-драйвер [23].

Окрім цього автори [23] зробили припущення, що таким чином теоретично можливо отримати нескінчену послідовність пар вітнес-драйвер, для кожної з якої відбувається формування плато.

Вказані вище результати були отримані методом підбору струмів та положень згустків, проте виникає питання чи можливо вирахувати аналітично струми та фази згустків, принаймні у лінійному режимі. Саме цьому присвячена друга задача даної дипломної роботи, де проведений детальний аналітичний розгляд, підкріплений результатами чисельного моделювання. У ній буде підтверджена гіпотеза про можливість формування нескінчених послідовностей згустків, проте й буде показано, чому в реальності таку ситуацію реалізувати не можливо.

Проте на даному етапі варто продемонструвати аналітично, чому всі вказані раніше дослідження були побудовані навколо саме трикутних згустків. Для цього розглянемо випадок одного прямокутного драйвера (так званого прекурсора/передвісника) та одного трикутного. Нехай вони мають однакову довжину l та густини n_0 та n_1 . Тут n_0 – густина однорідного прямокутного згустка, а n_1 – максимальна густина трикутного згустка, повздовжній профіль якого є зростаючим трикутником. Нехай відстань між початками згустків становить δ/k , тоді поле всередині трикутного згустка є наступним:

$$E_z(\xi) \propto \int_0^l d\xi' n_0 \cos k(\xi - \xi') + \int_{\delta/k}^{\xi} d\xi' \frac{\xi' - \delta/k}{l} \cos k(\xi - \xi'). \quad (1.6)$$

Вводячи для зручності подальшого розгляду змінну $x = k\xi$, отримуємо наступний вираз:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k} [\sin(kl - x) + \sin x] + \frac{n_1}{k^2 l} [1 - \cos(\delta - x)]. \quad (1.7)$$

Щоб отримати плато в усьому об'ємі згустка, потрібно вимагати наступну умову:

$$\sin(kl - x) + \sin x - \frac{\eta}{kl} \cos(\delta - x) = 0, \quad (1.8)$$

де $\eta = n_1/n_0$.

З лінійної незалежності синуса та косинуса ми отримаємо два рівняння на три невідомих (l , δ та η). Тут і далі ми будемо вважати, що l є фіксованим, а тому маємо дві умови на дві невідомих. Можна отримати наступну умову:

$$\cot \delta = \frac{\sin kl}{1 - \cos kl}. \quad (1.9)$$

Рівняння (1.9) однозначно визначає відстань між згустками, а отже далі можемо знайти відношення їх густин:

$$\eta = \frac{kl \sin kl}{\cos \delta}. \quad (1.10)$$

Отже, ми отримали умови, які пов'язують параметри електронних згустків, за яких є можливим формування плато на прискорюючому/гальмуючому полях.

Цей простий огляд допоміг нам зрозуміти, чому саме трикутні електронні згустки викликають таку цікавість в даному напрямку. У розділі 3 буде проведено детальний аналіз умов на плато для більшої кількості електронних згустків з різними прекурсорами, а також досліджено як впливають отримані умови на їх фокусування.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Даний розділ присвячений огляду актуальності та сучасного стану кільватерних прискорювачів. Були вказані основні переваги та існуючі виклики. Окрім цього, був проведений короткий огляд двох задач, яким присвячена дана дипломна робота, а саме поперечної нестійкості електронних згустків при резонансному збудженні кільватерного поля та формуванню плато профільованою послідовністю профільованих згустків. Даний розділ допомагає зрозуміти стан дослідження кожної із задач, до моменту їх розв'язку автором.

РОЗДІЛ 2. ПОДАВЛЕННЯ ПОПЕРЕЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ ПРИ РЕЗОНАНСНОМУ ЗБУДЖЕННІ КІЛЬВАТЕРНОГО ПОЛЯ

2.1. Механізм виникнення дефокусування

У розділі 1 був розглянутий режим резонансного збудження кільватерного поля послідовністю електронних згустків. При цьому було зазначено, що попри явну перевагу у вигляді когерентного додавання полів, даний метод має серйозний недолік – сильне дефокусування згустків з прогресуючим їх руйнуванням. У даному розділі буде детально обговорено механізм виникнення даного ефекту та те, як його можливо подолати.

Важливою особливістю даного ефекту є прогресуюче руйнування електронних згустків. Можна було б сподіватися, що після дефокусування голови та припинення її взаємодії з кільватерним полем дефокусування завершиться, і решта згустка буде принаймні зберігати свої розміри. Проте експерименти та чисельне моделювання показують протилежну ситуацію – дефокусування починає поширюватися вглиб згустка, спричиняючи його повне руйнування. Виникає логічне питання про те, чому так відбувається. Щоб це зрозуміти, побудуємо просту аналітичну модель, а її результати спробуємо підтвердити результатами числового моделювання.

Розглянемо два резонансні однорідні електронні згустки з довжиною $\lambda/4$ та густиною n_b . Знайдемо фокусуєчу силу (вона нормована на величину заряду, тобто фактично це напруженість фокусуєчого поля) вглибині другого згустка:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - x') dx' + \frac{n_b}{k} \int_0^x \sin(x - x' + 2\pi) dx'. \quad (2.1)$$

Після інтегрування отримуємо наступну фокусуєчу силу:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} (1 - 2 \cos x + \sin x). \quad (2.2)$$

З виразу (2.2) легко переконатися, що при $x = 0$ (голова другого згустка) $F_r < 0$, а враховуючи від'ємний заряд електронів, отримуємо, що голова електронного згустка знаходиться у дефокусуєчому полі. Зміна дефокусування на фокусування відбувається, коли вираз (2.2) дорівнює нулю, що реалізується при $x \approx 0.64$. Далі на основі результатів минулих досліджень зробимо модельне припущення про те, що через певний час голова згустка повністю припиняє взаємодіяти з кільватерним полем, а інша частина згустка ще не встигає сильно змінитися. Знайдемо фокусуєчу силу після того, як передня частина згустка перестає взаємодіяти з кільватерним полем:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - x') dx' + \frac{n_b}{k} \int_{0.64}^x \sin(x - x' + 2\pi) dx'. \quad (2.3)$$

Після інтегрування отримуємо наступне:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} (1 + \sin x - \cos x - \cos(x - 0.64)). \quad (2.4)$$

Але й для нової голови ($x = 0.64$) $F_r < 0$, тобто після відділення попередньої голови, нова передня частина згустка теж знаходиться у дефокусуєчому полі. Аналогічні розрахунки можна провести і, наприклад, для згустків з довжиною $\lambda/2$, де будуть спостерігатися аналогічні результати, але зміна знаку фокусуєчої сили буде відбуватися при $x = 1.23$. Можемо провести загальний розгляд для довільної довжини l/k , який продемонструє універсальність отриманих раніше результатів:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} \int_0^l \sin(x - x') dx' + \frac{n_b}{k} \int_0^x \sin(x - x' + 2\pi) dx'. \quad (2.5)$$

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} (1 - 2 \cos x + \cos(x - l)). \quad (2.6)$$

При $x = 0$ вираз (2.6) є пропорційним до $-1 + \cos l$, який завжди менше або дорівнює нулю. Нуль фокусуючої сили реалізується за наступної координати:

$$x_0 = \pm\pi - \arctan \frac{\sin l}{2 - \cos l} \mp \arccos \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos l}} + 2\pi k, \quad (2.7)$$

де k – ціле число.

Тоді можна отримати наступне:

$$F_r(x) \propto \frac{n_b}{k} (1 - \cos x + \cos(x - l) - \cos(x - x_0)). \quad (2.8)$$

Фокусуюча сила для нової голови згустка:

$$F_r(x_0) \propto \frac{n_b}{k} (\cos(x_0 - l) - \cos x_0). \quad (2.9)$$

Оскільки x_0 задовільняє рівнянню $1 - 2 \cos x_0 + \cos(x_0 - l) = 0$, то можна зробити наступний висновок:

$$F_r(x_0) \propto \frac{n_b}{k} (\cos x_0 - 1). \quad (2.10)$$

Очевидно, що $\cos x_0 - 1 \leq 0$, а тому нова голова електронного згустка теж дефокусується.

Отже, проста аналітична оцінка показує наступне – дефокусуюче кільватерне поле з часом прогресує вглиб електронного згустка. Даний ефект спостерігається також і в результатах числового моделювання (див. рис. 2.1), які були проведені для довжини згустків $\lambda/2$.

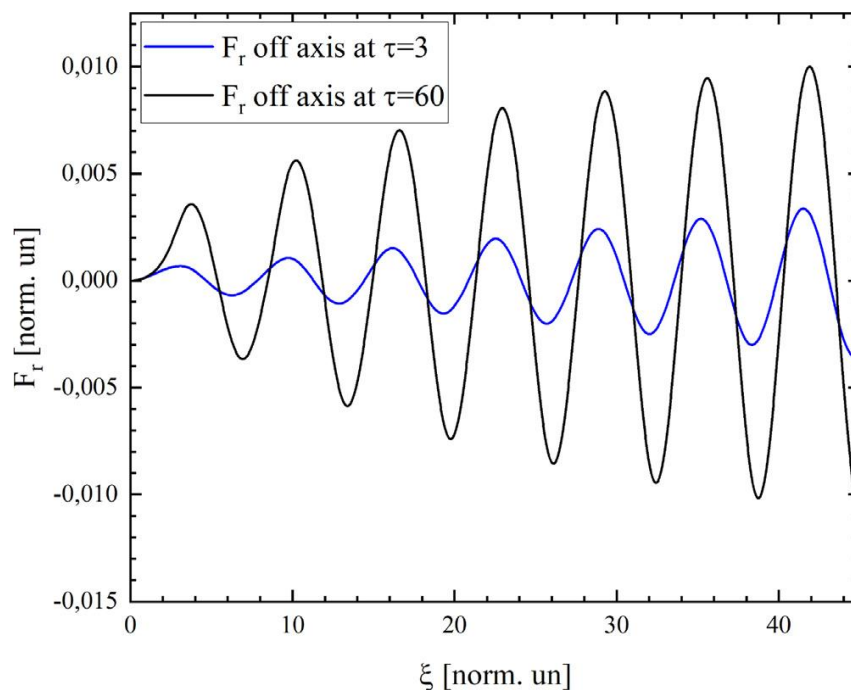


Рисунок 2.1-Повздовжній розподіл радіальної сили $F_r(\xi)$ у моменти часу $\tau = 3$ (синя крива) та $\tau = 60$ (чорна крива) [18].

З рис. 2.1 можна чітко побачити зсув екстремумів фокусуючої сили вглиб згустків, що підтверджує викладені раніше модельні міркування. Таким чином стає повністю зрозумілим механізм прогресуючої деструкції електронних згустків при резонансному збудженні ними кільватерного поля. Саме тому першу частину задачі із пояснення ефекту можна вважати вирішеною.

2.2. Метод усунення нестійкості згустків

Щоб побороти дефокусування та прогресуючу деструкцію, найочевиднішим способом є зсув електронних згустків в область фокусуючого поля. Минулі дослідження [24-27] показали, що стійкість згустку забезпечується тоді, коли виконується наступна умова:

$$\partial_{\xi} F_r(\xi) \neq 0. \quad (2.11)$$

Це означає, що дану нестійкість можна подолати тільки для коротких згустків, які будуть розташовані в області, де фокусуюча сила є монотонною функцією повздовжньої координати.

Як приклад такого зсуву розглянемо вже неоднорідні згустки, а згустки з косинусоподібним профілем, тобто їх густина модульована функцією $\cos k_b \xi$, де $k_b = 5\pi/\lambda$. Довжина таких згустків тоді складатиме лише 0.2λ . Їх просторовий розподіл, та збуджене ними кільватерне поле можна побачити на рис. 2.2 (нормований струм згустків становить -0.52×10^{-2}).

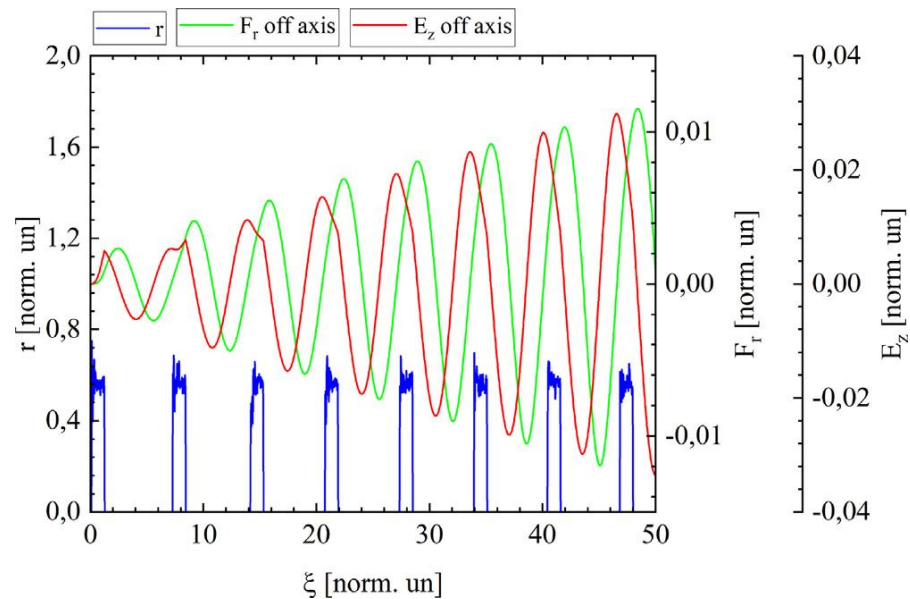


Рисунок 2.2-Збуджене кільватерне поле створене короткими зсунутими косинусоподібними електронними згустками та повздовжній розподіл їх радіусу у початковий момент моделювання $\tau = 3$.

Зміна параметрів згустків відносно попередніх випадків показує, що даний спосіб можна використовувати і для інших розподілів електронів, і для значно більших струмів згустків (нагадаємо, що на рис. 1.4 та рис. 1.5 нормований струм становить -0.263×10^{-3}).

Зсув усіх згустків відносно поточного положення був виконаний так, як вказано у табл. 2.1.

Таблиця 2.1-Зсув електронних згустків відносно початкових положень.

Номер згустка	Зсув, рад
1	0
2	0.885
3	0.61
4	0.31
5	0.31
6	0.31
7	0.21
8	0.11

На рис. 2.1 представлені результати моделювання вже для іншого моменту часу.

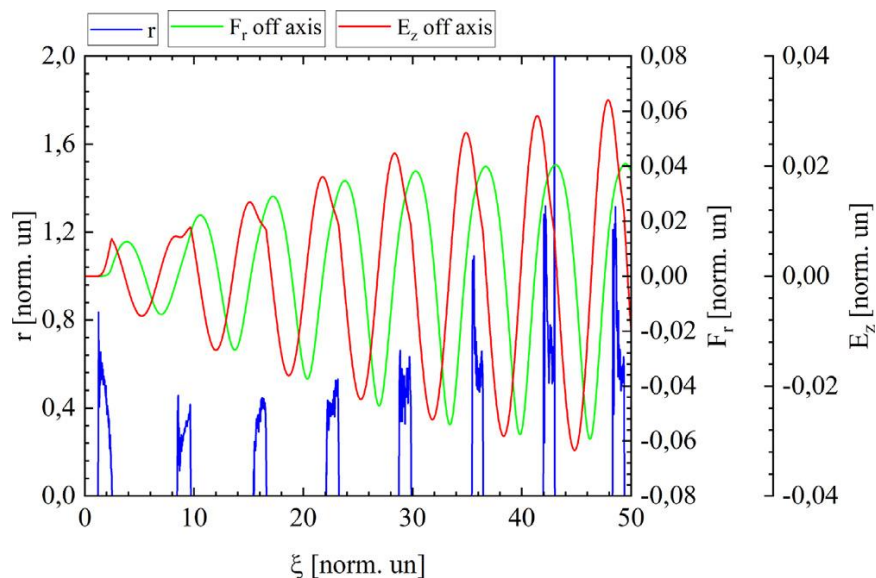


Рисунок 2.3- Збуджене кільватерне поле створене короткими зсунутими косинусоподібними електронними згустками та повздовжній розподіл їх радіусу у момент моделювання $\tau = 60$.

Рис. 2.3 підтверджує можливість пригнічення дефокусування електронних згустків шляхом їх зсуву в область фокусуєчого поля. При цьому форма цих згустків залишилася приблизно такою ж, що й була.

Отримані результати кажуть про те, що даний тип нестійкості згустків можливо побороти, проте при цьому необхідно пожертвувати максимально конструктивною інтерференцією полів. Попри це, кільватерне поле все ще починає зростати, що каже про в цілому задовільний режим прискорення.

Тут ми не будемо детально досліджувати аналітично можливі умови максимальної стійкості згустку, оскільки це буде зроблено в наступній задачі. Попередні дослідження [23] показали, що утворення плато на повздовжньому електричному полі гарантує стійкість електронних згустків, адже виконується те, що з самого початку вони розташовані у фокусуючому полі з виконанням умови $\partial_{\xi} F_r(\xi) \neq 0$. У наступному розділі ми аналітично покажемо, що це не просто збіг, а умови формування плато та умови стійкості згустку є тотожними.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У даному розділі проведено дослідження задачі про дефокусування електронних згустків з їх подальшим прогресуючим руйнуванням при резонансному збудженні кільватерного поля. Було показано, що причиною цього є поширення дефокусуєчого кільватерного поля вглиб електронних згустків. Був запропонований можливий варіант пригнічення цього ефекту – зсув згустків в область неоднорідного фокусуєчого поля. Результати числового моделювання показали, що даний спосіб має місце, і що при цьому не втрачається головна ідея використання послідовності згустків – поступового збільшення амплітуди кільватерного поля.

РОЗДІЛ 3. УТВОРЕННЯ ПЛАТО НА ПОВЗДОВЖНЬОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ ПРОФІЛЬОВАНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ

3.1. Аналітичне дослідження

Дана задача є кульмінацією двох попередніх робіт автора [18, 23], у тому числі й задачі, описаної в розділі 2. Її результати викладені у [28]. Мета цієї задачі полягає в отриманні аналітичних умов для формування плато та те, як вони співвідносяться з умовами стійкості електронних згустків при збудженні кільватерного поля послідовністю згустків.

Почнемо аналітичний розгляд з дослідження двох послідовностей трикутних драйверів – з трикутним та прямокутним прекурсорами.

Розглянемо послідовність з N трикутних електронних згустків (тобто прекурсор в даному випадку теж є трикутним). Усі згустки мають однакову довжину l , відстань між згустками з номерами n та 0 (перший згусток) становить δ_n , а відношення максимальної густини електронів згустка з номером n до густини першого дорівнює $\eta_n = n_n/n_0$.

Розв'язати поставлену задачу, а саме визначити умови на формування плато, при розгляді одразу всіх згустків проблематично, і методично недоцільно, оскільки ми побачимо, що достатньо розглянути лише три згустки, а отже, проведемо розгляд поступово.

Поле після прекурсора визначається наступним чином:

$$E_z(x) \propto \int_0^{kl} dx' n_0 \frac{x'}{k^2 l} \cos(x - x'). \quad (3.1)$$

Після інтегрування отримуємо наступний вираз:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} [\cos(kl - x) - \cos x + kl \sin(kl - x)]. \quad (3.2)$$

Внесок від другого згустка є наступним:

$$E_z(x) \propto \int_{\delta_1}^x dx' n_1 \frac{x' - \delta_1}{k^2 l} \cos(x - x') = \frac{n_1}{k^2 l} [1 - \cos(\delta_1 - x)]. \quad (3.3)$$

Тоді повне повздовжнє електричне поле всередині другого згустка є сумою (3.2) та (3.3):

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} [\cos(kl - x) - \cos x + kl \sin(kl - x)] + \frac{n_1}{k^2 l} [1 - \cos(\delta_1 - x)]. \quad (3.4)$$

Вимагатимемо, щоб поле всередині було однорідним на всій довжині другого згустка, тоді можна записати наступну умову:

$$\cos(kl - x) - \cos x + kl \sin(kl - x) - \eta_1 \cos(\delta_1 - x) = 0. \quad (3.5)$$

Як уже зазначалося у розділі 1, довжина згустків вважається відомою, а тому маємо умову на відстань між ними та відношення їх струмів. З того, що синус та косинус є лінійно незалежними, отримуємо:

$$\begin{cases} \cos kl - 1 + kl \sin kl - \eta_1 \cos \delta_1 = 0, \\ \sin kl - kl \cos kl - \eta_1 \sin \delta_1 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Звідси:

$$\tan \delta_1 = \frac{\sin kl - kl \cos kl}{\cos kl - 1 + kl \sin kl}. \quad (3.7)$$

Тепер, коли δ_1 відома, то можна і записати нормовану густину:

$$\eta_1 = \frac{\sin kl - kl \cos kl}{\sin \delta_1}. \quad (3.8)$$

Отже, були отримані умови формування плато для двох трикутних згустків (зрозуміло, що однорідне електричне поле збуджується тільки всередині другого електронного згустка). Тепер розглянемо умову стійкості згустку. Радіальна сила після прекурсора є наступною:

$$F_r(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} [kl \cos(kl - x) - \sin(kl - x) - \sin x]. \quad (3.9)$$

І всередині другого згустка:

$$F_r(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} [kl \cos(kl - x) - \sin(kl - x) - \sin x - \eta_1 \delta_1 + \eta_1 x + \eta_1 \sin(\delta_1 - x)]. \quad (3.10)$$

У голові другого згустка вимагаємо рівність нулю радіальної сили, тобто $F_r(x = \delta_1) = 0$. Тоді:

$$kl \cos(kl - \delta_1) - \sin(kl - \delta_1) - \sin \delta_1 = 0. \quad (3.11)$$

Після використання тригонометричних формул, отримуємо:

$$\tan \delta_1 = \frac{\sin kl - kl \cos kl}{\cos kl - 1 + kl \sin kl}. \quad (3.12)$$

Умови (3.7) та (3.12) є повністю тотожними. Це означає, що формування однорідного електричного поля всередині електронного згустка та його стійкість

відбуваються одночасно. Отримані вище умови не зовсім є однозначними, оскільки умова накладається на сам тангенс фази, що означає нескінчену кількість розв'язків з періодом π . Проте з (3.8) зрозуміло, що нас влаштовують тільки розв'язки з парною кількістю періодів. Інакше нормована густина стає від'ємною, що фізично свідчить про прискорення позитронів, а не електронів, що в умовах нашої задачі є нефізичним. Простою побудовою графіка (3.10) за відповідного значення δ_1 можна переконатися у додатності радіальної сили, що свідчить про власне фокусування, при чому сила не має екстремумів, що задовольняє вказаній раніше умові $\partial_\xi F_r(\xi) \neq 0$ (див. рис. 3.1)

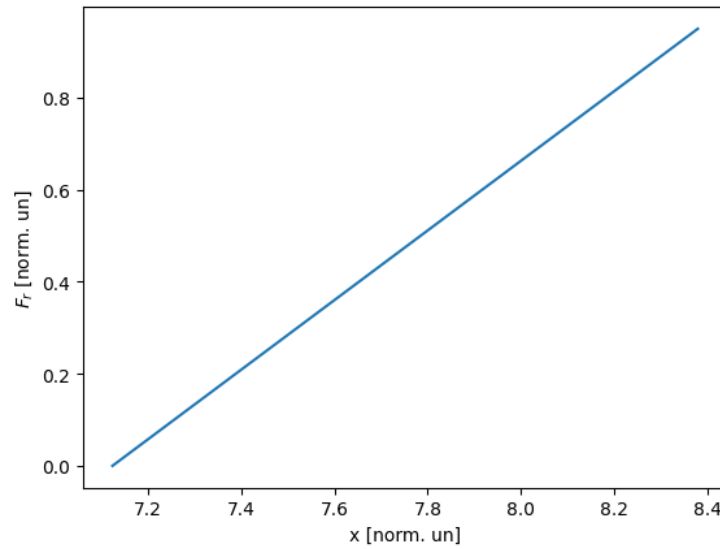


Рисунок 3.1-Залежність радіальної сили в глибині другого згустка. Довжина згустка $l = 0.2\lambda$, обчислені параметри становлять $\delta_1 = 7.12344$ та $\eta_1 = 0.755538$.

Тепер, коли необхідні умови для двох електронних згустків визначені, можна перейти до довільної (звичайно, більшої двох) кількості. Запишемо внесок у повздовжнє електричне поле після другого згустка від власне нього:

$$E_z(x) \propto \int_{\delta_1}^{\delta_1+kl} dx' n_1 \frac{x' - \delta}{k^2 l} \cos(x - x'). \quad (3.13)$$

Обчисливши (3.13), підставивши (3.2) та використавши умову (3.5), отримуємо повздовжнє електричне поле після другого згустка:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_1 [\cos(\delta_1 + kl - x) + kl \sin(\delta_1 + kl - x)]. \quad (3.14)$$

Внесок у поле всередині третього згустка від нього самого є наступним:

$$E_z(x) \propto \int_{\delta_2}^x dx' n_2 \frac{x' - \delta_2}{k^2 l} \cos(x - x') = \frac{n_2}{k^2 l} [1 - \cos(\delta_2 - x)]. \quad (3.15)$$

Повторюючи всі попередні дії, отримуємо:

$$\begin{cases} \tan \delta_2 = \frac{\tan(kl + \delta_1) - kl}{1 + kl \tan(kl + \delta_1)}, \\ \eta_2 = \eta_1 \frac{\sin(kl + \delta_1) - kl \cos(kl + \delta_1)}{\sin \delta_2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Поле після третього згустка, з урахуванням умови (3.16) є наступним:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_2 [\cos(\delta_2 + kl - x) + kl \sin(\delta_2 + kl - x)]. \quad (3.17)$$

Це означає, що у випадку $m + 1$ електронного згустка повздовжнє електричне поле матиме наступний вигляд:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_m [\cos(\delta_m + kl - x) + kl \sin(\delta_m + kl - x)]. \quad (3.18)$$

Це дозволяє в решті-решт отримати умови на формування плато для довільної (більше двох) кількості електронних згустків:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \delta_1 = \frac{\sin kl - kl \cos kl}{\cos kl - 1 + kl \sin kl}, \delta_0 = 0, \\ \tan \delta_{m>1} = \frac{\tan(kl + \delta_{m-1}) - kl}{1 + kl \tan(kl + \delta_{m-1})}, \\ \eta_m = \eta_{m-1} \frac{\sin(kl + \delta_{m-1}) - kl \cos(kl + \delta_{m-1})}{\sin \delta_m}, \eta_0 = 1. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Проводячи аналогічний розгляд до випадку двох трикутних згустків, отримаємо, що умовами стійкості третього та наступних електронних згустків є власне умови (3.19), що означає, що за умови формування однорідного електричного поля в об'ємі згустка, будуть автоматично реалізовуватися умови стійкості згустку.

Розгляд послідовності з прямокутним прекурсором показує аналогічні результати (збіг умов на плато та стійкості згустку), а також вирази, подібні до (3.19), де єдиною відмінністю є унікальні умови на δ_1 та η_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \delta_1 = \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}, \delta_0 = 0, \\ \tan \delta_{m>1} = \frac{\tan(kl + \delta_{m-1}) - kl}{1 + kl \tan(kl + \delta_{m-1})}, \\ \eta_1 = \frac{kl(1 - \cos kl)}{\sin \delta_1} \\ \eta_m = \eta_{m-1} \frac{\sin(kl + \delta_{m-1}) - kl \cos(kl + \delta_{m-1})}{\sin \delta_m}, \eta_0 = 1. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Схожість умов (3.19) та (3.20) дозволяє зробити важливе припущення – умови формування плато припиняють залежати від форми прекурсора вже для третього згустка. Попри це, деякі відмінності між такими послідовностями є. Для згустків з довжиною $l = 0.2\lambda$ у послідовності з трикутним прекурсором $\eta_1 = 0.755538$, а з прямокутним – $\eta_1 = 1.477265$. І в принципі, як покажуть результати числових розрахунків – послідовність з прямокутним прекурсором здатна забезпечити електричне поле з амплітудою майже у два рази більшою у порівнянні з

послідовністю з трикутним прекурсором. Проте звичайно важливо враховувати питання практичного отримання таких послідовностей.

До цього моменту ми розглядали електронні згустки, які виконували функцію драйверів, тобто саме вони збуджують кільватерне поле. Проте звичайно виникає питання про вітнеси. У нашому підході вітнеси теж мають трикутну форму, проте якщо густина електронів у драйверах лінійно зростала вздовж згустка, то у вітнесах вона лінійно зменшується від деякого максимального значення до нуля. Якщо згустки від 0 до N були драйверами, то вже $N + 1$ згусток є вітнесом, а тому для нього можна записати наступне:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_N [\cos(\delta_N + kl - x) + kl \sin(\delta_N + kl - x)] + \frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N+1} \int_{\delta_{N+1}}^x dx' (kl - (x' - \delta_{N+1})) \cos(x - x'). \quad (3.21)$$

Після інтегрування отримуємо наступне:

$$E_z(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_N [\cos(\delta_N + kl - x) + kl \sin(\delta_N + kl - x)] - \frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N+1} (1 - \cos(\delta_{N+1} - x)) - \frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N+1} kl \sin(\delta_{N+1} - x). \quad (3.22)$$

Умова на формування плато всередині вітнеса є наступною:

$$\eta_N [\cos(\delta_N + kl - x) + kl \sin(\delta_N + kl - x)] + \eta_{N+1} \cos(\delta_{N+1} - x) - \eta_{N+1} kl \sin(\delta_{N+1} - x) = 0. \quad (3.23)$$

Маємо такі умови:

$$\begin{cases} \cos(\delta_N + kl) + kl \sin(\delta_N + kl) + \frac{\eta_{N+1}}{\eta_N} (\cos \delta_{N+1} - kl \sin \delta_{N+1}) = 0, \\ \sin(\delta_N + kl) - kl \cos(\delta_N + kl) + \frac{\eta_{N+1}}{\eta_N} (kl \cos \delta_{N+1} - \sin \delta_{N+1}) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Звідси отримуємо наступну умову на δ_{N+1} :

$$\tan \delta_{N+1} = \frac{(1 - k^2 l^2) \tan(kl + \delta_N) - 2kl}{1 - k^2 l^2 + 2kl \tan(kl + \delta_N)}. \quad (3.25)$$

Подальші чисельні розрахунки покажуть, що амплітуда густини вітнеса дорівнює амплітуді густини драйвера перед ним. Переконаємося в цьому аналітично. Для спрощення виразів, введемо позначення $a = kl$ та $b = kl + \delta_N$, тоді (3.25) має наступний вигляд:

$$\tan \delta_{N+1} = \frac{(1 - a^2) \tan b - 2a}{1 - a^2 + 2a \tan b}. \quad (3.26)$$

З (3.26) можна записати наступне:

$$\begin{cases} \sin \delta_{N+1} = \pm \frac{(1 - a^2) \sin b - 2a \cos b}{1 + a^2}, \\ \cos \delta_{N+1} = \pm \frac{(1 - a^2) \cos b + 2a \sin b}{1 + a^2}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Підставимо (3.27) у перше рівняння (3.24). При чому дуже важливо обрати саме мінуси:

$$\begin{aligned} & \cos b + a \sin b \\ & - \frac{\eta_{N+1}}{\eta_N} \left(\frac{(1 - a^2) \cos b + 2a \sin b}{1 + a^2} \right. \\ & \left. - a \frac{(1 - a^2) \sin b - 2a \cos b}{1 + a^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Після деяких спрощень отримуємо:

$$\cos b + a \sin b - \frac{\eta_{N+1}}{\eta_N} (\cos b + a \sin b) = 0. \quad (3.29)$$

Вибір конкретного знаку необхідний для того, щоб обрати саме відношення $\eta_{N+1}/\eta_N = 1$ (а не $\eta_{N+1}/\eta_N = -1$), оскільки у цій роботі розглядаються виключно електронні згустки. Отже, факт рівності зарядів вітнеса та драйвера перед ним доведений.

Проте на цьому цікаві результати не закінчуються. Знайдемо поле після вітнеса. З урахуванням умови на плато, отримуємо:

$$E_z(x) \propto -\frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N+1} \cos(\delta_{N+1} + kl - x). \quad (3.30)$$

Нас цікавлять амплітуди полів до та після вітнеса. Наведемо ще раз вирази для полів:

$$\begin{cases} E_z^{(before)}(x) \propto \frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N-1} [\cos(\delta_{N-1} + kl - x) + kl \sin(\delta_{N-1} + kl - x)], \\ E_z^{(after)}(x) \propto -\frac{n_0}{k^2 l} \eta_{N+1} \cos(\delta_{N+1} + kl - x). \end{cases} \quad (3.31)$$

Нас цікавлять амплітуди:

$$\begin{cases} E_z^{(before)} \propto \eta_{N-1} \sqrt{1 + k^2 l^2}, \\ E_z^{(after)} \propto \eta_{N+1}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Знайдемо їх відношення:

$$K = \frac{\eta_{N+1}}{\eta_{N-1} \sqrt{1 + k^2 l^2}}. \quad (3.33)$$

Ми вже показали, що $\eta_{N+1} = \eta_N$. Тепер нам потрібно визначити відношення η_N/η_{N-1} . Воно є наступним:

$$\eta_N = \eta_{N-1} \frac{\sin(kl + \delta_{N-1}) - kl \cos(kl + \delta_{N-1})}{\sin \delta_N}. \quad (3.34)$$

Тут припускається, що вітнес розташований після мінімум другого драйвера (але в реальних умовах застосування послідовності електронних згустків, зрозуміло, що їх більше). Пригадаємо умову формування плато:

$$\tan \delta_N = \frac{\tan(kl + \delta_{N-1}) - kl}{1 + kl \tan(kl + \delta_{N-1})}. \quad (3.35)$$

З (3.35) отримуємо:

$$\begin{cases} \sin \delta_N = \pm \frac{\sin(kl + \delta_{N-1}) - kl \cos(kl + \delta_{N-1})}{\sqrt{1 + k^2 l^2}}, \\ \cos \delta_N = \pm \frac{\cos(kl + \delta_{N-1}) + kl \sin(kl + \delta_{N-1})}{\sqrt{1 + k^2 l^2}}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Обираючи потрібний знак, отримуємо:

$$\eta_N = \eta_{N-1} \sqrt{1 + k^2 l^2}. \quad (3.37)$$

Підставляючи (3.37) у (3.33), отримуємо наступний результат:

$$K = 1. \quad (3.38)$$

Вираз (3.38) означає, що амплітуда поля після вітнеса дорівнює амплітуді поля після передостаннього драйвера. Окрім цього, було отримано, що відношення максимальної густини заряду та, відповідно, амплітуди поля для драйверів після другого становить $\sqrt{1 + k^2 l^2}$, тобто визначається виключно довжиною електронних згустків. Тобто для формування плато використовуються не просто електронні згустки особливої форми (трикутної), а й сама послідовність (окрім перших згустків) теж має особливу форму, тому можна й казати про профільовану послідовність електронних згустків.

Отримані результати дозволяють стверджувати, що чисто теоретично можливо досягти нескінчених (або як мінімум дуже довгих) послідовностей електронних згустків, де початкові драйвери збуджують кільватерне поле, яке далі підтримують та використовують пари вітнес-драйвер. Можливість цього можна буде побачити далі, хоча в реальності цього досягти не можливо. Причини цього будуть розглянуті наприкінці цього розділу.

3.2. Порівняння із результатами чисельного моделювання

Тепер, коли аналітично були отримані параметри електронних згустків профільованої послідовності, для якої забезпечується збудження однорідного повздовжнього електричного поля та реалізується стійкість згустків, можна перевірити отримані результати методами чисельного моделювання. Для цього розглянемо електронні згустки довжиною $l = 0.2\lambda$ з нормованим струмом першого згустка -2×10^{-3} , де мінус вказує, що це електрони, а не позитрони.

Почнемо перевірку просто з послідовності драйверів. У табл. 3.1 та табл. 3.2 наведені параметри п'яти драйверів, які задовольняють умовам формування плато для двох розглянутих раніше прекурсорів – трикутного та прямокутного.

Таблиця 3.1-Параметри драйверів з трикутним прекурсором.

n	Δ_n	η_n	η_n/η_{n-1}
0	-	1	-
1	5.866803	0.755538	0.755538
2	5.384548	1.213370	1.606
3	5.384548	1.948635	1.606
4	5.384548	3.129447	1.606

Тут і далі $\Delta_n = \delta_n - \delta_{n-1}$.

Таблиця 3.2-Параметри драйверів з прямокутним прекурсором.

n	Δ_n	η_n	η_n/η_{n-1}
0	-	1	-
1	5.654867	1.477265	1.477265
2	5.384548	2.372443	1.606
3	5.384548	3.810070	1.606
4	5.384548	6.118854	1.606

Результати числового моделювання з використанням Particle-in-cell симуляції можна побачити на рис. 3.2 та рис. 3.3.

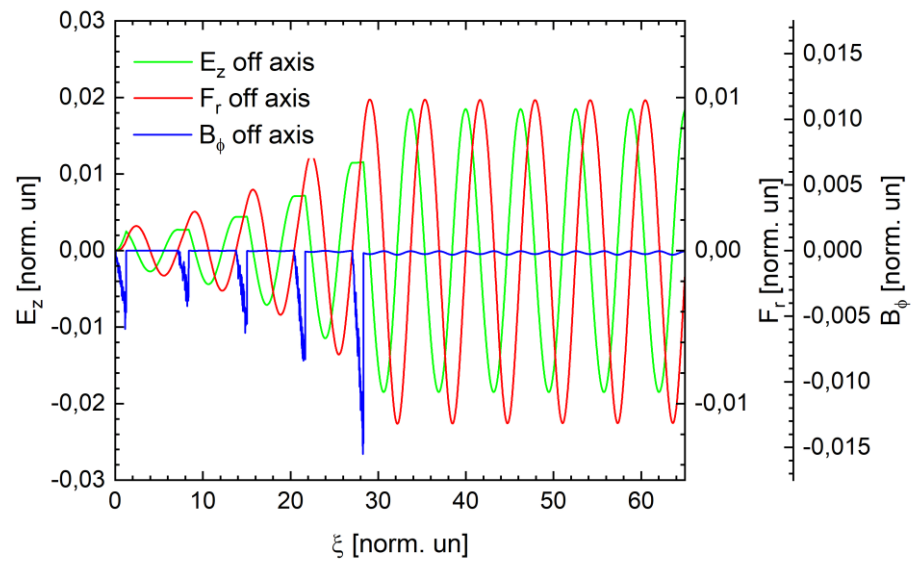


Рисунок 3.2. Розподіл електричного повздовжнього поля, радіальної сили та азимутального магнітного поля для послідовності з п'яти драйверів із трикутним прекурсором та параметрами, вказаними у табл. 3.1.

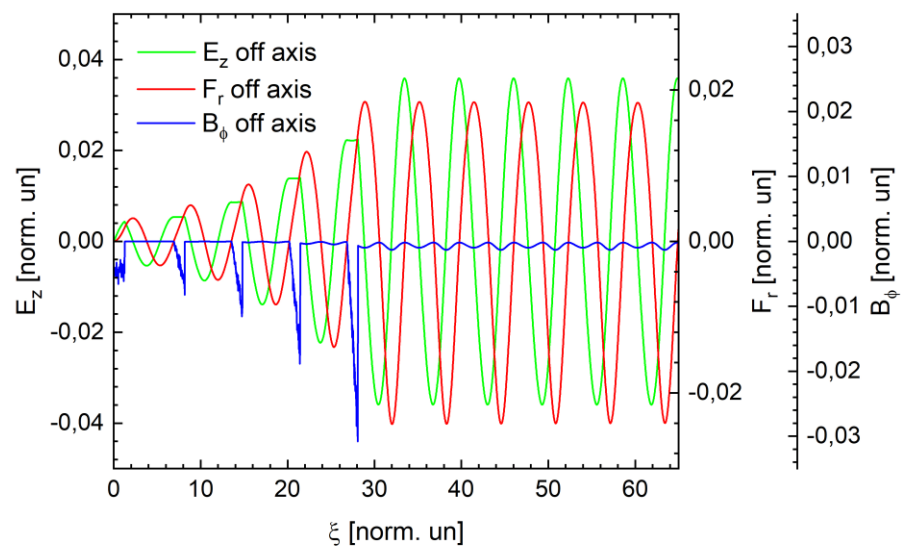


Рисунок 3.3. Розподіл електричного повздовжнього поля, радіальної сили та азимутального магнітного поля для послідовності з п'яти драйверів із прямокутним прекурсором та параметрами, вказаними у табл. 3.2.

Оскільки електронні згустки ультрарелятивістські, то розподіл азимутального магнітного поля вказує на розподіл заряду згустків. Звідси видно, чому ці згустки були названі трикутними.

Тепер розглянемо послідовність згустків із парою вітнес-драйвер. Для визначеності розглянемо тільки послідовність з трикутним прекурсором. Параметри такої послідовності наведені у табл. 3.3.

Таблиця 3.3-Параметри послідовності із парою вітнес-драйвер.

Тип	Δ_n	η_n
драйвер	-	1
драйвер	5.866803	0.755538
драйвер	5.384548	1.213370
драйвер	5.384548	1.948635
вітнес	5.384548	1.948635
драйвер	3.141593	1.948635

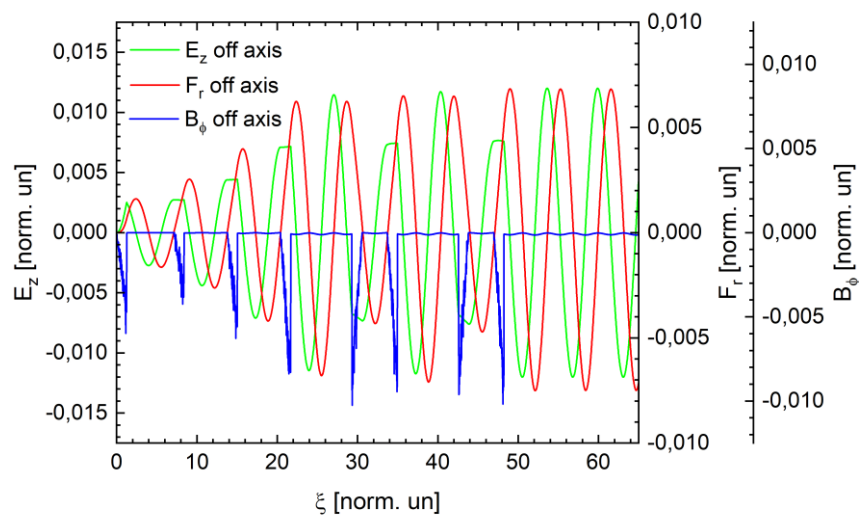


Рисунок 3.4. Розподіл електричного повздовжнього поля, радіальної сили та азимутального магнітного поля для послідовності з чотирьох драйверів із трикутним прекурсором, двома парами вітнес-драйвер та параметрами, вказаними у табл. 3.3.

На рис. 3.4 представлений розподіл полів для послідовності з чотирьох драйверів з трикутним прекурсором та двома парами вітнес-драйвер. Варто відзначити, що аналітично були прораховані параметри тільки першої пари, а наступна пара має ідентичні параметри до першої. З рис. 3.4 можна побачити, що отримані раніше аналітичні умови формування плато дійсно виконуються (можна побачити невеликі відхилення через неточність чисельного моделювання). Це підтверджує раніше вказану тезу – чисто теоретично можливо отримати довгу послідовність електронних згустків з парами вітнес-драйвер, які дозволяють реалізувати довгий та стійкий процес роботи кільватерного прискорювача.

3.3. Вплив рухливості йонів на формування плато

Попри неймовірні отримані результати у попередньому розділі, чисельне моделювання показує, що отримати довгу послідовність електронних згустків неможливо. І причиною цього є врахування рухливості йонів. Як найбільш яскравий приклад розглянемо атомарний водень (його йони є найлегшими можливими йонами, маса яких становить 1836 мас електрона).

На рис. 3.5 представлені результати моделювання для послідовності, представленої на рис. 3.4 та у табл. 3.3, проте з урахуванням рухливості йонів. Можна побачити, що вже навіть для перших драйверів плато перестає бути ідеальним. Далі ця ситуація прогресує. Проте навіть у цьому випадку можна побачити, що зміна повздовжнього електричного поля на довжині згустка є доволі малою. Такі результати відповідають випадку не точного підбору параметрів електронних згустків (див. рис. 1.7).

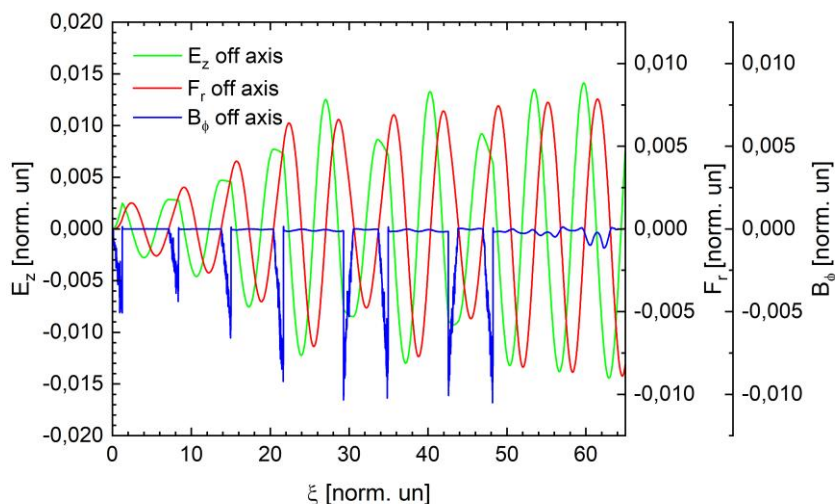


Рисунок 3.5. Розподіл електричного повздовжнього поля, радіальної сили та азимутального магнітного поля для послідовності з чотирьох драйверів із трикутним прекурсором, двома парами вітнес-драйвер та параметрами, вказаними у табл. 3.3 з урахуванням рухливості йонів.

Чисто теоретично можна спробувати отримати поправки до отриманих вище формул, щоб отримати ідеальні плато навіть у випадку рухливості йонів. Проте виникає питання наскільки це просто та доцільно робити аналітично. Тут можна запропонувати використання алгоритмів машинного навчання, які допоможуть визначати необхідні поправки, можливо, навіть у слабо нелінійному режимі, проте виникає інше питання – наскільки можливо реалізувати такі профільовані послідовності за допомогою існуючих лінійних прискорювачів чи лазерів. Це питання залишається наразі відкритим.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У даному розділі була розглянута задача формування однорідного електричного повздовжнього поля (плато) для трикутних згустків, що формують профільовану послідовність. Було отримано аналітичні умови на формування плато та показано, що формуванню плато відповідає умова стійкого фокусування електронних згустків. Були отримані цікаві висновки про можливість формування довгих послідовностей електронних згустків. Результати чисельного моделювання підтвердили отримані аналітично результати. Наостанок було досліджено вплив рухливості йонів плазми, що накладає обмеження на можливість формування довгих послідовностей.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було проведено дослідження збудження кільватерного поля послідовністю електронних згустків з малими струмами. Були досліджені два випадки – збудження резонансною послідовністю, що призводить до прогресуючого руйнування згустків внаслідок їх фокусування, а також збудження профільованою послідовністю трикутних згустків, що дозволяє утворювати однорідне повздовжнє електричне поле. Результати першої задачі показали, що прогресуюче дефокусування спричинене зсувом дефокуруючого поля вглиб згустка з плином часу, а можливим розв’язком даної проблеми є зсув електронних згустків в повністю фокусує поле. Розв’язок другої задачі допоміг отримати аналітичні умови формування плато на повздовжньому електричному полі, правильність яких була підтверджена за допомогою РІС-моделювання. Було показано, що у даному випадку електронні згустки знаходяться у повністю фокусує полі, при чому виконуються сформовані раніше умови стійкого фокусування. Наостанок було досліджено вплив рухливості йонів плазми на формування плато, що дозволило зрозуміти обмеження для даного методу збудження кільватерного поля.

Отримані у даній роботі результати були опубліковані автором у наступних роботах [10], [18], [23] та [28].

Автор даної роботи висловлює подяку науковому співробітнику Deutsches Elektronen Synchrotron Маслоу Василю Івановичу за неоціненний та вагомий внесок в дану роботу в якості наукового консультанта та в якості співавтора публікацій, опублікованих за матеріалами даної дипломної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Cuttone G. Applications of particle accelerators in medical physics. XLVIII International Winter Meeting on Nuclear Physics in Memoriam of Ileana Iori (Bormio, Italy, 25 Jan. 2010). Trieste, 2010. URL: <https://doi.org/10.22323/1.103.0057>
2. Kutsaev S. V. Advanced Technologies for Applied Particle Accelerators and Examples of Their Use (Review). Technical Physics. 2021. T. 66, № 2. C. 161–195. URL: <https://doi.org/10.1134/s1063784221020158>
3. The Future Circular Collider : website. CERN. URL: <https://home.cern/science/accelerators/future-circular-collider> (date of access: 20.02.2026).
4. Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. Reviews of Modern Physics. 2009. T. 81, № 3. C. 1229–1285. URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.81.1229>
5. Osterhoff J. Principles of Plasma Accelerators : presentation. 2023. URL: <https://indico.desy.de/event/37353/contributions/135119/attachments/80321/104931/2023-02-22%20%7C%20Hamburg.pdf> (date of access: 20.02.2026).
6. Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime / W. P. Leemans et al. Physical Review Letters. 2014. T. 113, № 24. 245002. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.245002>
7. Petawatt Laser Guiding and Electron Beam Acceleration to 8 GeV in a Laser-Heated Capillary Discharge Waveguide / A. J. Gonsalves et al. Physical Review Letters. 2019. T. 122, № 8. 084801. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.084801>
8. Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator / I. Blumenfeld et al. Nature. 2007. T. 445, № 7129. C. 741–744. URL: <https://doi.org/10.1038/nature05538>
9. High-efficiency acceleration of an electron beam in a plasma wakefield accelerator / M. Litos et al. Nature. 2014. T. 515, № 7525. C. 92–95. URL: <https://doi.org/10.1038/nature13882>

10. Demydenko I. V., Maslov V. I. Passive Plasma Lens, Reducing Energy Spread of Gaussian-Kind Bunches. Problems of Atomic Science and Technology. 2024. № 3 (151). C. 67–72. URL: <https://doi.org/10.46813/2024-151-067>

11. Beam Loading in the Nonlinear Regime of Plasma-Based Acceleration / M. Tzoufras et al. Physical Review Letters. 2008. T. 101, № 14. 145002. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.145002>

12. Fainberg Ya. B., Ayzatskiy M., Balakirev V. et al. Focusing of relativistic electron bunches at the wakefield excitation in plasma. Proc. Part. Accel. Conf. (PAC'97) (Vancouver, Canada, May 1997). 1997. Vol. II. P. 651–653.

13. I. P. Levchuk, Maslov V. I., Onishchenko I. N. Transformation ratio at wakefield excitation in dielectric resonator by sequence of rectangular electron bunches with linear growth of charge. Problems of Atomic Science and Technology. 2014. № 3. P. 95–98. URL: https://vant.kipt.kharkov.ua/ARTICLE/VANT_2017_6/article_2017_6_43.pdf

14. Maslov V. I., Onishchenko I. N., Yarovaya I. P. Fields excited and providing a uniform focusing of short relativistic electron bunches in plasma. East European Journal of Physics. 2014. Vol. 1, no. 2. P. 92–95. URL: <https://periodicals.karazin.ua/eejp/article/view/134>

15. Wakefield excitation in plasma by relativistic electron beam, consisting regular chain of short bunches / A. K. Berezin et al. Fizika Plazmy. 1994. Vol. 20, no. 7–8. P. 663–670.

16. Experiments on resonator concept of plasma wakefield accelerator driven by a train of relativistic electron bunches / V. A. Kiselev et al. Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma Electronics and New Methods of Acceleration. 2008. № 6 (41). P. 73–76. URL: http://vant.kipt.kharkov.ua/ARTICLE/VANT_2008_4/article_2008_4_73.pdf

17. Maslov V. I., Onishchenko I. N., Yarovaya I. P. Plasma wakefield excitation providing homogeneous focusing of electron bunches. Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 1. P. 134. URL: http://vant.kipt.kharkov.ua/ARTICLE/VANT_2013_1/article_2013_1_134.pdf

18. Demydenko I. V., Maslov V. I., Onishchenko I. M. Suppression of bunch destruction under resonant excitation of the plasma wakefield. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A. 2026. Vol. 1081. 170851. URL: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2025.170851>

19. Romeo S., Ferrario M., Rossi A. R. Beam loading assisted matching scheme for high quality plasma acceleration in linear regime. Physical Review Accelerators and Beams. 2020. Vol. 23. 071301. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.071301>

20. Beam Loading in Plasma Accelerators / T. Katsouleas et al. Particle Accelerators. 1987. Vol. 22. P. 81–99. URL: <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-3/30e3b8e467eb7298ce19d6bbc95b457f>

21. Numerical Simulation of Plateau Formation by an Electron Bunch on the Distribution of an Accelerating Wakefield in a Plasma / V. I. Maslov et al. Problems of Atomic Science and Technology. 2020. № 6. P. 47. URL: <https://doi.org/10.46813/2020-130-047>

22. Plateau Formation on Accelerating Wakefield for Electron-Witness-Bunch and on Decelerating Wakefield for Driver-Bunches in a Plasma / V. I. Maslov et al. Problems of Atomic Science and Technology. 2021. № 6 (136). P. 52. URL: <https://doi.org/10.46813/2021-136-052>

23. Demydenko I. V., Maslov V. I. Identical Decelerating Wakefields for Driver-Bunches and Identical Accelerating Wakefields for Witness-Bunches for Their Periodic Sequence. Problems of Atomic Science and Technology. 2023. № 3 (145). P. 108–111. URL: <https://doi.org/10.46813/2023-145-108>

24. Hosing instability in the blow-out regime for plasma-wakefield acceleration / C. Huang et al. Physical Review Letters. 2007. T. 99. 255001. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.255001>

25. Mitigation of the hose instability in plasma-wakefield accelerators / T. J. Mehrling et al. Physical Review Letters. 2017. T. 118. 174801. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.174801>

26. Martinez de la Ossa A., Mehrling T. J., Osterhoff J. Intrinsic Stabilization of the Drive Beam in Plasma-Wakefield Accelerators. *Physical Review Letters*. 2018. T. 121. 064803. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.064803>

27. Towards experimental investigation of hosing instability mitigation at the PITZ facility / G. Loisch et al. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1596. 012003. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1596/1/012003>

28. Demydenko I. V., Maslov V. I. Electron Acceleration by a Wakefield Excited in Plasma by a Profiled Train of Bunches Under Conditions of Their Greatest Stability and a Plateau on the Wakefield. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2026. Vol. 54, no. 1. P. 117–120. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/11291125>